Доклады АН СССР 249, 1103 (1979)

(1)

et al., Selected Values of the Thermodynamic properties of the Blements, v. 1, Am. Soc. for Metal Park, Ohio. [11] *Е.Ю. Тонков*, Фазовые диаграммы элементов при высоком давлении, М., "Наука", 1979. [12] *B.K. Chakraverty*, Phys. Chem. Solids, v. 30, № 2,454 (1969). [13] *J.A. Van Vechten*, Phys. Rev. (B), v. 7, № 4,1479 (1973). [14] *Г.М. Кузнецов, В.А. Ротенберг*, ЖФХ, т. 46, № 12,308 (1972). [15] *Д.Н. Холломон, Д. Тарнбалл*, Успехи физики металлов, т. 1, М., "Металлургиздат", 1956, стр. 304.

УДК 530.145.61+530.182 ФИЗИКА

Ф.М. ИЗРАЙЛЕВ, Д.Л. ШЕПЕЛЯНСКИЙ

КВАНТОВЫЙ РЕЗОНАНС ДЛЯ РОТАТОРА В НЕЛИНЕЙНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком С.Т. Беляевым 7 V 1979)

1. Поведению нелинейных квантовых систем под действием внешнего периодического возмущения в последнее время уделяется все большее внимание [1-7]. Это связано прежде всего с новыми возможностями экспериментального исследования поведения атомов и молекул в поле лазерного излучения [8-9]. Основные трудности теоретического анализа возникают, когда внешнее воздействие нельзя считать малым, при этом теория возмущения становится неприменимой. В этом случае возрастает роль численных исследований. Такое исследование для простой и хорошо изученной в классической механике модели [10] (плоский ротатор под действием дельтаобразных толчков) было проведено в [11]. Основной результат состоит в обнаружении серьезных отличий в поведении квантовой системы (по сравнению с классической), когда движение становится стохастическим. Причем эти отличия остаются даже, если квантовая система находится в области глубокой квазиклассики. В частности, скорость диффузии средней энергии ротатора лишь на ограниченных временах совпадает с классической, а затем резко падает. Кроме того, был обнаружен своеобразный тип движения, названный квантовым резонансом и не имеющий аналога в классической системе. Настоящая работа посвящена подробному исследованию открытого в [11] квантового резонанса.

2. Выбранная модель описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2J}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tilde{k}\cos\theta\ \delta_{\tilde{T}}(t), \tag{1}$$

где $\tilde{k}$ — параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n\tilde{T})$ — периодическая дельта-функция, J — момент инерции ротатора, θ — угловая переменная; в дальнейшем $J = 1$. Решая уравнение Шредингера с гамильтонианом (1), получим отображение для волновой функции через один шаг, включающее свободное вращение в течение времени $\tilde{T}$ и толчок (см. [11]):

$$\bar{\psi}(\theta) = \exp(-ik\cos\theta)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(-i\frac{Tn^2}{2} + in\theta\right), \tag{2}$$

где $k = \tilde{k}\hbar$, $T = \hbar\tilde{T}$, $A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\theta)e^{-in\theta}d\theta$. Далее $\hbar = 1$. Отметим, что согласно

(2) движение не меняется при замене $T \to T + 4\pi m$, где m целое. Поэтому достаточно рассмотреть T на интервале $[0, 4\pi]$.

Как было отмечено в ([11]), в случае основного квантового резонанса ($T = 4\pi m$, m целое) энергия ротатора $E(t) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \psi^*(\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi(\theta)\,d\theta$ на больших временах растет квадратично со временем. Исследуем общий случай квантового резонанса: $T = 4\pi p/q$, p и q целые, взаимно простые числа. После некоторых преобразований (2) можно представить в виде

$$(3) \qquad \overline{\psi}(\theta) = \exp(-ik\cos\theta)\sum_{n=0}^{q-1}\gamma_n\psi\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}\exp\left(-i\frac{2\pi p}{q}m^2 - i\frac{2\pi mn}{q}\right).$$

Запишем (3) в формуле, удобной для дальнейшего анализа:

$$(4) \qquad \overline{\psi}\left(\theta + \frac{2\pi m}{q}\right) = \sum_{n=0}^{q-1} S_{mn}\psi\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right);$$

S_{mn} – матрица, представимая в виде произведения диагональной и циклической матриц: $S_{mn} = \beta_m\cdot\gamma_{n-m}$; $\beta_m = \exp(-ik\cos(\theta + 2\pi m/q))$. В силу унитарности матрицы S_{mn} ее собственные значения имеют вид $\lambda_j(\theta) = \exp(i\alpha_j(\theta))$, $|\lambda_j| = 1$. Подчеркнем, что λ_j в общем случае зависят от θ. Из (4) можно найти зависимость энергии ротатора от времени (t – безразмерное время, измеряемое числом толчков):

$$(5) \qquad E(t) = E(0) + \eta t^2 + a_{10}t + b_{10} + \sum_{m, m_1 = 0}^{q-1} G_{mm_1}(t) + t\sum_{m, m_1 = 0}^{q-1} R_{mm_1}(t),$$

где η, a_{10}, b_{10} – константы, не зависящие от времени. Для примера приведем выражения для η и $R_{mm_1}(t)$:

$$(6) \qquad \eta = \frac{1}{2q}\int_0^{2\pi} d\theta\left\{\sum_{l, l_1, m=0}^{q-1}(\alpha'_m)^2\Phi_l^*(\theta, 0)\Phi_l(\theta, 0)Q_{l_1 m}Q^*_{lm}\right\} \geqslant 0,$$

$$R_{mm_1}(t) = -\frac{i}{q}\left\{\sum_{n, l, l_1 = 0}^{q-1}\int_0^{2\pi} d\theta\left\{\alpha'_m\Phi^*_{l_1}(\theta, 0)\Phi_l(\theta, 0)Q_{l_1 m_1}Q^*_{nm_1}Q'_{nm}Q^*_{lm}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\exp(i(\alpha_m - \alpha_{m_1})t)\right\}\right\},$$

где $\Phi_m(\theta, t) = \psi(\theta + 2\pi m/q, t)$, Q – унитарная матрица, приводящая S_{mn} к диагональному виду, штрих означает производную по θ. Так как α_m зависят от θ, то на асимптотически больших временах $R_{mm_1}(t)$, $G_{mm_1}(t)$ $(m \neq m_1)$ выражаются через интеграл от быстроосциллирующей функции и с ростом времени стремятся к $R_{mm}(0)$, $G_{mm}(0)$. Таким образом, на асимптотически больших временах имеем

$$(7) \qquad E(t) = \eta t^2 + a_1 t + b_1 + E(0).$$

Аналогично определяется асимптотическая зависимость импульса ротатора от времени: $P(t) = a_2 t + b_2 + P(0)$. Полученные выражения для энергии и импульса являются универсальными и дают вид асимптотики на больших временах.

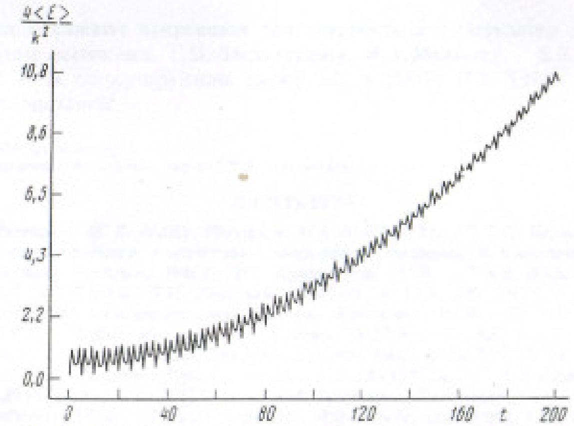

Рис. 1. Зависимость энергии ротатора E от времени в случае квантового резонанса: $T = 4\pi\cdot{}^3/_5$; $k = 0{,}5$; $t = 200$

3. Исследуем структуру спектра квазиэнергий. В момент времени $t = 0$ волновые функции с определенной квазиэнергией представимы в виде

$$(8) \qquad \psi_{\epsilon_j(\theta_0)}(\theta, 0) = \sum_{n=0}^{q-1} C_n^j(\theta_0)\delta_{2\pi}\left(\theta + \theta_0 + \frac{2\pi m}{q}\right).$$

Квазиэнергия $\epsilon_j(\theta_0)$ определяется собственными значениями $\widetilde{\lambda}_j(\theta_0) = \exp(i\widetilde{\alpha}_j(\theta_0))$ унитарной матрицы $\widetilde{S}_{nm} = \beta_n(\theta_0)\cdot\gamma_{n-m}$:

$$(9) \qquad \epsilon_j(\theta_0) = -\widetilde{\alpha}_j(\theta_0)/T.$$

Коэффициенты $C_n^j(\theta_0)$ являются элементами собственных векторов матрицы $\widetilde{S}_{nm}$, θ_0 – непрерывный параметр: $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$. Из анализа (9) видно, что спектр квазиэнергий имеет дискретные уровни в том случае, когда матрица $\widetilde{S}_{nm}$ имеет собственные значения $\widetilde{\lambda}_j$, не зависящие от θ_0. Из явного вида $\widetilde{S}_{nm}$ следует, что для любых p/q $(p/q \neq 1/2)$ спектр квазиэнергий (9) в резонансе непрерывен. Из (8) легко находится

$$\psi_{\epsilon_j(\theta_0)}(\theta, t) = \exp(-ik\cos\theta\cdot\vartheta(t - T))\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\exp\left(-i\frac{n^2 t}{2} + in\theta\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

A_n – фурье-компоненты $\psi_{\epsilon_j(\theta_0)}(\theta, 0)$, $\vartheta(t - T)$ – единичная ступенчатая функция. Интересно отметить, что $\langle|n|\rangle$ в резонансе растет пропорционально времени, поэтому, если бы невозмущенная система обладала спектром $E_n \sim n^m$ $(m > 1$, целое$)$, то ее энергия росла бы со временем по закону $E(t) \sim t^m$.

Явный вид $\widetilde{\lambda}_j(\theta)$ найден в трех случаях:

а) $p/q = 1$ – Основной резонанс. Зависимость энергии от времени (когда вначале возбуждено основное состояние $n = 0$) дается формулой $E(t) = k^2t^2/4$. Спектр квазиэнергий имеет вид $\epsilon(\theta_0) = k\cos\theta_0/4\pi$.

б) $p/q = 1/2$. Из (3) получаем $\overline{\psi}(\theta) = \exp(-ik\cos\theta)\psi(\theta + \pi)$. Через два толчка система возвращается в исходное состояние. Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Спектр квазиэнергий состоит из двух уровней с квазиэнергиями $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 1/2$.

Такое вырождение собственных значений (когда $\tilde{\lambda}_j$ не зависят от θ) случайно и для других резонансов, видимо, не имеет места.

в) $p/q = 1/4$. Из (3) следует: $\tilde{\psi}(\theta) = \exp(-ik\cos\theta)\cdot 2^{-1/2} \times (e^{-i\pi/4}\psi(\theta) + e^{i\pi/4} \times \psi(\theta+\pi))$. Собственные значения $\lambda_\pm = \tilde{\lambda}_\pm = \exp(\pm i\alpha(\theta) - i\pi/4)$, где $\cos(\alpha(\theta))\cdot 2^{-1/2} \times \cos(k\cos\theta)$. При $k \ll 1$, когда вначале возбуждено основное состояние, получим $\eta \approx k^4/16$. При $k \gg 1$ имеем $\eta \approx k^2/12$. Спектр квазиэнергий: $\epsilon_\pm(\theta_0) = 1/4 \mp \alpha(\theta_0)/\pi$.

Из полученных для η оценок следует, что при $k \ll q$ $\eta \sim (k/q)^{2q}$ – спектр квазиэнергий состоит из q экспоненциально узких зон шириной $\Delta\epsilon \sim (k/q)^q$. В случае $k \gg q$ $(\eta \sim k^2/q)$ для нахождения зонной структуры требуется знание детальных свойств собственных значений матрицы $\hat{S}_{nm}$.

4. Наряду с теоретическим анализом проводилось также исследование модели численно. В процессе решения задачи находились фурье-компоненты волновой функции по формуле: $\bar{A}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm} A_m$, где $F_{nm} = (-i)^{n-m}\exp(-iTm^2/2) \times J_{n-m}(k)$; $J_{n-m}(k)$ – функция Бесселя. Фактически сумма содержит $\sim 2k$ членов, так как $|J_{n'}(k)|$ экспоненциально падает с ростом n' при $n' > k$ (толчок захватывает $\sim 2k$ уровней). Контроль за точностью счета заключался в проверке условия нормировки волновой функции $W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 = 1$. Во всех случаях ошибки не превышали $\delta W \leqslant 3\cdot 10^{-3}$. С течением времени ошибки счета нарастают вследствие конечного числа уровней $N = 4001$. Начальные условия варьировались от возбуждения одного уровня (основное состояние) до возбуждения ~ 20 уровней (гауссовский пакет). Во всех случаях асимптотический вид движения слабо зависел от выбора начального состояния. Энергия ротатора вычислялась по формуле $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{2}|A_n|^2$. Численные результаты для самых различных k, q, p показывают, что зависимость $E(t)$ достаточно хорошо аппроксимируется квадратичным полиномом (см. рис. 1). Экспериментальные значения η по порядку величины согласуются с аналитическими оценками.

5. Проведенные исследования показывают, что для квантовых резонансов, система которых является всюду плотной, асимптотическая зависимость энергии ротатора от времени является универсальной и описывается квадратичным законом (7). Это означает, что в резонансе отсутствует квантовая граница устойчивости ($k \approx 1$), предсказанная в ([3]) и наблюдавшаяся в нерезонансном случае ([1,1]). Важно отметить также, что отсутствует и классический критерий устойчивости ($kT \approx 1$), хотя при этом система может находиться в глубоко квазиклассической области. В то же время для нелинейной системы с классическим гамильтонианом, соответствующим (1), согласно теории Колмогорова – Арнольда – Мозера ([12–14]) и численным экспериментам ([10]) при малом возмущении движение устойчиво и энергия системы ограничена. Все это указывает на существенное отличие в поведении квантовой системы по сравнению с классической.

Нетрудно показать, что при возмущении типа $f(x)\cdot\delta_T(t)$ для существования резонанса необходимо, чтобы спектр невозмущенного гамильтониана H_0 был дискретным и имел вид полинома от квантового числа с рациональными коэффициентами. При этом также требуется, чтобы было выполнено условие $\psi_m\psi_n = \psi_{m+n}$ для собственных функций гамильтониана H_0. Вполне вероятно, что последнее условие можно ослабить.

Рассмотренное явление квантового резонанса может оказаться полезным при изучении вопроса о быстром возбуждении квантовых систем при помощи достаточно коротких периодических лазерных импульсов.

Авторы выражают искреннюю благодарность Б.В. Чирикову за внимание к работе и ценные замечания, Г.М. Заславскому, И.А. Малкину, В.В. Соколову и С.А. Хейфецу – за стимулирующие дискуссии, а также Л.Ф. Хайло за помощь в проведении вычислений.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
21 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G.P. Berman, G.M. Zaslavsky*, Physica, v. 91A, 450 (1978). [2] *Г.П. Берман, Г.М. Заславский*, Условие стохастичности в квантовых нелинейных системах, II. Кинетическое описание квантовых *K*-систем. Препринт ИФСО-78Ф, Красноярск, 1978. [3] *Э.В. Шуряк*, ЖЭТФ, т. 71, 2039 (1976). [4] *G.P. Berman, G.M. Zaslavsky*, Phys.Lett., v. 61A, 295 (1977). [5] *В.В. Соколов*, Нелинейный резонанс квантового осциллятора. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 78–50, Новосибирск, 1978. [6] *М.В. Кузьмин, В.Н. Сазонов*, ЖЭТФ, т. 73, 422 (1977). [7] *М.В. Манаков, Л.П. Рапопорт, А.Г. Файнштейн*, Теоретич. и матем. физ., т. 30, 395 (1977). [8] *V.S. Letokhov, E.A. Ryabov, O.A. Tumanov*, Optics Commun., v. 5, 168 (1972). [9] *N.R. Isenor, V. Merchant et al.*, Canad. J.Phys., v. 51, 1281 (1973). [10] *Б.В. Чириков, Взаимодействие нелинейных резонансов*, Новосибирск, 1978. [11] *Ф.М. Израйлев, Дж. Казати, Дж. Форд, Б.В. Чириков*, Тр. конфер. по стохастическому поведению в классических и квантовых гамильтоновых системах, Комо, Италия, 1977, Препринт ИЯФ СО АН СССР, 78–46, Новосибирск, 1978. [12] *А.Н. Колмогоров*, ДАН, т. 98, 527 (1964). [13] *В.И. Арнольд*, УМН, т. 18, № 6, 527 (1963). [14] *J. Moser*, Math.Rev., v. 20, 675 (1959).

УДК 531.51 ФИЗИКА

В.М. СИДОРОВ

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ НА ОСЦИЛЛЯТОР

(Представлено академиком Л.И. Седовым 22 V 1979)

Проблема обнаружения гравитационных волн (г.в.) выдвигает в качестве весьма важной задачи разработку методов эффективного исследования поведения различных систем (детекторов) в поле г.в. Мы рассматриваем одну из таких возможностей, основанную на известном методе осреднения Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова ([1,2]).

Будем исходить из уравнений Голикова – Шермана ([3]), описывающих смещения частиц в гравитационном поле относительно опорной линии,

$$(1) \qquad (\delta^\alpha_\beta - \overset{0}{u}{}^\alpha \overset{0}{u}{}_\beta)\left\{\frac{\delta^2\xi^\beta}{ds^2} - \frac{\delta\Phi^\beta}{d\xi} + \xi^\delta(2\overset{0}{\Phi}{}^\beta\overset{0}{\Phi}{}_\delta + R^\beta_{\cdot\gamma\delta\rho}\overset{0}{u}{}^\gamma\overset{0}{u}{}^\rho)\right\} = 0,$$

где $R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}$ – тензор Римана – Кристоффеля, u^α – скорость частицы, ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$), $\Phi^\alpha = \frac{1}{mc^2}F^\alpha$, $F^\alpha(x, u)$ – поле четырехмерной силы, ξ^α – вектор относительного смещения, величина

$$\delta\Phi^\alpha/d\xi = \tilde{\Phi}^\alpha - \overset{0}{\Phi}{}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\overset{0}{\Phi}{}^\beta\xi^\gamma$$

является абсолютной производной вектора 4-силы Φ^α в направлении вектора ξ. Все величины, входящие в (1), задаются на опорной линии.