

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ДИФФУЗИЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ПРО-  
ХОЖДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

ПРЕПРИНТ 80 - 211



ДИФФУЗИЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ПРОХОЖДЕНИИ  
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

Б.В. Чиряков, Д.Л. Шепелянский

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена простая модель многократного прохождения нелинейного осциллятора с одной степенью свободы через резонанс. Получены аналитические оценки для границы стохастичности движения и скорости диффузии в стохастической области как при быстром, так и при медленном прохождении резонанса. Приведены результаты численных экспериментов, которые подтверждают аналитические оценки и позволяют получить уточненное полуэмпирическое соотношение для скорости диффузии.

Процесс прохождения резонанса связан с изменением частоты осциллятора и/или частоты возмущения, так что в какой-то момент времени эти частоты (или их гармоники) совпадают и действие возмущения на осциллятор резко усиливается. Однократное прохождение резонанса исследовалось во многих работах (см., например, /1-5/). Для нелинейного осциллятора наибольший интерес представляет так называемое медленное прохождение резонанса (см. /3/ и раздел 3 ниже), когда скорость изменения частот за счет внешней (заданной) модуляции значительно меньше, чем за счет фазовых колебаний на резонансе под действием возмущения. В этом случае возможен, в частности, типично нелинейный режим захвата, когда частота осциллятора вследствие изменения его энергии успевает следовать за частотой возмущения. Это - известная автофазировка Векслера-Мак-Миллана, которая используется сейчас во всех крупных ускорителях заряженных частиц. В режиме захвата резонанс фактически не проходит, так как частота осциллятора все время близка к частоте возмущения. Однако для других начальных условий /3/ или при наличии потерь /1/ резонанс в конце концов проходит.

При малом возмущении и в отсутствие захвата эффект однократного прохождения резонанса мал. Поэтому более интересной представляется задача о многократном прохождении резонанса, когда возможны накапливающиеся эффекты. Последние могут быть как регулярными /2/, так и стохастическими /6,7/.

Отметим, что процесс многократного прохождения нелинейного резонанса является типичным для многомерных колебаний. Действительно, рассмотрим обычную постановку задачи, когда исследуемая система разбивается на полностью интегрируемую невозмущенную систему и малое возмущение. Если невозмущенная система является нелинейной и ее частоты зависят от переменных действия, то в следующем приближении под действием возмущения возникает модуляция этих частот, что и приводит, вообще говоря, к многократному прохождению резонансов невозмущенной системы. При оп-

ределенных условиях это вызывает стохастизацию движения и, как следствие, диффузию системы в фазовом пространстве. Оценка скорости такой диффузии представляет интерес в ряде приложений, например, при исследовании устойчивости движения заряженных частиц в ускорителях и накопительных кольцах /7,8/.

В случае быстрого прохождения резонанса оценка скорости диффузии оказывается относительно простой и неоднократно производилась /6,7/. Однако при медленном прохождении резонанса задача существенно усложняется, в частности, здесь совершенно неприменимо широко распространенное квазилинейное приближение. Грубые оценки для этого случая были получены в /6/.

Основной задачей настоящей работы является численное исследование диффузии при многократном медленном прохождении резонанса. Для этого исследования мы выбрали, по-видимому, простейшую модель, заданную некоторым отображением (раздел 2). Результаты численных экспериментов (раздел 4) подтверждают оценки /6/, которые, таким образом, с найденным в этой работе эмпирическим коэффициентом могут быть использованы и в других задачах (соотношения (23) и (24)).

Отметим, что как оценки /6/, так и результаты настоящей работы относятся к случаю многократного прохождения одного единственного резонанса. Для многих приложений представляет интерес также случай многократного прохождения нескольких различных резонансов, который кратко обсуждается в конце разделов 2 и 3.

Пользуемся случаем выразить нашу искреннюю благодарность Ф.М. Израйлеву и Дж. Теннисону за полезные обсуждения.

## 2. Модель

Рассмотрим каноническое отображение:

$$\bar{I} = I + k \sin(\theta + \lambda \sin \Omega t) \quad (1)$$

$$\bar{\theta} = \theta + \bar{I}$$

где  $I, \theta$  — переменные действие-фаза, а  $k, \lambda, \Omega$  — параметры. Эта модель описывается точным гамильтонианом

$$H = \frac{I^2}{2} + k \cos(\theta + \lambda \sin \Omega t) \cdot \delta_1(t) \quad (2)$$

с периодической (период  $T=1$ )  $\delta$ -функцией:

$$\delta_1(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n t \quad (3)$$

Пусть  $k \ll 1$ . Если кроме того

$$\lambda \Omega \ll 1 \quad (4)$$

то в гамильтониане (2) можно произвести усреднение  $\delta$ -функции:  $\bar{\delta}_1(t) = 1$ . Это приводит к усредненному гамильтониану:

$$\bar{H} = \frac{I^2}{2} + k \cos(\theta + \lambda \sin \Omega t) \quad (5)$$

который приближенно описывает динамику исходной системы (1). Такое приближение справедливо, когда все частоты усредненной системы (5) ( $\sqrt{k}$ ;  $\lambda \Omega$ ) много меньше основной частоты  $\delta$ -функции ( $2\pi$ ). Отсюда и получаются приятные выше неравенства на параметры системы.

Рассмотрим вначале усредненную систему (5), для которой член с малым параметром  $k$  можно считать возмущением. Тогда невозмущенный гамильтониан  $\bar{H}_0 = I^2/2$  описывает нелинейные колебания с частотой  $\omega = I$ , зависящей от действия.

Пусть теперь  $\lambda = 0$ . Тогда имеется единственный резонанс  $\omega = 0$ , а движение нашей модели совпадает с движением маятника (5). Характерной особенностью фазовой картины такого движения является наличие особой траектории — сепаратрисы, показанной на рис. 1А, которая ограничивает область нелинейного резонанса (подробнее см., например, в /9/).

Отметим, что приближение маятника оказывается справедливым для довольно широкого класса нелинейных резонансов /9/. Это и послужило основанием для выбора модели типа (1).

Резонанс  $\omega = 0$  в модели (5) с  $\lambda = 0$  характеризуется двумя основными параметрами, которые нам потребуются в дальнейшем. Это — частота (малых) фазовых колебаний

$$\Omega_\phi = \sqrt{k} \quad (6)$$

(частота малых колебаний маятника) и ширина резонанса (полная ширина сепаратрисы маятника по частоте).

$$(\Delta\omega)_r = 4\sqrt{k} = 4\Omega_\phi \quad (7)$$

(см. рис. 1А).

Если имеет место фазовая (частотная) модуляция возмущения ( $\lambda \neq 0$ ), то условие резонанса имеет вид:

$$\dot{\psi} = \omega + \lambda \Omega \cos \Omega t = 0, \quad (8)$$

где  $\psi = \theta + \lambda \sin \Omega t$  — так называемая резонансная фаза /3,9/. Условие (8) можно записать также в форме

$$\omega = \omega_M = -\lambda \Omega \cos \Omega t, \quad (9)$$

где  $\omega_M$  — частота возмущения, явно зависящая от времени. Если  $|\omega| < \lambda \Omega$ , то в определенные моменты времени обе частоты ( $\omega$ ;  $\omega_M$ ) совпадают, т.е. происходит прохождение резонанса. Фазовая картина движения в этом случае изображена схематически на рис. 1В. Модуляция возмущения вызывает колебания резонанса вдоль оси  $\omega$  между двумя крайними положениями, изображенными на рис. 1В. пунктиром. Помимо этого модуляция приводит к искажению неподвижной сепаратрисы резонанса, зависящему от её скорости и направления движения. Анализ фазовой картины движения при прохождении резонанса удобно производить простым методом, описанным в /3/.

Влияние периодической модуляции возмущения можно исследовать и по-другому. Для этого разложим частотно-модулированное возмущение в (5) в ряд Фурье:

$$\cos(\theta + \lambda \sin \Omega t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda) \cos(\theta + m \Omega t), \quad (10)$$

где  $J_m(\lambda)$  — функция Бесселя. При подстановке этого выражения в (5) мы получаем систему стационарных резонансов  $\omega = \omega_m = m \Omega$ , или мультиплет. Формально число резонансов в мультиплете бесконечно, однако, амплитуда Фурье-гармоник, а значит, и ширина резонансов, быстро (экспоненциально) убывает для  $|m| > \lambda$ . Поэтому фактически работают примерно  $2\lambda$  резонансов в полосе частот  $|\omega| \leq \lambda \Omega$ .

Пример зависимости амплитуды гармоник ( $J_m(\lambda)$ ) от частоты для  $\lambda = 25$  представлен на рис. 1С. На фазовой плоскости ( $\omega$ ,  $\psi_m$ ) ( $\psi_m = \theta + m \Omega t$ , см. (10)) каждому из этих резонансов соответствует сепаратриса, подобная изображенной на рис. 1А,

но с шириной

$$(\Delta \omega)_m = 4\sqrt{k|J_m(\lambda)|} \approx \frac{4\sqrt{k}}{(\pi \lambda)^{1/4}} \quad (11)$$

В последнем выражении использовано среднееквадратичное значение  $J_m(\lambda)$  при  $\lambda \gg 1$  и  $|m| < \lambda$ :

$$\langle J_m^2(\lambda) \rangle \approx \frac{1}{\pi \lambda} \quad (12)$$

Это значение показано на рис. 1С горизонтальной прямой.

Последний подход, основанный на системе стационарных резонансов (рис. 1С), особенно удобен для выяснения характера движения, который определяется параметром перекрытия нелинейных резонансов

$$S = \frac{(\Delta \omega)_m}{\Omega} \approx \frac{4\sqrt{k}}{(\pi \lambda)^{1/4} \Omega} \quad (13)$$

Здесь  $\Omega$  — расстояние между соседними резонансами мультиплета, равное частоте модуляции (рис. 1С) и использована оценка для ширины резонанса (11). Стохастическое движение возникает при условии

$$K \approx 2.5 S^2 > 1, \quad (14)$$

где мы ввели новый параметр устойчивости  $K$  /9/.

Во стохастическом режиме происходит диффузия системы по действию  $I$  (или частоте  $\omega = I$ ) в пределах интервала колебаний сепаратрисы на рис. 1В (где только и имеет место прохождение резонанса), или, что то же самое, в пределах ширины мультиплета на рис. 1С, т.е. в интервале  $|I| = |\omega| \leq \lambda \Omega$ .

Однако численное определение скорости диффузии в этих условиях затруднено, так как диффузия происходит на ограниченном интервале. Именно для преодоления этой трудности мы выбрали модель не в виде непрерывной системы типа (5), а в виде дискретного отображения (1) с гамильтонианом (2). Ввиду наличия в последнем  $\delta$ -функции с Фурье-разложением (3) полная система резонансов нашей модели является бесконечной. Действительно, гамильтониан (2) можно записать в виде:

$$H = \frac{I^2}{2} + k \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda) \cos(\theta + m \Omega t + 2\pi n t) \quad (15)$$

Отсюда видно, что полная система резонансов ( $\omega + m\Omega + 2\pi n = 0$ ) представляет бесконечную последовательность мультиплетов на расстоянии  $\delta\omega = 2\pi$  друг от друга, как это схематически изображено на рис. 2.

Для неограниченной диффузии по  $\omega$  необходимо (помимо выполнения критерия стохастичности (I4)), чтобы соседние мультиплеты перекрывались между собой, т.е. чтобы выполнялось дополнительное условие

$$S_M = \frac{\lambda\Omega}{\pi} \geq 1, \quad (I6)$$

где  $S_M$  — параметр перекрытия мультиплетов.

Однако при этом исследование движения модели (I) становится более сложным, как раз из-за того, что в задаче появляется новый параметр.

В картине прохождения системы через резонанс (рис. IV) случай  $S_M \approx 1$  означает, что проходит только один резонанс, тогда как при  $S_M \gg 1$  система проходит через несколько различных резонансов, соответствующих разным мультиплетам.

В настоящей работе мы ограничились исследованием прохождения только одного резонанса. Однако для удобства измерения коэффициента диффузии, как это было объяснено выше, мы выбрали  $S_M = 1,05$  лишь слегка превышающим критическое значение  $S_M^{(cr)} \approx 1$ , при котором в модели (I) возникает неограниченная диффузия. В следующем разделе мы покажем, что при таком незначительном перекрытии мультиплетов диффузия с хорошей степенью точности определяется лишь одним из них.

Противоположный предельный случай  $S_M \gg 1$  кратко обсуждается в конце следующего раздела.

### 3. Оценки скорости диффузии

Оценки скорости диффузии при многократном прохождении единственного резонанса в стохастическом режиме были получены в /6/. Они существенно зависят от скорости прохождения резонанса, которую удобно характеризовать безразмерным параметром

$$V = \frac{|\dot{\omega}_M|}{\Omega^2}, \quad (I7)$$

где  $\dot{\omega}_M$  — частота возмущения, явно зависящая от времени вследствие частотной модуляции (9), а  $\Omega_\phi$  — частота фазовых колебаний (6) движущегося резонанса (рис. IV). Параметр  $V$  есть отношение скорости смещения резонансного значения частоты за счет модуляции возмущения к скорости изменения частоты осциллятора за счет фазовых колебаний (при большой амплитуде последних).

При быстром прохождении резонанса ( $V \gg 1$ ) частота осциллятора  $\omega$ , изменяющаяся под действием возмущения вследствие нелинейности колебаний, не успевает следить за частотой возмущения  $\dot{\omega}_M$ . Поэтому результат прохождения будет в первом приближении таким же, как и для линейного осциллятора (см., например, /3/):

$$\Delta I \approx \sqrt{2\pi} \frac{k}{\sqrt{|\dot{\omega}_M|}} \left| \sin \left( \psi_r \pm \frac{\pi}{4} \right) \right|, \quad (I8)$$

где  $\psi_r$  — значение резонансной фазы  $\psi$  в момент точного резонанса ( $\dot{\psi} = 0$ ), а знак определяется направлением прохождения резонанса.

В рассматриваемом режиме быстрого прохождения значение  $\psi_r$  может быть любым /3/ и, при условии стохастичности (I4) последовательность  $\psi_r$  оказывается близкой к случайной и равномерно распределенной в интервале  $(0, 2\pi)$  /6,9/. Отсюда скорость диффузии

$$D_f = \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{T/2} \approx \frac{\Omega k^2}{|\dot{\omega}_M|} = \frac{k\Omega}{V}, \quad (I9)$$

где  $T = 2\pi/\Omega$  — период модуляции, в течение которого резонанс проходит дважды.

Рассмотренное приближение справедливо при условии, что скорость прохождения резонанса  $V$  мало изменяется за время прохождения, т.е. за время пересечения сепаратрисой на рис. IV какой-то точки фазовой плоскости, представляющей систему. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы ширина сепаратрисы была много меньше амплитуды её колебаний:

$$(\Delta\omega)_r \ll \lambda\Omega \quad (20)$$

Однако и при выполнении этого условия скорость  $V$  будет изменяться в процессе диффузии (для разных прохождений) от максимальной в центре мультиплета до нулевой на его краях:

$V = V_m |\sin(\Omega t)|$ , где  $V_m = \lambda \Omega^2 / k$  (см. (17), (9)). Для сравнения (19) с численными данными в условиях перекрытия мультиплетов необходимо найти некоторую среднюю скорость диффузии.

Проще всего воспользоваться для этого соотношением между диффузионным потоком ( $q$ ) и градиентом функции распределения ( $f$ )

$$q = - \frac{D}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial I}$$

откуда видно, что необходимо усреднить по  $I$  величину ( $1/D$ ). Поскольку резонансное значение  $I = I_r = \omega_m = -\lambda \Omega \cos(\Omega t)$  (см. (9)), средняя скорость диффузии  $\bar{D}$  определится из соотношения:

$$\frac{1}{\bar{D}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{D(V_m \sin \varphi)} \quad (20a)$$

Если в качестве  $D(V)$  взять (19), то  $\bar{D} = \frac{4}{\pi} D(V_m)$ . В дальнейшем этим множителем ( $4/\pi$ ) мы пренебрежем.

Следует, однако, иметь в виду, что выражение (19) становится неприменимым при  $V \lesssim 1$ , где скорость диффузии резко падает (см. ниже). Это может привести и к существенному уменьшению  $\bar{D}$  в том случае, когда область  $V < 1$  ( $(\Delta I)_1 \approx \lambda \Omega / 2 V_m^2; V_m \gg 1$ ) существенно превышает полную ширину резонанса  $4\sqrt{k}$ , т.е. при условии

$$\frac{k^{3/2}}{8\lambda\Omega^3} > 1$$

При медленном прохождении резонанса ( $V \ll 1$ ) /3,6/:

$$\Delta I \approx \pm \frac{8}{\pi} \Omega_\phi \sqrt{1 + 2\pi V - \xi^2/4} \pm 2V\Omega_\phi \ln[(V + \xi)(4\pi V - \xi^2)] \quad (21)$$

где новая фаза  $\xi = \Psi_r$  может теперь принимать значения только в узком интервале

$$-V < \xi < \sqrt{4\pi V} \quad (22)$$

Знаки в (21) определяются направлением прохождения резонанса.

В пределе  $V \rightarrow 0$  изменение  $\Delta I = \pm 8\Omega_\phi/\pi$  не зависит от скорости прохождения и является полностью обратимым (при  $\Omega_\phi = \text{const}$ ). Этот результат совпадает с выводом в работе /2/.

С другой стороны, критерий стохастичности (14), который в нашем случае можно записать в виде  $K \sim k/\Omega^2 \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}/V \gg 1$ , показывает, что при медленном прохождении резонанса движение является всегда стохастическим.

Разрешение этого кажущегося противоречия состоит в том /6/, что при любом конечном  $V \neq 0$  прохождение резонанса не полностью обратимо за счет изменения фазы  $\xi$ . Ясно, что скорость диффузии будет зависеть именно от этой необратимой добавки ( $\delta I$ ). Последняя определяется, главным образом вторым слагаемым в (21), которое содержит большой логарифм (см. (22)). Из (21) вытекает грубая оценка  $\delta I \sim V\Omega_\phi \ln V$ , откуда скорость диффузии /6/

$$D_s \approx C \cdot \Omega \Omega_\phi^2 V^2 (\ln V)^2 \quad (23)$$

где  $C = 2$  — числовой множитель, значение которого получено из численных экспериментов (раздел 4).

Распространенным методом оценки скорости диффузии динамической системы является так называемое квазилинейное приближение (см., например, /11/). В рассматриваемой задаче оно эквивалентно замене дискретного спектра возмущения  $kJ_m$  (рис. 1С) непрерывным (за счет стохастизации фазы  $\theta$  в гамильтониане (5)) с той же спектральной плотностью  $P = k^2 J_m^2 / \Omega$ . Последний приводит к скорости диффузии

$$D_{qe} = \pi P = \frac{\pi k^2 J_m^2}{\Omega} \approx \frac{k^2}{\lambda \Omega} = D_f \quad (24)$$

что совпадает с прямой оценкой (19) для случая быстрого прохождения резонанса ( $V = V_m$ ).

Однако при медленном прохождении резонанса скорость диффузии резко падает (при той же спектральной плотности возмущения):

$$\frac{D_s}{D_{qe}} \approx C V_m V^2 (\ln V)^2 \quad (25)$$

Это показывает, что квазилинейное приближение в этой области совершенно неприменимо из-за сильных корреляций фазы  $\Theta$ . Более того, при медленном прохождении резонанса существует целая область начальных условий, лежащая внутри сепаратрисы и перемещающаяся вместе с ней (рис. 1В), для которой диффузия вообще отсутствует. Это и есть область автофазировки, или захвата, движение в которой является квазипериодическим (см. раздел 4).

Наличие такой области устойчивости ("дырки") внутри стохастической компоненты приводит к ряду интересных следствий. Прежде всего ясно, что равновесная (в среднем по времени) функция распределения  $F_{eq}(I)$  уже не равна константе (предполагается, что соседние мультиплеты не перекрываются, и диффузия ограничена областью одного мультиплета). Это связано с тем, что истинная фазовая плотность на плоскости  $(I, \Theta)$  постоянна во всей стохастической области, т.е. во всей области диффузии кроме дырки. При проектировании этой плотности на ось  $I$  функция распределения по  $I$  будет понижена в районе дырки. Так как дырка движется, то уменьшение  $F_{eq}(I)$  будет обратно пропорционально её скорости, т.е. будет иметь место, в основном, на краях мультиплета (в области порядка ширины дырки), где дырка практически неподвижна. Такой эффект действительно наблюдался в численных экспериментах.

Это приводит, в свою очередь к изменению диффузионного уравнения, а именно, кроме собственно диффузии появляется еще и так называемый "снос". Действительно, рассмотрим общее уравнение диффузии в форме Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial f(I, t)}{\partial t} = - \frac{\partial q(I, t)}{\partial I} \quad (26)$$

$$q = - \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{D(I)}{2} f(I, t) \right) + A(I) f(I, t),$$

где  $f(I, t)$  - функция распределения;  $q$  - поток, а коэффициенты  $D$  и  $A$  определяются соотношениями

$$D = \langle (\Delta I)_1^2 \rangle; \quad A = \langle (\Delta I)_1 \rangle \quad (27)$$

Индекс 1 указывает здесь, что изменение  $(\Delta I)$  относится к еди-

ничному интервалу времени. Выражение для потока  $q$  можно записать в виде

$$q = - \frac{D}{2} \frac{\partial f}{\partial I} + B f \quad (28)$$

где коэффициент сноса (средняя скорость по  $I$ )  $B$  равен:

$$B = A - \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial I} \quad (29)$$

Если известно равновесное распределение  $F_{eq}(I)$ , то величину  $B$  можно найти из условия  $q=0$  [12], откуда

$$B = \frac{D}{2 F_{eq}} \frac{d F_{eq}}{d I} \neq 0 \quad (30)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае ( $B \neq 0$ ) не выполняется принцип детального равновесия, т.е. вероятности прямых и обратных переходов не равны между собой. Нарушение принципа детального равновесия прямо связано с наличием устойчивой области, которая приводит к тому, что мера стохастической компоненты в одном и том же интервале  $dI$  зависит от  $I$ .

Заметим, что если вместо  $I$  ввести новую переменную  $\mu$  такую, что  $dF_{eq}(\mu)/d\mu = 0$ , то  $B(\mu) = 0$  (30). Переменную  $\mu$  можно выразить через  $F_{eq}(I)$  посредством

$$\mu = \int_0^I F_{eq}(I') dI' \quad (31)$$

При таком представлении  $\mu$  есть просто нормированная мера стохастической компоненты.

Разумеется, коэффициент диффузии  $D$  необходимо при этом также пересчитать к новой переменной:

$$D(\mu) = D(I) \frac{\langle (\Delta \mu)_1^2 \rangle}{\langle (\Delta I)_1^2 \rangle} = D(I) \left( \frac{d\mu}{dI} \right)^2 = D(I) F_{eq}^2(I) \quad (32)$$

Можно показать, что в новой переменной  $\mu$  восстанавливается и принцип детального равновесия, конечно, в среднем по времени, так как в гамильтониане нашей модели присутствует явная периодическая зависимость от времени.



При  $B=0$  уравнение ФПК принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial f}{\partial I} \quad (33)$$

Существенным преимуществом этого уравнения по сравнению с общим (26) является то, что оно содержит лишь один из двух коэффициентов ( $D$ ), причем его определение из динамических уравнений много проще чем для  $A$ . В таком виде уравнение ФПК было получено впервые Ландау /13/ из принципа детального равновесия и Боголюбовым и Крыловым /14/ в некоторой динамической модели. В более общем случае диффузионное уравнение было получено и исследовано Беляевым /15/.

Возвращаясь к нашей модели, заметим, что как говорилось выше равновесная функция  $F_{eq}(I)$  существенно уменьшается лишь на самом краю мультиплета в области порядка ширины резонанса ("дырки"). Поскольку размер этой области мал (20), мы можем просто пренебречь сносом и положить  $B(I) \approx 0$ . При этом существенно, что  $B(I)$  является периодической функцией  $I$  с периодом  $2\pi$  и нулевым средним:  $\langle B(I) \rangle = 0$ , так что снос является локальным. Это непосредственно следует из (30) и симметрии относительно  $I=0$  равновесной функции  $F_{eq}(I)$  (симметричные колебания "дырки") и коэффициента диффузии  $D(I)$  (симметричное движение резонанса).

Нам остается теперь усреднить коэффициент диффузии по ширине мультиплета. Используя правило усреднения (20а) и выражение (23), найдем

$$\frac{1}{D} \approx \begin{cases} \frac{\ln(1/V_m)}{D(V_m)} ; & \psi_s \ll V_m, \\ \frac{\ln(2/\psi_s)}{D(V_m)} ; & V_m \ll \psi_s, \end{cases} \quad (34)$$

где фаза  $\psi_s$  определяется размером сепаратрисы резонанса:  $\psi_s \approx 4\sqrt{k}/\lambda\Omega \ll 1$  (см. (20)). Второе выражение в (34) связано с тем, что интеграл (20а) необходимо "обрезать" со стороны малых  $\psi$  на размере сепаратрисы резонанса, где выражение (23) становится неприменимым.

В заключение этого раздела обсудим кратко, насколько изменятся полученные выше оценки в случае сильного перекрытия мультиплетов ( $s_M = \lambda\Omega/\pi \gg 1$ ).

В картине стационарных резонансов (см. рис. 1С и рис. 2) средняя плотность резонансов по частоте возрастает при этом приблизительно в  $s_M$  раз. Во столько же раз увеличивается параметр перекрытия соседних резонансов  $s$  (13):

$$s \approx \frac{4}{\pi^{5/4}} k^{1/2} \lambda^{3/4} ; \quad s_M \gg 1 \quad (35)$$

что значительно понижает границу устойчивости (14).

В квазилинейном приближении скорость диффузии возросла бы во столько же раз. Например, для быстрого прохождения получаем вместо (24):

$$D_f \approx \frac{k^2}{\pi} ; \quad s_M \gg 1 \quad (36)$$

В картине прохождения резонансов этот результат соответствует независимому действию  $s_M$  различных резонансов, через которые проходит система в этом режиме. Если такая же независимость сохраняется и при медленном прохождении резонансов, то скорость диффузии тоже возрастет в  $s_M$  раз по сравнению с (23):

$$D_s \approx C \frac{\lambda\Omega^2 k}{\pi} V^2 (\ln V)^2 ; \quad s_M \gg 1 \quad (37)$$

Однако условия, при которых различные резонансы действуют независимо, требуют дальнейшего исследования. В частности, неясно, останется ли справедливым квазилинейное приближение даже при быстром прохождении резонансов, если  $s_M \gg 1$ .

При незначительном перекрытии мультиплетов ( $s_M - 1 \ll 1$ ), которое использовалось в наших численных экспериментах (см. раздел 4 и конец раздела 2), влиянием соседних мультиплетов на диффузию можно пренебречь. Действительно, при этом прохождение соседних резонансов возможно лишь на краях мультиплета, относительная площадь которых  $\sim (s_M - 1) \ll 1$ . Правда, резонанс воздействует на систему и на некотором конечном расстоянии, т.е. без прохождения резонанса. Однако при достаточно малой частоте возмущения  $\Omega$  это воздействие является адиабатическим и вызываемое им изменения переменной действия  $I$  оказывается экспоненциально малым по параметру адиабатичности (см., например, /16/):

$$\varepsilon \sim \frac{\Omega}{\Delta} \ll 1, \quad (38)$$

где  $\Delta$  — минимальная расстройка от резонанса по частоте. Поскольку ширина мультиплета в нашем случае равна  $2\lambda$ , то существенное влияние соседних резонансов за счет нарушения адиабатичности будет иметь место лишь при  $\Omega \geq \lambda$ . Максимальное значение  $\Omega$  в наших численных экспериментах составляло 0,1 (раздел 4).

#### 4. Численные эксперименты

Выбранная нами модель (I) удобна не только в том отношении, что она обеспечивает неограниченную диффузию (см. раздел 2), но и своей предельной простотой для численного счета.

Основной целью численных экспериментов было определение скорости ( $D$ ) диффузии по  $I$  в зависимости от параметров модели. Скорость диффузии вычислялась по формуле:

$$D = \left\langle \frac{(I_k - I_e)^2}{t_k - t_e} \right\rangle \quad (39)$$

где  $I_k, I_e$  — значения  $I$ , усредненные по некоторым интервалам времени с центрами в  $t_k, t_e$ , а скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение  $D$  по различным интервалам. Такое двойное усреднение позволяет значительно снизить влияние всегда присутствующих ограниченных колебаний ("фон") и уверенно измерять чрезвычайно малую скорость диффузии (см. таблицу и рис.3). Подробное описание этой техники дано в [10,9].

При численном счете исходные параметры модели изменялись в интервалах (см. Таблицу):

$$\begin{aligned} k &= 10^{-3} + 10^{-1} \\ \lambda &= 3,3 \cdot 10^1 + 3,3 \cdot 10^4 \\ \Omega &= 10^{-4} + 10^{-1} \end{aligned}$$

При этом параметр перекрытия резонансов ( $S$ ) находился в пределах  $S = 2,2 + 705$ ; максимальное значение скорости прохождения резонанса  $V_m = 3,3 \cdot 10^{-3} + 3,3 \cdot 10^1$  и отношение  $\lambda\Omega / (\Delta\omega)_r = \lambda\Omega / 4\sqrt{k} = 2,6 + 26$  (20). Произведение  $\lambda\Omega = 3,3$

оставалось неизменным для всех случаев, представленных в таблице и на рис.3. Выбор значения  $\lambda\Omega$  подробно обсуждался выше, в конце раздела 2.

Типичное время счета траектории составляло  $t = 10^6$  итераций отображения (1). Для первых четырех значений скорости прохождения резонанса  $V_m$  в таблице время счета было увеличено до  $3 \cdot 10^6$  итераций из-за очень малой скорости диффузии по отношению к уровню фона. Например, для минимального  $V_m = 3,3 \cdot 10^{-3}$  при  $t = 10^6$  скорость диффузии составляла  $D \approx 9 \cdot 10^{-8}$ , тогда как при  $t = 3 \cdot 10^6$  скорость упала более чем в 20 раз, до значения  $D \approx 3,8 \cdot 10^{-9}$ . Ясно, что предыдущее высокое значение скорости "диффузии" определяется на самом деле исключительно фоном. С другой стороны, при дальнейшем увеличении времени счета наблюдаемая скорость диффузии изменяется незначительно. Так, при  $t = 6 \cdot 10^6$  величина  $D \approx 4,3 \cdot 10^{-9}$ . Остающаяся разница двух последних значений связана, повидимому, со статистическими флуктуациями. Независимость измеренной скорости диффузии от времени движения, которая проверялась и для других случаев, подтверждает диффузионный характер изучаемого движения.

При скорости  $V_m = 8,3 \cdot 10^{-3}$  и выше для надежного измерения скорости диффузии оказывается достаточным уже и  $10^6$  итераций. Например,  $D \approx 2,9 \cdot 10^{-7}$  ( $t = 10^6$ );  $D \approx 1,8 \cdot 10^{-7}$  ( $t = 3 \cdot 10^6$ ) для  $V_m \approx 8,3 \cdot 10^{-3}$ .

Отметим, что уровень фона зависит не только от  $V_m$ , но и от других параметров, главным образом от  $k$ . Поэтому, например, очень малая скорость диффузии  $D \approx 1,7 \cdot 10^{-8}$  при  $V_m = 0,33$  (см. таблицу) оказывается много выше фона из-за малого значения  $k = 10^{-3}$ .

Для дополнительного контроля были проведены два специальных эксперимента. В первом из них параметр перекрытия мультиплетов  $S_M = 0,80 < 1$ , так что область диффузии была ограничена шириной одного мультиплета. В этих условиях наблюдаемая скорость диффузии должна резко уменьшаться при увеличении времени движения. Такой эффект действительно наблюдался. Так, при  $V_m = 0,17$  и  $t = 10^4$  отношение  $D/D_1 \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$  не слишком отличается от случая неограниченной диффузии ( $S_M = 1,05$ , см

таблицу). Это объясняется тем, что за такое короткое время диффузия не успевает заполнить мультиплет. Однако при увеличении времени движения до  $t = 10^6$  отношение  $D/D_1 \approx 1,9 \times 10^{-3}$  падает почти на порядок.

Во втором контрольном эксперименте начальные условия выбирались вблизи центра колеблющейся сепаратрисы резонанса (см. рис. 1В), где при достаточно малой скорости  $V$  существует устойчивая область регулярного движения (см. раздел 3). В этой области диффузия, конечно, отсутствует, а её наблюдаемое значение определяется исключительно фоном. Так, для  $V_m = 0,17$  скорость "диффузии" (фон) в центре резонанса оказалась равной  $D \approx 10^{-9}$ , тогда как в стохастической компоненте  $D \approx 10^{-4}$  (см. таблицу).

При сравнении численных результатов с оценками (24), (25) мы пренебрегли поправками на неравномерность скорости  $V$ , положив в этих оценках  $V = V_m$ . Для быстрого прохождения поправочный коэффициент  $(4/\gamma)$  близок к единице (20а). Для медленного прохождения резонанса поправки больше (34), однако, для конкретных значений параметров модели в численных экспериментах поправочный множитель не превосходит 2, главным образом из-за небольших значений  $1/\varphi_s \approx \lambda \Omega / 4\sqrt{k}$  (см. таблицу). На фоне значительного разброса численных данных (см. ниже) введение поправок не представляется существенным и не уменьшало разброса.

Сравнение численных результатов, представленных на рис. 3, с теоретическими оценками показывает, что последние удовлетворительно описывают зависимость скорости диффузии от параметров модели. Для быстрого прохождения резонанса ( $V_m \geq 1,3$ , последние 8 случаев в таблице) среднее значение  $\langle D/D_1 \rangle = 0,74 \pm 0,11$ . В случае медленного прохождения резонанса ( $V_m \leq 0,66$ ) среднее значение численного множителя в оценке (25)  $\langle C \rangle = 2,0 \pm 0,45$ . Область вблизи  $V_m = 1$  не описывается ни одной из оценок (24), (25). В этой области ( $0,66 \leq V_m \leq 1,3$ ) скорость диффузии резко возрастает с  $V_m$  примерно на порядок.

Следует отметить значительный разброс точек на рис. 3, природа которого не вполне ясна. Во всяком случае это не объясняется только статистическими флуктуациями. Так, например, для

$V_m = 8,3 \cdot 10^{-2}$  значительное снижение скорости диффузии по отношению к теоретической  $D/D_s \approx 1/6$  ( $C=2$ ) сохраняется для различных траекторий. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

1. Ю.А.Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, АН УССР, Киев, 1955.
2. K.Symon, A.Sessler, Proc. CERN Symposium 1 (1956) 44 (русский перевод в сб. "Накопление релятивистских частиц", Госатомиздат, Москва, 1963, с.48)
3. Б.В.Чириков, ДАН СССР 125:5 (1959) 1015.
4. J.Kevorkian, SIAM J. Appl. Math. 26 (1974) 638.
5. J.Sanders, SIAM J. Math. Anal. 10:6 (1979) 1220.
6. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, препринт 267, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1989.
7. J.Tennyson, The Instability Threshold for Bunched Beams in ISABELLE, A.I.P. Conf. Proc. No 57, 1979, p. 158.
8. F.M.Izrailev, Physica D, 1980 (in print).
9. B.V.Chirikov, Physics Reports 52:5 (1979) 265.
10. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Труды 7-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975), т.П-1, с.315.
11. Л.А.Арипович, Р.З.Сагдеев, Физика плазмы для физиков (Атомиздат, М., 1979).
12. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Физическая кинетика (Наука, М., 1979).
13. Л.Д.Ландау, ЭТФ 7, (1937) 203.
14. Н.Н.Боголюбов, Н.М.Крылов, Записки кафедры математики Института строительной механики, т.4, 1939, с.5, Н.Н.Боголюбов, Избранные труды т.2 (Наукова думка, Киев, 1970) с.5.
15. С.Т.Белзев, Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильных полях, Сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций" (АН СССР, М., 1958), т.Ш, с.50.
16. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика (Наука, М., 1973).

- Рис.1. А) Сепаратриса отдельного резонанса шириной  $(\Delta\omega)$ .  
 В) Мгновенные конфигурации сепаратрисы при прохождении резонанса вследствие частотной модуляции возмущения (5): сплошные кривые изображают движущуюся сепаратрису (направление движения показано стрелкой); пунктирные кривые соответствуют двум крайним положениям сепаратрисы, когда мгновенная скорость её смещения равна нулю.  
 С) Спектр частотно-модулированного возмущения (5);  $\lambda = 25$ ; горизонтальная прямая показывает среднюю оценку (12).

Рис.2. Спектр возмущения (система резонансов) для модели (I) (см.(15)).

Рис.3. Зависимость нормированной скорости диффузии  $D/D_f$  от скорости прохождения резонанса  $V_m$  ( $\log$  - десятичный логарифм): кружки - результаты численного счета; кривая - оценка для  $V_m \ll 1$  (25) с  $V = V_m$  и эмпирическим значением  $C = 2,0$ .

Таблица. Зависимость скорости диффузии от параметров модели (Г)

$V_m$	$\frac{D}{D_1}$	D	k	$\lambda$	$\Omega$	s	$\frac{\lambda \Omega}{4\sqrt{k}}$
$3.3 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$3.8 \times 10^{-9}$	0.1	$3.3 \times 10^4$	$10^{-4}$	705	2.6
$4.7 \times 10^{-3}$	$6.7 \times 10^{-6}$	$10^{-8}$	$7 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^4$	$10^{-4}$	590	3.1
$8.3 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-7}$	0.1	$1.32 \times 10^4$	$2.5 \times 10^{-4}$	355	2.6
$1.7 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-6}$	0.1	$6.6 \times 10^3$	$5 \times 10^{-4}$	211	2.6
$3.3 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-6}$	0.1	$3.3 \times 10^3$	$10^{-3}$	125	2.6
$8.3 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$3.7 \times 10^{-6}$	0.1	$1.32 \times 10^3$	$2.5 \times 10^{-3}$	63.1	2.6
0.13	$3.8 \times 10^{-3}$	$2.9 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-2}$	$1.65 \times 10^3$	$2 \times 10^{-3}$	52.7	3.7
0.17	$3.3 \times 10^{-2}$	$10^{-4}$	0.1	$6.6 \times 10^2$	$5 \times 10^{-3}$	37.5	2.6
0.33	$4.3 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-4}$	0.1	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	22.3	2.6
0.33	$5.7 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-8}$	$10^{-3}$	$3.3 \times 10^4$	$10^{-4}$	70.5	26
0.33	$8.9 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-6}$	$10^{-2}$	$3.3 \times 10^3$	$10^{-3}$	39.6	8.3
0.66	0.11	$8.1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	15.8	3.7
I	0.16	$5.4 \times 10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	12.8	4.6

I.3	I.1	$2 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	II.1	5.2
I.7	0.83	$10^{-4}$	$2 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	IO.0	5.8
3.3	0.53	$1.6 \times 10^{-3}$	0.1	33	0.1	4	2.6
6.6	I.4	$1.1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	5	I2
10	0.24	$7.9 \times 10^{-7}$	$3.3 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	4	I4
15	0.63	$9.9 \times 10^{-7}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	3.3	I8
17	0.83	$9.9 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	3.2	I9
33	0.37	$1.1 \times 10^{-7}$	$10^{-3}$	$3.3 \times 10^2$	$10^{-2}$	2.2	26

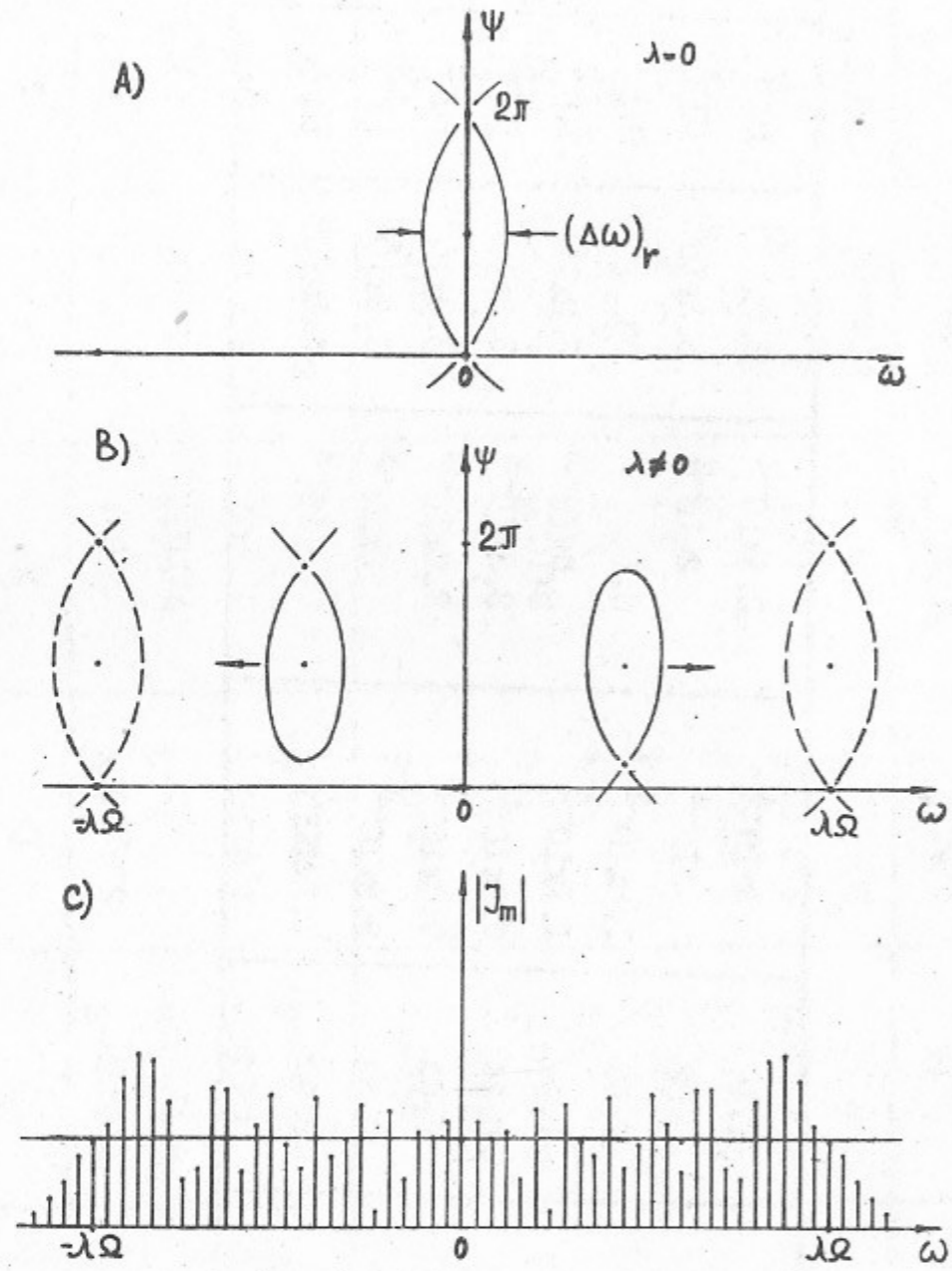


Рис. I

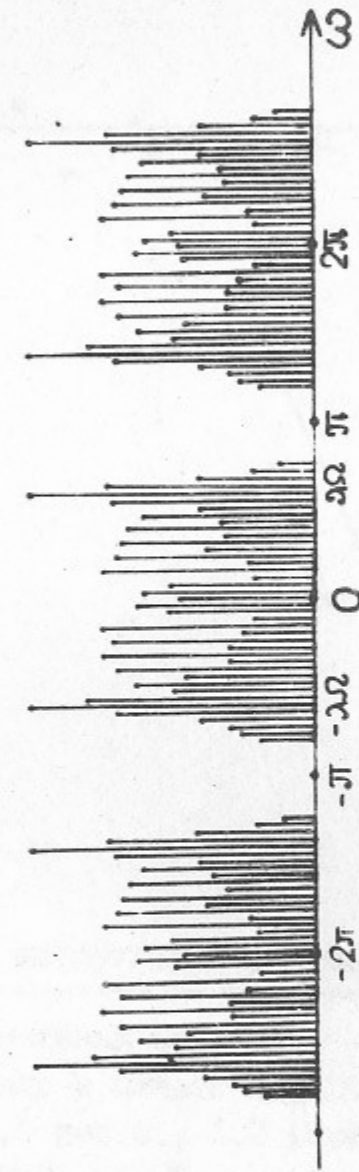


Рис. 2

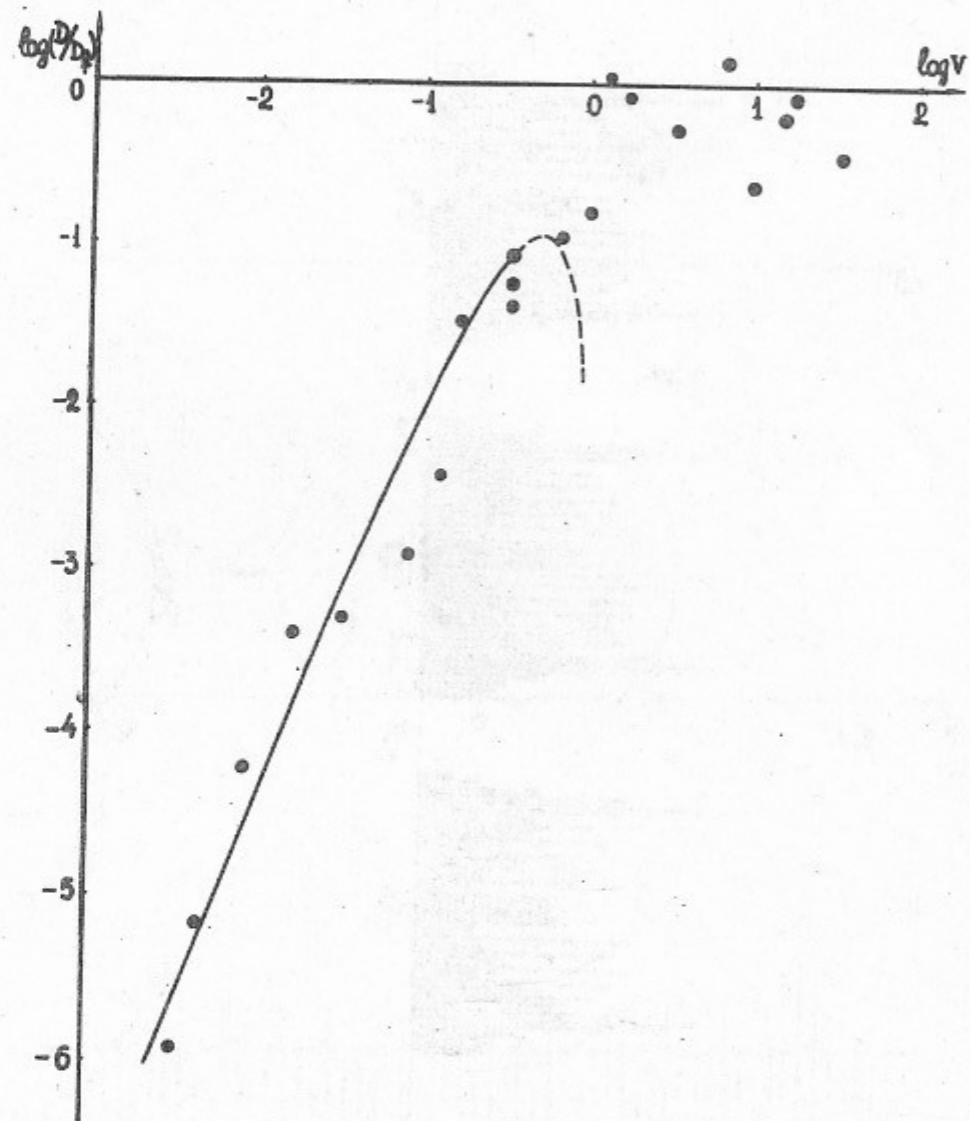


Рис. 3

---

Работа поступила - 11 ноября 1980г.

Ответственный за выпуск - С.Г. Попов  
 Подписано к печати 24.XI-1980г. МН 13563  
 Усл. 1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.  
 Тираж 250 экз. Бесплатно  
 Заказ №211.

---

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР