1

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1981

ТОМ 256 №3

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

ρ = 9,25 · 10^{-8} Ом · см, c' = 5,62 · 10^{-2} Дж/см^3 · К, λ' = 1,1 · 10^{-4} Вт/см · К, α = 0,065 Вт/см^2 · К. При этом значение параметра нестационарности ϵ = 1,015, что указывает на существенность вклада нестационарного теплообмена.

Сравнение теории с экспериментом приведено на рис. 2. Кривая *1* – расчет Дреснера с учетом всех нелинейных свойств без поправки на нестационарность, *3* – то же, с подгоночным множителем, *2* – расчет по формуле (10), *4* – расчет по теории настоящей работы (формула (9)). Кружками отмечены результаты эксперимента ([2]).

Как видим, даже использованная модель с постоянными коэффициентами дает весьма хорошее согласие с экспериментом и, в отличие от подгоночной поправки, хорошо отражает не только величину скорости, но и ход зависимости $v(I)$. Такое совпадение подтверждает правильность выбранной физической модели нестационарного теплообмена.

Нужно лишь отметить заметное влияние α на значение минимального тока равновесия $i_0 = i(v = 0)$. Изменение α приводит практически к параллельному горизонтальному сдвигу кривой *4*. Однако i_0 может быть рассчитано точно по нелинейной теории ([7]), что дает однозначный критерий для выбора α.

Институт теплофизики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В.А. Альтов, В.Б. Зенкевич и др.*, Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем М., "Энергия", 1975. [2] *L. Dresner*, Cryogenics, v. 16, № 11, 675 (1976). [3] *Ю.М. Львовский*, Инж. физ. журн., т. 35, № 1, 75 (1978). [4] *W.G. Steward*, Intern. J. Heat Mass Transf., v. 21, № 7, 863 (1978). [5] *Г. Карслоу, Д. Егер*, Теплопроводность твердых тел, М., "Наука", 1964. [6] *R.F. Broom, E.H. Rhoderick*, Brit. J. Appl. Phys., v. 11, 292 (1960). [7] *B.J. Maddock, G.B. James, W.T. Norris*, Cryogenics, v. 9, 261 (1969).

УДК 530.145.61+530.182

ФИЗИКА

Д.Л. ШЕПЕЛЯНСКИЙ

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С.Т. Беляевым 26 V 1980)

1. В последнее время значительно возрос интерес к динамике нелинейных квантовых систем, являющихся стохастическими в классическом пределе $\hbar = 0$ (далее такие системы будут называться стохастическими квантовыми системами (с.к.с.)) ([1-7]). Это связано прежде всего с новыми возможностями экспериментального исследования поведения атомов и молекул в поле лазерного излучения ([8]). Одним из методов рассмотрения таких систем является квазиклассическое приближение ([1], [3], [4], [7]). В то же время известно, что в нелинейных системах поправки к квазиклассическим выражениям нарастают со временем ([10]) и через некоторое время τ^* квазиклассическое разложение становится неприменимым. Для интегрируемых систем эти времена пропорциональны некоторому характерному квантовому числу, входящему в задачу ($\tau^* \propto n_{\text{хар}} \propto 1/\hbar$), что следует из теоремы Эренфеста и явля-

ется результатом того, что, пока пакет не расплылся, он движется по классическим траекториям. Для с.к.с. вопрос о временах, на которых справедлив метод ВКБ, является более сложным из-за локальной неустойчивости классических траекторий, приводящей к экспоненциально быстрому расплыванию квазиклассического пакета за время $\tau_0 \infty \ln n_{\text{хар}} \infty \ln(1/\hbar)$. В данной работе на основе результатов В.П. Маслова ([14], [15]) получено общее условие применимости квазиклассического приближения для с.к.с. Для простых моделей найдены времена, на которых отклонения от классических значений малы.

2. Пусть классическая система описывается гамильтонианом $H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, t)$, где I, θ — действие, угол невозмущенной задачи, $\epsilon \ll 1$ и выполнено условие умеренной нелинейности ([11], [13]). В этом случае для исследования квантовых поправок достаточно ограничиться разложением H вблизи начального I_0 вплоть до членов $(\Delta I)^2$. При $I_0/\hbar \gg 1$ стандартное квантование ([1], [10]) приводит к гамильтониану

$$(1)\qquad \hat{H} = \omega\hat{I} + \gamma\hat{I}^2 + \epsilon[V(I_0, \theta, t) + ½(\hat{I}V_1(\theta, t) + V_1(\theta, t)\hat{I}) + ½\hat{I}V_2(\theta, t)\hat{I}],$$

где $\omega = \left.\dfrac{dH_0}{dI}\right|_{I=I_0}$, $\gamma = \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{d\omega}{dI}\right|_{I=I_0}$, $V_1 = \left.\dfrac{dV}{dI}\right|_{I=I_0}$, $V_2 = \left.\dfrac{d^2V}{dI^2}\right|_{I=I_0}$, $\hat{I} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\theta}$. Следуя ([14], [15]), получим квазиклассическое выражение для волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера с гамильтонианом (1) и начальным условием $\psi(\theta, t=0) = \varphi_0(\theta)\exp(iS(\theta)/\hbar)$:

$$(2)\qquad \psi(\theta, t) = \sum_{k=1}^{N} |J_k|^{-½}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_k(\theta, t) - i\frac{\pi}{2}\mu_k\right) \times$$
$$\times \{\sum_{m=0}^{\infty}[\hat{L}_k^m\varphi_0(\theta_0)]\,|_{\theta_0=\theta_0^k(\theta, k)}\} + O(\hbar^\infty),$$

где суммирование по k проводится по всем классическим траекториям, приходящим в точку θ в момент времени t и удовлетворяющим начальным условиям:

$$\theta_0(\theta, t) = \theta_0^k,\quad I_0(\theta_0) = \left.\frac{\partial S}{\partial\theta_0}\right|_{\theta_0=\theta_0^k},\quad J_k = \left.\frac{\partial\theta(\theta_0, t)}{\partial\theta_0}\right|_{\theta_0=\theta_0^k},$$

$S_k(\theta, t)$ — действие вдоль классической траектории, соединяющей θ_0^k и θ, μ_k — индекс Морса. Сумма по m фактически есть разложение по степеням $\hbar$, причем квантовые поправки являются малыми, если

$$(3)\qquad \hat{L}_k\varphi_0(\theta_0) = i\hbar\int_0^t\{(\gamma + \frac{\epsilon}{2}V_2)|J_k|^{½}(J_k^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_0})^2(|J_k|^{-1/2}\varphi_0) +$$
$$+\frac{\epsilon}{2}|J_k|^{-3/2}\frac{\partial V_2}{\partial\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}(|J_k|^{-1/2}\varphi_0)\}dt \ll \varphi_0(\theta_0).$$

В силу стохастичности классической системы якобиан J_k и число членов в сумме N растут экспоненциально со временем: $J_k, N \sim \exp(ht)$, где h — КС-энтропия ([11-13])), что приводит к экспоненциально быстрому расплыванию начального пакета. Тем не менее, как показывает подробный анализ ([9]), условием применимости квазиклассического разложения (2) является (3). При этом член с $m=0$, как обычно ([14]), дает классическое значение для средних (вклад интерференционных членов мал ввиду случайности S_k, а также из-за отсутствия в этих членах точки перевала ([14])), а следующие члены с $m \neq 0$ — квантовые поправки, которые будут малы до тех пор, пока выполнено (3). Отметим, что это не относится к корреляторам, экспоненциально уменьшавшимся в классике: за время τ_0 их величина становится $\sim\hbar$ и поэтому квантовые поправки, малые по абсолютной величине, по относительному значению оказываются большими.

Из (3) получим условие применимости квазиклассики

$$(4)\qquad |\delta_1^{(k)}| = \Big| i\hbar\int_0^t \Big\{ \Big(\gamma + \frac{\epsilon}{2}V_2\Big)\Big[\frac{5}{4}J_k^{-4}\Big(\frac{\partial J_k}{\partial\theta_0}\Big)^2 - \frac{1}{2}J_k^{-3}\frac{\partial^2 J_k}{\partial\theta_0^2}\Big] - \frac{\epsilon}{4}J_k^{-3}\frac{\partial V_2}{\partial\theta_0}\frac{\partial J_k}{\partial\theta_0}\Big\} dt\,\Big| \ll 1.$$

При этом интеграл по времени в (4) следует понимать в смысле разности первообразных в момент времени t и 0, и, так как в промежуточные моменты времени J_k может обращаться в ноль (прохождение каустики), то результат интегрирования не является знакоопределенным. Поскольку $J_k \sim \exp(ht)$, $\dfrac{\partial J_k}{\partial\theta_0} \sim \exp(2ht)$ и т.д., то δ_1 растет не быстрее, чем линейно со временем, и, таким образом, квазиклассика применима на временах $t_0 \infty 1/\hbar$.

3. Рассмотрим систему с $H = H_0(I) + \epsilon V(I,\theta)g(t)$, где $g(t)$ имеет вид толчков, действующих в течение времени T_0 и следующих друг за другом с интервалом T $(T \gg T_0)$. Пусть изменение действия за время толчка равно ΔI и выполнен критерий стохастичности $\varkappa \approx \gamma T\Delta I \gg 1$ ([11-13]). Разбивая интеграл в (4) на сумму интегралов по интервалам $T + T_0$ и учитывая, что члены суммы статистически независимы из-за стохастичности классической системы и

$$J(nT + T_0 + \tau) \sim J(nT + T_0)\Big(1 + \varkappa\frac{\tau}{T}\Big),\quad \frac{\partial J}{\partial\theta_0} \sim J^2(nT + T_0)\Big(1 + \varkappa\frac{\tau}{T}\Big)$$

и т.д. (n – безразмерное время, измеряемое числом толчков), получим, что $\delta_1^{(k)}$ в среднем растет по закону

$$(5)\qquad \langle |\delta_1^{(k)}|^2\rangle \sim \hbar^2 \sum_{j=0}^{n}\Big(\frac{1}{\overline{\Delta I}_k(j)} + \gamma^{(k)}T_0\Big)^2,$$

где $\overline{\Delta I}_k(j) = \langle(\Delta I_k(j))^2\rangle^{1/2}$ – изменение действия за толчок, усредненное по случайной фазе θ. Поскольку $\Delta I \sim \epsilon$, то членами ϵV_2 в (4) можно пренебречь.

Рассмотрим ротатор с $H = I^2/2 + k\cos\theta\,\delta_T(t)$, где k – параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$. В классике при $kT > 1$ ([11-13]) энергия ротатора растет по диффузионному закону $E = \langle I^2/2\rangle = k^2 n/4$. В квантовой системе, как показали численные эксперименты ([2]), также происходит диффузионный рост энергии со скоростью, близкой к ожидаемой, однако только в течение некоторого времени t^*. При $t > t^*$ скорость диффузии существенно падает. Из (5) и условия $\delta_1 \sim 1$ следует, что квантовые поправки будут малыми для $t \leqslant t_0$, где $t_0 \sim T(k/\hbar)^2$. Таким образом, естественно ожидать, что с $t \gtrsim t_0$ характеристики квантовой задачи, например энергия ротатора, будут существенно отклоняться от своих классических значений. Исходя из этого можно дать оценку для времени t^*, с которого начинается замедление диффузии по энергии, наблюдавшееся в ([2]): $t^* \sim t_0 \sim T(k/\hbar)^2$.

Пусть теперь k растет со временем $k(t) = k\cdot(t/T)^\alpha$, что грубо соответствует случаю $k = k(I)$. Тогда при $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5$ квазиклассическое приближение справедливо для

$$(6)\qquad t \leqslant t_0 \sim T\,[(k/\hbar)^2(1 - 2\alpha)]^{\,1/1\,(1-2\alpha)}$$

и в течение этого времени энергия растет так же, как и в классике,

$$E = \frac{k^2}{4(1+2\alpha)} n^{1+2\alpha} + E(0). \tag{7}$$

При $\alpha > 0{,}5$ квантовые поправки малы на всех временах и на всех временах справедливо (7).

В случае, когда классическая система является потоком и ее динамику нельзя свести к действию толчков, имеем $\frac{\partial J}{\partial \theta_0} \sim J^2$, $\frac{\partial^2 J}{\partial \theta_0^2} \sim J^3$ и т.д. Тогда интеграл в (4) можно разбить на сумму интегралов по интервалам времени $\Delta t \sim \tau_e = 1/h$, которые уже будут статистически независимыми, и, таким образом, получим

$$|\delta_1^{(k)}|^2 = \hbar^2 \int_0^t (\gamma^{(k)}/h)^2 h dt \ll 1. \tag{8}$$

При $\gamma = \text{const}$ (8) дает $|\delta_1| \sim \frac{\hbar\gamma}{h}(ht)^{1/2}$. Так, например, если

$$H = \gamma \frac{J^2}{2} + k \sum_{m=M}^{M} \cos(\theta + m\Omega t + \varphi_m),$$

где φ_m – набор случайных фаз и $M \gg s = (k\gamma)^{1/2}/\Omega \gg 1$, то $h \sim \Omega s^{4/3}$ ([11]) и $t_0 \sim \sim h/(\hbar^2\gamma^2)$.

4. Для проверки полученных результатов проводилось численное исследование модели ротатора с $k = \text{const}$ $k(t) = k(t/T))^{\alpha}$. Для системы с $k = \text{const}$ было проведено сравнение таких тонких характеристик классической и квантовой задач, как зависимость коэффициента диффузии $D = \frac{dE}{dt}$ на временах, меньших t^*, от параметра kT (для классической системы этот вопрос исследовался в ([13])). В случае одинаковых начальных условий (в классике – линия $p(\theta) = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, в квантовой задаче – основное состояние с $E = 0$, $k/\hbar \approx 40$) экспериментальные данные для $D(kT)$ приведены на рис. 1. Имеющееся небольшое различие находится на уровне квантовых поправок.

По полученным экспериментальным данным определялось время, в течение которого энергия растет по закону, близкому к классическому; при этом за t^* принималось время t, начиная с которого энергия квантового ротатора отличалась на 25% от значения энергии в классическом случае. Для проверки функциональной

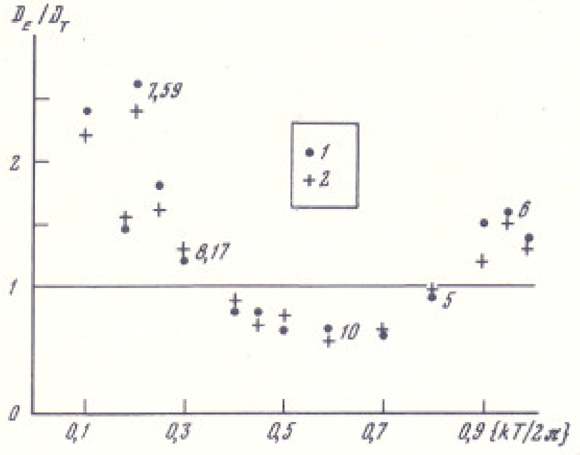

Рис. 1. Зависимость отношения экспериментального коэффициента диффузии D_E к теоретическому $D_T = k^2/4$ от дробной части $\left\{\frac{kT}{2\pi}\right\}$. 1 – для классической системы; 2 – для квантовой системы с $k/\hbar \approx 40$; числа у некоторых точек – значения kT

Таблица 1

kT	$k/\hbar$	α	t^*/T	δ	$\langle\delta\rangle$	$\sigma_\delta/\langle\delta\rangle$
5–36	5–80	0	5–320	0,14–0,50	0,27	0,32
5–10	5–10	0,1–0,35	40–500	0,53–1,7	1,1	0,31

зависимости (6) вычислялась величина

$$\delta = \left[\frac{(t^*/T)^{1-2\alpha}}{(k/\hbar)^2(1-2\alpha)} \right]^{1/2} = \text{const}.$$

Экспериментальные результаты для среднего значения $\langle\delta\rangle$, среднеквадратичного отклонения σ_δ и диапазонов изменения параметров приведены в табл. 1. Результаты экспериментов показывают, что, в согласии со сделанными предсказаниями, с увеличением $k/\hbar$ и ростом α время t^* резко возрастет.

5. Проведенные исследования показывают, что квазиклассическое приближение для с.к.с. справедливо на временах $t_0 \propto n_{\text{хар}} \propto 1/\hbar$. Для конкретных систем оценка для t_0 может быть получена из (4). При этом интересно отметить, что в некоторых случаях (6) $(k = k(t),\ \alpha > 0{,}5)$ квазиклассика применима на всех временах. Знание времени t_0, на котором применимо квазиклассическое рассмотрение, может быть полезным при изучении возбуждения нелинейных квантовых систем внешним переменным полем.

Автор выражает искреннюю благодарность Б.В. Чирикову за внимание к работе и ценные замечания, Г.М. Заславскому, Ф.М. Израйлеву, Дж. Казати, А.И. Мильштейну, Дж. Форду – за стимулирующие дискуссии, В.В. Соколову и С.А. Хейфецу – за критическое обсуждение, а также В.В. Вечеславову – за консультации по численным методам и Л.Ф. Хайло – за помощь в проведении вычислений.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
30 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э.В. Шуряк*, ЖЭТФ, т. 71, № 6, 2039 (1976). [2] *G. Casati, B.V. Chirikov et al.*, Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, v. 93, Lecture Notes in Physics, N.Y., 1979; Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 78–46, Новосибирск, 1978. [3] *G.P. Berman*; *G.M. Zaslavsky*, Physica, v. 91A, 450 (1978). [4] *Г.П. Берман, Г.М. Заславский*, Препринт ИФ СО-78, Красноярск, 1978. [5] *Ф.М. Израйлев, Д.Л. Шепелянский*, ДАН, т. 249, № 5, 1103 (1979). [6] *M.V. Berry, N.L. Balazs et al.*, Annals Phys., v. 122, 26 (1979). [7] *Г.М. Заславский*, УФН, т. 129, № 2, 211 (1979). [8] *Н.В. Карлов, А.М. Прохоров*, УФН, т. 118, № 4, 583 (1976). [9] *Д.Л. Шепелянский*, Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 80–132, Новосибирск, 1980. [10] *В.В. Соколов*, Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 78–50, Новосибирск, 1978. [11] *Б.В. Чириков*, Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 267, Новосибирск, 1969. [12] *Г.М. Заславский, Б.В. Чириков*, УФН, т. 105, № 1; 3 (1971). [13] *B.V. Chirikov*, Phys.Rep., v. 52, № 5, 265 (1979). [14] *В.П. Маслов*, Журн.вычислит. матем. и матем.физ., т. 1, № 4, 638 (1961). [15] *В.М. Маслов, Н.В. Федорюк*, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., "Наука", 1976.