

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

# ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

---

МОСКВА · 1982

## ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА

ЧИРИКОВ Б. В., ШЕПЕЛЯНСКИЙ Д. Л.

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

(Поступила в редакцию 8 июля 1982 г.)

Обсуждается место пространственно однородных моделей в теории классических полей ЯМ. Исследована динамика некоторых из таких моделей. Показано, что хаотическое движение является типичным для их временной эволюции. В частности, взаимодействие с полями Хиггса не всегда ведет к стабилизации движения.

### Введение

Калибровочные поля Янга — Миллса (ЯМ) были введены [1] для изотопически-инвариантного описания сильного взаимодействия. В настоящее время они находят все более широкое применение в теории элементарных частиц. Поэтому исследование их свойств, и в частности динамики, остается интересной и важной задачей. Изучение классических полей ЯМ помимо общего ознакомления с их свойствами и применения в некоторых задачах квантования [2] представляет особый интерес в связи с тем, что существенно нелинейные процессы в этих полях лежат в квазиклассической области обычного (псевдоевклидова) или евклидова (мнимое время) пространства-времени. В последнем случае классические решения описывают сильные флуктуации вакуума полей ЯМ [3—5]. Существенная нелинейность этих полей приводит к очень интересной и необычной динамике, но в то же время значительно затрудняет ее изучение. В этих условиях естественно обратиться к простым моделям, которые могут прояснить те или иные свойства полей ЯМ.

Важный класс моделей был введен и изучается Матияном и сотрудниками [6—8]. В этих моделях поле зависит только от времени, и мы будем называть их однородными моделями (ОМ). Существенное упрощение задачи достигается здесь за счет конечномерности модели, число степеней свободы которой  $N=3(n^2-1)$  определяется группой симметрии  $SU(n)$ . Число различных полей (цветов) в мультиплете  $(n^2-1)$  определяет размерность внутреннего пространства поля ЯМ. ОМ как бы выделяют в «чистом виде» внутреннюю динамику полей ЯМ. В общем случае эта динамика оказывается хаотической (стохастической), или случайной (для классических полей ЯМ) [7—9]. Ее изучению и посвящена в основном настоящая работа. Ниже мы ограничимся простейшим, но нетривиальным случаем группы  $SU(2)$  и будем рассматривать почти исключительно свободные (без источников) поля ЯМ.

### 1. Однородные модели полей ЯМ

Однородную модель можно рассматривать, конечно, просто как очень специальный, крайний случай полей ЯМ. Полезно, однако, представить себе, в каких ситуациях ОМ приближенно соответствуют более реальным неоднородным полям. Для группы  $SU(2)$  внутреннее пространство поля трехмерно, и каждая внешняя<sup>1)</sup> компонента поля (потенциала) представляется внутренним вектором  $A_\mu$  ( $\mu=0, 1, 2, 3$ ), или, эквивалентно,

<sup>1)</sup> Т. е. в обычном пространстве-времени с псевдоевклидовой метрикой.

каждая внутренняя компонента описывается внешним (обычным) 4-вектором  $A^a$  ( $a=1, 2, 3$ ). Соответственно каждая внешняя компонента тензора (напряженности) поля есть внутренний вектор ( $\hbar=c=1$ )

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu \times A_\nu. \quad (1.1)$$

Запишем плотность лагранжиана поля ЯМ с источниками в виде [10]

$$g^2 L = \mathbf{E}_k \cdot \dot{\mathbf{A}}_k - 1/2 (E_k^2 + B_k^2) + \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{j}_k - \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{C}, \quad (1.2)$$

где латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3. Здесь «электрические» поля

$$\mathbf{E}_k = \dot{\mathbf{A}}_k + \partial_k \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_0 \quad (1.3)$$

играют роль канонических импульсов, сопряженных координатам  $\mathbf{A}_k$ ; «магнитные» поля  $\mathbf{B}_k = 1/2 \epsilon_{klm} F_{lm}$ , а вектор

$$\mathbf{C} = D_k \mathbf{E}_k + \mathbf{j}_0 = \partial_k \mathbf{E}_k + \mathbf{A}_k \times \mathbf{E}_k + \mathbf{j}_0 = 0. \quad (1.4)$$

Последнее равенство следует, например, из того, что член  $\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{C}$  может быть устранен калибровочным преобразованием ( $\mathbf{A}_0 \rightarrow 0$ ). Уравнение  $\mathbf{C} = 0$  выражает (обобщенный на поля ЯМ) закон Кулона, который не имеет характера уравнений движения для поля. Уравнение  $\mathbf{C} = 0$  можно (формально) рассматривать как связь [10]. Однако для наших целей удобнее (и естественнее) интерпретировать уравнение (1.4) как закон сохранения, отличающийся от обычных лишь тем, что значение этого интеграла движения фиксировано (ограничение на начальные условия)<sup>2)</sup>. Явное исключение этого интеграла из уравнений движения не обязательно и даже нежелательно (во всяком случае поскольку это касается классических полей), так как редуцированное фазовое пространство (интегральное многообразие), так же как и гамильтониан на нем, могут оказаться чересчур сложными [11, 12]. Кроме того, при этом будет потеряна симметрия исходной системы, что затрудняет качественный анализ ее динамики.

В дальнейшем нам будет удобно использовать калибровку  $\mathbf{A}_0 = 0$ . Тогда  $\mathbf{E}_k = \dot{\mathbf{A}}_k$  (1.3), а плотность гамильтониана ( $\mathbf{j}_0 = 0$ )

$$H(\mathbf{E}_k, \mathbf{A}_k) = 1/2 E_k^2 + 1/4 \sum_{k,l} |(\partial_k \mathbf{A}_l - \partial_l \mathbf{A}_k) + \mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_l|^2, \quad (1.5)$$

где мы провели замену  $g^2 H \rightarrow H$  и  $t/g \rightarrow t$ .

При  $\mathbf{A}_k \rightarrow 0$  гамильтониан (1.5) описывает линейную систему плоских волн, слабо связанных нелинейным возмущением ( $\mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_l$ ). В обратном предельном случае ( $\partial_k = 0$ ) мы приходим к ОМ, которая описывает, таким образом, внутреннюю нелинейную динамику локально по отношению к внешнему пространству. Приближение ОМ соответствует длинным волнам ( $\lambda$ ) и сильным полям:  $\lambda A \gg 1$  или в более наглядной форме

$$g^2 n_g \lambda^3 \gg 1, \quad (1.6)$$

где  $n_g$  — плотность (безмассовых) квантов поля ЯМ.

Гамильтониан ОМ имеет вид [6, 7]

$$H_{YM} = 1/2 E_k^2 + 1/4 |\mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_l|^2 = 1/2 (E^0)^2 + 1/4 |\mathbf{A}^a \times \mathbf{A}^b|^2. \quad (1.7)$$

В силу изотропности как внешнего, так и внутреннего пространства (потенциальная энергия зависит только от углов между векторами  $\mathbf{A}^a$  или  $\mathbf{A}_k$ ) сохраняются два «момента»

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^a \times \mathbf{E}^a = \text{const}, \quad \mathbf{M}_g = \mathbf{A}_k \times \mathbf{E}_k = 0. \quad (1.8)$$

Последнее выражение есть частный случай общего соотношения (1.4) при  $\mathbf{j}_0 = 0$  и  $\partial_k = 0$ . Заметим, что для поля ЯМ с источниками  $\mathbf{M}_g = -\mathbf{j}_0 \neq 0$ . Если, кроме того,  $\mathbf{j}_k = 0$ , то гамильтониан (1.7), а следовательно, и уравнения движения не изменяются. Отметим, что ОМ не описывают заряженные состояния свободного поля ЯМ, для которых  $\mathbf{M}_g \neq 0$  (см. (1.4)).

<sup>2)</sup> Упомянем простую механическую модель такого типа связи (или закона сохранения): пусть одна из взаимодействующих частиц имеет массу  $m \rightarrow 0$ , тогда при определенных ограничениях на взаимодействие действующая на эту частицу сила  $f \rightarrow 0$ .

Гамильтониан (1.7) симметричен также относительно транспонирования матрицы  $A_k^a$ , т. е. относительно внутреннего и внешнего подпространств поля. Поскольку гамильтониан является к тому же четной функцией величин  $A_k^a$ , то существуют (частные) симметричные и антисимметричные решения (поля). В первом случае  $A_i^h = A_h^i$ , т. е. матрица симметрична и поворотом координатных осей может быть приведена к диагональной. Для свободного поля ЯМ  $M = M_E = 0$  в этом случае, откуда следует, что главные оси матрицы  $A_k^a$  неподвижны, и гамильтониан (1.7) принимает следующий простой вид:

$$H_s = 1/2[E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + (A_1 A_2)^2 + (A_1 A_3)^2 + (A_2 A_3)^2]. \quad (1.9)$$

Эта система имеет всего три степени свободы.

В антисимметричном случае ( $A_i^h = -A_h^i$ ) поворотом координатных осей можно исключить два из трех независимых элементов матрицы  $A_k^a$ . Пусть, например,  $A_1^b = -A_2^a = A$ , тогда гамильтониан (1.7) принимает вид

$$H_a = E^2 + 1/2 A^4, \quad (1.10)$$

т. е. остается всего одна степень свободы.

Другой класс ОМ, также введенных и рассмотренных в [8], получается при учете калибровочного взаимодействия поля ЯМ с полем Хиггса. В последнем случае в гамильтониане (1.7) появляются квадратичные по  $A$  (массовые) члены

$$H = H_{YM} + 1/2 \omega^2 (A^a)^2. \quad (1.11)$$

Существенно, что в силу изотропии внутреннего пространства дополнительная потенциальная энергия также сферически-симметрична. Поэтому по-прежнему  $M_E = 0$  и сохраняется симметрия при транспонировании матрицы  $A_k^a$ . Вообще говоря, при этом появляется дополнительная степень свободы, соответствующая динамике самого поля Хиггса. Ниже мы ограничимся только моделью (1.11), которая описывает взаимодействие поля ЯМ с хиггсовским вакуумом.

## 2. Локальная неустойчивость движения и хаос

Из упомянутых в предыдущем разделе «простых» ОМ только динамика системы (1.10) оказывается действительно простой, даже проще, чем это можно было бы ожидать в случае сильно нелинейного уравнения движения, именно [13]

$$A(t)/A_{max} \approx 0,96 \cos \omega t + e^{-\alpha} \cos 3\omega t + \dots, \quad (2.1)$$

т. е. колебания являются почти гармоническими, хотя их частота  $\omega \approx 0,85 A_{max}$  существенно зависит от амплитуды. Для полей ЯМ такой режим движения рассмотрен в [6, 7].

Динамика остальных ОМ с более чем одной степенью свободы оказывается, вообще говоря, очень сложной, в некотором смысле предельно сложной. Механизм этой сложности связан с сильной локальной неустойчивостью траекторий, характерной для нелинейных колебаний вообще и для классических полей ЯМ в частности. Поясним это на примере модели (1.9) в частном случае  $A_1 = 0$ . Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{A}_2 = -A_2 A_3^2, \quad \ddot{A}_3 = -A_3 A_2^2. \quad (2.2)$$

Пусть  $A_i^0(t)$  — некоторое решение этой системы. Рассмотрим поведение близких траекторий в линейном приближении. Полагая  $A_i = A_i^0(t) + a_i$ , получаем линеаризованное уравнение для  $a_i(t)$ :

$$\ddot{a}_2 = -[A_3^0(t)]^2 a_2 - 2A_2^0(t) \cdot A_3^0(t) \cdot a_3, \quad (2.3)$$

$$\ddot{a}_3 = -[A_2^0(t)]^2 a_3 - 2A_3^0(t) \cdot A_2^0(t) \cdot a_2.$$

Введем «расстояние» между близкими траекториями в фазовом пространстве

$$\rho^2 = a_2^2 + a_3^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2 \quad (2.4)$$

и рассмотрим величину

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[\rho(t)/\rho(0)]}{t}, \quad (2.5)$$

которая называется показателем Ляпунова и обобщает соответствующее понятие для периодической траектории  $A_i^0(t)$ . В силу эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина (см., например, [14]) этот предел всегда существует, но зависит, вообще говоря, от начальных условий как в основном фазовом пространстве  $(A_i, \dot{A}_i)$ , так и в касательном пространстве  $(a_i, \dot{a}_i)$ . Из линейности уравнений (2.3) вытекает, что существует  $2N$  показателей Ляпунова  $(\lambda_i)$  и соответствующих им собственных направлений в касательном пространстве. В силу сохранения фазового объема  $\sum \lambda_i = 0$ , а из обратимости во времени следует, что все  $\lambda_i$  разбиваются на пары  $\lambda_{\pm}^{(k)}$ , так что для каждой пары  $\lambda_+^{(k)} + \lambda_-^{(k)} = 0$  ( $k=1, \dots, N$ ). Для замкнутой системы с единственным интегралом энергии траектория целиком лежит на  $(2N-1)$ -мерной энергетической поверхности. Одно из собственных направлений на этой поверхности соответствует смещению вдоль траектории, причем относящееся к нему  $\lambda=0$ . Таким образом, число положительных  $\lambda_+ > 0$  не превышает  $(N-1)$  и  $N=2$  уже достаточно для экспоненциальной локальной неустойчивости движения. Пример (2.2) имеет как раз минимальную размерность.

Величина  $\lambda$  не зависит от начальных условий в основном фазовом пространстве в пределах каждой из эргодических компонент движения, на которые расслаивается все фазовое пространство для любой динамической системы с интегральным инвариантом. Эргодическая компонента может охватывать как всю энергетическую поверхность (для замкнутой системы) — эргодичность в обычном смысле, откуда и происходит сам термин, так и (в другом крайнем случае) только, например, периодическую траекторию. В любом случае траектория (хаотическая или регулярная) равномерно распределяется по всей эргодической компоненте, т.е. среднее время пребывания системы в любом элементе эргодической компоненты пропорционально инвариантной (сохраняющейся при движении) мере этого элемента (эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина). Для гамильтоновых систем инвариантной мерой является фазовый объем (теорема Лиувилля), а при наличии интегралов движения  $(I_k)$  — наведенная (на интегральной поверхности) мера

$$d\mu = \prod_k \delta(I_k - I_k^0) d\Gamma, \quad (2.6)$$

где  $I_k^0$  — значения интегралов, фиксирующие интегральную поверхность, а  $d\Gamma$  — элемент полного фазового объема. Заметим, что  $\mu$  пропорционально объему узкой «трубки» в фазовом пространстве, заданной величинами  $dI_k$ .

Показатели Ляпунова определяют одну из наиболее важных характеристик движения — метрическую энтропию [14]:  $h = \sum \lambda_+$  ( $\lambda_+ > 0$ ). При численном моделировании наиболее просто находится максимальный показатель  $\lambda_{\max}$ , так как начальный касательный вектор  $(a_i, \dot{a}_i)$  можно выбирать при этом произвольно, не заботясь об отыскании собственных направлений. При  $\lambda_{\max} > 0$  практически любой начальный вектор будет быстро приближаться к собственному направлению с  $\lambda = \lambda_{\max}$ . С другой стороны, знания  $\lambda_{\max}$  достаточно, так как существенно не точное значение  $h$ , а то, что  $h \geq \lambda_{\max} > 0$  при  $\lambda_{\max} > 0$ , т.е. факт экспоненциальной локальной неустойчивости траекторий. Для рассматриваемого примера (2.2)  $h = \lambda_{\max}$ .

Значение величины  $h$  состоит прежде всего в том, что согласно современной теории динамических систем условие  $h > 0$  необходимо и достаточ-

но для случайности почти всех траекторий [15]. Наглядно это связано с тем, что понятие траектории теряет смысл в условиях сильной локальной неустойчивости движения, подобно тому, как мы говорим об отсутствии неустойчивого состояния равновесия. Если встать на несколько более формальную точку зрения, то можно значительно глубже понять природу этого любопытного феномена динамической случайности. Именно будем считать, что система движется строго по определенной траектории, полностью заданной начальными условиями. Тогда при экспоненциальной локальной неустойчивости траектория будет с течением времени существенно зависеть от все более и более мелких деталей точно заданных начальных условий, деталей, которыми в устойчивом движении можно полностью пренебречь. Следовательно, источник случайности заключен в начальных условиях движения, тогда как роль собственно динамической системы сводится лишь к обеспечению локальной неустойчивости. В таком качестве сама по себе динамическая система может быть и очень простой — факт, казавшийся еще недавно столь парадоксальным. Нетривиальным здесь является доказательство того, что почти все начальные условия соответствуют именно случайному движению. Наглядно это можно представить себе так: любые регулярности траектории резко суживают меру соответствующих начальных условий. Популярное изложение этих вопросов можно найти в [16].

Помимо фундаментального значения для динамики системы локальная неустойчивость оказывается наиболее удобным критерием динамического хаоса (или его отсутствия) при численном моделировании. Именно так была открыта [17] интегрируемость так называемой цепочки Тода — сильно нелинейной многомерной системы связанных осцилляторов.

Практическое вычисление  $\lambda_{\max}$  проводится путем совместного численного интегрирования основных (2.2) и линеаризованных (2.3) уравнений. Чтобы избежать слишком больших значений  $\rho$ , необходимо периодически сокращать длину касательного вектора, не изменяя его направления. Другой метод состоит в интегрировании сразу двух очень близких траекторий системы (2.2) также с периодическим сокращением расстояния между ними.

Следует иметь в виду, что для квазипериодического движения (полностью интегрируемая система) локальная неустойчивость все же возникает за счет зависимости частот от начальных условий, однако при этом  $\rho \propto t$  (в среднем) (см., например, [18]). В пределе  $t \rightarrow \infty$   $\lambda = h = 0$ , но численный счет необходимо продолжать достаточно долго, чтобы уверенно отличить экспоненту от линейной зависимости. Отсюда также следует, что вывод о хаотичности движения более надежен, чем об ее отсутствии ( $h$  может оказаться слишком малым).

### 3. Безмассовые поля ЯМ

Мы начнем с модели (1.9) с  $N=3$  (степени свободы), в которой хаос оказывается более простым, чем в ее частном случае  $A_1=0$  ( $N=2$ ) [9]. В силу однородности потенциальной энергии изменение величины  $H$  приводит лишь к изменению масштаба времени  $t \propto H^{-1/2}$ , в частности  $\lambda \propto H^{1/2}$ . В данном случае интегральная поверхность  $H = \text{const}$  является пятимерной (оба момента (1.8) тождественно равны нулю), так что  $h$  может превышать максимальный показатель Ляпунова  $\lambda$ .

Численное моделирование показывает [9], что предел в (2.5) достигается достаточно быстро (за время  $\sim 10^3$ ), а разброс значений  $\lambda H^{-1/2}$  для отдельных траекторий относительно невелик:  $\langle \lambda H^{-1/2} \rangle = 0,38 \pm 0,04$  (по 22 траекториям со случайно выбранными начальными условиями), что свидетельствует в пользу существования единой хаотической компоненты движения на каждой энергетической поверхности.

Рассмотрим некоторые специальные траектории. Пусть, например,  $A_2 = A_3 = A_1 = A_3 = 0$ . Такие начальные условия соответствуют равномерному движению вдоль оси  $A_1$  и постоянному  $E_1$  [7]. Рассмотрим близкую

траекторию  $A_1^2 \gg A_2^2 + A_3^2 = A_{\perp}^2$ . Гамильтониан (1.9) принимает вид

$$H \approx 1/2 (E_1^2 + E_{\perp}^2 + A_1^2 A_{\perp}^2) \approx 1/2 E_1^2 + A_1 J_{\perp}. \quad (3.1)$$

Последнее выражение справедливо в адиабатическом приближении, когда поперечное действие  $J_{\perp} = H_{\perp}/A_1 \approx \text{const}$  (продольная координата  $A_1$  играет здесь роль переменной частоты поперечного движения). Из (3.1) ясно, что для любого  $J_{\perp} > 0$  произойдет отражение траектории при  $A_1 = A_m = H/J_{\perp}$ . После отражения  $A_1 = A_m - J_{\perp} t^2/2$  и условие адиабатичности  $|A_1| \ll A_1^2$  нарушается при  $A_1 \ll \sqrt{A_{\perp} A_m} \sim H^{1/4}$ , вследствие чего  $J_{\perp}$  существенно изменяется, и траектория оказывается хаотической. Таким образом, равномерное движение вдоль любой из осей оказывается неустойчивым, хотя время развития неустойчивости ( $T \sim \sqrt{A_m/J_{\perp}} \sim 1/A_{\perp}$ ) неограниченно возрастает при  $A_{\perp} \rightarrow 0$ .

Другой особой траекторией являются синфазные колебания  $A_1(t) = -A_2(t) = A_3(t)$  [6, 7]. Как показано в [9], эти колебания являются устойчивыми, причем механизм устойчивости оказывается весьма своеобразным. Малые поперечные колебания в окрестности периодического решения являются сильно нелинейными, а их частота стремится к нулю при уменьшении их амплитуды. Область устойчивости очень мала и имеет, по-видимому, сложную форму.

Перейдем теперь к случаю  $N=2$  ( $A_1=0$ ). Именно эта модель изучалась численно в работе [7], где были получены первые данные, свидетельствующие в пользу хаотичности ее движения (см. также [8]). По нашим данным [9] движение здесь также локально-неустойчиво, однако получить определенное численное значение энтропии  $h=\lambda$  не удалось из-за сильных флуктуаций и плохой сходимости выражения (2.5). Это объясняется тем, что инвариантная мера (2.6) на энергетической поверхности расходится [9]. Действительно,

$$\begin{aligned} \mu_H &= 2\pi \int \delta(E^2 - 2H^0 + A_2^2 A_3^2) E dE dA_2 dA_3 = \\ &= \pi \int_{(A_2 A_3)^2 < 2H^0} dA_2 dA_3 \rightarrow 8\pi \sqrt{2H^0} \ln A \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Расходимость меры означает, что подавляющую часть времени хаотическая траектория проводит в областях с  $|A_k| \rightarrow \infty$ . Любая функция распределения будет «уходить» при этом с течением времени все дальше и дальше вдоль осей  $A_2, A_3$ , а ее плотность будет неограниченно уменьшаться в любой точке энергетической поверхности.

С другой стороны, при достаточно большом (или малом) отношении  $|A_2/A_3|$  имеется, как и в случае  $N=3$ , дополнительный интеграл движения — действие  $J_2 = H_2/A_3$ , где  $2H_2 = E_2^2 + (A_2 A_3)^2$ , и мы приняли для определенности, что  $A_3 \gg |A_2|$ . Поэтому в этих областях движение является регулярным и, в частности, отсутствует экспоненциальная локальная неустойчивость. Последняя имеется лишь в области неадиабатичности  $|A_3| \ll H^{1/4}$ , мера которой  $\mu_h \sim H^{1/4}$  конечна. Отсюда при  $t \rightarrow \infty$

$$h = \lambda \rightarrow H^{1/4} \frac{\mu_h}{\mu_H} \rightarrow \frac{H^{1/4}}{\ln A} \sim \frac{H^{1/4}}{\ln t} \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Здесь связь между  $A$  и  $t$  получается из оценки скорости диффузии по  $A$ :  $D_A = \langle (\Delta A)^2 \rangle / t \sim A \sqrt{H}$ , откуда  $A \sim \sqrt{Ht}$ .

Хотя по  $A$  рассматриваемое движение инфинитно, напряженности полей  $B_1 = A_2 A_3, E_2 = A_2, E_3 = A_3$  остаются конечными из-за сохранения энергии. Более того, по порядку величины  $B_1 \sim E_2 \sim E_3$ , если даже, скажем,  $A_3 \rightarrow \infty$ . Однако при этом частота колебаний  $A_2$  и  $B_1$  неограниченно возрастает, а частота  $A_3$  падает таким образом, что произведение частот остается неизменным.

Для  $N=3$  инвариантная мера энергетической поверхности конечна, хотя поверхность и не замкнута, т. е. ее «размеры» по  $A_k$  не ограничены. Чтобы убедиться в этом, подсчитаем меру на одной из шести «трубок», уходящих на бесконечность ( $A_1^2 \gg A_{1'}^2$ ):

$$\mu_H(A_1 > A) \propto \int_A^\infty A_{1'}^2 dA_{1'} \propto \int_A^\infty \frac{dA_{1'}}{A_{1'}} \rightarrow 0$$

при  $A \rightarrow \infty$ . Поэтому в данном случае имеется обычная релаксация к равновесному распределению с ненулевой плотностью.

Еще одна любопытная особенность модели (1.9) при  $N=2$  связана с начальными условиями движения. Для полного определения траектории необходимо задать четыре величины  $A_2, A_2', A_3, A_3'$ . Хотя в задаче имеются четыре компоненты тензора напряженности, сумма двух из них тождественно равна нулю из-за антисимметричности тензора:  $F_{23} = -F_{32} = B_1$ . Следовательно, в отличие от линейных полей задание тензора  $F_{\mu\nu}$ , вообще говоря, еще не определяет полностью ни состояние нелинейного поля, ни его динамику. Первый пример подобной неоднозначности был построен в [19] (см. также [20]). В нашем случае необходимо дополнительно задать отношение  $A_2/A_3$ . Изменение этого отношения приводит к разной динамике и не эквивалентно калибровочному преобразованию. Если, например,  $A_2 = A_3$  и  $E_1 = E_2 = 0$ , движение будет периодическим (хотя и неустойчивым), тогда как при  $A_2 \neq A_3$  с тем же  $B_1 = A_2 A_3$  движение становится хаотическим. Вместо отношения ( $A_2/A_3$ ) можно задать  $\dot{E}_2$  или  $\dot{E}_3$ , или, наконец, их отношение  $\dot{E}_2/\dot{E}_3$ . Если же задать  $\dot{B}_1$ , то получается, вообще говоря, либо два, либо ни одного значения ( $A_2/A_3$ ).

Любопытные особенности начальных условий имеются и в случае  $N=3$ . Положим  $B_1 = A_2 A_3, B_2 = A_1 A_3, B_3 = A_1 A_2$ , откуда ( $B_k \neq 0$ )

$$A_1^2 = \frac{B_2 B_3}{B_1}, \quad A_2^2 = \frac{B_1 B_3}{B_2}, \quad A_3^2 = \frac{B_1 B_2}{B_3}. \quad (3.4)$$

При заданных  $B_k$  поле может находиться в двух состояниях, отличающихся изменением знака у всех  $A_k$ . Если при этом  $E_k = A_k \neq 0$ , то движение из обоих начальных состояний будет различным (одна траектория получается из другой при  $t \rightarrow -t$  и  $A_k \rightarrow -A_k$ ). С другой стороны, компоненты  $B_k$  не могут быть заданы произвольно, а должны удовлетворять условию  $B_1 B_2 B_3 \geq 0$  (3.4), причем в случае равенства в нуль обращаются по крайней мере две компоненты  $B_k$ . Можно показать, что подобное ограничение сохраняется и в случае произвольных векторов  $B_k$ .

#### 4. Массивные поля ЯМ

Рассмотрим ОМ поля ЯМ с массой в простейшем нетривиальном случае  $N=2$  степени свободы [8]. Гамильтониан (1.9) с добавкой (1.11) имеет вид ( $\omega=1$ )

$$H = \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_1^2 A_2^2). \quad (4.1)$$

Ясно, что при  $A_k \gg 1$  квадратичные члены несущественны (по крайней мере в первом приближении, см. ниже), и мы возвращаемся к случаю безмассового поля, т. е. к хаотическому движению (разд. 3). При  $A_k \ll 1$ , казалось бы, можно пренебречь слабой нелинейной связью и ожидать устойчивых регулярных колебаний. Эти простые соображения были высказаны и подтверждены численным моделированием системы (4.1) в [8]. Ниже мы рассмотрим динамику этой модели подробнее. Начнем со случая  $H \ll 1$ . Перейдем к переменным действие — фаза невозмущенной системы (линейные осцилляторы):

$$A_k = \sqrt{2I_k} \cos \theta_k, \quad E_k = -\sqrt{2I_k} \sin \theta_k, \quad k=1, 2.$$

Гамильтониан (4.1) принимает вид

$$(4.2)$$

$$H = I_1 + I_2 + \frac{1}{2} I_1 I_2 [1 + \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 + \frac{1}{2} \cos(2\theta_1 + 2\theta_2) + \frac{1}{2} \cos 2(\theta_1 - \theta_2)].$$



Члены возмущения, зависящие от фаз, разбиваются на две группы: высокочастотные ( $\Omega=2$ ), или нерезонансные (первые три слагаемых), и низкочастотные, или резонансные (последнее слагаемое, невозмущенная частота которого равна нулю). Ясно, что именно резонансное возмущение и будет определять в основном динамику системы. Поэтому в первом приближении отбросим все нерезонансные члены (так называемый метод усреднения [21]). В усредненной системе остается единственный резонансный член возмущения, или, короче, единственный резонанс. В этом случае система всегда полностью интегрируема, а ее движение является квазипериодическим (см., например, [13]). Это связано с до-

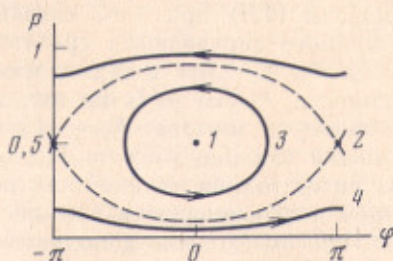


Рис. 1. Типичные фазовые кривые модели (4.3): 1 — устойчивая периодическая траектория, 2 — неустойчивая периодическая траектория, 3 — квазипериодические траектории внутри резонанса (колебания фазы  $\varphi$ ), 4 — вращение фазы, пунктир — сепаратриса, ограничивающая область резонанса

полнительным, резонансным интегралом, так как один резонанс всегда зависит от определенной комбинации фаз, что приводит к симметрии возмущения. В данном случае, например, гамильтониан не зависит от сдвига обеих фаз, в результате чего сохраняется невозмущенная энергия  $H^0 = I_1 + I_2$ . Так как полный гамильтониан  $H$  также сохраняется, то сохраняется и их разность, т. е. возмущение  $V = H - H^0$ .

Проведем каноническое преобразование к переменным  $J_1 = H^0$ ,  $\varphi_2 = 2(\theta_2 - \theta_1)$ . Тогда  $\varphi_1 = \theta_1$ ,  $J_2 = I_2/2$  и усредненный, или резонансный, гамильтониан

$$H_r = J_1 + J_2(J_1 - 2J_2)(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi_2). \quad (4.3)$$

Так как  $J_1 = \text{const}$ , то фазовые кривые определяются соотношением

$$P(1-P)(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi) = \frac{2V}{(H^0)^2} \equiv v, \quad (4.4)$$

где  $P = 2J_2/H^0$ ,  $0 \leq P \leq 1$ . Типичные фазовые кривые приведены на рис. 1. В исходных переменных они переходят в кривые на рис. 1 в [8]. Периодические траектории системы соответствуют  $\varphi = 0, \pi$  (при этом  $\varphi_1 = \theta_1 = H^0 t$ ). Первая из них устойчива (частота малых колебаний  $\omega_0 = \sqrt{V''/H^0} \approx 0,61 H^0$ ), а вторая неустойчива и определяет сепаратрису резонанса, на которой колебания  $J_2$  максимальны ( $J_2^{\text{max}}/J_2^{\text{min}} = (1 + \sqrt{V''/3}) / (1 - \sqrt{V''/3}) \approx 10$ ). Последнее соотношение показывает, что эффект слабого нелинейного возмущения (обмен энергией между степенями свободы) всегда большой и не зависит от  $H \rightarrow 0$ . Это связано с изохронностью невозмущенных колебаний (для линейной связи обмен энергией был бы полным).

Эффект отброшенных нерезонансных гармоник возмущения двоякий. С одной стороны, они вызывают высокочастотные осцилляции интегралов усредненной системы  $J_1, V$ . Амплитуда этих осцилляций  $|\Delta V/V| \sim H^0 \rightarrow 0$ , они не меняют характера движения и могут быть устранены в принципе не зависящей от времени заменой переменных (см., например, [13]).

С другой стороны, «нерезонансное» возмущение может вызывать резонансы с высокими гармониками частоты  $\omega_0$ . Амплитуда последних возрастает по мере приближения к сепаратрисе (рис. 1). В результате вокруг сепаратрисы образуется стохастический слой, относительная ширина которого  $\sim \exp(-b/\omega_0)$ , где  $b \sim 1$  (подробное исследование этого явления для близкой модели см. в [13]). С увеличением  $\omega_0$  ширина стохастического слоя быстро возрастает, и при  $\omega_0 \gg 1$  ( $H \gg 1$ ) хаотическая компонента движения распространяется на большую часть энергетической поверхности. Приведенное в [8] критическое  $H_{\text{кр}} \approx 6,7$  соответствует резо-

нансу с четвертой гармоникой невозмущенных колебаний (член  $\cos(2\theta_1 + 2\theta_2) = \cos(\varphi + 4\theta_1) \approx 1/2 \varphi_0 \cos(4\theta_1 - \omega_0 t + \alpha)$ ). В любом случае величина  $H_{\text{кр}}$  является условной, поскольку мера хаотической компоненты непрерывно зависит от  $H$ .

При  $H \gg 1$  движение является хаотическим, как и для безмассовых полей ЯМ [8]. Однако есть и интересные особенности. Прежде всего, энергетические поверхности теперь замкнуты и имеют конечную меру, а значит, и энтропия  $h > 0$  (см. разд. 3). Оценку ее зависимости от энергии можно получить при  $H \gg 1$  следующим образом. Максимальное  $A_m = \sqrt{2H}$  (4.1). Подставляя это значение в (3.3), найдем

$$h \sim H^h / \ln H. \quad (4.5)$$

Далее, движение вдоль каждой из осей будет теперь периодическим:  $A_1 = A_m \cos t$ . Устойчивость этого решения в линейном приближении определяется уравнением Матье ( $A \equiv A_2$ )

$$\ddot{A} + (1 + H + H \cos 2t)A = 0. \quad (4.6)$$

При  $H \gg 1$  устойчивые и неустойчивые интервалы  $H$  имеют примерно одинаковую ширину (см., например, [22]). Центры интервалов даются приближенным соотношением

$$H_{\text{уст}} \approx 1/8 \pi^2 (n + 1/2)^2 - 1, \quad H_{\text{неуст}} \approx 1/8 \pi^2 n^2 - 1,$$

где  $n > 1$  целое.

Таким образом, массовые члены в гамильтониане (1.11) действительно стабилизируют движение, так что при  $H \rightarrow 0$  хаотическая компонента сохраняется только в экспоненциально-узком слое вокруг сепаратрисы. Однако положение кардинально изменяется при увеличении числа степеней свободы. Рассмотрим, например, ту же модель (1.9) с массовой добавкой (1.11), но для  $N=3$ .

Переходя к переменным действие - фаза, так же как и для  $N=2$ , приходим к усредненному гамильтониану

$$\begin{aligned} H_r &= I_1 + I_2 + I_3 + 1/2 V, \\ V &= I_1 I_2 [1 + 1/2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2)] + I_1 I_3 [1 + 1/2 \cos 2(\theta_1 - \theta_3)] + \\ &+ I_2 I_3 [1 + 1/2 \cos 2(\theta_2 - \theta_3)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Принципиальной особенностью этой модели является наличие не одного (как в (4.2)), а трех резонансов, сохраняющихся при  $H \rightarrow 0$ . Для полной интегрируемости системы теперь нужно два дополнительных интеграла. Между тем (4.7) содержит две линейно-независимые комбинации фаз, так что имеется только одна циклическая комбинация фаз и соответственно только один дополнительный интеграл  $H^0 = I_1 + I_2 + I_3$ . В этих условиях можно ожидать значительной хаотической компоненты движения при любом  $H \rightarrow 0$ . Более того, как и для  $N=2$ , структура фазового пространства вообще не зависит от величины  $H$ , которая определяет только временной масштаб. Действительно, благодаря интегралу  $H^0 = \text{const}$  система может быть сведена к двум степеням свободы. Тогда, если провести масштабное преобразование времени  $H^0 t \rightarrow t$  и перейти к каноническим переменным

$$\varphi_1 = 2(\theta_1 - \theta_3), \quad \varphi_2 = 2(\theta_2 - \theta_3), \quad (4.8)$$

$$J_1 = I_1 / H^0, \quad J_2 = I_2 / H^0,$$

гамильтониан редуцированной системы принимает вид

$$\begin{aligned} H_R &= J_1 (1 - J_1 - J_2) (1 + 1/2 \cos \varphi_1) + \\ &+ J_2 (1 - J_1 - J_2) (1 + 1/2 \cos \varphi_2) + J_1 J_2 (1 + 1/2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

и не зависит от энергии исходной системы  $H \approx H^0$ . Если движение этой системы является хаотическим, то универсальный хаос в исходной системе будет сохраняться при сколь угодно слабом нелинейном возмущении.

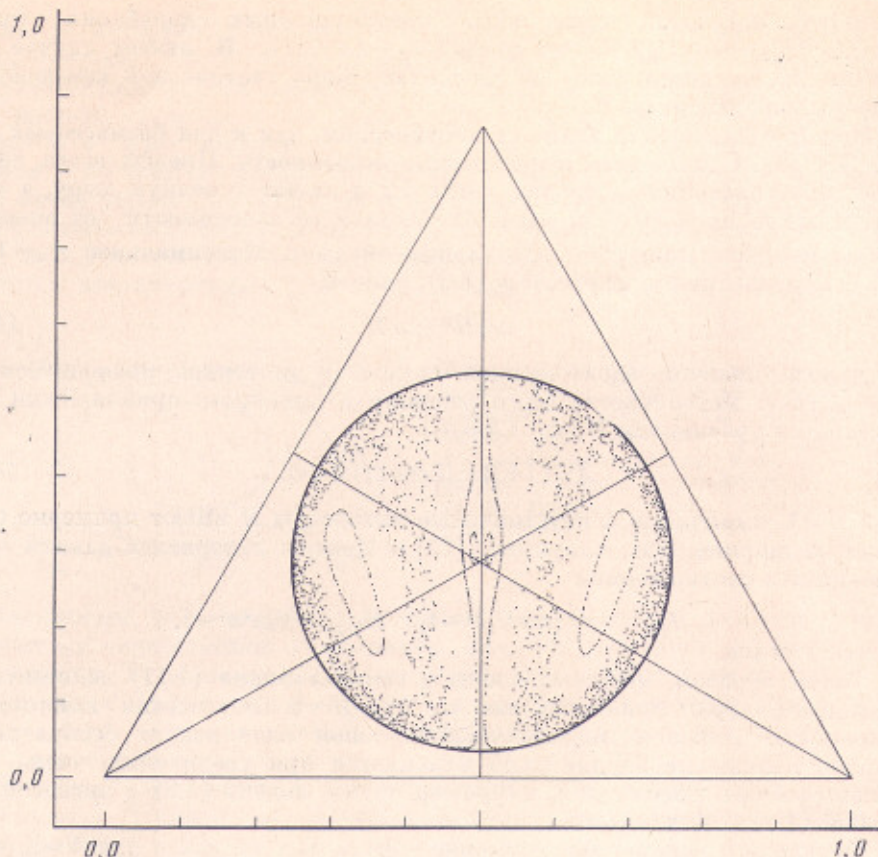


Рис. 2. Плоскость сечения Пуанкаре для системы (4.9);  $H_R=0,404$ . Картина движения симметрична относительно вертикальной прямой. Центр треугольника совпадает с центром окружности, которая ограничивает энергетически допустимую область движения. Нерегулярно разбросанные точки принадлежат одной хаотической траектории;  $h_R=0,026$

Это красивое явление было обнаружено и исследовано в работе [23] для близкой модели. Отметим, что теория КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера) в данном случае неприменима, так как невозмущенная система (линейный осциллятор) изохронна [24].

Исследование динамики системы (4.9) проводилось путем численного моделирования. Точность сохранения интеграла  $H_R$  находилась в интервале от  $10^{-3}$  до  $10^{-8}$  и не влияла на характеристики системы.

В процессе численного решения уравнений движения (на интервале  $t \sim 10^4$ ) методом двух близких траекторий (разд. 2) определялась энтропия  $h_R$ , которая связана с энтропией исходной системы посредством  $h \approx h_R H$ . Численные эксперименты показали, что в системе имеется хаотическая компонента, а характеризующая ее величина  $h_R$  зависит от значения интеграла  $H_R$ . Максимальная  $h_R^{max} \approx 0,15$  достигается при  $H_R \approx 0,3$ . Величина  $H_R$  может принимать значения в интервале  $0 \leq H_R \leq 1/2$ , что следует из (4.9) и положительности действий  $I_R$ .

При приближении  $H_R$  к своим крайним значениям  $h_R$  уменьшается. Так, например,  $h_R=0,082$  при  $H_R=0,18$  и  $h_R=0,026$  при  $H_R=0,40$ .

Для наглядного представления картины движения можно построить двумерное сечение Пуанкаре трехмерной энергетической поверхности системы (4.9), если наложить какое-либо дополнительное условие на динамические переменные (см., например, [23]). Мы использовали условие  $\varphi_1 = \varphi_2$ , при котором картина движения будет симметричной относительно  $J_1, J_2$ . В этих переменных поверхность сечения представляет собой равносторонний треугольник, так как  $H^0 = I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}$  и  $I_k > 0$ . Перейдем к

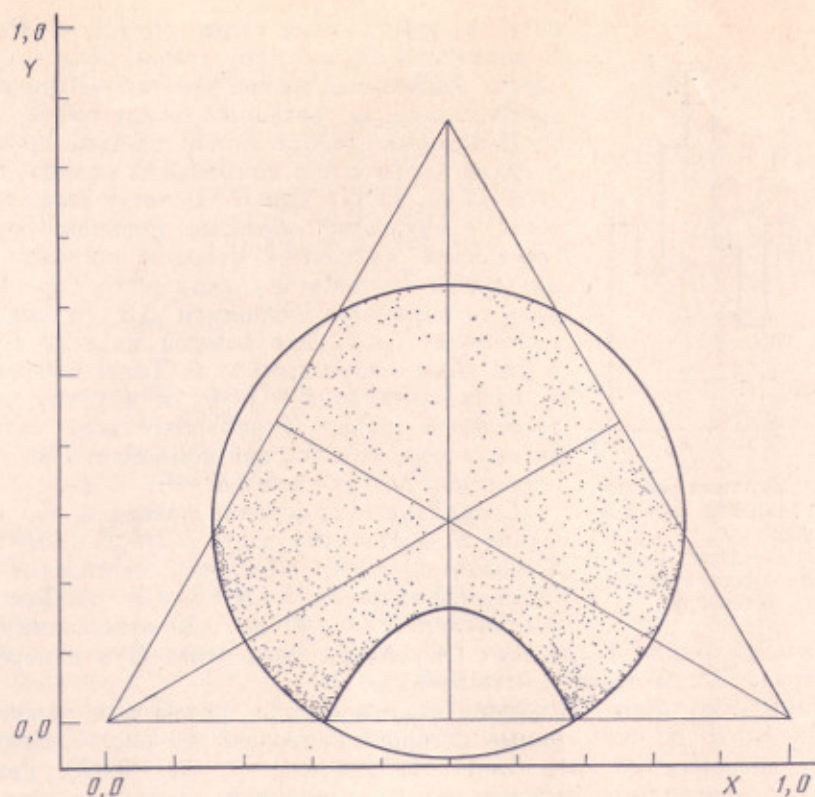


Рис. 3. То же, что и на рис. 2;  $H_R=0,324$ ,  $h_R=0,14$

декартовым координатам

$$X = \frac{1}{2}(1 + J_2 - J_1), \quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{3}(1 - J_1 - J_2). \quad (4.10)$$

Энергетически допустимая область движения представляет собой пересечение области внутри круга

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1 - 2H_R}{3} \quad (4.11)$$

и вне эллипса

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2H_R}{3} \quad (4.12)$$

(см. рис. 3).

На рис. 2 приведен пример картины движения для  $H_R=0,404$ . Сплошная окружность соответствует (4.11), а точки — численный счет для четырех различных траекторий. Три из них, для которых точки ложатся на гладкую кривую, соответствуют квазипериодическому движению, т. е. для них существует еще один дополнительный интеграл. Остальные нерегулярно разбросанные точки принадлежат одной хаотической траектории, которая приблизительно охватывает всю хаотическую компоненту движения ( $h_R=0,026$ ).

Обратим внимание на значительное изменение плотности точек хаотической траектории. Это указывает на сильную неравномерность инвариантной меры на поверхности сечения.

Другой пример картины движения приведен на рис. 3. Относительная площадь хаотической компоненты достигает максимума при  $H_R \approx 0,3$  (как

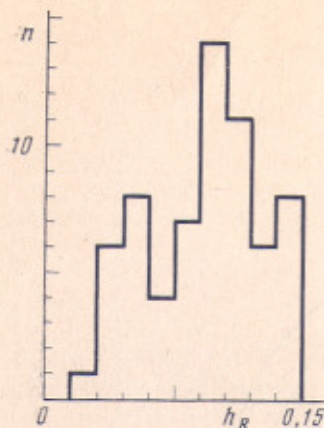


Рис. 4. Гистограмма распределения энтропии  $h_R \approx h/H$  для модели (1.9), (1.11) при  $H \ll 1$ ;  $n$  — число траекторий с  $h_R$  в соответствующем интервале

остаётся постоянным в пределах нескольких процентов. При измерении по 100 траекториям мы получили  $S=65\%$ .

Помимо этого было получено распределение различных значений энтропии  $h_R \approx h/H$ , гистограмма которого приведена на рис. 4. Среднее значение энтропии на энергетической поверхности  $\langle h_R \rangle \approx 0,093$ . Резкий обрыв распределения со стороны малых значений  $h_R$  указывает на хорошее разделение устойчивых и хаотических компонент движения в условиях численного моделирования. Близкие максимальные значения  $h_R$  для исходной (0,143) и приведенной (0,151) систем дополнительно подтверждают, что принятое значение  $H_0 \approx 0,25$  достаточно хорошо отражает предельное поведение исходной системы при  $H \rightarrow 0$ . Значительное уменьшение  $H_0$  нежелательно, так как при этом увеличивается продолжительность счета.

Обнаруженная значительная хаотическая компонента при  $H \rightarrow 0$  связана с вырождением невозмущенной системы (все три частоты линейного осциллятора (массы) одинаковы). Только в этом случае все резонансы сохраняются при  $H \rightarrow 0$ . Если по каким-либо причинам линейные частоты оказываются различными, появляется, как и для  $N=2$ , критическая энергия  $H_{кр} \sim |\Delta\omega|_{\max}$  — максимальная разность линейных частот ( $|\Delta\omega| \ll \omega$ ). В частности,  $H_{кр} > 0$ , даже если две частоты совпадают. В этом случае при  $H \rightarrow 0$  остается только один резонанс.

Аналогичная ситуация может возникнуть и при одинаковых частотах, если момент  $M \neq 0$  (1.8). Рассмотрим следующую модель. Пусть поле ЯМ имеет компоненты  $A_1^a = A_1$ ,  $A_2^a = A_2$ ,  $A_3^c = A_3$ . Тогда  $M_3 = A_1 E_2 - A_2 E_1 = \text{const}$  ( $M_g = 0$ ). Гамильтониан имеет вид

$$H = 1/2 [E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_3^2 (A_1^2 + A_2^2)]. \quad (4.13)$$

Ввиду аксиальной симметрии система может быть сведена к двум степеням свободы. Положим  $A_{\perp}^2 = A_1^2 + A_2^2$ , тогда гамильтониан редуцированной системы можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2} [E_{\perp}^2 + E_3^2 + M_3^2/A_{\perp}^2 + A_3^2 + A_{\perp}^2 + A_3^2 A_{\perp}^2]. \quad (4.14)$$

Если  $M_3 = 0$ , задача сводится к рассмотренному выше случаю (4.1) с одним резонансом и критической энергией. Для  $M_3 \neq 0$  энергия имеет минимум  $H_m = |M_3|$  при  $A_{\perp} = A_m = \sqrt{|M_3|}$ ,  $A_3 = 0$ . Обозначив  $A_{\perp} - A_m = A$ , полу-

и  $h_R$ ) и уменьшается при  $H_R \rightarrow 1/2$  и  $H_R \rightarrow 0$ . В последнем случае допустимая область движения разделяется на три участка вблизи углов треугольника, не связанных между собой.

Некоторые средние статистические характеристики хаотической компоненты исходной модели (1.9), (1.11) при  $H \rightarrow 0$  могут быть получены следующим образом. Возьмем группу траекторий, начальные условия которых распределены случайно и равномерно в слое фазового пространства толщиной  $\Delta H$  со средним значением  $H_0 \ll 1$ . Для каждой из этих траекторий вычислим энтропию  $h$ . Тогда отношение  $S$  числа траекторий с  $h > 0$  к полному числу траекторий равно (приблизительно) относительной мере хаотической компоненты на энергетической поверхности ( $H \rightarrow 0$ ).

Специальные измерения показали, что в качестве  $H_0$  достаточно взять  $H_0 \approx 0,25$  ( $\Delta H \approx 0,1$ ). Контроль проводился по зависимости от  $H$  безразмерной энтропии  $h/H \rightarrow h_R$  ( $H \rightarrow 0$ ). Так, при увеличении  $H$  от 0,07 до 0,29 отношение  $h/H$

чим разложение гамильтониана (4.14) вблизи минимума

$$H = |M_3| + 1/2 [E_3^2 + (1 + |M_3|) A_3^2 + E^2 + 4A^2 + 2\sqrt{|M_3|} A A_3^2 + A^2 A_3^2]. \quad (4.15)$$

Частоты малых колебаний равны  $\omega_3 = \sqrt{1 + |M_3|}$  и  $\omega = 2$  (для  $A_3$  и  $A$  соответственно). Условия резонанса:  $\omega = 2\omega_3$  (член возмущения  $A A_3^2$ ) и  $\omega = \omega_3$  (член  $(A A_3)^2$ ). Поэтому даже один резонанс возможен лишь для  $|M_3| = 0$ ; 3. В противном случае движение системы (4.15) будет даже более устойчивым, чем (4.1), в том смысле, что колебания невозмущенных действий будут малыми:  $I_3, I \approx \text{const}$  (ср. рис. 1). Отметим, что существует симметричное решение ( $A_2 \rightarrow A_1^b, M = 0, M_2^c \neq 0$ ), отвечающее ненулевой плотности источников.

В заключение вернемся еще раз к предыдущей модели с  $N=3$  и рассмотрим случай  $H \gg 1$ . Как и для  $N=2$ , хаотическая компонента движения охватывает в этом случае почти всю энергетическую поверхность, за исключением малых областей вдоль координатных осей, т. е. когда, например,  $A_1^2 \gg A_2^2 + A_3^2$ . В этой области можно пренебречь в гамильтониане членом  $(A_2 A_3)^2$  (см. (1.9)), так что движения по  $A_2$  и  $A_3$  становятся независимыми и каждое из них описывается уравнением Матье (4.6), как в случае  $N=2$ . Соответственно движение будет устойчивым или неустойчивым (хаотическим) в зависимости от значения  $H$ .

Численное моделирование подтверждает, что, например, при  $H=51$  (устойчивый интервал,  $n=6$ ) действительно существует конечная область регулярного движения, размер которой

$$\sqrt{A_2^2 + A_3^2} / A_1 \sim 3 \times 10^{-3}.$$

## 5. Заключение

Таким образом, динамика ОМ полей ЯМ оказывается в общем случае хаотической. Хаос усиливается с увеличением числа степеней свободы модели. Поэтому для неоднородных полей ЯМ с бесконечным числом (внешних) степеней свободы следует ожидать полной хаотичности движения в случае хотя бы двух внутренних степеней свободы. Для одной внутренней степени свободы вопрос остается открытым, поскольку в приближении ОМ движение в этом случае является периодическим (см. (1.10) и (2.1)). Такая система исследовалась численно в [25], однако получить определенные выводы о хаотичности движения не удалось. Заметим, что хаос в такой системе может быть локальным и не приводить к равномерному распределению энергии по многим модам [26] (последнее было критерием хаотичности движения в [25]).

Мы хотели бы выразить искреннюю признательность В. Н. Байеру, А. И. Вайнштейну и И. Б. Хриповичу за многочисленные разъяснения вопросов теории поля ЯМ и ценные замечания.

*Примечание при корректуре (от 26/X-82 г.)* Недавно (Письма в ЖЭТФ, 1982, 36, 176) была установлена локальная неинтегрируемость модели ЯМ по пересечению сепаратрис, которая, вообще говоря, несущественна для динамики системы.

## Литература

1. Yang C. N., Mills R. L. Phys. Rev., 1954, 96, 191.
2. Поляков А. М. Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, 430; ЖЭТФ, 1975, 68, 1975.
3. Polyakov A. M. Phys. Lett., 1975, 59B, 82. Belavin A. A., Polyakov A. M. et al. ibid., p. 85.
4. Callan C. G., Dashen R. et al. Phys. Rev., 1978, D17, 2717.
5. Вайнштейн А. И., Захаров В. И. и др. УФН, 1982, 136, 553.
6. Басеян Г. З., Матинян С. Г. и др. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 641.
7. Матинян С. Г., Саавиди Г. К. и др. ЖЭТФ, 1981, 80, 830.
8. Матинян С. Г., Саавиди Г. К. и др. Письма в ЖЭТФ, 1981, 34, 613.
9. Чириков Б. В., Шенелянский Д. Л. Там же, с. 171.
10. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.

11. Изергин А. Г., Коренин В. Е. и др. ТМФ, 1979, 38, 3.
12. Прохоров Л. В. ЯФ, 1982, 35, 229.
13. Chirikov B. V. Phys. Rep., 1979, 52, 263.
14. Корифельд И. П., Синай Я. Г. и др. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
15. Алексеев В. М., Якобсон М. В. Добавление в кн.: Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979. Брудно А. А. Кандидатская диссертация. М., 1978.
16. Гапонов-Грезов А. В., Рабинович М. П. Природа, 1981, № 2, с. 54. Синай Я. Г. Там же, № 3, с. 72. Чириков Б. В. Там же, 1982, № 7.
17. Ford J., Stoddard S. D. et al. Progr. Theor. Phys., 1973, 50, 1547.
18. Casati G. et al. Phys. Lett., 1980, 77A, 91.
19. Wu T. T., Yang C. N. Phys. Rev., 1975, D12, 3843.
20. Coleman S. Phys. Lett., 1977, 70B, 59.
21. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
22. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИИЛ, 1953.
23. Ford J., Lunsford G. H. Phys. Rev., 1970, A1, 59.
24. Арнольд В. И. УМН, 1963, 18, 91.
25. Захаров В. Е., Иванов М. Ф. и др. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, 39.
26. Chirikov B. V., Izrailev F. M. et al. Comp. Phys. Comm., 1973, 5, 11.

### DYNAMICS OF SOME HOMOGENEOUS MODELS OF CLASSICAL YANG — MILLS FIELDS

CHIRIKOV B. V., SHEPELYANSKY D. L.

The role of space-homogeneous models in the theory of classical Yang — Mills fields is considered. Dynamics of some of the models is investigated. It is shown that the stochastic motion is typical for their time evolution. In particular, the interaction with the Higgs fields does not necessarily lead to stabilization of the motion.