

14. Sanders J. A., Verhulst F. Approximations of higher order resonances with an application to Contopoulos model problem.— Lect. Notes Math., 1979, 711, p. 209—228.
15. Sanders J. A., Van Veldhuizen M. Preprint Wisk. Seminarium, Vrije Universiteit, Amsterdam, 1980.
16. Van der Aa E., Sanders J. A. The 1 : 2 : 1.— resonance, its periodic orbits and integrals.— Lect. Notes Math., 1979, 711.
17. Van der Aa E. Preprint 197 Utrecht, Math. Institute, 1981.
18. Van der Aa E., Verhulst E. Preprint Math. Utrecht, Institute, 1981.
19. Van der Meer J. C.— Celes. Mechanics, 1981, 19.
20. Verhulst F. Discrete symmetric dynamical systems at the main resonances with applications to axisymmetric galaxies.— Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 1979, 290.— 435 p.
21. Verhulst F. Periodic solutions of continuous self-gravitating systems.— Lect. Notes Math., 1980, 810.

УДК 530.182

Ф. Вивальди, Дж. Форд

Атланта, США

Ф. М. Израйлев, Б. В. Чуриков, Д. Л. Шепелянский

Новосибирск, СССР

МОДУЛЯЦИОННАЯ ДИФФУЗИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

1. Поведение классических (не квантовых) динамических систем может характеризоваться широким спектром статистических свойств вплоть до настоящей случайности (см., например, [1—5]). В последнем предельном случае движение допускает простое статистическое описание и представляет, по существу, релаксацию к микроканоническому распределению для замкнутой системы или некоторую неограниченную диффузию в фазовом пространстве (для гамильтоновой системы) под действием внешнего регулярного возмущения. Таковую «внутреннюю» стохастичность можно противопоставить обратному предельному случаю динамической эволюции — квазипериодическому движению, структура которого также весьма проста. Однако в практических приложениях приходится встречаться, как правило, с более сложной промежуточной ситуацией так называемого разделенного фазового пространства [5], которое представляет собой весьма хитроумную мозаику областей как с регулярным, так и со стохастическим движением. Ярким примером может служить так называемая диффузия Арнольда (ДА), которая распространяется по всей плотной системе очень узких стохастических слоев нелинейных резонансов (рис. 1) [5—8].

Ниже мы рассмотрим другой механизм диффузии в многомерной колебательной системе [9], который был назван модуляционной диффузией (МД) и который напоминает ДА. Основное различие между двумя механизмами лежит в природе стохастических слоев, по которым идет диффузия. В случае ДА слои образуются на месте невозмущенных сепаратрис нелинейных резонансов (рис. 1, S) и оказываются обычно экспоненциально узкими, но универсальными в том смысле, что они сохраняются при произвольно слабом возмущении [5]. Модуляционный стохастический слой (МСС) есть результат перекрытия резонансов внутри мультиплета, образованного под действием низкочастотной модуляции. Ширина слоя зависит в этом случае от глубины модуляции и обычно значительно превышает ширину стохастического слоя сепаратрисы (ССС) (рис. 1, M). В отличие от СССР для перекрытия резонансов мультиплета необходимо конечное возмущение. Скорость диффузии в слое оказывается сравнимой

в обоих случаях, однако из-за значительно большей ширины МСС последние, вероятно, много опаснее.

2. Как мы увидим ниже, центральной проблемой при оценке скорости диффузии являются спектральные свойства движения в стохастическом слое. Для достаточно узкого ССС ($\Delta\omega_s \ll \Delta\omega$, см. рис. 1) эта проблема оказывается неожиданно простой, поскольку движение в таком слое близко к движению по невозмущенной сепаратрисе. Однако для МСС такое упрощение уже не имеет места.

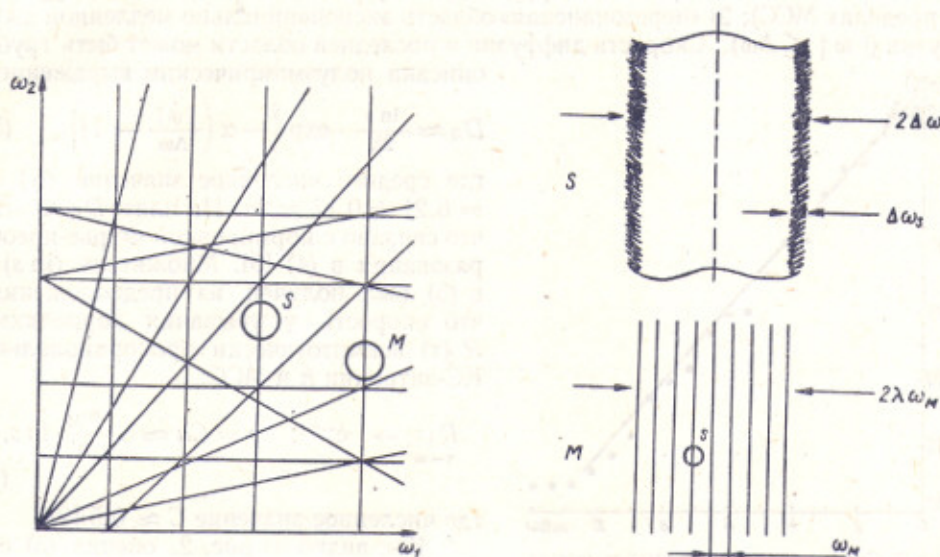


Рис. 1. Схема резонансной структуры: ω_1, ω_2 — основные невозмущенные частоты; $\lambda \gg 1, \omega_M \ll \omega_{1,2}$ — глубина и частота модуляции; S — увеличенный участок внешнего резонанса в отсутствие модуляции; $\Delta\omega, \Delta\omega_s \sim \Delta\omega \cdot \exp(-\pi\omega/\Delta\omega)$ — ширина резонанса и его стохастического слоя (заштриховано); ω — расстройка по частоте (см. текст); M — то же для резонанса, расщепленного в мультиплет под действием модуляции.

Мы исследовали эту задачу путем численных экспериментов на простой модели МСС с гамильтонианом

$$H(p, \varphi, t) = \frac{p^2}{2} + k \cos(\varphi + \lambda \cos \omega_M t). \quad (1)$$

При условии (см. [5, 10])

$$K_M \approx 2,5s^2 \approx 23 \frac{k}{\sqrt{\lambda} \omega_M^2} > 1; \quad V = \frac{\lambda \omega_M^2}{k} > 1, \quad (2)$$

где s — параметр перекрытия резонансов, образуется сплошная стохастическая компонента, или МСС, шириной $2\Delta\omega \approx 2\lambda\omega_M$ ($s < \lambda$) с быстрой диффузией [10].

Рассмотрим вспомогательную динамическую переменную z , представляющую другую степень свободы и подчиняющуюся уравнению

$$\dot{z} = \varepsilon \sin(\varphi - \omega t), \quad (3)$$

где $\varphi(t)$ определяется движением системы (1); ε — параметр возмущения, а ω — расстройка по частоте между двумя степенями свободы. Если $\varphi(t)$ — случайная функция (вследствие стохастического движения в МСС), то переменная $z(t)$ также описывает некоторый случайный процесс со скоростью

диффузии

$$D(\omega) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{(\Delta z)_t^2}}{t}; \quad \Delta z = \varepsilon \int_0^t \sin(\varphi(t') - \omega t') dt'. \quad (4)$$

Заметим, что $D(\omega)$ пропорциональна Фурье-компоненте корреляционной функции $\sin \varphi(s)$. На рис. 2 показан пример зависимости $D(\omega)$ в безразмерных переменных $\omega/\Delta\omega$ и $D_R = D\Delta\omega/\varepsilon^2$. Существуют две качественно различные области диффузии: 1) резонансное «плато» ($|\omega| \leq \Delta\omega$) с наибольшей и приблизительно постоянной скоростью диффузии из-за резонанса при $\varphi = \omega$ ($|\varphi| \leq \lambda\omega_M$ в пределах МСС); 2) «нерезонансная» область экспоненциально медленной диффузии ($|\omega| \geq \Delta\omega$). Скорость диффузии в последней области может быть грубо описана полуэмпирическим выражением

$$D_R \approx \frac{\ln s}{2\lambda} \cdot \exp\left\{-\alpha\left(\frac{|\omega|}{\Delta\omega} - 1\right)\right\}, \quad (5)$$

где среднее численное значение $\langle \alpha \rangle = 6,21 \pm 0,17 \approx 2\pi$. На плато $D_R \approx \pi/2$, что связано с нормировкой Фурье-преобразования в (4) [9]. Множитель $(\ln s)/\lambda$ в (5) был получен из предположения, что скорость γ убывания корреляций $R(\tau)$ асимптотически пропорциональна КС-энтропии h в МСС:

$$R(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{-\gamma\tau}; \quad \gamma = Ch \approx C \frac{\omega_M}{\pi} \ln s, \quad (6)$$

где численное значение $C \approx 0,5$ [9].

Как видно из рис. 2, оценка (5) согласуется с численными данными по порядку величины, хотя помимо больших флуктуаций можно заметить, что зависимость $D(\omega)$ является на самом деле более сложной (см. также рис. 4 в [9]).

3. Основная трудность, с которой мы встретились в численных экспериментах, связана с очень малой скоростью диффузии (см. рис. 2). Для подавления «фона» (главным образом из-за больших осцилляций с частотой $\sim \omega$) мы проводили специальное усреднение диффундирующей величины $v(t) (= Z(t))$ в (4):

$$v(t) \rightarrow \bar{v}_t = \int_{t_i - T/2}^{t_i + T/2} v(t) g\left(\frac{t - t_i}{T/2}\right) \frac{dt}{T/2}. \quad (7)$$

Здесь T — период усреднения (обычно $0,01 \div 0,1$ от полного времени движения t_m), а $g(\tau)$ ($|\tau| \leq 1$) — нормированная весовая функция. В простейшем случае, когда $g(\tau) = 1/2$, методика численного определения малой скорости диффузии подробно описана в [5, 6, 8]. Поскольку фактор подавления $S(\omega)$ осцилляций $v(t)$ на частоте ω , т. е. относительное уменьшение амплитуды этих осцилляций за счет усреднения, пропорционален соответствующей Фурье-компоненте от $g(\tau)$, то более гладкая $g(\tau)$ кажется предпочтительнее, например $g(\tau) \sim (1 - \tau^2)^n$ с $S(\omega) \sim (n/\omega T)^{n+1}$ при $\omega T \leq n$.

4. Для первоначального исследования МД мы выбрали простую модель с гамильтонианом

$$H = \left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{4}\right) + \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{4}\right) - \mu x_1 x_2 - \varepsilon x_1 \cos(\Omega t + \lambda \cdot \sin \omega_M t). \quad (8)$$

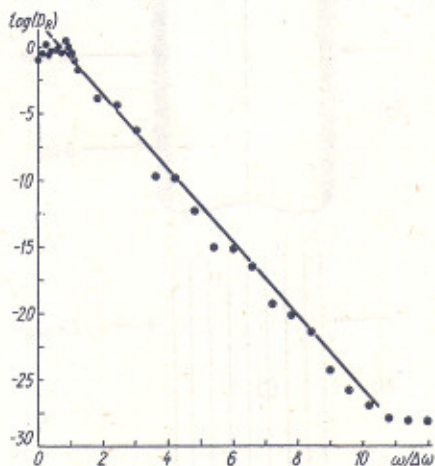


Рис. 2. Спектр корреляций $D(\omega)$ в модуляционном стохастическом слое для модели (1): $D_R = D \cdot \Delta\omega/\varepsilon^2$; $\lambda = 10$; $\omega_M = 0,01$; $\Delta\omega = 0,13$ (эмпирическое значение); $k = 5 \cdot 10^{-4}$; $t_m = 10^6$; $s \approx 4$; $K_M \approx 40$; $V \approx 2$. Время усреднения $T = 10^6$; $n = 6$. Логарифм десятичный.

Модель представляет собой два нелинейных осциллятора, связанных малым линейным (по силе) возмущением с параметром $\mu \ll a_i^2$ (a_i — амплитуда колебаний, $i = 1, 2$) и находящихся под действием частотно-модулированного внешнего возмущения со средней частотой Ω и малым параметром $\varepsilon \ll a_i^3$. В отсутствие модуляции динамика близкой модели изучалась в [5, 6, 8], главным образом, в отношении ДА в ССС резонанса связи $\omega_1 = \omega_2$ ($\omega_i = \beta a_i$ ($\beta \approx 0,85$) — невозмущенные частоты движения ($\mu = \varepsilon = 0$)). Здесь мы рассмотрим другую задачу — диффузию в МСС внешнего резонанса $\omega_1 = \Omega$.

Невозмущенное движение имеет вид (см., например, [5])

$$\frac{x_i(t)}{a_i} \approx \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\cos[(2q+1)\omega_i t]}{23^q} \approx \cos \Theta_i. \quad (9)$$

При выполнении условий (ср. (2))

$$K_M \approx 11\beta^2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda} a_1 \omega_M^2} > 1;$$

$$V \approx \frac{2}{\beta^2} \cdot \frac{\lambda a_1 \omega_M^2}{\varepsilon} \approx 22 \frac{\sqrt{\lambda}}{K_M} > 1 \quad (10)$$

внешнее возмущение (ε) приводит к образованию МСС с быстрой диффузией по a_1 , а связь (μ) вызывает диффузию вдоль внешнего резонанса $\omega_1 \approx \Omega$. Оценку скорости диффузии по a_2 (или ω_2) можно получить из уравнения (см. [9])

$$\dot{\omega}_2 \approx \dot{I}_2 \frac{d\omega_2}{dI_2} \approx \frac{\beta^2}{2} \mu \frac{a_1}{a_2} \sin(\Theta_1 - \omega_2 t), \quad (11)$$

где мы положили приближенно $\Theta_2 \approx \omega_2 t$, оставили только первый член ряда (9) для x_2 (см. далее) и пренебрегли нерезонансным слагаемым $\sin(\Theta_1 + \omega_2 t)$. Если теперь записать $\Theta_1 \approx \omega_1 t + \varphi$, то уравнение (11) принимает форму (3) с расстройкой $\omega = \omega_2 - \omega_1$, а $\varphi(t)$ определяется движением в МСС резонанса $\omega_1 = \Omega$. При условии, что μ достаточно мало ($\mu \ll \varepsilon/a_2$), это движение можно считать независимым от диффузии по ω_2 и, используя результаты раздела 2 (см. (5)), мы приходим к оценке

$$D_{\omega_2}^{(1)} \approx \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\mu^2}{\lambda \omega_M} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2, & |\omega_1 - \omega_2| < \lambda \omega_M; \\ \frac{\mu^2}{16} \cdot \frac{\ln s}{\lambda^2 \omega_M} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \cdot \exp\left(-2\pi \left[\frac{\omega_1}{\lambda \omega_M} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - 1\right]\right), & |\omega_1 - \omega_2| > \lambda \omega_M, \end{cases} \quad (12)$$

где верхний индекс указывает, что оставлен только первый член ряда (9). Похожий механизм диффузии упоминается в [11] и подробно исследован в [17] в режиме плато.

Пример зависимости $D_{\omega_2}(\omega_1/\omega_2)$, полученной в серии предварительных численных экспериментов, приведен на рис. 3 (кружки). Три первых численных значения действительно напоминают экспоненциальную зависимость в (12), однако для больших ω_1/ω_2 скорость диффузии изменяется более сложным образом, что можно объяснить влиянием высших резонансов связи ($\omega_1 = m\omega_2$,

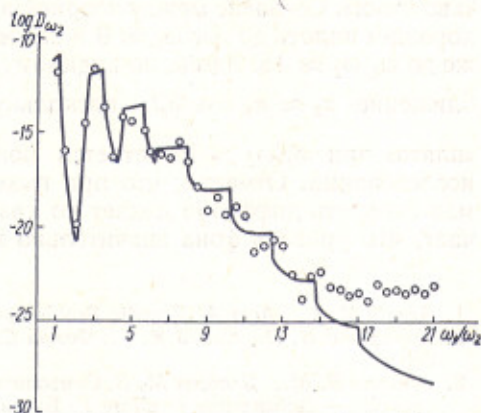


Рис. 3. Пример модуляционной диффузии в модели (8): кружки — численные данные; линия — теория (12), (13); $a_1 = 0,2$; $\mu = 10^{-5}$; $\varepsilon = 10^{-5}$; $\Omega = 0,169$; $\lambda = 10$; $\omega_M = 0,002$; $t_m = 10^8$; $s \approx 3,5$; $K_M \approx 30$; $V \approx 2$; $T = 10^5$; $n = 4$.

$m = 2q + 1$). Скорость диффузии под действием гармоник m получается из (9), (12)

$$D_{\omega_2}^{(m)}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = D_{\omega_2}^{(1)}\left(\frac{\omega_1}{m\omega_2}\right) \cdot \frac{m^4}{23^{m-1}}. \quad (13)$$

Принимая, что различные резонансы связи действуют независимо, и суммируя $D_{\omega_2}^{(m)}$, получаем теоретическую оценку, показанную на рис. 3 сплошной линией. Ясно видны несколько первых резонансов с их плато и экспоненциальными «хвостами». Согласно между теорией и численными данными остается довольно хорошим вплоть до $\omega_1/\omega_2 \approx 9$ и все еще сохраняется по порядку величины даже до $\omega_1/\omega_2 \approx 15$. Здесь, по-видимому, нарушается использованное выше приближение $x_2 \approx a_2 \cos \omega_2 t$, поскольку $\frac{\mu a_1 a_2}{a_2^4} = \frac{4\mu}{a_1^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^3 \approx 0,3$. Природа «плато» при $\omega_1/\omega_2 > 15$ остается пока невыясненной и требует дальнейших исследований. Отметим, что при выходе из слоя ($\omega_1 - \Omega \approx 3\lambda\omega_M$) наблюдаемая скорость диффузии падает по крайней мере на четыре порядка. Это означает, что уровень фона значительно меньше скорости диффузии на плато.

1. Arnold V. I., Avez A. Ergodic Problems of Classical Mechanics, 1968, Benjamin.— 283 p.
2. Корнфельд Н. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.— 365 с.
3. Алексеев В. М., Якобсон М. В. Символическая динамика и гиперболические динамические системы.— Добавление в книге Р. Бауэн: Методы символической динамики. М.: Мир, 1979, с. 196—241.
4. Ford J. A Picture Book of Stochasticity.— A. I. P. Conf. Proc., 1978, N 46, p. 121—137.
5. Chirikov B. V. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems.— Physics Reports, 1979, 52, N 5, p. 263—279.
6. Гадияк Г. В., Израйлев Ф. М., Чириков Б. В. Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда).— В кн.: Труды 7-й Международной конференции по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975), т. 2, с. 315—321.
7. Tennyson J. L., Lieberman M. A., Lichtenberg A. J. Diffusion in Near-Integrable Hamiltonian Systems with Three Degrees of Freedom.— A. I. P. Conf. Proc., 1979, N 57, p. 272—288.
8. Chirikov B. V., Ford J., Vivaldi F. Some Numerical Studies of Arnold Diffusion in a Simple Model.— ibid, p. 323—342.
9. Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Динамическая стохастичность в классической механике. Препринт Ин-та ядерной физики, 80—209. Новосибирск, 1980.— 40 с.
10. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса. Препринт Ин-та ядерной физики, 80—211. Новосибирск, 1980.— 26 с.
11. Froeschle C. On the Number of Isolating Integrals in Systems with Three Degrees of Freedom.— Astroph. and Space Sci., 1971, 14, p. 110—125.

УДК 517.9

Н. К. Гаврилов

Горький, СССР

О БИФУРКАЦИЯХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

Рассматриваются два случая бифуркаций негрубых состояний равновесия, когда характеристическое уравнение при нулевых значениях параметров имеет либо один нулевой и пару чисто мнимых корней [1], либо две пары чисто мнимых корней [2]. В первом случае минимальная размерность фазового пространства равна трем, во втором — четырем.