

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ЯНГА – МИЛЛСА

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

Обсуждаются численные эксперименты, показывающие стохастичность колебаний однородных полей Янга – Миллса (ЯМ). Вместе с тем обнаружена устойчивость белого и почти белого цвета.

В работе [1] исследовалась динамика классических пространственно однородных полей ЯМ. Хотя такой случай является весьма специальным но зато он может быть сведен, как показано в [1], к простой гамиль-

гоновой системе с $N = 9$ степенями свободы. В [1] численно исследовалась динамика этой системы в частном случае $N = 2$ и высказано предположение, что ее движение является стохастическим. Проведенные нами численные эксперименты для $N = 2; 3$ действительно показали, что колебания цвета являются в этом случае стохастическими, т.е. классические уравнения ЯМ оказываются, по крайней мере в этом частном случае, неинтегрируемыми.

Конкретно, исследовалась динамика системы с гамильтонианом ($N = 3$):

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2), \quad (1)$$

где x, y, z — пропорциональны компонентам вектор-потенциала, а $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — компонентам хромозлектрического поля [1]. В качестве критерия стохастичности использовалась экспоненциальная локальная неустойчивость движения, которая характеризуется КС энтропией (энтропия Крылова — Колмогорова — Синая) h (см., например, [2, 3]).

Для численного исследования локальной устойчивости одновременно с уравнениями движения системы (1)

$$\ddot{x} = -x(y^2 + z^2); \quad \ddot{y} = -y(x^2 + z^2); \quad \ddot{z} = -z(x^2 + y^2) \quad (2)$$

интегрировались сопряженные линейризованные уравнения

$$\ddot{\xi} = -(y^2 + z^2)\xi - 2x(y\eta + z\zeta); \quad \ddot{\eta} = \dots; \quad \ddot{\zeta} = \dots, \quad (3)$$

которые получаютс подстановкой в (2) выражений $x + \xi; y + \eta; z + \zeta$ и характеризуют поведение пучка близких траекторий в линейном приближении. При этом функции $x(t), y(t), z(t)$ в (3) определяются уравнениями (2). Сохранение энергии в счете было не хуже 1%.

Устойчивость движения системы (2) характеризуется показателями Ляпунова (ПЛ) λ_i системы (3) (см., например, [4, 3]). Наиболее просто вычисляется максимальный ПЛ:

$$\lambda_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \rho(t)}{t} \right); \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 \quad (4)$$

и $\rho(0) = 1$. При этом для КС энтропии справедливы неравенства:

$$\lambda_m \leq h \leq \lambda_m (N - 1), \quad (5)$$

из которых наиболее существенно левое, показывающее, что при $\lambda_m > 0$ КС-энтропия $h > 0$ и, следовательно, движение по крайней мере имеет стохастическую компоненту (см. ниже). В случае интегрируемой системы (квази-периодическое движение) "расстояние" между близкими траекториями $\rho(t) \propto t$ (в среднем) (см., например, [5]) и $\lambda_m = 0$. Примеры функции $\Lambda(t) = (\ln \rho(t))/t$ приведены на рис.1. За значение ПЛ принималось $\Lambda(t_{max})$, где t_{max} — полное время движения.

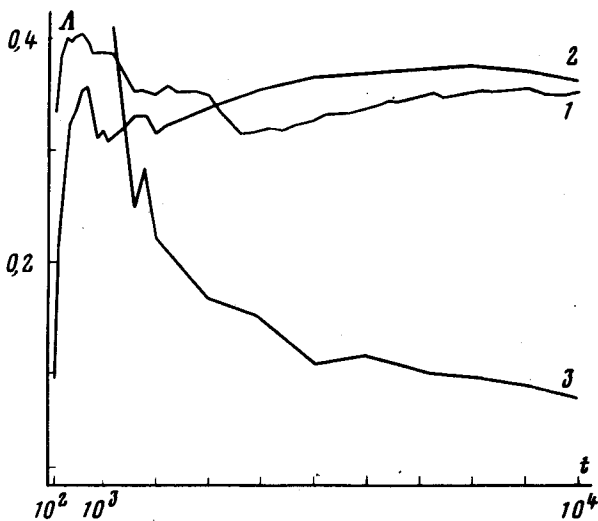


Рис.1. Показатель Ляпунова для системы (1): 1 — типичная траектория стохастической компоненты ($\lambda_r = 0,35$); 2 — траектория с начальными условиями вблизи БК ($(r_{max}/u_0) \sim 0,1$; $\lambda_r = 0,37$); 3 — устойчивая траектория ($r_{max}/u_0 \sim 10^{-2}$; $\lambda_r < 4 \cdot 10^{-4}$, масштаб увеличен в 200 раз)

В силу однородности гамильтониана (1) $\lambda_m \propto H^{1/4}$. Среднее значение безразмерного ПЛ $\lambda_r = \lambda_m / H^{1/4}$ по 22 траекториям с различными случайно выбранными начальными условиями $\langle \lambda_r \rangle \approx 0,38$ ($t_{max} = 10^2 \div 10^3$; $H = 1$). Среднеквадратичный разброс отдельных значений λ_r оказывается малым (0,04), что указывает на принадлежность всех траекторий к одной и той же стохастической компоненте. Это не исключает возможности других независимых стохастических или даже устойчивых компонент (см. ниже), однако, представляется маловероятным, чтобы они занимали заметную часть энергетической поверхности. Во всяком случае нам удалось обнаружить только одну очень небольшую устойчивую область в окрестности синфазных колебаний ($x(t) = y(t) = z(t)$ — белые колебания (БК) [6]).

В малой окрестности этого периодического решения гамильтониан (1) удобно представить в виде:

$$H = \frac{3\dot{u}^2}{2} + \frac{3u^4}{2} + \frac{6\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2}{2} + 6uq_1(q_1^2 - q_2^2) + \frac{(3q_1^2 + q_2^2)^2}{2}, \quad (6)$$

где $x = u + q_1 + q_2$; $y = u + q_1 - q_2$; $z = u - 2q_1$. При $q_1 = q_2 = 0$ БК по координате u описывается выражением: $u(t) \approx u_0 \cos \omega t$; $\omega \approx 1,20 u_0$ [3] (ср. [6]). При $q_1, q_2 \ll u_0$ можно пренебречь влиянием поперечного движения (q_1, q_2) (ПД) на $u(t)$, считая ее заданной. Особенностью ПД является отсутствие квадратичных (по q_1, q_2) членов в потенциальной энергии (6). Поэтому в линейном приближении БК устойчивы. Если бы $u = \text{const}$, то кубические члены в (6) привели бы к неустойчивости движения. Однако быстрые колебания по u приводят к динамической устойчивости ПД (маятник Капицы, см., например, [7]). Эффективный усредненный гамильтониан ПД:

$$\langle H_{\perp} \rangle \approx 3\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3u_0^2}{\omega^2} \right) (3q_1^2 + q_2^2)^2. \quad (7)$$

Существенно, что эта система имеет дополнительный интеграл движения вследствие аксиальной симметрии в переменных $\sqrt{3} q_1, q_2$. Согласно численным результатам размер устойчивой области $r_{max}/u_0 \sim 10^{-2}$ ($r^2 = 3q_1^2 + q_2^2$; $t_{max} = 10^5$, или $\sim 10^3$ поперечных колебаний).

Для $N = 2$ синфазные колебания двух цветов ($x(t) = y(t)$; $z = 0$) оказываются неустойчивыми уже в линейном приближении, поскольку гамильтониан ПД содержит дефокусирующий квадратичный член, эффект которого превышает динамическую фокусировку. Численные значения λ_r для $t_{max} \sim 10^3$ оказываются того же порядка, что и при $N = 3$, а стохастическая компонента охватывает, по-видимому, всю энергетическую поверхность. Следует, однако, иметь в виду, что эргодическая мера на энергетической поверхности расходится при $|x|, |y| \rightarrow \infty$, и несмотря на стохастичность движения функция распределения не достигает равновесного состояния. Отметим, что для $N = 3$ эта мера оказывается конечной несмотря на инфинитность движения.

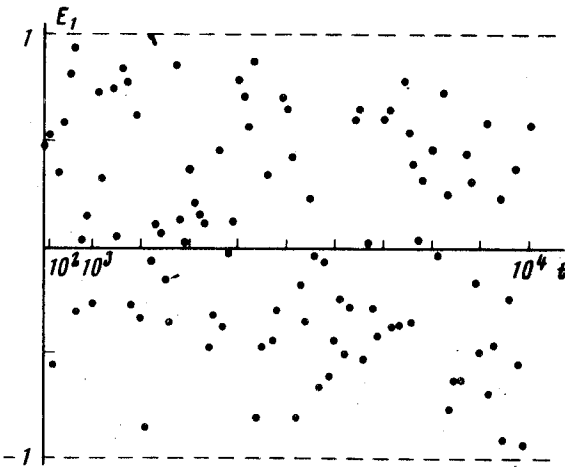


Рис.2. Стохастические колебания полей ЯМ: кружками отмечены мгновенные значения компоненты E_1 ($|E_1| \leq E^{max} = 1$) хромозлектрического поля ($N = 3$)

Таким образом, колебания классических пространственно однородных полей ЯМ оказываются стохастическими, по крайней мере в частном случае $N = 2; 3$. Пример колебаний одной из компонент хромозлектрического поля приведен на рис.2. Представляется крайне невероятным, чтобы стохастическая компонента полностью исчезла в более сложной системе ($3 < N \leq 9$) и тем более в общем случае пространственно неоднородных полей ЯМ.

Пользуемся случаем выразить искреннюю признательность В.Е.Захарову, Ю.Ф.Пинелису и И.Б.Хриповичу за полезные обсуждения.

Институт ядерной физики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
17 июня 1981 г.

Литература

- [1] Матинян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян - Саввиди Н.Г. ЖЭТФ, 1981, 80, 830.
[2] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М., изд. Наука, 1980.

- [3] Chirikov B.V. *Physics Reports*, 1979, 52, 263..
- [4] Песин Я.Б. *ДАН СССР*, 1976, 226, 774.
- [5] Casati G., Chirikov B.V. *J. Ford. Phys. Lett.*, 1980, 77A, 91.
- [6] Басеян Г.З., Матинян С.Г., Саввиди Г.К. *Письма в ЖЭТФ*, 1979, 29, 641.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. М., изд. Наука, 1973.
-