ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 49, № 1
октябрь, 1981

# О ДИНАМИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Шепелянский Д. Л.

Исследуются свойства нелинейных квантовых систем, стохастических в классическом пределе. На примере конкретной модели показано, что для квантовой системы, в отличие от соответствующей классической, КС-энтропия равна нулю, а корреляции затухают не экспоненциальным, а только лишь степенным образом.

В последнее время значительно возрос интерес к динамике нелинейных квантовых систем [1—7], которые в классическом пределе ($\hbar=0$) являются системами Колмогорова (К) [8, 9]. В данной работе на примере простой модели показано, что такие квантовые системы не обладают типичными свойствами классических стохастических систем: отличной от нуля энтропией Колмогорова — Синая (КС) [10—11] и экспоненциальным затуханием корреляций.

Рассмотрим модель ротатора во внешнем поле с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tilde{k}(t)\cos\theta\,\delta_{\tilde{T}}(t), \tag{1}$$

где $\tilde{k}(t)$ — параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\tilde{T})$ — временной частокол дельта-функций (толчков), $J$ — момент инерции ротатора, $\theta$ — угловая переменная. Далее $J=1$.

Соответствующая классическая задача при $\tilde{k}=\text{const}$ подробно исследовалась в [12], где было показано, что при $\tilde{k}\tilde{T}\gg1$ энергия ротатора растет по диффузионному закону

$$E(t) = \frac{\tilde{k}^2}{4}t + E(0). \tag{2}$$

Здесь и далее $t$ — безразмерное время, измеряемое в числе толчков. При этом почти для любых начальных условий, за исключением малых (при $\tilde{k}\tilde{T}\gg1$) островков устойчивости, близкие траектории расходятся экспоненциально: $d=d_0\exp(ht)$, где $d=\sqrt{(\tilde{T}\Delta p)^2+(\Delta\theta)^2}$, а $h\approx\ln(\tilde{k}\tilde{T}/2)$ (при $\tilde{k}\tilde{T}>4$) — КС-энтропия [12].

При исследовании квантовой системы (1) будем исходить из уравнений для гейзенберговских операторов, которые после интегрирования на периоде $\tilde{T}$ переходят в операторное отображение:

$$\hat{p}_{t+1}=\hat{p}_t+\tilde{k}(t)\sin\hat{\theta}_t, \quad \hat{\theta}_{t+1}=\hat{\theta}_t+\tilde{T}\hat{p}_{t+1}, \tag{3}$$

где $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ — операторы, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[\hat{p}_t, \hat{\theta}_t]=-i\hbar$. При $\hbar=0$ (3) переходит в стандартное отображение для классического ротатора [12].

Следует отметить, что в отображении (3) оператор $\hat{\theta}$ соответствует непрерывной фазе, меняющейся от $-\infty$ до $\infty$. При этом в случае плоского ротатора оператор $\hat{p}$ представим в виде $\hat{p}=-i\partial/\partial\theta$ [13]. Периодическую фазу $\varphi$, изменяющуюся в интервале от 0 до $2\pi$, можно определить посредством соотношения $\hat{\varphi}=\Phi(\hat{\theta})$, где $\Phi(x)$ — периодическая (с периодом $2\pi$) разрывная функция, причем $\Phi(x)=x$ для $0\leqslant x<2\pi$ [13]. Поскольку $\hat{\varphi}_t=$ $=U^+\Phi(\hat{\theta}_0)U=\Phi(\hat{\theta}_t)$ ($U$ — оператор эволюции (1)), то для произвольной периодической функции $g$ (с периодом $2\pi$) имеет место соотношение $g(\hat{\varphi}_t)=g(\hat{\theta}_t)$, и поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться исследованием свойств оператора $\hat{\theta}_t$, однозначно определяющего $\hat{\varphi}_t$.

Для анализа полученного отображения (3) представим $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ в нормальной форме по отношению к начальным операторам $\hat{p}_0$, $\hat{\theta}_0$ (например, пусть все $\hat{p}_0$ стоят справа), после чего уже просто получить проекцию этих операторов на пространство начальных состояний. Такой метод исследования в квазиклассическом приближении был применен в [3].

Оказывается, что для операторного отображения (3) удается получить точную нормальную форму $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$. Это позволяет показать, что корреляции, убывавшие в классической системе экспоненциально быстро, в квантовой системе убывают со временем не быстрее некоторой степени времени, а КС-энтропия квантовой системы равна нулю.

Используя известное равенство (см., например, [14])

$$\exp(\hat{a}+\hat{b})=\exp(\hat{b}(e^c-1)/c)\exp(\hat{a}) \tag{4}$$

для операторов с коммутационным соотношением $[\hat{a}, \hat{b}]=c\hat{b}$, получим

$$\begin{gathered}\hat{p}_1=\hat{p}_0+\tilde{k}(0)\sin\hat{\theta}_0, \qquad \hat{p}_2=\hat{p}_1+\Delta\hat{p}_2,\\ \Delta\hat{p}_2=\frac{\tilde{k}(1)}{2i}\left\{\sum_{m_0=-\infty}^{\infty}J_{m_0}(k_{1,0})\exp\left\{i\frac{T}{2}(m_0+1)\right\}\times\right.\\ \left.\times\exp\{i(m_0+1)\hat{\theta}_0\}\exp\{i\hat{p}_0\tilde{T}\}-\text{к. с.}\right\},\end{gathered} \tag{5}$$

где $k_{1,0}=2k(0)\sin(T/2)$, $k(0)=\tilde{k}(0)/\hbar$, $T=\tilde{T}\hbar$, $J_{m_0}(k_{1,0})$ — функция Бесселя, к.с. — комплексно-сопряженный член. Из (3), (5) следует, что нормальная форма $\Delta\hat{p}_3=\tilde{k}(2)\sin\hat{\theta}_2$ по отношению к $\hat{p}_1$, $\hat{\theta}_1$ получается из $\Delta\hat{p}_2$ заменой индексов $1\to2$, $0\to1$. Применяя (4), получим из нее нормальную форму $\Delta\hat{p}_3$ по отношению к $\hat{p}_0$, $\hat{\theta}_0$. Произвольное $\Delta\hat{p}_{t+1}=\tilde{k}(t)\sin\hat{\theta}_t$ получается из $\Delta\hat{p}_t$ рекуррентным способом. Так, если $\hat{p}_t$, $\hat{\theta}_t$ уже представлены в нормальной форме, то

$$\hat{p}_{t+1}=\hat{p}_t+\Delta\hat{p}_{t+1}, \qquad \hat{\theta}_{t+1}=\hat{\theta}_t+\tilde{T}\hat{p}_{t+1}, \tag{6}$$

$$\Delta\hat{p}_{t+1}=\frac{\tilde{k}(t)}{2i}\left\{\sum_{m_0,m_1,\ldots,m_{t-1}=-\infty}^{\infty}J_{m_0}(k_{1,t-1})J_{m_1}(k_{2,t-2})\ldots J_{m_{t-1}}(k_{t,0})\times\right.$$

$$\times \exp(i\varphi_{m_0,\ldots,m_{t-1}})\exp(i\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\hat{\theta}_0)\exp(i\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}}T\hat{p}_0)-\text{к. с.}\Big\},$$

где $\varphi_{m_0}=\dfrac{T}{2}(1+m_0)$, $\alpha_{m_0}=m_0+1$, $\beta_{m_0}=1$,

$$\varphi_{m_0,\ldots,m_n}=\varphi_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+\frac{T}{2}m_n(\alpha_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+\beta_{m_0,\ldots,m_{n-1}})+\frac{T}{2}\alpha^2_{m_0,\ldots,m_{n-1}},$$

$$\alpha_{m_0,\ldots,m_n}=\alpha_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+m_n,\quad \beta_{m_0,\ldots,m_n}=\alpha_{m_0,\ldots,m_{n-1}}+\beta_{m_0,\ldots,m_{n-1}}$$

$$k_{n,t}=2k(t)\sin\frac{T}{2}\beta_{m_0,\ldots,m_n}.$$

Для исследования полученного отображения спроектируем (6) на базис начальных состояний $\psi_n(\theta_0)=(2\pi)^{-1/2}e^{in\theta_0}$. Тогда (6) переходит в $c$-числовое отображение (с заменой $\hat{p}_0$ на $\hbar n$), которое можно рассматривать как отображение, описывающее динамику некоторой классической системы, для которой средние значения $p_t$, $\theta_t$ $\left(\langle p_t\rangle=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}p_t(n,\theta_0)\,d\theta_0\right)$ совпадают с квантовыми средними и которая при $\hbar\to 0$ переходит в классическую систему со стандартным отображением ((3) с $\hbar=0$). Таким образом, для понимания свойств квантовой системы следует изучить классическую систему, описываемую отображением (6), где $p_0$ и $\theta_0$ — $c$-числа. Отметим, что полученное отображение не сохраняет якобиан $\mathcal{J}=\partial(p_t,\theta_t)/\partial(p_0,\theta_0)$ (при $\hbar=0$, $\mathcal{J}=1$), который со временем осциллирует, что указывает на наличие «затухания» с переменным знаком.

Рассмотрим случай, когда $k(t)=k=\text{const}$. В классике ($\hbar=0$) $m_0\sim kT$, $m_1\sim m_0kT\sim(kT)^2$ и т. д. Поэтому $\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\sim(kT)^t$, $\partial\theta_t/\partial\theta_0\sim\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\sim(kT)^t$ и близкие траектории экспоненциально быстро расходятся. При $\hbar\neq 0$ для $t<t_s$ имеем

(7) $$t_s\sim\ln(\tilde{k}/\hbar)/\ln(\tilde{k}\tilde{T}),$$

т. е. пока $T\beta_{m_0,\ldots,m_{t_s}}\ll 1$, синус в функции Бесселя в (6) можно заменить аргументом, и тогда по-прежнему имеет место локальная неустойчивость близких траекторий. Когда $t>t_s$, воспользуемся тем, что в (6) $|m_n|\leqslant 2k$ (иначе $J_{m_n}(k)$ — экспоненциально мал), и, следовательно, $|\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}|\leqslant 2kt$, $|\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}}|\leqslant 2kt^2$. Тогда $d/d_0\sim(|\beta_{m_0,\ldots,m_t}|+|\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}|)\leqslant 2kt^2$ при $t>t_s$, и энтропия $h$ убывает со временем согласно формуле

(8) $$h\sim(\ln k+2\ln t)/t.$$

Таким образом, для системы (1) энтропия равна нулю, и, значит, (1) не является K-системой, хотя в то же время для соответствующей классической системы $h\approx\ln(kT/2)>0$ $(kT>4)$ [12]. Отметим, что при $k(t)=k(0)t^\alpha$ энтропия также стремится к нулю по закону, близкому к (8) (перед $\ln t$ стоит другая константа). И только когда $k(t)\sim\exp(\mu t)$ (реально этот случай не представляет физического интереса), энтропия квантовой системы отлична от нуля: $h=\mu$.

Рассмотрим теперь, как ведут себя разновременные корреляторы в квантовой системе (1): $R(t,n,q)={}^1/_2\langle n|e^{-iq\hat{\theta}_0}e^{i\hat{\theta}_t}+e^{i\hat{\theta}_t}e^{-iq\hat{\theta}_0}|n\rangle$, где среднее берется по начальному состоянию $\psi_n(\theta_0)=(2\pi)^{-1/2}\exp(in\theta_0)$. Из (6) получаем выражение для $R(t, n, q)$ $(k=\text{const})$:

$$(9)\qquad R(t,n,q)=\frac{1}{2}\sum_{m_0,\ldots,m_{t-1}} J_{m_0}(k_1)J_{m_1}(k_2)\ldots J_{m_{t-1}}(k_t)\exp(i\varphi_{m_0,\ldots,m_{t-1}})\times$$
$$\times\exp(i\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}}Tn)(1+\exp(-i\beta_{m_0,\ldots,m_{t-1}}Tq))\delta_{\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}},q}.$$

При $t<t_s$ квантовыми поправками в (9) можно пренебречь и воспользоваться классическим значением $R$. Тогда $R(t, n, q)\sim e^{-\sigma t}$, где $\sigma\sim{}^1/_2\ln(kT)$ [3, 15]. К моменту $t\sim t_s$ (7) корреляции достигают величины $R(t_s, n, q)\sim$ $\sim 1/k^{1/2}$, и для дальнейшего вычисления $R$ надо использовать точное выражение (9), что представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся лишь грубой оценкой и нижней границей для $|R(t, n, q)|$.

При $t\gg t_s$ почти для всех $m_j$ $(j>t_s)$ $k_j\sim k$. Считая также, что $\varphi$ и $\beta T$ равновероятно распределены в интервале $[0, 2\pi]$ (тогда $\sum\limits_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(k)e^{i\varphi_{m_j}}\approx 1$) получим $R(t, n, q)\sim R(t_s, n, q)\sim k^{-1/2}$, $t>t_s$. Для нахождения максимальной скорости убывания $R(t, n, q)$ воспользуемся условием унитарности оператора $e^{i\hat{\theta}_t}$ и тождеством $\langle n|\exp(-i\hat{\theta}_t)\exp(i\hat{\theta}_t)|n\rangle\equiv 1$, из которого имеем $\exp(i\hat{\theta}_t)|n\rangle=\left(\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(n)}e^{im\theta_0}\right)|n\rangle$ и $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}|A_m^{(n)}|^2=1$. Но из (6) следует (т. к. $\alpha_{m_0,\ldots,m_{t-1}}\sim kt$), что сумма по $m$ содержит $m_{\max}\sim kt$ членов ($A_m^{(n)}$ с $|m|>$ $>m_{\max}$ экспоненциально малы). Предполагая, что все $A_m$ с $|m|<m_{\max}$ одного порядка (в противном случае найдется $q$ с $|q|<m_{\max}$, для которого корреляции будут убывать медленнее чем (10)), и используя точное равенство $R(t, n, q)={}^1/_2(A_q^{(n)}+A_q^{(n-q)})$, получим для $t\gg t_s$

$$(10)\qquad |R(t,n,q)|\geqslant 1/\sqrt{kt}.$$

В случае $k(t)=kt^\alpha$ в (10) надо сделать замену $t\to t^{1+\alpha}/(1+\alpha)$.

Отметим, что хотя уже через время $t\sim t_s$ классическое значение коррелятора будет отличаться от квантового (при сравнении рассматриваем область квазиклассики), абсолютная величина коррелятора будет малой $R\sim$ $\sim\sqrt{\hbar/\tilde{k}}$, и поэтому величины, не уменьшающиеся в классике (например, энергия ротатора $E=\langle n|{}^1/_2\hat{p}_t{}^2|n\rangle$), будут отличаться на малую величину $\sim(\hbar/\tilde{k})^{1/2}$ в течение времени $t_0\propto 1/\hbar$ (число корреляторов растет со временем по степенному закону). Более точная оценка для $t_0$ [7] дает $(\alpha\leqslant{}^1/_2)$

$$(11)\qquad t_0\sim[(\tilde{k}/\hbar)^2(1-2\alpha)]^{1/(1-2\alpha)}.$$

Интересно, что при $\alpha>{}^1/_2$ квантовые поправки остаются малыми на всех временах.

В заключение следует заметить, что причиной степенного убывания корреляций является степенной рост числа гармоник $\theta$ в $U$ со временем ($U$ — оператор эволюции (1)), или другими словами числа заселенных уровней невозмущенной системы (один толчок захватывает $\approx 2k$ уровней невозмущенной системы). Ввиду этого число гармоник $\theta$ в $\hat{p}_t=$

$=U^+(-i\hbar\partial/\partial\theta)U$ также растет степенным образом, что и приводит к $h=0$ и неэкспоненциальному затуханию корреляций. Поскольку указанное свойство $U$ имеет место практически для всех возмущений, то естественно ожидать, что и другие квантовые системы, стохастические в классическом пределе, будут обладать равной нулю КС-энтропией и степенным убыванием корреляций. Этот результат указывает на то, что непосредственное обобщение понятия колмогоровской энтропии на квантовые системы [16, 17], по-видимому, не окажется столь же важным, как в классических системах.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность Б. В. Чирикову за внимание к работе и ценные замечания, Г. П. Берману, Г. М. Заславскому, Ф. М. Израйлеву, В. Б. Соколову и С. А. Хейфецу за полезное обсуждение.

### Литература


[1] *Шуряк Э. В.* Нелинейный резонанс в квантовых системах.– ЖЭТФ, 1976, *71*, № 6, 2039–2056.

[2] *Casati G., Chirikov B. V., Ford J., Izrailev F. M.* Stochastic Behaviour of a Quantum Pendulum under a Periodic Perturbation.— Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, *94*, p. 334–352 of Lecture Notes in Physics, Eds. G. Casati and J. Ford. New York: Springer, 1979; Стохастические колебания квантового маятника под действием периодического возмущения. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 78–46. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1978.

[3] *Berman G. P., Zaslavsky G. M.*— Physica, 1978, *91A*, № 3, 4, 450–460; 1979, *97A* № 3, 367–381.

[4] *Заславский Г. М.*– УФН, 1979, *129*, № 2, 211–238.

[5] *Berry M. V., Balas N. L., Tabor M., Voros A.*— Ann. Phys., 1979, *122*, № 1, 26–63.

[6] *Израйлев Ф. М., Шепелянский Д. Л.*– ДАН СССР, 1979, *249*, № 5, 1103–1107.

[7] *Шепелянский Д. Л.* Квазиклассическое приближение для стохастических квантовых систем. Препринт ИЯФ СО АН СССР 80–132. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1980.

[8] *Arnold V. I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: Benjamin, 1968.

[9] *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. Ереван: ЕГУ, 1973.

[10] *Колмогоров А. Н.*– ДАН СССР, 1958, *119*, № 5, 861–864; 1959, *124*, № 4, 754–755.

[11] *Синай Я. Г.*– Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, *30*, № 1, 15–68.

[12] *Chirikov B. V.*— Phys. Rep., 1979, *52*, № 5, 265–379.

[13] Когерентные состояния в квантовой теории. Сб. статей. М.: Мир, 1972, 146 с.

[14] *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.

[15] *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.

[16] *Connes A., Stormer E.*— Acta. Math., 1975, *134*, № 3–4, 289–306.

[17] *Srinivas M. D.*— J. Math. Phys., 1978, *19*, № 9, 1952–1961.


Институт ядерной физики
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.VIII.1980 г.

## ON DYNAMICAL STOCHASTICITY IN NONLINEAR QUANTUM SYSTEMS

**Shepelyansky D. L.**

Properties of nonlinear quantum systems which become stochastical in the classical limit are investigated. On an example of a concrete model it is shown that for a quantum system in contrast to the corresponding classical one, the KS-entropy is equal to zero and the correlations are damping out not by exponential but power-type law.