(3)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1981

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 49, № 1
октябрь, 1981

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Шепелянский Д. Л.

Исследуются свойства нелинейных квантовых систем, стохастических в классическом пределе. На примере конкретной модели показано, что для квантовой системы, в отличие от соответствующей классической, КС-энтропия равна нулю, а корреляции затухают не экспоненциальным, а только лишь степенным образом.

В последнее время значительно возрос интерес к динамике нелинейных квантовых систем [1–7], которые в классическом пределе ($\hbar=0$) являются системами Колмогорова (К) [8, 9]. В данной работе на примере простой модели показано, что такие квантовые системы не обладают типичными свойствами классических стохастических систем: отличной от нуля энтропией Колмогорова – Синая (КС) [10–11] и экспоненциальным затуханием корреляций.

Рассмотрим модель ротатора во внешнем поле с гамильтонианом:

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2J}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\tilde{k}(t)\cos\theta\,\delta_{\tilde{T}}(t), \tag{1}$$

где $\tilde{k}(t)$ – параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\tilde{T})$ – временной частокол дельта-функций (толчков), J – момент инерции ротатора, θ – угловая переменная. Далее $J=1$.

Соответствующая классическая задача при $\tilde{k}=\mathrm{const}$ подробно исследовалась в [12], где было показано, что при $\tilde{k}\tilde{T}\gg1$ энергия ротатора растет по диффузионному закону

$$E(t)=\frac{\tilde{k}^2}{4}t+E(0). \tag{2}$$

Здесь и далее t – безразмерное время, измеряемое в числе толчков. При этом почти для любых начальных условий, за исключением малых (при $\tilde{k}\tilde{T}\gg1$) островков устойчивости, близкие траектории расходятся экспоненциально: $d=d_0\exp(ht)$, где $d=\sqrt{(\tilde{T}\Delta p)^2+(\Delta\theta)^2}$, а $h\approx\ln(\tilde{k}\tilde{T}/2)$ (при $\tilde{k}\tilde{T}>4$) – КС-энтропия [12].

При исследовании квантовой системы (1) будем исходить из уравнений для гейзенберговских операторов, которые после интегрирования на периоде $\tilde{T}$ переходят в операторное отображение:

$$\hat{p}_{t+1}=\hat{p}_t+\tilde{k}(t)\sin\hat{\theta}_t,\quad \hat{\theta}_{t+1}=\hat{\theta}_t+\tilde{T}\hat{p}_{t+1}, \tag{3}$$

где $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ — операторы, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[\hat{p}_t, \hat{\theta}_t] = -i\hbar$. При $\hbar=0$ (3) переходит в стандартное отображение для классического ротатора [12].

Следует отметить, что в отображении (3) оператор $\hat{\theta}$ соответствует непрерывной фазе, меняющейся от $-\infty$ до ∞. При этом в случае плоского ротатора оператор $\hat{p}$ представим в виде $\hat{p}=-i\partial/\partial\theta$ [13]. Периодическую фазу φ, изменяющуюся в интервале от 0 до 2π, можно определить посредством соотношения $\hat{\varphi}=\Phi(\hat{\theta})$, где $\Phi(x)$ — периодическая (с периодом 2π) разрывная функция, причем $\Phi(x)=x$ для $0\leqslant x<2\pi$ [13]. Поскольку $\hat{\varphi}_t = U^+\Phi(\hat{\theta}_0)U=\Phi(\hat{\theta}_t)$ (U — оператор эволюции (1)), то для произвольной периодической функции g (с периодом 2π) имеет место соотношение $g(\hat{\varphi}_t)=g(\hat{\theta}_t)$, и поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться исследованием свойств оператора $\hat{\theta}_t$, однозначно определяющего $\hat{\varphi}_t$.

Для анализа полученного отображения (3) представим $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ в нормальной форме по отношению к начальным операторам $\hat{p}_0$, $\hat{\theta}_0$ (например, пусть все $\hat{p}_0$ стоят справа), после чего уже просто получить проекцию этих операторов на пространство начальных состояний. Такой метод исследования в квазиклассическом приближении был применен в [3].

Оказывается, что для операторного отображения (3) удается получить точную нормальную форму $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$. Это позволяет показать, что корреляции, убывавшие в классической системе экспоненциально быстро, в квантовой системе убывают со временем не быстрее некоторой степени времени, а КС-энтропия квантовой системы равна нулю.

Используя известное равенство (см., например, [14])

$$\exp(\hat{a}+\hat{b}) = \exp(\hat{b}(e^c-1)/c)\exp(\hat{a}) \tag{4}$$

для операторов с коммутационным соотношением $[\hat{a}, \hat{b}]=c\hat{b}$, получим

$$\begin{gathered} \hat{p}_1=\hat{p}_0+\tilde{k}(0)\sin\hat{\theta}_0, \qquad \hat{p}_2=\hat{p}_1+\Delta\hat{p}_2, \\ \Delta\hat{p}_2=\frac{\tilde{k}(1)}{2i}\left\{\sum_{m_0=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_{1,0})\exp\left\{i\frac{T}{2}(m_0+1)\right\}\times\right. \\ \left.\times\exp\{i(m_0+1)\hat{\theta}_0\}\exp\{i\hat{p}_0\tilde{T}\}-\text{к. с.}\right\}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $k_{1,0}=2k(0)\sin(T/2)$, $k(0)=\tilde{k}(0)/\hbar$, $T=\tilde{T}\hbar$, $J_{m_0}(k_{1,0})$ — функция Бесселя, к.с. — комплексно-сопряженный член. Из (3), (5) следует, что нормальная форма $\Delta\hat{p}_3=\tilde{k}(2)\sin\hat{\theta}_2$ по отношению к $\hat{p}_1$, $\hat{\theta}_1$ получается из $\Delta\hat{p}_2$ заменой индексов $1\to2$, $0\to1$. Применяя (4), получим из нее нормальную форму $\Delta\hat{p}_3$ по отношению к $\hat{p}_0$, $\hat{\theta}_0$. Произвольное $\Delta\hat{p}_{t+1}=\tilde{k}(t)\sin\hat{\theta}_t$ получается из $\Delta\hat{p}_t$ рекуррентным способом. Так, если $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ уже представлены в нормальной форме, то

$$\hat{p}_{t+1}=\hat{p}_t+\Delta\hat{p}_{t+1}, \qquad \hat{\theta}_{t+1}=\hat{\theta}_t+\tilde{T}\hat{p}_{t+1}, \tag{6}$$

$$\Delta\hat{p}_{t+1}=\frac{\tilde{k}(t)}{2i}\left\{\sum_{m_0,m_1,\ldots,m_{t-1}=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_{1,t-1})J_{m_1}(k_{2,t-2})\ldots J_{m_{t-1}}(k_{t,0})\times\right.$$

$$\times \exp(i\varphi_{m_0,\ldots,m_{t-1}})\exp(i\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\hat\theta_0)\exp(i\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}}T\hat p_0)-\text{к. с.}\Big\},$$

где $\varphi_{m_0}=\frac{T}{2}(1+m_0)$, $\alpha_{m_0}=m_0+1$, $\beta_{m_0}=1$,

$$\varphi_{m_0,\ldots,m_n}=\varphi_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+\frac{T}{2}m_n(\alpha_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+\beta_{m_0,\ldots,m_{n-1}})+\frac{T}{2}\alpha^2_{m_0,\ldots,m_{n-1}},$$

$$\alpha_{m_0,\ldots,m_n}=\alpha_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+m_n,\quad \beta_{m_0,\ldots,m_n}=\alpha_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+\beta_{m_0,\ldots,m_{n-1}}$$

$$k_{n,t}=2k(t)\sin\frac{T}{2}\beta_{m_0,\ldots,m_n}.$$

Для исследования полученного отображения спроектируем (6) на базис начальных состояний $\psi_n(\theta_0)=(2\pi)^{-1/2}e^{in\theta_0}$. Тогда (6) переходит в c-числовое отображение (с заменой $\hat p_0$ на $\hbar n$), которое можно рассматривать как отображение, описывающее динамику некоторой классической системы, для которой средние значения p_t, θ_t $\left(\langle p_t\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}p_t(n,\theta_0)d\theta_0\right)$ совпадают с квантовыми средними и которая при $\hbar\to0$ переходит в классическую систему со стандартным отображением ((3) с $\hbar=0$). Таким образом, для понимания свойств квантовой системы следует изучить классическую систему, описываемую отображением (6), где p_0 и θ_0 — c-числа. Отметим, что полученное отображение не сохраняет якобиан $\mathcal{J}=\partial(p_t,\theta_t)/\partial(p_0,\theta_0)$ (при $\hbar=0$, $\mathcal{J}=1$), который со временем осциллирует, что указывает на наличие «затухания» с переменным знаком.

Рассмотрим случай, когда $k(t)=k=\text{const}$. В классике ($\hbar=0$) $m_0\sim kT$, $m_1\sim m_0kT\sim(kT)^2$ и т. д. Поэтому $\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\sim(kT)^t$, $\partial\theta_t/\partial\theta_0\sim\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\sim(kT)^t$ и близкие траектории экспоненциально быстро расходятся. При $\hbar\neq0$ для $t<t_s$ имеем

(7) $$t_s\sim\ln(\bar k/\hbar)/\ln(\bar kT),$$

т. е. пока $T\beta_{m_0,\ldots,m_{t_s}}\ll1$, синус в функции Бесселя в (6) можно заменить аргументом, и тогда по-прежнему имеет место локальная неустойчивость близких траекторий. Когда $t>t_s$, воспользуемся тем, что в (6) $|m_n|\leqslant2k$ (иначе $J_{m_n}(k)$ — экспоненциально мал), и, следовательно, $|\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}|\leqslant2kt$, $|\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}}|\leqslant2kt^2$. Тогда $d/d_0\sim(|\beta_{m_0,\ldots,m_t}|+|\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}|)\leqslant2kt^2$ при $t>t_s$, и энтропия h убывает со временем согласно формуле

(8) $$h\sim(\ln k+2\ln t)/t.$$

Таким образом, для системы (1) энтропия равна нулю, и, значит, (1) не является K-системой, хотя в то же время для соответствующей классической системы $h\approx\ln(kT/2)>0$ ($kT>4$) [12]. Отметим, что при $k(t)=k(0)t^\alpha$ энтропия также стремится к нулю по закону, близкому к (8) (перед $\ln t$ стоит другая константа). И только когда $k(t)\sim\exp(\mu t)$ (реально этот случай не представляет физического интереса), энтропия квантовой системы отлична от нуля: $h=\mu$.

Рассмотрим теперь, как ведут себя разновременные корреляторы в квантовой системе (1): $R(t,n,q)={}^1/_2\langle n|e^{-iq\hat\theta_0}e^{i\hat\theta_t}+e^{i\hat\theta_t}e^{-iq\hat\theta_0}|n\rangle$, где среднее берется по начальному состоянию $\psi_n(\theta_0)=(2\pi)^{-1/2}\exp(in\theta_0)$. Из (6) получаем выражение для $R(t, n, q)$ $(k=\mathrm{const})$:

$$R(t, n, q) = \frac{1}{2} \sum_{m_0, \ldots, m_{t-1}} J_{m_0}(k_1) J_{m_1}(k_2) \ldots J_{m_{t-1}}(k_t) \exp(i\varphi_{m_0,\ldots,m_{t-1}}) \times \tag{9}$$
$$\times \exp(i\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}} Tn)(1+\exp(-i\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}} Tq))\delta_{\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}, q}.$$

При $t<t_s$ квантовыми поправками в (9) можно пренебречь и воспользоваться классическим значением R. Тогда $R(t, n, q) \sim e^{-\sigma t}$, где $\sigma \sim {}^1/_2 \ln(kT)$ [3, 15]. К моменту $t \sim t_s$ (7) корреляции достигают величины $R(t_s, n, q) \sim \sim 1/k^{1/2}$, и для дальнейшего вычисления R надо использовать точное выражение (9), что представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся лишь грубой оценкой и нижней границей для $|R(t, n, q)|$.

При $t \gg t_s$ почти для всех m_j $(j>t_s)$ $k_j \sim k$. Считая также, что φ и βT равновероятно распределены в интервале $[0, 2\pi]$ (тогда $\sum\limits_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(k) e^{i\varphi_{m_j}} \simeq 1$) получим $R(t, n, q) \sim R(t_s, n, q) \sim k^{-1/2}$, $t>t_s$. Для нахождения максимальной скорости убывания $R(t, n, q)$ воспользуемся условием унитарности оператора $e^{i\hat{\theta}_t}$ и тождеством $\langle n|\exp(-i\theta_t)\exp(i\theta_t)|n\rangle = 1$, из которого имеем $\exp(i\theta_t)|n\rangle = \left(\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(n)} e^{im\theta_0}\right)|n\rangle$ и $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |A_m^{(n)}|^2 = 1$. Но из (6) следует (т. к. $\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}} \sim kt$), что сумма по m содержит $m_{\max} \sim kt$ членов ($A_m^{(n)}$ с $|m| > > m_{\max}$ экспоненциально малы). Предполагая, что все A_m с $|m| < m_{\max}$ одного порядка (в противном случае найдется q с $|q| < m_{\max}$, для которого корреляции будут убывать медленнее чем (10)), и используя точное равенство $R(t, n, q) = {}^1/_2 (A_q^{(n)} + A_q^{(n-q)})$, получим для $t \gg t_s$

$$|R(t, n, q)| \geqslant 1/\sqrt{kt}. \tag{10}$$

В случае $k(t) = kt^\alpha$ в (10) надо сделать замену $t \to t^{1+\alpha}/(1+\alpha)$.

Отметим, что хотя уже через время $t \sim t_s$ классическое значение коррелятора будет отличаться от квантового (при сравнении рассматриваем область квазиклассики), абсолютная величина коррелятора будет малой $R \sim \sim \sqrt{\hbar/\bar{k}}$, и поэтому величины, не уменьшающиеся в классике (например, энергия ротатора $E = \langle n|{}^1/_2 \hat{p}_t^2|n\rangle$), будут отличаться на малую величину $\sim (\hbar/\bar{k})^{1/2}$ в течение времени $t_0 \propto 1/\hbar$ (число корреляторов растет со временем по степенному закону). Более точная оценка для t_0 [7] дает $(\alpha \leqslant {}^1/_2)$

$$t_0 \sim [(\bar{k}/\hbar)^2 (1-2\alpha)]^{1/(1-2\alpha)}. \tag{11}$$

Интересно, что при $\alpha > {}^1/_2$ квантовые поправки остаются малыми на всех временах.

В заключение следует заметить, что причиной степенного убывания корреляций является степенной рост числа гармоник θ в U со временем (U — оператор эволюции (1)), или другими словами числа заселенных уровней невозмущенной системы (один толчок захватывает $\approx 2k$ уровней невозмущенной системы). Ввиду этого число гармоник θ в $\hat{p}_t =$

$=U^+(-i\hbar\partial/\partial\theta)U$ также растет степенным образом, что и приводит к $h=0$ и неэкспоненциальному затуханию корреляций. Поскольку указанное свойство U имеет место практически для всех возмущений, то естественно ожидать, что и другие квантовые системы, стохастические в классическом пределе, будут обладать равной нулю КС-энтропией и степенным убыванием корреляций. Этот результат указывает на то, что непосредственное обобщение понятия колмогоровской энтропии на квантовые системы [16, 17], по-видимому, не окажется столь же важным, как в классических системах.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность Б. В. Чирикову за внимание к работе и ценные замечания, Г. П. Берману, Г. М. Заславскому, Ф. М. Израйлеву, В. В. Соколову и С. А. Хейфецу за полезное обсуждение.

Литература

[1] *Шуряк Э. В.* Нелинейный резонанс в квантовых системах.— ЖЭТФ, 1976, *71*, № 6, 2039–2056.

[2] *Casati G., Chirikov B. V., Ford J., Izrailev F. M.* Stochastic Behaviour of a Quantum Pendulum under a Periodic Perturbation.— Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, *94*, p. 334–352 of Lecture Notes in Physics, Eds. G. Casati and J. Ford. New York: Springer, 1979; Стохастические колебания квантового маятника под действием периодического возмущения. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 78–46. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1978.

[3] *Berman G. P., Zaslavsky G. M.*— Physica, 1978, *91A*, № 3, 4, 450–460; 1979, *97A* № 3, 367–381.

[4] *Заславский Г. М.*– УФН, 1979, *129*, № 2, 211–238.

[5] *Berry M. V., Balas N. L., Tabor M., Voros A.*— Ann. Phys., 1979, *122*, № 1, 26–63.

[6] *Израйлев Ф. М., Шепелянский Д. Л.*– ДАН СССР, 1979, *249*, № 5, 1103–1107.

[7] *Шепелянский Д. Л.* Квазиклассическое приближение для стохастических квантовых систем. Препринт ИЯФ СО АН СССР 80–132. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1980.

[8] *Arnold V. I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: Benjamin, 1968.

[9] *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. Ереван: ЕГУ, 1973.

[10] *Колмогоров А. Н.*– ДАН СССР, 1958, *119*, № 5, 861–864; 1959, *124*, № 4, 754–755.

[11] *Синай Я. Г.*— Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, *30*, № 1, 15–68.

[12] *Chirikov B. V.*— Phys. Rep., 1979, *52*, № 5, 265–379.

[13] Когерентные состояния в квантовой теории. Сб. статей. М.: Мир, 1972, 146 с.

[14] *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.

[15] *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.

[16] *Connes A., Stormer E.*— Acta. Math., 1975, *134*, № 3–4, 289–306.

[17] *Srinivas M. D.*— J. Math. Phys., 1978, *19*, № 9, 1952–1961.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.VIII.1980 г.

ON DYNAMICAL STOCHASTICITY IN NONLINEAR QUANTUM SYSTEMS

Shepelyansky D. L.

Properties of nonlinear quantum systems which become stochastical in the classical limit are investigated. On an example of a concrete model it is shown that for a quantum system in contrast to the corresponding classical one, the KS-entropy is equal to zero and the correlations are damping out not by exponential but power-type law.
