Дорогой Борис,

спасибо за статью, которую привез Израйлев. К сожалению, он так спешил, что я не мог с ним обсудить результаты. Вот несколько моих замечаний — вероятно, не новых для авторов, но в статье это не отражено.

1. Преобразование (1.1) каноническое (сохраняет $\sum dp_i \wedge dx_i$) — это важно отметить, т.к. неканоническая дискретная аппроксимация гамильтоновой системы может иметь совсем другие свойства.

2. Сила (1.5) негладкая, поэтому результаты об инвариантных торах для системы (1.1) не доказаны, и даже в одномерном случае неясно, как обстоит дело. Правда, если оба числа T_1 и T_2 соизмеримы с шагом ($dt=1$), то некоторая степень преобразования (1.1) уже удовлетворяет условиям теоремы о торах.

Негладкость — существенное условие: построены примеры C^1-(один раз непрерывно дифференцируемых) отображений плоскости, сохраняющих площадь и не имеющих инвариантных кривых (хотя обычные условия „твиста" выполнены): см. Takens F., A C^1-counterexample to Moser's twist theorem, Indag. Math. 33, 379–386 (1971).

3. Фактическое число частот в рассмотренной задаче 5 (2 частоты осцилляторов, 2 внешних и частота, возникающая от шага по времени). Между тем, резонансы, связанные с последней частотой нигде не учитываются (например, Ω_i соизмеримые с 2π могут давать резонансные явления и т.п.) — насколько я понял, всё что связано с этой частотой объявляется „фоном".

Мне казалось, что этот „фон" сам по себе должен давать диффузию, ~~при~~ уже при $f_{0i} \equiv 0$ (т.е. без внешних частот Ω_i). Крайнее левое звено графика на рис. 4

выглядит в этом смысле обнадеживающе.

Я понимаю, что, вероятно, счет при $f_0=0$ дает слишком слабую диффузию и экстраполировать рис. 2 до $f_0=0$ не следует. Но м.б. можно как-либо увеличить „фон", не вводя внешних сил? Дело в том, что очень бы хотелось ~~заменить пилу син~~ избавиться от пилы — например, заменив её синусоидой, — но, вероятно, для этого нужно сильно удлинить каждый цикл счета? Впрочем, может быть сильного удлинения и не произойдет, если вычислять не $f_i(t)=f_{0i}\sin\Omega_i t$, а компоненту вектора $A^n\xi$, где $A=\begin{pmatrix}\cos\Omega_i & \sin\Omega_i\\ -\sin\Omega_i & \cos\Omega_i\end{pmatrix}$ — <u>постоянная</u> матрица, так что фактически на каждом цикле вычисляется

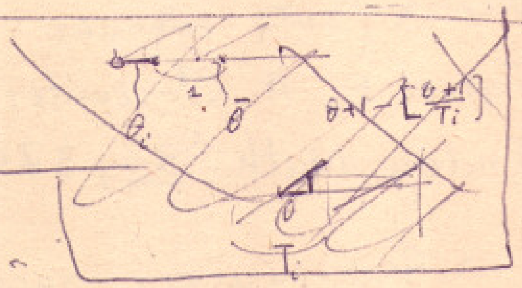
$$\bar\xi_{1i}=(\cos\Omega_i)\xi_{1i}+(\sin\Omega_i)\xi_{2i}, \quad \bar\xi_{2i}=(-\sin\Omega_i)\xi_{1i}+(\cos\Omega_i)\xi_{2i}$$

$$f_i(t)=f_{0i}\bar\xi_{2i}$$

вместо

$$\cancel{\bar\theta_{0i}=\theta_{0i}+1-\left[\frac{\theta+1}{T_i}\right]T_i}$$

$$\cancel{f_i(t)=f_{0i}\theta_i}$$



$$f_i(t)=f_{0i}\frac{t-t_{0i}}{T_i},\ -\frac{T_i}{2}<t-t_{0i}<\frac{T_i}{2}.$$

4. Выброс при $f_0\approx 10^{-3}$, $\mu=0$ (рис 2) требует объяснения — ведь это хорошо изученная область. Вероятно, нужно посмотреть резонансы с „фоном".

В целом же вся работа очень интересна, по-моему Вас можно поздравить с серьезным продвижением!

Ваш

В. Арнольд

21.2.73

1.2.81

Дорогой Борис,

нет ли среди разнообразной численной информации о (неинтегрируемых) отображениях с инвариантной мерой (вроде типа $A: \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} x+y+a\sin x \\ y+a\sin x \end{matrix}$ (1)) информации о

1) поле растягивающихся направлений в „эргодической" области.

2) влиянии диффузии (ошибок округления, например) на ~~рост~~ асимптотику растяжения векторов

3) поведении коэф. растяжения за конечное время как функции от начальной точки.

Нельзя ли провести эксперимент следующего ~~вида~~ рода:

1) задаем начальное векторное поле (произвольное, бездивергентное, скажем (1,0) всюду, или заданное гамильтонианом (или функцией тока) $H(x,y)$).

2) применяем преобразование и ~~следим за~~ действуем им на поле (можно действовать и на гамильтониан: (новое H)(x,y) = (старое H)$(A^{-1}(x,y))$).

3) Полученное поле диффундирует некоторое время (численные реализации диф. могут быть разными: свертка с гауссовым распределением, или зарезание высоких гармоник H, или введение шума, которое [за много шагов] даст такой же эффект).

4) Повторяем цикл 1–3.

Спрашивается — как будет расти поле с течением времени, верно ли, что оно растет экспоненциально — или же оно становится столь изрезанным, что диффузия резко уменьшает рост за счет растяжения. Интересен случай, когда коэффициент диффузии мал (ε), а время велико по сравнению с $1/\varepsilon$ (скажем, $10/\varepsilon$).

Описанная модель связана с вопросом о самовозбуждении магнитного поля (солнечное динамо) течением жидкости. В этом случае вместо A имеется трехмерное течение $\vec{v}$ (скажем, стационарное) несжимаемой жидкости; векторное поле $\vec{B}$ вморожено в жидкость при нулевой магнитной вязкости, но слегка диффундирует при ненулевой (на самом деле коэффициент ε порядка 10^{-8}(?)). Уравнение движения $\vec{B}$ имеет таким образом вид

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \underbrace{\{\vec{v}, \vec{B}\}}_{\text{скобка Пуассона}} = -\varepsilon \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Спрашивается, будет ли $\vec{B}$ расти экспоненциально, если да то с какой скоростью и какая форма (мода) всего скорее растет? Поле v пусть имеет экспоненциальное растяжение (кое-где), например, я думаю, годится

$$v = (A\sin z + C\cos y)\frac{\partial}{\partial x} + (B\sin x + A\cos z)\frac{\partial}{\partial y} + (C\sin y + B\cos x)\frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

(кстати, ~~когда~~ вычислялось ли для этого поля экспоненциальное растяжение? Неинтегрируемость по моей просьбе проверял Henon, C.R.Paris 1966.)

Я разобрал случай $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ т.е. случай, когда v — система Аносова на трехмерном многообразии. В этом случае эксп. рост есть, предельная форма B — константа (растягивающееся поле Аносова). Но ведь для A вида (1) или v вида (2) растяжение, кажется, очень неравномерное?

С наилучшими пожеланиями — Дима (В. И. Арнольд) Москва 117573 Новоясеневский просп. д. 2/ корп. 1/ кв. 141.

Дорогой Дима!

Какой красивый механизм возбуждения магнитного поля! Я как-то совершенно просмотрел этот круг задач. Сейчас вспомнил и пролистал свежую монографию /I/. Фактически, начиная с Бэтчелора /2/, подобный механизм неявно использовался, хотя в нем, кажется, так и не разобрались /см. /I/, особенно стр.II,157,159/.

Конкретно, о твоем примере (2) я пока сказать ничего не могу, однако, на основании довольно детального изучения отображения (I) - стандартного, как мы его называем, у меня есть некоторые наводящие соображения.

При достаточно больших $A, B \gg 1$ ($C = 1$, возможно $A \gg B$) в системе (2) можно ожидать стохастику, в том числе и экспоненциальную неустойчивость. В таком случае $\vec{B}$ действительно должно расти со скоростью, определяемой этой неустойчивостью, т.е. динамической энтропией h, или, точнее, максимальным показателем Ляпунова /без диффузии поля, конечно%. Прилагаю две картинки отображения линии $y = 0$ %для (I) / через 3 и 4 итерации. В данном контексте эту линию $y = 0$ можно рассматривать как магнитную линию начального поля. Для средней скорости роста $\vec{B}$ неравномерность растяжения, по-видимому, несущественна. Во всяком случае, для (I) простая оценка $h \approx \ln(a/2)$ прекрасно работает уже для $a > 4$.

"Изрезанность" поля сама по себе тоже не страшна - она уберется диффузией; хуже, что рядом оказываются поля прямо противоположного направления. Это, кажется, неизбежно коль скоро растяжение /$\approx a \cdot \cos x$ для (I) / имеет разные знаки, причем $\langle a \cdot \cos x \rangle = 0$. В этом, по-моему, самое существенное отличие гладкой системы от, например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, где растяжение одного знака.

Мне кажется, что и для (I) равновесное поле должно быть однородным $\langle \vec{B} \rangle = \vec{B}_0$ и, если $\vec{B}_0 \neq 0$, расти экспоненциально со временем /как и для однородного растяжения/. Я попробую поиграть со стандартным отображением, напрмер, для начала посмотреть просто среднее касательное поле, компенсировав, конечно, его экспоненциальный рост. При этом я надеюсь на устойчивые области при не слишком больших a /$1 < a < 4$/, которые нарушают симметрию между растяжениями обоих знаков. О результатах сразу же напишу, конечно - очень любопытная задача!

16/II 84. С наилучшими пожеланиями, Борис

I. С.И.Вайнштейн, Я.Б.Зельдович, А.А.Рузмайкин, Турбулентное динамо в астрофизике, 1980
2. G.K. Batchelor, Proc. Roy. Soc. (London) 201A: 1066 (1950) 405