СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Д.Л.Шепелянский

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

ПРЕПРИНТ 80-157

Новосибирск

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуются свойства нелинейных квантовых систем стохасти ческих в классическом пределе. На примере конкретной модели по казано, что для квантовой системы, в отличии от соответствующе классической, КС-энтропия равна нулю, а корреляции затухают не экспоненциальным, а только лишь степенным образом.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Д.Л.Шепелянский

В последнее время значительно возрос интерес к динамике нелинейных квантовых систем /I-7/, которые в классическом пределе ($\hbar$ =0) являются К-системами /8,9/. В данной работе на примере простой модели показано, что такие квантовые системы не обладают типичными свойствами классических стохастических систем: отличной от нуля КС – энтропией /IO-II/ и экспоненциальным затуханием корреляций.

Рассмотрим модель ротатора во внешнем поле с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tilde{k}(t)\cos\theta\,\delta_{\tilde{T}}(t) \qquad (I)$$

где $\tilde{k}(t)$ – параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\tilde{T})$ – временной частокол дельта-функций (толчков), J – момент инерции ротатора, θ – угловая переменная. Далее J =1.

Соответствующая классическая задача при $\tilde{k} = const$ подробно исследовалась в /I2/, где было показано, что при $\tilde{k}\tilde{T} \gg 1$ энергия ротатора растет по диффузионному закону

$$E(t) = \frac{\tilde{k}^2}{4}t + E(0) \qquad (2)$$

Здесь и далее t – безразмерное время измеряемое в числе толчков. При этом почти для любых начальных условий, за исключением малых (при $\tilde{k}\tilde{T} \gg 1$) островков устойчивости, близкие траектории расходятся экспоненциально: $d = d_0\exp(ht)$, где $d = \sqrt{(\tilde{T}\Delta p)^2 + (\Delta\theta)^2}$, а $h \approx \ln(\tilde{k}\tilde{T}/2)$ (при $\tilde{k}\tilde{T} > 4$) – КС – энтропия /I2/.

При исследовании квантовой системы (I) будем исходить из уравнений для гейзенберговских операторов, которые после интегрирования на периоде $\tilde{T}$ переходят в операторное отображение:

$$\hat{p}_{t+1} = \hat{p}_t + \tilde{k}(t)\sin\hat{\theta}_t$$
$$\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t + \tilde{T}\,\hat{p}_{t+1} \tag{3}$$

где $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ – операторы удовлетворяющие коммутационному соотношению $[\hat{p}_t, \hat{\theta}_t] = -i\hbar$. При $\hbar$ =0 (3) переходит в стандартное отображение для классического ротатора /I2/.

Для анализа полученного отображения представим $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ в нормальной форме по отношению к начальным операторам $\hat{p}_0$, $\hat{\theta}_0$ (например, пусть все $\hat{p}_0$ стоят справа), после чего уже просто получить проекцию этих операторов на пространство начальных состояний. Такой метод исследования в квазиклассическом приближении был применен в /3/.

Используя известное равенство

$$exp(\hat{a} + \hat{b}) = exp\left(\hat{b}\,\frac{e^c - 1}{c}\right)exp(\hat{a}) \tag{4}$$

для операторов с коммутационным соотношением $[\hat{a}, \hat{b}] = c\hat{b}$, получим

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_0 + \tilde{k}(0)\sin\hat{\theta}_0\,, \quad \hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \Delta\hat{p}_2 \tag{5}$$
$$\Delta\hat{p}_2 = \frac{\tilde{k}(1)}{2i}\left\{\sum_{m_0=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_{1,0})\,e^{i\frac{T}{2}(m_0+1)}e^{i(m_0+1)\hat{\theta}_0}e^{i\hat{p}_0} - к.с.\right\}$$

где $k_{1,0} = 2k(0)\sin T/2$, $k(0) = \tilde{k}(0)/\hbar$, $T = \tilde{T}\hbar$, $J_{m_0}(k_{1,0})$ – функция Бесселя, к.с. – комплексносопряженный член. Из (3), (5) следует, что нормальная форма $\Delta\hat{p}_3 = \tilde{k}(2)\sin\hat{\theta}_2$ по отношению к $\hat{p}_1$, $\hat{\theta}_1$ получается из $\Delta\hat{p}_2$ заменой индексов $1 \to 2$, $0 \to 1$. Применяя (4) получим из нее нормальную форму $\Delta\hat{p}_3$ по отношению к $\hat{p}_0$, $\hat{\theta}_0$. Произвольное $\Delta\hat{p}_{t+1} = \tilde{k}(t)\sin\hat{\theta}_t$ получается из $\Delta\hat{p}_t$ рекурентным способом. Так если $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ уже представлены в нормальной форме, то

$$\hat{p}_{t+1} = \hat{p}_t + \Delta\hat{p}_{t+1}$$
$$\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t + \tilde{T}\,\hat{p}_{t+1}$$

$$\Delta\hat{p}_{t+1} = \frac{\tilde{k}(t)}{2i}\Big\{\sum_{m_0, m_1, \dots m_{t-1} = -\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_{1,t-1})\,J_{m_1}(k_{2,t-2}) \times \dots$$
$$\dots \times J_{m_{t-1}}(k_{t,0}) \cdot exp(i\,\varphi_{m_0,\dots m_{t-1}}) \times \tag{6}$$
$$\times\, exp(i\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}}\hat{\theta}_0) \cdot exp(i\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}\tilde{T}\hat{p}_0) - к.с.\Big\}$$

где $\varphi_{m_0} = \frac{T}{2}(1 + m_0)$, $\alpha_{m_0} = m_0 + 1$, $\beta_{m_0} = 1$,

$$\varphi_{m_0,\dots,m_n} = \varphi_{m_0,\dots,m_{n-1}} + \frac{T}{2} m_n(\alpha_{m_0,\dots,m_{n-1}} + \beta_{m_0,\dots,m_{n-1}}) + \frac{T}{2}\alpha^2_{m_0,\dots,m_{n-1}}$$

$$\alpha_{m_0,\dots,m_n} = \alpha_{m_0,\dots,m_{n-1}} + m_n\,, \quad \beta_{m_0,\dots,m_n} = \alpha_{m_0,\dots,m_{n-1}} + \beta_{m_0,\dots,m_{n-1}}$$
$$k_{n,t} = 2k(t)\sin\frac{T}{2}\beta_{m_0,\dots,m_n}\,.$$

Для исследования полученного отображения спроектируем (6) на базис начальных состояний $\psi_n(\theta_0) = (2\pi)^{-1/2}e^{in\theta_0}$. Тогда (6) переходит в C –числовое отображение (с заменой $\hat{p}_0$ на $\hbar n$), которое можно рассматривать как отображение описывающее динамику некоторой классической системы, для которой средние значения p_t, θ_t $\left(\langle p_t \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_t(n, \theta_0)\,d\theta_0\right)$ совпадают с квантовыми средними и которая при $\hbar \to 0$ переходит в классическую систему со стандартным отображением ((3) с $\hbar$ =0). Таким образом для понимания свойств квантовой системы следует изучить классическую систему описываемую отображением (6) где p_0 и θ_0 – С–числа. Отметим, что полученное отображение не сохраняет якобиан $J = \frac{\partial(p_t, \theta_t)}{\partial(p_0, \theta_0)}$, (при $\hbar$ =0 J =1), который со временем осциллирует, что указывает на наличие "затухания" с переменным знаком.

Рассмотрим случай когда $k(t) = k = const$. В классике ($\hbar$ =0) $m_0 \sim kT$, $m_1 \sim m_0 kT \sim (kT)^2$ и т.д. Поэтому $\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}} \sim (kT)^t$, $\frac{\partial\theta_t}{\partial\theta_0} \sim \alpha_{m_0 \dots m_{t-1}} \sim (kT)^t$ и близкие траектории экспоненциально быстро расходятся. При $\hbar \neq 0$ для $t < t_s$.

$$t_s \sim \frac{\ln(\tilde{k}/\hbar)}{\ln(\tilde{k}\tilde{T})} \qquad (7)$$

т.е. пока $T\beta_{m_0,\dots,m_{t_s}} << 1$, синус в функции Бесселя в (6) можно заменить аргументом и тогда попрежнему имеет место локальная неустойчивость близких траекторий. Когда $t > t_s$ воспользуемся тем, что в (6) $|m_n| \le 2k$ (иначе $J_{m_n}(k)$ – экспоненциально мал) и следовательно $|\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}}| \le 2kt$, $|\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}| \le 2kt^2$. Тогда при $t > t_s$ $d/d_0 \sim (|\beta_{m_0\dots m_t}| + |\alpha_{m_0\dots m_t}|) \le 2kt^2$ и энтропия h убывает со временем как

$$h \sim \frac{\ln k + 2\ln t}{t} \qquad (8)$$

Таким образом для системы (I) энтропия равна нулю и значит (I) не является К-системой, хотя в то же время для соответствующей классической системы $h \approx \ln(kT/2) > 0\ (kT>4)$ /I2/. Отметим что при $k(t) = k(0)\,t^\alpha$ энтропия также стремится к нулю по закону близкому к (8) (перед $\ln t$ стоит другая константа). И только когда $k(t) \sim \exp(\mu t)$ (реально этот случай не представляет физического интереса) энтропия квантовой системы отлична от нуля: $h = \mu$.

Рассмотрим теперь как ведут себя разновременные корреляторы в квантовой системе (I): $R(t,n,q) = 1/2 \langle n| e^{-iq\hat\theta_0} e^{i\hat\theta_t} + e^{i\hat\theta_t} e^{-iq\hat\theta_0}|n\rangle$, где среднее берется по начальному состоянию $\psi_n(\theta_0) = (2\pi)^{-1/2}\exp(in\theta_0)$. Из (6) получаем выражение для $R(t,n,q)$ $(k = const)$:

$$R(t,n,q) = \frac12 \sum_{m_0,\dots,m_{t-1}} J_{m_0}(k_1) J_{m_1}(k_2)\dots J_{m_{t-1}}(k_t) \cdot \exp(i\varphi_{m_0,\dots,m_{t-1}})\exp(i\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}Tn)\cdot (1+\exp(-i\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}Tq))\cdot\delta_{\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}},\,q} \qquad (9)$$

При $t < t_s$ квантовыми поправками в (9) можно пренебречь и воспользоваться классическим значением R. Тогда $R(t,n,q) \sim e^{-\sigma t}$, где $\sigma \sim \frac12\ln(kT)$ /3,I3/. К моменту $t\sim t_s$ (7) корреляции достигают величины $R(t_s,n,q)\sim 1/k^{1/2}$ и для дальнейшего вычисления R надо использовать точное выражение (9), что представляет значительные трудности. Поэтому

ограничимся лишь грубой оценкой и нижней границей для $|R(t,n,q)|$.

При $t >> t_s$ почти для всех m_j $(j > t_s)$ $k_j \sim k$. Считая также, что φ и βT равновероятно распределены в интервале $[0,2\pi]$ (тогда $\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(k)e^{i\varphi_{m_j}} \approx 1$) получим: $R(t,n,q) \sim R(t_s,n,q) \sim k^{-1/2}$, $t > t_s$.
Для нахождения максимальной скорости убывания $R(t,n,q)$ воспользуемся условием унитарности оператора $e^{i\hat\theta_t}$ и тождеством $\langle n|\exp(-i\hat\theta_t)\exp(i\hat\theta_t)|n\rangle = 1$, из которого имеем:
$\exp(i\hat\theta_t)|n\rangle = (\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(n)} e^{im\theta_0})|n\rangle$ и $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|A_m^{(n)}|^2 = 1$.
Но из (6) следует (т.к. $\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}} \sim kt$), что сумма по m содержит $m_{max} \sim kt$ членов ($A_m^{(n)}$ с $|m| > m_{max}$ экспоненциально малы). Предполагая, что все A_m с $|m| < m_{max}$ одного порядка (в противном случае найдется q с $|q| < m_{max}$ для которого корреляции будут убывать медленнее чем (I0)) и используя точное равенство $R(t,n,q) = \frac12(A_q^{(n)} + A_q^{(n-q)})$ получим для $t >> t_s$:

$$|R(t,n,q)| \gtrsim \frac{1}{\sqrt{kt}} \qquad (I0)$$

В случае $k(t) = kt^\alpha$ в (I0) надо сделать замену $t \to t^{1+\alpha}/(1+\alpha)$.

Отметим, что хотя уже через время $t \sim t_s$ классическое значение коррелятора будет отличаться от квантового (при сравнении рассматриваем область квазиклассики) абсолютная величина коррелятора будет малой $R \sim \sqrt{\hbar/\tilde k}$ и поэтому величины не уменьшающиеся в классике (например, энергия ротатора $E = \langle n|\frac12\hat p_t^2|n\rangle$) будут отличаться на малую величину $\sim(\hbar/\tilde k)^{1/2}$ в течении времени $t_0 \propto 1/\hbar$ (число корреляторов растет со временем по степенному закону). Более точная оценка для t_0 /7/ дает $(\alpha \le 1/2)$:

$$t_0 \sim \left[(\tilde k/\hbar)^2(1-2\alpha)\right]^{\frac{1}{1-2\alpha}} \qquad (II)$$

Интересно, что при $\alpha > 1/2$ квантовые поправки остаются малыми на всех временах.

В заключении следует заметить, что причиной степенного убывания корреляций является степенной рост числа гармоник θ в U со временем (U – оператор эволюции (I)), или другими словами - числа заселенных уровней невозмущенной системы (один толчок захватывает $\approx 2k$ уровней невозмущенной системы). Ввиду этого число гармоник θ в $\hat{P}_t = U^+(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta})U$ также растет степенным образом, что и приводит к h =0 и неэкспоненциальному затуханию корреляций. Поскольку указанное свойство U имеет место практически для всех возмущений то естественно ожидать, что и другие квантовые системы, стохастические в классическом пределе, будут обладать равной нулю КС - энтропией и степенным убыванием корреляций. Этот результат указывает на то, что обобщение понятия колмогоровской энтропии на квантовые системы /I4,I5/, по-видимому, не представляют интереса для значительного класса физических систем.

Пользуясь случаем автор выражает искреннюю благодарность Б.В.Чирикову, за внимание к работе и ценные замечания, Г.М. Заславскому, Ф.М.Израйлеву, В.В.Соколову и С.А.Хейфецу - за полезное обсуждение.

Литература:

I. Э.В.Шуряк. ЖЭТФ, 71, 2039, 1976.
2. G. Casati, B.V. Chirikov, J. Ford and F.M. Izraelev. Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Vol. 93 of Lecture Notes in Physics, Eds. G. Casati and J. Ford, Springer, New York, 1979; препринт ИЯФ СОАН СССР, 78-46, Новосибирск, 1978.
3. G.P. Berman, G.M. Zaslavsky. Physica, 91A, 450, 1978; 97A, 367, 1979.
4. Г.М.Заславский. УФН, I29, 2II, 1979.
5. M.V. Berry, N.L. Balas et. al.. Ann. Phys., 122, 26, 1979.
6. Ф.М.Израйлев, Д.Л.Шепелянский. ДАН СССР, 249, II03, 1979.
7. Д.Л.Шепелянский, Препринт ИЯФ СО АН СССР 80-I32, 1980.
8. V.I. Arnold, A. Avez. Ergodic Problems of Classical Mecanics (Benjamin, New York, 1968).
9. Я.Г.Синай. Введение в эргодическую теорию, Ереван, ЕГУ, 1973.
IO. А.Н.Колмогоров. ДАН СССР, II9, 86I, 1958; 124, 754, 1959.
II. Я.Г.Синай. Изв.АН СССР, матем., 30, I5, 1966.
I2. B.V. Chirikov. Phys. Reports, 52, 265, 1979.
I3. Г.М.Заславский. Статистическая необратимость в нелинейных системах, "Наука", М., 1970.
I4. A. Connes, E. Stormer. Acta. Math., 134, 289, 1975.
I5. M.D. Srinivas. J. Math. Phys., 19, 1952, 1977.