

КВАНТОВЫЙ РЕЗОНАНС ДЛЯ РОТАТОРА В НЕЛИНЕЙНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Ф. М. Израйлев, Д. Л. Шепелянский

Проводится исследование поведения плоского квантового ротатора под действием внешнего периодического во времени возмущения, заданного в виде дельтаобразных толчков, нелинейно зависящих от фазы. Аналитически и численно рассматривается случай так называемого квантового резонанса. Показывается, что энергия ротатора на больших временах растет пропорционально t^2 . Анализируется структура спектра квазиэнергий и доказывается его непрерывность.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось большое количество работ, в которых делаются попытки понять квантовые особенности поведения нелинейных систем. При этом основное внимание уделяется системам, находящимся под действием внешнего периодического возмущения (см., например, [4–8]). Это связано прежде всего с новыми возможностями экспериментального исследования поведения атомов и молекул в поле лазерного излучения [9–11].

В настоящей работе продолжается исследование, начатое в [12]. Моделью служит плоский квантовый ротатор с внешним нелинейным возмущением, периодически (в виде дельтаобразных толчков) зависящим от времени. Поведение соответствующей классической системы к настоящему времени достаточно хорошо изучено. В частности, было показано [13], что при выполнении некоторого условия движение становится стохастическим, хотя оно и описывается чисто динамическими уравнениями. С другой стороны, когда возмущение мало, движение сохраняет квазипериодический характер. Таким образом, существует критерий, дающий возможность оценить, когда в динамической системе могут возникнуть статистические свойства. Численное исследование, проведенное в [12], показало, однако, что поведение квантовой системы значительно отличается от классического даже в глубоко квазиклассической области. В частности, скорость диффузии средней энергии ротатора лишь на относительно малых временах совпадает с классической, а затем резко падает. Кроме того, был обнаружен своеобразный тип движения, названный квантовым резонансом и не имеющий аналога в классической системе. Энергия ротатора при этом неограниченно растет независимо от величины внешней силы.

Целью настоящей работы является подробное исследование открытого в [12] квантового резонанса. Обнаружено, что в системе имеется бесконечное, всюду плотное множество таких резонансов, и найдено общее условие

их возникновения. Определяются основные характеристики движения системы в резонансе. Аналитически показывается, что на больших временах энергия ротатора растет квадратично со временем, это подтверждается также численными экспериментами. Вид асимптотики не зависит от величины возмущения и является универсальным. Проводится анализ структуры спектра квазиэнергий, который в резонансе является непрерывным.

2. КВАНТОВЫЙ РЕЗОНАНС

Выбранная модель описывается гамильтонианом

$$(2.1) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \tilde{k} \cos \theta \cdot \delta_{\tilde{T}}(t),$$

где \tilde{k} — параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tilde{T})$ — временной частотой дельта-функций (толчков), J — момент инерции ротатора, θ — угловая переменная. В дальнейшем считаем $J=1$.

Решая уравнение Шредингера с гамильтонианом (2.1), получим отображение для волновой функции через один шаг, включающее свободное вращение в течение времени \tilde{T} и толчок (см. [12]):

$$(2.2) \quad \bar{\Psi}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(-i \frac{Tn^2}{2} + in\theta\right),$$

где $k = \tilde{k}/\hbar$, $T = \hbar\tilde{T}$, $A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-in\theta} d\theta$. Далее $\hbar=1$.

Отметим, что согласно (2.2) движение не меняется при замене $T \rightarrow T + 4\pi m$, где m целое. Поэтому достаточно рассматривать значения T на интервале $[0, 4\pi]$.

Из (2.2) находим связь между фурье-компонентами через один шаг:

$$(2.3) \quad \bar{A}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm} A_m,$$

где $F_{nm} = (-i)^{n-m} \exp\left(-i \frac{T}{2} m^2\right) J_{n-m}(k)$; $J_{n-m}(k)$ — функция Бесселя.

Как было отмечено в [12], в случае основного квантового резонанса ($T=4\pi m$, m целое)

$$(2.4) \quad \bar{\Psi}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \Psi(\theta)$$

и энергия ротатора $E(t) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi^*(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Psi(\theta) d\theta$ на больших временах растет квадратично со временем. Так, если в начальный момент времени $t=0$ было возбуждено только основное состояние ($n=0$), то

$$(2.5) \quad E(t) = k^2 t^2 / 4.$$

Здесь и далее t — безразмерное время, измеряемое в числе толчков.

Исследуем теперь общий случай квантового резонанса: $T=4\pi p/q$. Из (2.2) имеем $\bar{\Psi}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \cdot F(\theta)$, где

$$(2.6) \quad F(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(-i \frac{2\pi p}{q} n^2 + in\theta\right) = \\ = \sum_{m=0}^{q-1} \exp\left(-i \frac{2\pi p}{q} m^2\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{m+ql} \exp(i(m+ql)\theta) = \\ = \sum_{m=0}^{q-1} \exp\left(-i \frac{2\pi p}{q} m^2\right) B_m; \quad B_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{m+ql} \exp(i(m+ql)\theta).$$

Для нахождения B_m вычислим следующую сумму:

$$(2.7) \quad \sum_{m=0}^{q-1} \exp\left(i \frac{2\pi mn}{q}\right) B_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \exp\left(i\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right) l\right) = \\ = \psi\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right).$$

Откуда $B_m = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \exp\left(-i \frac{2\pi mn}{q}\right) \psi\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right)$.

В итоге получаем основное соотношение для $\bar{\Psi}(\theta)$:

$$(2.8) \quad \bar{\Psi}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \sum_{n=0}^{q-1} \gamma_n \psi\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right),$$

где

$$\gamma_n = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \exp\left(-i \frac{2\pi p}{q} m^2 - i \frac{2\pi mn}{q}\right).$$

Перепишем (2.8) в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$(2.9) \quad \bar{\Psi}\left(\theta + \frac{2\pi m}{q}\right) = \sum_{n=0}^{q-1} S_{mn} \psi\left(\theta + \frac{2\pi n}{q}\right),$$

S_{mn} — матрица, имеющая вид

$$(2.10) \quad S = \begin{pmatrix} \beta_0 & & & \\ & \cdot & 0 & \\ 0 & & \cdot & \\ & & & \beta_{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{q-1} \\ \gamma_{q-1} & \gamma_0 & \dots & \gamma_{q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix}, \\ \beta_j = \exp\left(-ik \cos\left(\theta + \frac{2\pi j}{q}\right)\right), \quad S_{mn} = \beta_m \gamma_{n-m}.$$

В силу унитарности матрицы S ее собственные значения $\lambda_j(\theta) = \exp(i\alpha_j(\theta))$, $|\lambda_j| = 1$. Подчеркнем, что λ_j в общем случае, как показывается далее, зависит от θ .

Матрицу S удобно представить в виде

$$(2.11) \quad S_{mn} = \sum_{l=0}^{q-1} Q_{ml} e^{i\alpha_l} Q_{ln}^{-1},$$

где Q — некоторая унитарная матрица ($Q^{-1} = Q^+$) размерности $q \times q$ с элементами Q_{mn} , зависящими от θ .

Введем в рассмотрение вектор-столбец $\Phi(\theta, t)$ с элементами $\Phi_m(\theta, t) = \psi(\theta + 2\pi m/q, t)$. Из (2.9) и (2.11) находим зависимость Φ_m от времени:

$$(2.12) \quad \Phi_m(\theta, t) = \sum_{n, l=0}^{q-1} Q_{mn} \exp(i\alpha_n(\theta)t) Q_{ln}^* \Phi_l(\theta, 0).$$

Зная $\Phi_m(\theta, t)$, можно найти зависимость импульса и энергии ротатора от времени:

$$(2.13) \quad P(t) = -\frac{i}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_m(\theta, t) d\theta,$$

$$(2.14) \quad E(t) = -\frac{1}{2q} \sum_{m=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\theta, t) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi_m(\theta, t) d\theta.$$

Непосредственно из (2.12) и (2.13) получаем

$$(2.15) \quad P(t) = P(0) + a_1 t + b_{10} + \sum_{m, m_1=0}^{q-1} R_{mm_1}(t),$$

где

$$(2.16) \quad b_{10} = -\frac{i}{q} \sum_{m, l, l_1=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} d\theta \{ \Phi_l(\theta, 0) \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) Q_{l_1 m} Q_{lm}^* \},$$

$$a_1 = \frac{1}{q} \sum_{m, l, l_1=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} \alpha_m' \{ \Phi_l(\theta, 0) \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) Q_{l_1 m} Q_{lm}^* \} d\theta,$$

$$R_{mm_1}(t) =$$

$$= -\frac{i}{q} \sum_{n, l, l_1=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} d\theta \{ \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) \Phi_l(\theta, 0) Q_{l_1 m} Q_{nm}^* Q_{nm}' Q_{lm}^* \exp(i(\alpha_m - \alpha_{m_1})t) \}.$$

Здесь и далее штрих означает производную по θ .

Так как α_m в общем случае зависят от θ , то на асимптотически больших временах $R_{mm_1}(t)$ (для $m \neq m_1$) выражается через интеграл от быстро осциллирующей функции и, следовательно, при больших t : $R_{mm_1}(t) = R_{mm_1}(0) \cdot \delta_{mm_1} + o(1/t)$. На основе сказанного легко находится асимптотическая зависимость импульса ротатора от времени:

$$(2.17) \quad P(t) = a_1 t + b_1 + P(0),$$

$$\text{где} \quad b_1 = b_{10} + \sum_{m=0}^{q-1} R_{mm}(0).$$

Аналогичным образом определяется зависимость $E(t)$ на больших вре-

менах:

$$(2.18) \quad E(t) = \eta t^2 + a_2 t + b_2 + E(0).$$

Приведем выражения только для a_2 и η , структура b_2 аналогична b_1 :

$$(2.19) \quad a_2 = -\frac{i}{q} \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \sum_{m, l, l_1=0}^{q-1} \left[\frac{1}{2} \alpha_m'' \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) \Phi_l(\theta, 0) Q_{l_1 m} Q_{l m}^* + \alpha_m' \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) Q_{l_1 m} (\Phi_l(\theta, 0) Q_{l m}^*)' \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n, l, l_1, n=0}^{q-1} [\alpha_m' \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) \Phi_l(\theta, 0) Q_{l_1 m} Q_{n m}^* Q_{n m}' Q_{l m}^*] \right\}, \\ \eta = \frac{1}{2q} \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \sum_{l, l_1, m=0}^{q-1} (\alpha_m')^2 \Phi_{l_1}^*(\theta, 0) \Phi_l(\theta, 0) Q_{l_1 m} Q_{l m}^* \right\} \geq 0.$$

Полученные выражения для энергии и импульса ротатора являются универсальными и дают вид асимптотики на больших временах. Из анализа выражения (2.19) для коэффициента η , который определяет асимптотику, видно, что он равен нулю, когда все λ_j , а значит и α_m , не зависят от θ ($\lambda_j = \text{const}$). Кроме того, $\eta = 0$ в случае, когда хотя бы одно значение $\lambda_n = \text{const}$ и начальное распределение удовлетворяет специальному условию

$$\lambda_n \psi_{\lambda_n}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \sum_{m=0}^{q-1} \gamma_m \psi_{\lambda_n} \left(\theta + \frac{2\pi m}{q} \right).$$

Перейдем теперь к нахождению спектра квазиэнергий [14–15]. Из (2.8) следует, что волновые функции с определенной квазиэнергией в момент времени $t=0$ представимы в виде

$$(2.20) \quad \psi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, 0) = \sum_{n=0}^{q-1} C_n^j(\theta_0) \delta \left(\theta + \theta_0 + \frac{2\pi n}{q} \right),$$

где

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}.$$

Квазиэнергия $\varepsilon_j(\theta_0)$ и коэффициенты $C_n^j(\theta_0)$ определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$(2.21) \quad \exp(-\varepsilon_j(\theta_0)T) C_n^j(\theta_0) = \sum_{m=0}^{q-1} \tilde{S}_{nm} C_m^j(\theta_0),$$

где $\tilde{S}_{mn} = \beta_n(\theta_0) \gamma_{n-m}$. Матрица \tilde{S} унитарна, и ее собственные значения $\tilde{\lambda}_j(\theta_0) = \exp(i\tilde{\alpha}_j(\theta_0))$ определяют спектр квазиэнергий

$$(2.22) \quad \varepsilon_j(\theta_0) = -\tilde{\alpha}_j(\theta_0)/T.$$

Здесь θ_0 — непрерывный параметр: $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

Из (2.22) следует, что спектр квазиэнергий имеет дискретные уровни только в том случае, когда матрица \tilde{S} имеет собственные значения $\tilde{\lambda}_j = \text{const}$. Используя явный вид \tilde{S} , нетрудно показать, что для любых p/q

(кроме случая $p/q=1/2$, который будет рассмотрен отдельно) $\text{Sp } \mathcal{S}^2 = \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{\lambda}_j^2$

зависит от непрерывного параметра θ_0 , т. е. существуют $\tilde{\lambda}_j \neq \text{const}$. Следовательно, спектр квазиэнергий (2.22) в резонансе непрерывен. Наряду с этой непрерывной компонентой спектр может иметь дискретные уровни, число которых равно числу собственных значений $\tilde{\lambda}_j = \text{const}$, откуда ясно, что при резонансе p/q ($p/q \neq 1/2$) имеется не более $q-1$ дискретных уровней.

Зная $\psi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, 0)$, легко находим $\psi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, t)$:

$$(2.23) \quad \psi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, t) = \exp(-i\varepsilon_j(\theta_0)t) \varphi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, t),$$

где $\varphi_{\varepsilon_j(\theta_0)}$ — собственная функция квазиэнергии $\varepsilon_j(\theta_0)$, периодическая по времени с периодом T :

$$(2.24) \quad \varphi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, t) = \exp(i\varepsilon_j(\theta_0)t - ik \cos \theta \cdot \vartheta(t-T)) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(-i \frac{n^2 t}{2} + in\theta\right); \quad 0 \leq t \leq T,$$

A_n — фурье-компоненты $\psi_{\varepsilon_j(\theta_0)}(\theta, 0)$ и $\vartheta(t-T)$ — единичная ступенчатая функция.

Интересно отметить, что $\langle |n| \rangle$ в резонансе растет пропорционально времени ($\langle |n| \rangle \sim t$), поэтому, если бы невозмущенная система обладала спектром $E_n \sim n^m$ ($m > 1$, целое), то ее энергия росла бы со временем по закону $E(t) \sim t^m$.

Точный вид $\lambda_j(\theta)$ найден в трех случаях.

1. $p/q=1$ — основной резонанс. Зависимость энергии от времени дается формулой (2.5). Спектр квазиэнергий имеет вид

$$(2.25) \quad \varepsilon(\theta_0) = (k/4\pi) \cos \theta_0.$$

Так как $\psi_{\varepsilon(\theta_0)}(\theta, 0) = \delta(\theta + \theta_0)$, то собственная функция квазиэнергии согласно (2.24) определяется выражением

$$(2.26) \quad \varphi_{\varepsilon(\theta_0)}(\theta, t) = \exp(i\varepsilon(\theta_0)t - ik \cos \theta \cdot \vartheta(t-T)) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i \frac{n^2}{2} t + in(\theta + \theta_0)\right),$$

где $0 \leq t \leq T$, $T=4\pi$.

2. $p/q=1/4$. Из (2.8) следует

$$(2.27) \quad \bar{\psi}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\pi/4} \psi(\theta) + e^{i\pi/4} \psi(\theta + \pi))$$

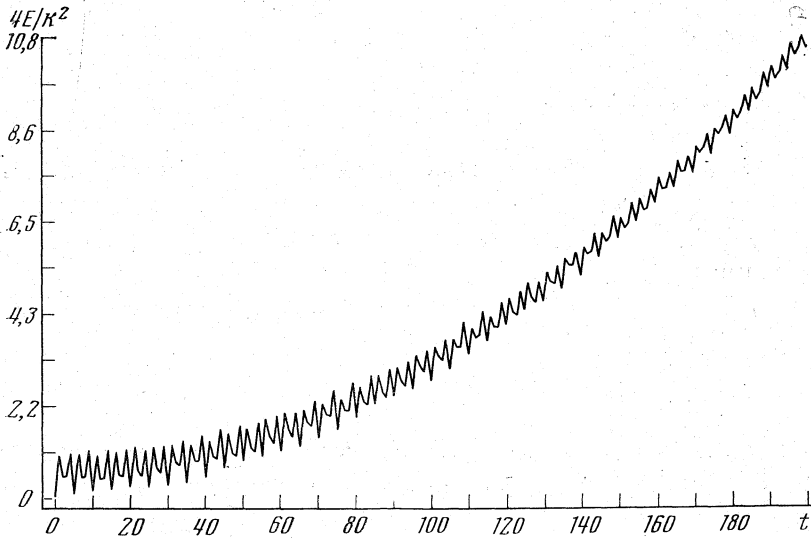
(при $q=4l+2$, l — целое, коэффициенты $\gamma_{2m+1}=0$ и S имеет размерность $\frac{q}{2} \times \frac{q}{2}$). Собственные значения $\lambda_{\pm} = \tilde{\lambda}_{\pm} = \exp\left(\pm i\alpha(\theta) - i \frac{\pi}{4}\right)$ где

$$(2.28) \quad \cos(\alpha(\theta)) = (1/\sqrt{2}) \cos(k \cos \theta).$$

При $k \ll 1$ имеем $\partial\alpha/\partial\theta \approx -\text{sign}(\alpha) (k^2/2) \sin 2\theta$, и если в начальный момент времени $\psi(\theta) = 1/\sqrt{2\pi}$ (основное состояние), то $\eta \approx k^4/16$. Для этих же начальных условий при $k \gg 1$ имеем $\eta \approx k^2/12$. Из (2.22) находим спектр квазиэнергий

$$(2.29) \quad \varepsilon_{\pm}(\theta_0) = 1/4 \mp \alpha(\theta_0)/\pi.$$

Для $k \ll 1$ спектр $\varepsilon_{\pm}(\theta_0) \approx \frac{1}{4} \mp \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{4\pi} \cos^2 \theta_0 \right)$ представляет собой две узкие зоны шириной $\sim k^2$. Для $k \geq \pi$ имеем две широкие полосы: $1/2 \leq \varepsilon(\theta_0) \leq 1$; $3/2 \leq \varepsilon(\theta_0) \leq 2$. Зависимость $\varphi_{\varepsilon_{\pm}(\theta_0)}$ от времени дается формулой (2.24), где A_n — фурье-компоненты функции $\psi_{\varepsilon_{\pm}(\theta_0)}(\theta, 0) = C_1(\theta_0)\delta(\theta+\theta_0) + C_2(\theta_0)\delta(\theta+\theta_0+\pi)$; здесь (C_1, C_2) — собственный вектор матрицы \mathcal{S} .



3. В случае $p/q = 1/2$ из (2.8) получаем

$$(2.30) \quad \bar{\psi}(\theta) = \exp(-ik \cos \theta) \psi(\theta + \pi).$$

Видно, что через два толчка система возвращается в исходное состояние. Собственные значения $\lambda_{1,2} = \tilde{\lambda}_{1,2} = \pm 1$. Спектр квазиэнергий состоит из двух дискретных уровней с квазиэнергиями $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1/2$. Собственными функциями уровня ε_1 , точнее их значениями в момент времени $t = mT$, являются функции $\psi_{\varepsilon_1}(\theta) = g_{\pm}(\theta) (1 \pm \exp(-ik \cos \theta))$, где $g_{\pm}(\theta)$ — произвольная функция, удовлетворяющая соотношению $g_{\pm}(\theta + \pi) = \pm g_{\pm}(\theta)$. Собственными функциями уровня ε_2 являются $\psi_{\varepsilon_2}(\theta) = g_{\pm}(\theta) (1 \mp \exp(-ik \cos \theta))$. Каждый уровень бесконечнократно вырожден, а функции ψ_{ε_1} и ψ_{ε_2} составляют полный набор.

По-видимому, вырождение собственных значений (когда какие-то $\lambda_j = \text{const}$) является случайным и для других резонансов не имеет места. Действительно, при наличии некоторых $\lambda_j = \text{const}$ при произвольном начальном распределении $\psi(\theta)$ часть энергии принадлежала бы дискретной компоненте спектра квазиэнергий. В соответствии с этим в зависимости

энергии от времени присутствовали бы периодические незатухающие во времени осцилляции (как в случае $p/q=1/2$). В проведенных численных экспериментах такой эффект не был обнаружен. При $k \gg 1$ зависимость $E(t)$ была плавной функцией времени, при $k \ll 1$ размер изломов уменьшался со временем (см. рисунок, где дана зависимость энергии ротатора E от времени для квантового резонанса при $T=4\pi \cdot 2/5$, $k=0,5$, $t=200$).

Итак, в квантовом резонансе ($p/q \neq 1/2$) энергия системы растет до бесконечности по асимптотическому закону $E(t) \sim t^2$, спектр квазиэнергий при этом непрерывен.

Для величин $(\alpha')_{\max}^2 \equiv \max_{0 \leq j \leq q-1} \left| \overline{\frac{\partial \alpha_j(\theta)}{\partial \theta}} \right|^2$ (черта означает усреднение

по θ) из явного вида S удается получить следующие оценки (они имеют место и для $\tilde{\alpha}_j$ матрицы \tilde{S}):

а) $k \ll q$, тогда

$$(2.31) \quad \eta \sim \frac{(\alpha')_{\max}^2}{2} \geq q |J_q(k)|^2 \sim \left(\frac{k}{q}\right)^{2q}.$$

Заметим, что данная оценка является оценкой наименьшего возможного значения $(\alpha')_{\max}^2$. Можно ожидать, что истинное значение по порядку величины совпадает с этой нижней оценкой (см. п. 3);

б) $k \gg q$, имеем

$$(2.32) \quad \eta \sim \frac{(\alpha')_{\max}^2}{2} \approx \frac{k^2}{\xi q},$$

где ξ — некоторая величина, зависящая от начальных условий и практически не зависящая от k и q . Для плавных начальных условий $\psi(\theta, 0)$ оценка для ξ дает $\xi \approx 5$.

Из полученных оценок для $(\alpha')_{\max}^2$ следует, что при $k \ll q$ (p, q — любые взаимно простые числа) спектр квазиэнергий состоит из q экспоненциально узких зон шириной $\Delta \epsilon \sim (k/q)^q$. В случае $k \gg 1$ для нахождения зонной структуры требуется знание детальных свойств собственных значений матрицы \tilde{S} . К сожалению, явный вид $\lambda_j(\theta)$ найти не удалось.

Из сказанного выше (см. (2.31), (2.32)) следует, что $\eta \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, $k = \text{const}$. Это означает, что для иррациональных значений $T/4\pi$ величина η равна нулю, в этом случае движение системы носит совершенно иной характер (см. [12]).

Пусть теперь $T=4\pi p/q + \delta$, где $|\delta| \ll 1$, тогда из-за малости набега фаз следует, что в течение $t_r \sim 1/\delta d$ ($d \approx \max E(t_r)$); $0 \leq t \leq t_r$, характеристики системы меняются во времени так же, как и в случае точного резонанса $T=4\pi p/q$, что и отчетливо наблюдалось в численном эксперименте. Из условия $\eta t_r^2 \geq k^2 t_r$ найдем величину расстройки δ_r , при которой влияние резонанса p/q оказывается значительным (будем считать, что $d \sim k^2 t_r$). При $k > q$ (в противном случае отстройка от резонанса экспоненциально мала $\delta \sim (k/q)^{4q}$) имеем

$$(2.33) \quad \delta_r \lesssim 1/k^2 q^2.$$

Для основного резонанса ($q=1, p=0$) $T=\delta$, и из условия (2.33) следует, что $T \leq 1/k^2$. Как видно, в области квазиклассики ($k \rightarrow \infty, T \rightarrow 0, kT = \text{const}$) неравенство (2.33) не выполняется, т. е. влияние основного резонанса несущественно. Можно найти суммарную величину всех расстрой:

$$(2.34) \quad \delta_z \approx \sum_{q=1}^k \sum_{p=1}^{q-1} \delta_r(p, q) \sim \frac{\ln k}{k^2}.$$

Так как $\delta_z \ll 1$, то отсюда следует, что в случае иррациональных $T/4\pi$ резонансы слабо влияют на движение системы.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Наряду с теоретическим анализом проводилось также исследование модели численно. В процессе решения задачи находились фурье-компоненты волновой функции по формуле (2.3). Хотя суммирование в (2.3) проводится от $-\infty$ до $+\infty$, фактически сумма содержит $\sim 2k$ членов, так как $|J_n(k)|$ экспоненциально падает с ростом n при $n > k$ (толчок захватывает $\approx 2k$ уровней). Ввиду этого при вычислениях использовалось конечное число ($\approx 2k$) функций Бесселя. Контроль за точностью счета заключался в проверке условия нормировки волновой функции

$$W = \int_0^{2\pi} |\psi(\theta)|^2 d\theta = 1. \text{ Во всех случаях ошибки не превышали } \delta W \lesssim 3 \cdot 10^{-2}.$$

Основное ограничение на длительность счета накладывает конечность выбранного числа уровней. При достаточно большом возмущении происходит быстрое возбуждение высоких уровней системы и ошибки счета становятся значительными. По сравнению с [12] было проведено усовершенствование программы, что позволило увеличить скорость счета примерно в два раза, а также довести число уровней модельной системы до

Таблица 1

k/q	η	k	p/q
0,025	$6 \cdot 10^{-6}$	0,1	1/4
0,058	10^{-4}	1	1/17
0,058	10^{-4}	1	4/17
0,099	10^{-3}	10	1/101
0,100	$2 \cdot 10^{-5}$	0,5	2/5
0,150	10^{-2}	1,2	1/8
0,176	10^{-3}	3	1/17
0,200	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1/5
0,235	0,08	4	1/17
0,235	0,144	4	4/17
0,353	0,36	6	1/17

Таблица 2

k/q	η	ξ	k	p/q
0,706	3,0	2,8	12	1/17
1,76	23,4	2,3	30	1/17
3,33	52,4	3,2	50	1/15
5,00	181	2,4	85	1/17
5,44	284	1,7	87	1/16
6,21	239	1,3	87	1/14
7,69	404	1,9	100	1/13
7,73	246	2,7	85	1/11
8,57	206	2,5	60	1/7
10,7	245	3,3	75	1/7
12,4	452	2,3	87	1/7

2001. При этом реальное время счета на БЭСМ-6 в типичных экспериментах (табл. 1, 2) составило около 10 мин. Дополнительное увеличение числа уровней было достигнуто за счет рассмотрения симметричных начальных распределений ($\psi(\theta) = \psi(-\theta)$). При этом число уровней выбиралось равным $N=4001$ ($-2000, +2000$), но ввиду симметрии начальных условий и гамильтониана (2.1) счет фактически велся с 2001 уровнем.

Начальные условия варьировались от возбуждения одного уровня (основное состояние) до возбуждения около 20 уровней (гауссовый пакет). Во всех случаях асимптотический вид движения слабо зависел от выбора начального состояния. При обработке результатов счета вычислялась

энергия ротатора $E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi d\theta$. Одновременно строился график

зависимости энергии от времени, и по методу наименьших квадратов производилась подгонка $E(t)$ на квадратичный полином.

Для $k < q$ экспериментально хорошо прослеживалась квадратичная зависимость энергии от времени (см. рисунок). Подгонка проводилась в этом случае по формуле $E(t) = \eta t^2 + E(0)$. Данные для η при различных k и q приведены в табл. 1. При $k \ll q$ значения η слишком малы и квадратичный рост энергии на конечных временах $t \leq 200$ не всегда заметен. Поэтому трудно говорить о количественном согласии с оценкой (2.31), однако можно утверждать, что η уменьшается значительно быстрее, чем k/q .

Для $k \geq q$ зависимость $\eta(k, q)$ аппроксимируется аналитической оценкой (2.32). Экспериментальные данные (табл. 2) показывают неплохое согласие с этой формулой, при этом значение ξ меняется слабо и не зависит явно от k и q . Среднее значение ξ равно $\langle \xi \rangle = 2,4$.

Отдельно проверялось, насколько зависит η от значений p при одном и том же значении q . Как и ожидалось, согласно (2.31)–(2.32) зависимости от p практически нет.

В области квазиклассики ($k \rightarrow \infty$, $T = 4\pi/q \rightarrow 0$ при $kT = \text{const} \gg 1$) для $k \geq q$ экспериментальные данные показывают, что на малых временах зависимость $E(t)$ в безразмерных переменных хорошо описывается полуэмпирической формулой

$$(3.1) \quad E(t) = k^2 t^2 / \xi q + k^2 t / 4 + E(0).$$

Коэффициент при t^2 согласуется с теоретической оценкой (2.32) для η . Второй член в (3.1), линейный по времени, в точности соответствует классической диффузии [12], тем не менее коэффициент $k^2/4$, вообще говоря, отличается от асимптотического значения a_2 в (2.18), поэтому член $k^2 t/4$ на самом деле не является диффузионным. Из экспериментальной зависимости (3.1) следует, что на временах $t < t^*$, где $t^* \approx q\xi/4 \sim 1/T$ (в размерных переменных $\tau < \tau^* = t^* T \leq J/\hbar$) рост энергии происходит в основном за счет «диффузионного» члена $k^2 t/4$. Для $t > t^*$ доминирующим становится квадратичный член, являющийся чисто квантовым.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Проведенные исследования показывают, что для квантовых резонансов, система которых является всюду плотной, асимптотическая зависимость энергии ротатора от времени является универсальной и описывается квадратичным законом (2.18). Это означает, что в резонансе отсутствует квантовая граница устойчивости ($k \approx 1$), предсказанная в [3] и наблюдавшаяся в нерезонансном случае [12]. Важно отметить также, что

отсутствует и классический критерий устойчивости ($kT \approx 1$), хотя при этом система может находиться в глубоко квазиклассической области. В то же время для нелинейной системы с классическим гамильтонианом, соответствующим (2.1), согласно теории Колмогорова — Арнольда — Мозера [16–18] и численным экспериментам [13] при малом возмущении движение является устойчивым и энергия системы ограничена. Все это указывает на существенное отличие в поведении квантовой системы по сравнению с классической, во всяком случае на больших временах.

Для относительно небольших t , когда еще нет выхода на асимптотику, характер поведения системы может быть довольно сложным и сильно зависит от параметров k , T . Так, например, квадратичный рост энергии системы наиболее четко прослеживается, если $T \gg 1$ и $k \gg q \approx 1$. В этом случае энергия сразу же растет пропорционально t^2 . Если же $k < q$, то энергия системы практически осциллирует, квадратичный рост η^2 мал из-за $\eta \ll 1$.

Интересно проследить, каким станет движение при $p \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, $p/q = \text{const}$, что соответствует переходу к нерезонансному значению T . В этом случае, как показали численные эксперименты в [12], движение системы совершенно иное, чем в резонансе. Аналитическое исследование, однако, наталкивается на большие трудности в силу того, что необходимо знать точное решение в резонансе на всех временах, а не только асимптотически. С другой стороны, можно рассмотреть, как будет меняться структура спектра квазиэнергий при переходе к высоким резонансам $q \gg 1$. Здесь удалось показать, что при $q > k$ ширина каждой зоны квазиэнергии экспоненциально мала ($\Delta \varepsilon \sim \sqrt{\eta} \approx (k/q)^q$), одновременно мала и суммарная ширина всех q зон. Возможно это указывает на то, что спектр квазиэнергий в нерезонансном случае становится дискретным. В случае $k \gg q$ вопрос о перекрытии и ширине зон квазиэнергий остается открытым.

В заключение сделаем замечание о том, в каких системах возможно появление квантовых резонансов при воздействии периодического дельта-образного во времени возмущения (которое для одномерного случая представимо в виде $f(x)\delta_T(x)$, где $f(x)$ — произвольная функция координаты x). Нетрудно показать, что для существования резонанса необходимо, чтобы спектр невозмущенного гамильтониана был дискретным и имел вид полинома от квантового числа с рациональными коэффициентами. При этом также требуется, чтобы было выполнено условие вида $\psi_m \cdot \psi_n = \psi_{m+n}$ для собственных функций гамильтониана H_0 . Тогда имеем

$$\exp\left(i \frac{2\pi l(m+n)}{q}\right) \psi_{m+n} = \left(\exp\left(i \frac{2\pi l m}{q}\right) \psi_m\right) \left(\exp\left(i \frac{2\pi l n}{q}\right) \psi_n\right),$$

и на основе этого равенства, аналогично рассмотренному случаю удается свести отображение через период к умножению на матрицу. Вполне вероятно, что последнее условие можно ослабить.

Пользуясь случаем, авторы выражают искреннюю благодарность Б. В. Чирикову за внимание к работе и ценные замечания, Г. М. Заславскому, И. А. Малкину, В. В. Соколову и С. А. Хейфецу за стимулирующие дискуссии, а также Л. Ф. Хайло за помощь в проведении вычислений.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 марта 1979 г.

Литература

- [1] G. P. Berman, G. M. Zaslavsky. *Physica*, **91A**, 450, 1978; ДАН СССР, **240**, 1082, 1978.
- [2] Г. П. Берман, Г. М. Заславский. Препринт ИФСО-78Ф, Красноярск, 1978.
- [3] Э. В. Шуряк. *ЖЭТФ*, **71**, 2039, 1976.
- [4] G. P. Berman, G. M. Zaslavsky. *Phys. Lett.*, **61A**, 295, 1977.
- [5] В. В. Соколов. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 78-50, Новосибирск, 1978.
- [6] М. В. Кузьмин, В. Н. Сазонов. *ЖЭТФ*, **73**, 422, 1977.
- [7] В. Н. Сазонов, В. Ю. Финкельштейн. ДАН СССР, **231**, 78, 1977.
- [8] Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт, А. Г. Файнштейн. *ТМФ*, **30**, 395, 1977.
- [9] V. S. Letochov, E. A. Ryabov, O. V. Tumanov. *Optics Comm.*, **5**, 168, 1972.
- [10] N. R. Isenor, V. Merchant et al. *Canad. J. Phys.*, **51**, 1281, 1973.
- [11] Р. В. Амбарцумян, В. С. Должников, В. С. Летохов и др. *ЖЭТФ*, **69**, 72, 1975.
- [12] Ф. М. Израйлев, Дж. Казати, Дж. Форд, Б. В. Чириков. Труды конференции по стохастическому поведению в классических и квантовых гамильтоновых системах, Комо, Италия, 1977; препринт ИЯФ СО АН СССР, 78-46, Новосибирск, 1978.
- [13] Б. В. Чириков. Взаимодействие нелинейных резонансов, Новосибирск, НГУ, 1978.
- [14] Я. Б. Зельдович. *ЖЭТФ*, **51**, 1492, 1966; *УФН*, **110**, 139, 1973.
- [15] В. И. Ритус. *ЖЭТФ*, **51**, 1544, 1966.
- [16] А. Н. Колмогоров. ДАН СССР, **98**, 527, 1954.
- [17] В. И. Арнольд. *УМН*, **18**, вып. 6, 91, 1963.
- [18] J. Moser. *Math. Rev.*, **20**, 675, 1959.

QUANTUM RESONANCE OF THE ROTATOR IN NONLINEAR PERIODIC FIELD

F. M. Izrailev, D. L. Shepelyansky

Behaviour of a plane quantum rotator under a timeperiodic perturbation given as delta-like «kicks» nonlinearly dependent on a phase is studied. The case of so-called quantum resonance is investigated both analytically and numerically. It is shown that for large times the rotator energy is proportional to t^2 . The structure of quasi-energy spectrum is analysed and its continuity is proved.
