

THE 9TH  
INTERNATIONAL  
CONFERENCE  
ON NONLINEAR  
OSCILLATIONS

VOLUME

2

QUALITATIVE  
METHODS  
OF THE THEORY  
OF NONLINEAR  
OSCILLATIONS

Edited by *Yu. A. Mitropolsky*

KIEV NAUKOVA DUMKA 1984

УДК 517.9

IX Международная конференция по нелинейным колебаниям: В 3-х т./ Под ред. Ю. А. Митропольского.—Киев: Наук. думка, 1984.— Т. 2. 488 с.

В сборнике, состоящем из трех томов, помещены доклады советских и зарубежных специалистов в области теории нелинейных колебаний и теории нелинейных дифференциальных уравнений, представленные на IX Международную конференцию по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа — 6 сентября 1981 г.).

Во второй том включены доклады, посвященные общей теории динамических систем, в особенности теории бифуркаций, изучению периодических, почти периодических, асимптотически периодических и других типов нелинейных колебаний в дифференциальных, дифференциально-функциональных, интегро-дифференциальных уравнениях, исследованию стохастического поведения в детерминированных системах. Приведены также доклады по теории устойчивости, относящиеся как к традиционным проблемам, так и к новым направлениям.

Для математиков и специалистов, использующих теорию нелинейных колебаний.

Библиогр. в конце статей.

Редакционная коллегия

*А. Н. Шарковский* (ответственный редактор тома), *А. А. Березовский*, *В. С. Королюк*, *В. Б. Ларин*, *И. А. Луковский*,  
*О. Б. Лыкова*

Редакция информационной литературы



(1) при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$  имеет вид

$$\dot{x} = \lambda(\varepsilon)x + X(x, y, z, \varepsilon)x,$$

$$\dot{y} = \gamma(\varepsilon)y + Y(x, y, z, \varepsilon)y,$$

$$\dot{z} = \mu(\varepsilon)z + Z(x, y, z, \varepsilon)z, \text{ если } |x|, |y|, |z| < \rho,$$

где  $X(0, 0, 0, \varepsilon) = Y(0, 0, 0, \varepsilon) = Z(0, 0, 0, \varepsilon)$  и  $\lambda(\varepsilon), \gamma(\varepsilon) > 0$ , а  $\mu(\varepsilon) < 0$ .

При сделанных предположениях при достаточно малых  $\varepsilon$  определено отображение  $H_\varepsilon$  по траекториям системы (1) секущей площадки  $S = \{(x, y, z) \mid |x|, |z| \leq r, y = r\}$ . Если рассмотреть пространство непрерывных функций  $z = g(y), |y| \leq r$ , удовлетворяющих условию Липшица с достаточно малой константой, то отображение  $H_\varepsilon$  порождает отображение в себя некоторого шара этого пространства. Непосредственные оценки решений системы (1) позволяют доказать, что  $H_\varepsilon$  — сжимающее отображение, если константа Липшица достаточно мала. Неподвижная точка  $g_\varepsilon(y)$  этого отображения дает инвариантную поверхность  $L_\varepsilon$  системы (1).

Отображение по траекториям  $H_\varepsilon^{-1}$  на кривой  $z = g_\varepsilon(y)$  является сжимающим, из чего следует существование неподвижной точки отображения  $H_\varepsilon$ , или, что то же самое, замкнутой траектории  $l_\varepsilon$  системы (1).

Заметим, что поверхность  $L_\varepsilon$  является неустойчивым многообразием траектории  $l_\varepsilon$ .

1. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. Дополнение 2 к книге Дж. Марден и М. Мак-Кракен «Бифуркации рождения цикла и ее приложения». — М.: 1980. — 368 с.
2. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. — Мат. сб., 1968, 77, (119), № 3, с. 461—472.

УДК 530.182

## Б. В. Чуриков, Д. Л. Шепелянский

Новосибирск, СССР

### СТАТИСТИКА ВОЗВРАТОВ ПУАНКАРЕ И СТРУКТУРА СТОХАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

1. Резонанс нелинейных колебаний гамильтоновой системы может быть описан и исследован в приближении маятника (например, [1]):

$$H_r(p, \psi, t) = \frac{p^2}{2M} + \varepsilon V_r \cdot \cos \psi + \varepsilon V [\cos(\nu\psi - \Theta) + \cos(\nu\psi + \Theta)]. \quad (1)$$

Первые два слагаемых соответствуют изолированному нелинейному резонансу, причем импульс  $p$  характеризует отклонение невозмущенных переменных действия от их резонансных значений; «масса»  $M$  связана с нелинейностью колебаний и выражается через производные от невозмущенных частот по действиям;  $\varepsilon$  — малый параметр возмущения, а  $V_r$  и  $\psi$  — соответственно амплитуда и фаза резонансной гармоники возмущения. Последнее слагаемое в (1) описывает взаимодействие данного резонанса с остальными. Фаза возмущения  $\Theta = \Omega t + \Theta_0$ , а частота  $\Omega$  характеризует отстройку от основного резонанса;  $\nu$  — некоторая действительная постоянная, зависящая от геометрии резонансов. В дальнейшем положим  $M = V_r = 1$  и  $\varepsilon V = \eta \sim \varepsilon \ll 1$ . При этом частота фазовых колебаний на резонансе  $\Omega_\Phi = \sqrt{\varepsilon}$ . Основным малым параметром взаимодействия резонансов является отношение  $1/\lambda = \Omega_\Phi/\Omega \ll 1$ . Малость  $1/\lambda$  означает, что резонансы хорошо разделены друг от друга.



Формальный математический анализ «простой» системы (1) наталкивается на значительные и все еще непреодолимые трудности, так как взаимодействие резонансов приводит к «расщеплению» невозмущенной сепаратрисы каждого из них и образованию сложной гомоклинической структуры. Эти трудности можно, однако, обойти, построив приближенно модифицированное отображение Пуанкаре в плоскости  $\psi = \pi$  [1]. Для системы (1) отображение имеет вид

$$\bar{\omega} = \omega + \xi \cdot \sin \Theta; \quad \bar{\Theta} = \Theta + \lambda \cdot \ln \frac{32}{|\omega|}, \quad (2)$$

где  $\omega = \frac{H_r}{\varepsilon} - 1$  — смещение относительно невозмущенной сепаратрисы;  $\Theta$  — фаза возмущения в плоскости  $\Psi = \pi$ , а

$$\xi = -2\pi \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{(2\lambda)^{2\nu}}{\Gamma(2\nu)} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Omega}{V\varepsilon}\right) \quad (3)$$

естественный малый параметр возмущения, по которому можно производить асимптотическое разложение. Вводя новую переменную  $y = \omega/\xi$  и пренебрегая постоянным сдвигом фазы  $\Theta$ , получаем отображение

$$\bar{y} = y + \sin \Theta; \quad \bar{\Theta} = \Theta - \lambda \cdot \ln |\bar{y}|, \quad (4)$$

которое и будет исследовано ниже.

2. Важнейшей характеристикой гомоклинической структуры в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса является ее полная ширина. Ввиду сложности этой структуры пока не удалось получить строгую оценку ее ширины. Приближенное решение этой задачи [1] возможно путем линеаризации отображения (4) по переменной и приведения его к так называемому стандартному отображению

$$\bar{P} = P + K \cdot \sin \Theta; \quad \bar{\Theta} = \Theta + \bar{P}, \quad (5)$$

где  $K = \lambda y$  — параметр, характеризующий локальную структуру стохастического слоя, а  $P$  — новое действие.

Динамика (5) весьма подробно, хотя еще не полностью, изучена как численно, так и аналитически (например, [1, 2]). В частности, надежно установлено, что граница стохастичности движения с точностью порядка нескольких процентов лежит при  $K \approx 1$ . Отсюда следует, что ширина стохастического слоя ( $|y| < y_m$ ) приблизительно равна  $y_m \approx \lambda$ ;  $\omega_m \approx \lambda \xi$ , т. е. в  $\lambda$  раз больше, чем расщепление сепаратрисы. При дополнительном условии  $\eta \ll \varepsilon$  в точность последней оценки  $\sim 1/\lambda$  [1]. В случае  $\eta \geq \varepsilon$  оценка для  $y_m$  справедлива только по порядку величины [1] как и все более ранние оценки ширины стохастического слоя. Отметим, что при  $\eta \geq \varepsilon \lambda / v^2$  конфигурация стохастического слоя существенно изменяется за счет появления устойчивой области в окрестности  $\Psi = 0$  вследствие динамической фокусировки, которая сохраняется до  $\eta \leq \varepsilon \lambda^2 / v^2$ .

3. Глобальная структура стохастического слоя характеризуется, в частности, равновесной функцией распределения  $f_0(y/\lambda)$  усредненной по фазе  $\Theta$ . На рис. 1 приведен пример такого распределения, полученного по одной траектории. Видно, что в соответствии с результатами [1] слой состоит из двух весьма различных по своей структуре частей — центральной ( $|y/\lambda| \leq 0,4$ )

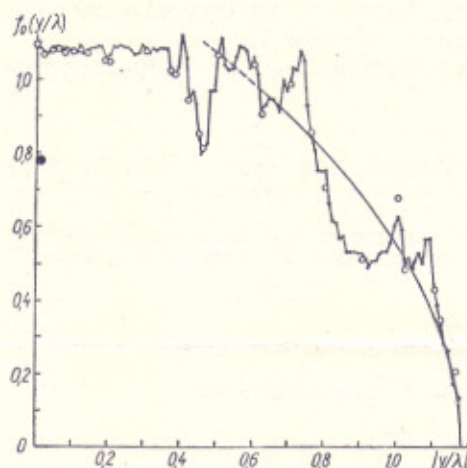


Рис. 1. Равновесная функция распределения в стохастическом слое при  $\lambda = 9$ ; ломаная линия —  $10^7$  итераций; кружки —  $4 \times 10^6$ ; кривая (6) с  $\delta = 1/2$ ;  $C = 1,3$ . Ячейка гистограммы  $\Delta(y/\lambda) = 0,01$ .



с постоянной в пределах стохастических флуктуаций плотностью распределения и **периферической**, где  $f_0$  изменяется с  $y$  существенно немонотонно, уменьшается, в среднем, к краю слоя ( $y = y_m \approx 1,18 \lambda$  в рассматриваемом случае). Средний ход плотности в периферической части слоя можно аппроксимировать эмпирическим выражением

$$f_0(x) \approx C \cdot x^\delta; \quad x \approx \frac{y_m - |y|}{\lambda}, \quad (6)$$

которое показано на рис. 1 для  $C = 1,3$ ;  $\delta = 1/2$ . Нерегулярное уменьшение  $f_0$  на периферии слоя связано с наличием здесь устойчивых областей, или «дырок» (в стохастической компоненте) сложной формы, которые при проектировании на ось  $y$  (усреднение по  $\Theta$ ) и вызывают понижение  $f_0$ .

Отметим, что неоднородность  $f_0(y)$  указывает в данном случае на нарушение детального равновесия и приводит к появлению недиффузионного потока  $Q(y) \cdot f(y)$  (в дополнение к диффузионному —  $D(y) df/dy$ ) [4]. Функция  $Q(y)$  может быть выражена через равновесное распределение [3]:  $Q = (D/f_0) \times (df_0/dy)$ . Замена переменной  $y \rightarrow \mu(y)$ ,  $d\mu/dy = f_0(y)$ , восстанавливает детальное равновесие, при этом  $f_0(\mu) = \text{const}$  и  $Q = 0$ .

4. Для дальнейшего исследования структуры периферической части стохастического слоя мы использовали статистику возвратов Пуанкаре. Этот метод был подсказан работой [5], в которой изучалась фактически та же задача, хотя авторы и не говорят об этом явно. Метод состоит в численном определении функции распределения времени возврата ( $\tau$ ) траектории отображения (4) в центр стохастического слоя  $y = 0$  независимо от  $\Theta$ . Для упрощения обработки рассматривалась совместная статистика возвратов в обеих половинах стохастического слоя ( $y > 0$  и  $y < 0$ ), движения в которых отличается только сдвигом по фазе ( $\Theta \rightarrow \Theta + \pi$ ). Время возврата принималось равным числу итераций отображения (4) между двумя последовательными прохождениями через центр слоя. Интегральное распределение  $F(\tau)$  вычислялось по одной траектории как отношение числа возвратов  $N_\tau$  через время  $>\tau$  к полному числу возвратов  $N_0$  за все время движения  $T$ .

Гистограммы распределения  $F(\tau)$  приведены на рис. 2. Видно, что при достаточно малых  $\tau < \tau_0(\lambda)$  распределение  $F(\tau)$  хорошо описывается функцией  $1/\sqrt{\tau}$  ( $\tau \geq 1$ ) в согласии с результатами [5]. Однако при больших  $\tau$  функция  $F(\tau)$  убывает значительно быстрее и может быть грубо аппроксимирована выражением

$$F(\tau) \approx A(\lambda) \cdot \tau^{-p}; \quad \tau \gg \tau_0(\lambda). \quad (7)$$

Среднее значение по всем численным данным  $\langle p \rangle = 1,45 \pm 0,05 \approx 3/2$ . Эмпирическая зависимость  $A(\lambda)$  грубо описывается выражением  $A(\lambda) \approx 3,5\lambda$ . Следует отметить, что действительное распределение  $F(\tau, \lambda)$  значи-

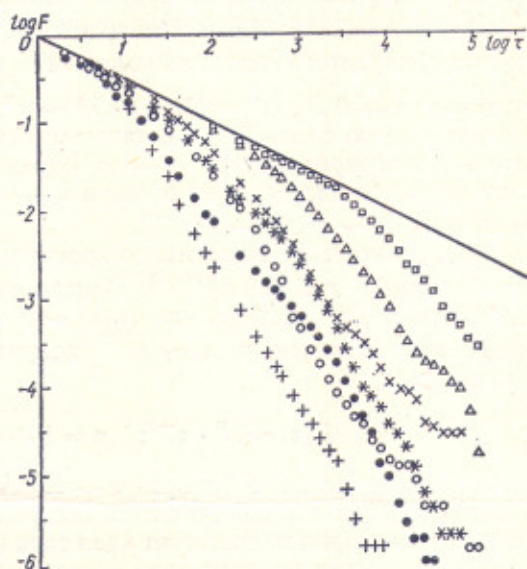


Рис. 2. Распределение возвратов траектории в стохастическом слое:

$\lambda = 1 (+)$ ; 3 ( $\cdot$ ); 5 (0); 7 ( $*$ ); 10 (X); 30 ( $\Delta$ ); 100 ( $\square$ ).  
прямая —  $F(\tau) = 1/\sqrt{\tau}$ ;  $T = 10^7$ . Логарифм десятичный;



тельно сложнее, в частности, кривые с различными  $\lambda$  пересекаются в нескольких точках (рис. 2) и как бы стягиваются.

Начальная зависимость  $F(\tau) \approx 1/\sqrt{\tau}$  естественно объясняется свободной диффузией в центральной части слоя, пока его ширина еще не существенна (например, [6]), т. е. для  $\tau \leq \lambda^2$ . Действительно, численные данные показывают, что граница этой области  $\tau_0 \approx 0,3\lambda^2$ . Если бы зависимость  $F = 1/\sqrt{\tau}$  сохранялась при любых  $\tau$ , то среднее  $\langle \tau \rangle$  расходилось бы [5]. Однако при  $\tau \gg \tau_0$  показатель  $\rho > 1$ , так что  $\langle \tau \rangle$  оказывается конечным:  $\langle \tau \rangle \sim \sqrt{\tau_0} \sim \lambda$ . Численные эксперименты дают  $\langle \tau \rangle \approx 3,2\lambda$  (без случая  $\lambda = 1$ ). Отметим, что хотя  $\langle \tau \rangle$  конечно,  $\langle \tau^2 \rangle$  расходится при  $\rho = 3/2$ . Это приводит к увеличению флуктуаций, что, по-видимому, наблюдалось в [5].

Локальные свойства отображения (4) и, в частности, коэффициент диффузии по  $y$ , характеризуются параметром  $K = \lambda y \approx \frac{1}{1-x}$  (см. (5)). Предположим что при  $x \rightarrow 0$   $D_x(x) = D_x(x) \cdot \lambda^2 \sim x^\alpha$ , так что скорость диффузии быстро падает к краю слоя. Тогда в качестве грубого приближения можно принять, что время возврата  $\tau$  (при  $\tau \rightarrow \infty$ ) определяется, по порядку величины, средним временем диффузии из области  $x \rightarrow 0$  до центра слоя. Последнее оценивается как  $\tau \sim x^2/D_x \sim \lambda^2 x^{2-\alpha}$ .

Следовательно, возвраты со временем  $> \tau$  связаны с попаданием траектории в область  $x \leq (\lambda^2/\tau)^{1/(\alpha-2)}$ . Однако мера этой области связана с распределением  $F(\tau)$  посредством  $\mu(x) \sim F \cdot \tau(x)/\langle \tau \rangle$  вследствие эргодичности движения. Наконец,  $\mu(x) \sim x^{1+\delta}$  получается из (6). Окончательно находим (при  $\alpha > 2$ )

$$F(\tau) \sim \lambda^\kappa \cdot \tau^{-\rho}; \quad \rho = 1 + \frac{1+\delta}{\alpha-2}; \quad \kappa = 2\rho - 1, \quad (8)$$

т. е. распределение  $F(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  оказывается степенным, а не экспоненциальным, как обычно считается (например, [5]). Это связано с тем, что при  $\alpha > 2$  траектория не достигает края слоя ( $x = 0$ ) за конечное время. При  $\alpha < 2$  время диффузии поперек слоя конечно и тогда, как известно, распределение  $F(\tau)$  убывает экспоненциально вследствие флуктуаций диффузии. Можно показать, что при  $\alpha = 2$  зависимость  $F(\tau)$  также является экспоненциальной, хотя среднее время диффузии до края слоя оказывается бесконечным. Если использовать приведенные выше эмпирические значения  $\rho = 3/2$ ,  $\delta = 1/2$ , то  $\alpha = 5$ ,  $\kappa = 2$ .

Таким образом, как результаты численных экспериментов, так и оценки показывают, что флуктуации времени возврата траектории в стохастическом слое убывают неэкспоненциально. Этот результат сохраняется, по-видимому, и для границы стохастической компоненты более общего вида.

1. Chirikov B. V. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems.— Phys. Reports, 1979, 52, N 5, p. 263—279.
2. Greene J. M. A Method for Determining a Stochastic Transition.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1183—1196.
3. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.— 513 с.
4. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса.— Препринт Ин-та ядерной физики СО АН СССР, 80—211.1980.— 26 с.
5. Channon S. R., Lebowitz J. L. Numerical Experiments in Stochasticity and Heteroclinic Oscillations.— Annals of the New York Acad. of Sci., 1980, 357, p. 108—121.
6. Боровков А. А. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1976.— 373 с.