АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

ДИНАМИКА И ЭВОЛЮЦИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Ответственные редакторы
академик А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ
доктор физико-математических наук М. И. РАБИНОВИЧ

Москва «Наука» 1989

УДК [534.2 + 537.86] : 532.59

Нелинейные волны. Динамика и эволюция.— М.: Наука, 1989.— 400 с. ISBN 5-02-000669-6.

В сборник включены обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на VIII Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, март 1987 г.). Обсуждаются проблемы динамического хаоса, рождения и формирования структур, биологической эволюции и другие проблемы с общих позиций нелинейной динамики.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся исследованиями нелинейных явлений.

Рецензенты: Д. И. ТРУБЕЦКОВ, В. Д. ШАЛФЕЕВ

$\text{Н}\frac{1604030000-226}{055(02)-89}$ 120-89, кн. 2

ISBN 5-02-000669-6

УДК 503.145.61+530.182+539.184.5

КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Д. Л. ШЕПЕЛЯНСКИЙ

К настоящему времени явление динамического хаоса в классических системах достаточно хорошо изучено и в основном понято [1—3]. Вместе с тем исследование простых моделей показало, что динамика квантовых систем, стохастических в классическом пределе, обладает рядом особенностей (см., например, [2, 4, 5]), из которых наиболее интересным является эффект квантового ограничения диффузии [4—6]. Примером физической системы, в которой указанные выше эффекты играют существенную роль, служит высоковозбужденный атом водорода в микроволновом поле [7]. При напряженности поля, превышающей некоторое критическое значение, движение классического электрона становится хаотическим, что приводит к диффузионной ионизации атома [8—11]. Такая картина процесса согласуется с экспериментальными данными [7] и была более детально подтверждена в эксперименте [12]. Вместе с тем при определенных условиях в этой системе происходит квантовое ограничение диффузии, что ведет к резкому падению вероятности ионизации по сравнению с классическим значением [13—15]. Ниже будет показано, что квантовая локализация хаоса проявляется и при диффузионном возбуждении молекул (см. [16, 17]).

Прекращение диффузии в квантовой системе является следствием локализации собственных функций квазиэнергии (СФКЭ), которая аналогична локализации Андерсона в твердом теле [18]. Эта аналогия позволяет рассматривать возбуждение многоуровневой системы в периодическом поле как задачу о локализации в твердом теле и использовать полученные там результаты [19]. При этом номер невозмущенного уровня играет роль пространственной координаты (номер узла в решетке). Следует, однако, подчеркнуть, что, несмотря на указанную аналогию, явление квантовой локализации хаоса принципиально отличается от локализации Андерсона тем, что в системе нет никаких случайных параметров и соответствующий твердотельный потенциал является детерминированной функцией номера узла решетки.

1. МОДЕЛЬ КВАНТОВОГО РОТОРА

Для анализа динамики квантовых систем, стохастических в классическом пределе, рассмотрим модель квантового ротатора с гамильтонианом

$$H = \hat{n}^2/2 + k \cos \theta \, \delta_T(t), \tag{1}$$

где $\hat{n} = -i\partial/\partial\theta$; $\delta_T(t)$ — дельта-функция с безразмерным периодом T; θ — фаза в интервале $[0, 2\pi]$; $V(\theta) = k \cos \theta$ — внешнее возмущение; $\hbar = 1$ [4—6, 18]. Здесь $H_0(n) = n^2/2$ задает энергии невозмущенных уровней n. Динамика соответствующей классической системы определяется уравнениями движения с гамильтонианом (1), где n, θ — классические сопряженные переменные действие—фаза.

После интегрирования иа период T получаем стандартное отображение [1, 3]

$$\bar{p} = p + K \sin\theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{p}, \tag{2}$$

где черта означает новые значения переменных через период, а $p = Tn$, $K = kT$. При $K \leqslant K_{\text{кр}} = 0{,}9716\ldots$ [20] изменение n ограничено: $|\Delta n| \lesssim \sqrt{k/T}$, а при $K > K_{\text{кр}}$ величина $(\Delta n)^2$ растет по диффузионному закону со скоростью $D = (\Delta n)^2/\tau = D_0(K)/T^2$, где $D_0(K)$ — скорость диффузии по p в стандартном отображении (2), а τ — число периодов возмущения. Условие квазиклассичности имеет вид $k \gg 1$, $T \ll 1$, $K = \text{const}$.

В единой хаотической компоненте зависимость скорости диффузии от параметра стохастичности K приближенно описывается следующим выражением:

$$D_0 \approx \begin{cases} \dfrac{K^2}{2}[1 + 2J_2(K) + 2J_2^2(K)], & K \geqslant 4{,}5, \\ 0{,}30\,(\Delta K)^3, & K < 4{,}5, \end{cases} \tag{3}$$

где $J_2(K)$ — функция Бесселя; $\Delta K = K - K_{\text{кр}}$. При $K \geqslant 4,5$ зависимость $D_0(K)$ имеет вид осцилляций, затухающих с ростом K [3, 21]. Предельное значение $D_0 = K^2/2$ соответствует квазилинейному приближению, когда фазы $\theta(\tau)$ в (2) случайны и независимы. При $K \to K_{\text{кр}}$ в (3) использована эмпирическая формула, полученная из численных экспериментов [6]. Значение показателя $\eta \approx 3$ в степенной зависимости $D_0 \propto (\Delta K)^\eta$ близко к значению, принятому в [22].

Численные эксперименты с квантовым стандартным отображением (1) показали [4—6, 18, 23, 24], что с течением времени диффузионный рост $\langle n^2 \rangle$ останавливается, т. е. под действием поля эффективно возбуждается конечное число уровней ($\Delta n \sim l$). Естественная интерпретация такого квантового ограничения диффузии связана с локализацией СФКЭ, которая аналогична локализации Андерсона в одномерной решетке [6, 18, 23, 24]. В работах [5, 6] была получена теоретическая оценка для числа возбужденных уровней и длины локализации СФКЭ:

$$l = \alpha D \sim \Delta n \sim \tau_D, \tag{4}$$

где α — некоторая числовая константа.

Вывод соотношения (4) основан на следующих соображениях. Пусть одно невозмущенное состояние разлагается на l СФКЭ с квазиэнергиями ν_i. Так как эти ν_i распределены на интервале $[0, 2\pi]$, то среднее расстояние между ними $\Delta\nu \sim 1/l$ (рассматривается случай, когда невозмущенные уровни равномерно распределены в интервале 2π). Если первоначально возбуждено одно невозмущенное состояние, то диффузия будет продолжаться только в течение конечного времени $t \sim \tau_D$, пока не проявится дискретность спектра. Согласно соотношению неопределенности, $\tau_D \sim 1/\Delta\nu \sim l$. За это время диффузионно возбудится число уровней $\Delta n \sim (D\tau_D)^{1/2} \sim l$. Откуда и получаем соотношение (4). При этом условие его применимости — $D \gg 1$.

2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СФКЭ

Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет СФКЭ модели (1) с квазиэнергией ν [18]:

$$u_n^- = \exp\{i[\nu - TH_0(n)]\}\, u_n^+, \quad u^+(\theta) = \exp[-iV(\theta)]\, u^-(\theta). \quad (5)$$

Здесь $u^{\mp}(\theta)$ — значения функции до и после действия возмущения; $u_n^{\pm}$ — фурье-компоненты $u^{\pm}(\theta)$. После простых преобразований (5) сводится к виду

$$\hat{H}_{ss}u = \left[\cos\frac{\hat{V}}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2} - \frac{T}{2}\hat{H}_0\right)\cos\frac{V}{2} - \frac{1}{2}\sin\hat{V}\right]u = 0, \quad (6)$$

где $u = \exp(\pm iV/2)u^{\pm}$. После фурье-преобразования $\exp(-iV/2) = \sum_r W_r^- \exp[i(r\theta + \varphi_r)]$ видно, что гамильтониан H_{ss} соответствует некоторой одномерной решетке с взаимодействующими соседями и энергией $E = -\sum_r W_r^- W_{-r}^- \sin\varphi_r \cos\varphi_{-r}$. При этом квазиэнергия ν как бы определяет потенциал взаимодействия, а собственное значение энергии E рассматривается как параметр. Кроме того, невозмущенный номер уровня n в модели (1) соответствует дискретной пространственной координате в решетке.

Поскольку в одномерной случайной цепочке все собственные функции локализованы [19], то естественно ожидать экспоненциальной локализации СФКЭ в (1). В том случае, когда $\cos(V/2) \neq 0$, можно ввести $\bar{u} = u\cos(V/2)$ и, разделив уравнение (6) на $\cos(V/2)$, свести задачу к случаю диагонального беспорядка с $\bar{H}_{ss} = \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2} - \frac{T}{2}\hat{H}_0\right) - \operatorname{tg}\frac{\hat{V}}{2}$. Такой метод был неявно использован в [18]. Следует, однако, подчеркнуть, что такой путь приводит к возникновению нефизической особенности, которая не позволяет рассматривать широкий класс потенциалов с $|V| \geqslant \pi$.

Форма уравнения (6) удобна для проведения аналогии с задачами твердого тела. Вместе с тем для численных экспериментов удобней переписать (5), (6) следующим образом. Введем $\bar{u} = \exp(\pm iV/2)\, u^{\pm}/g$, где g — произвольная действительная функция θ, и ограничимся случаем, когда g и V четные. Тогда из (5) получаем

$$\sum_r \bar{u}_{n+r} W_r \sin(\chi_n + \varphi_r) = 0, \quad (7)$$

где $\exp(-iV/2)\, g = \sum_r W_r \exp[i(r\theta + \varphi_r)]$; $\chi_n = [\nu - TH_0(n)]/2$.

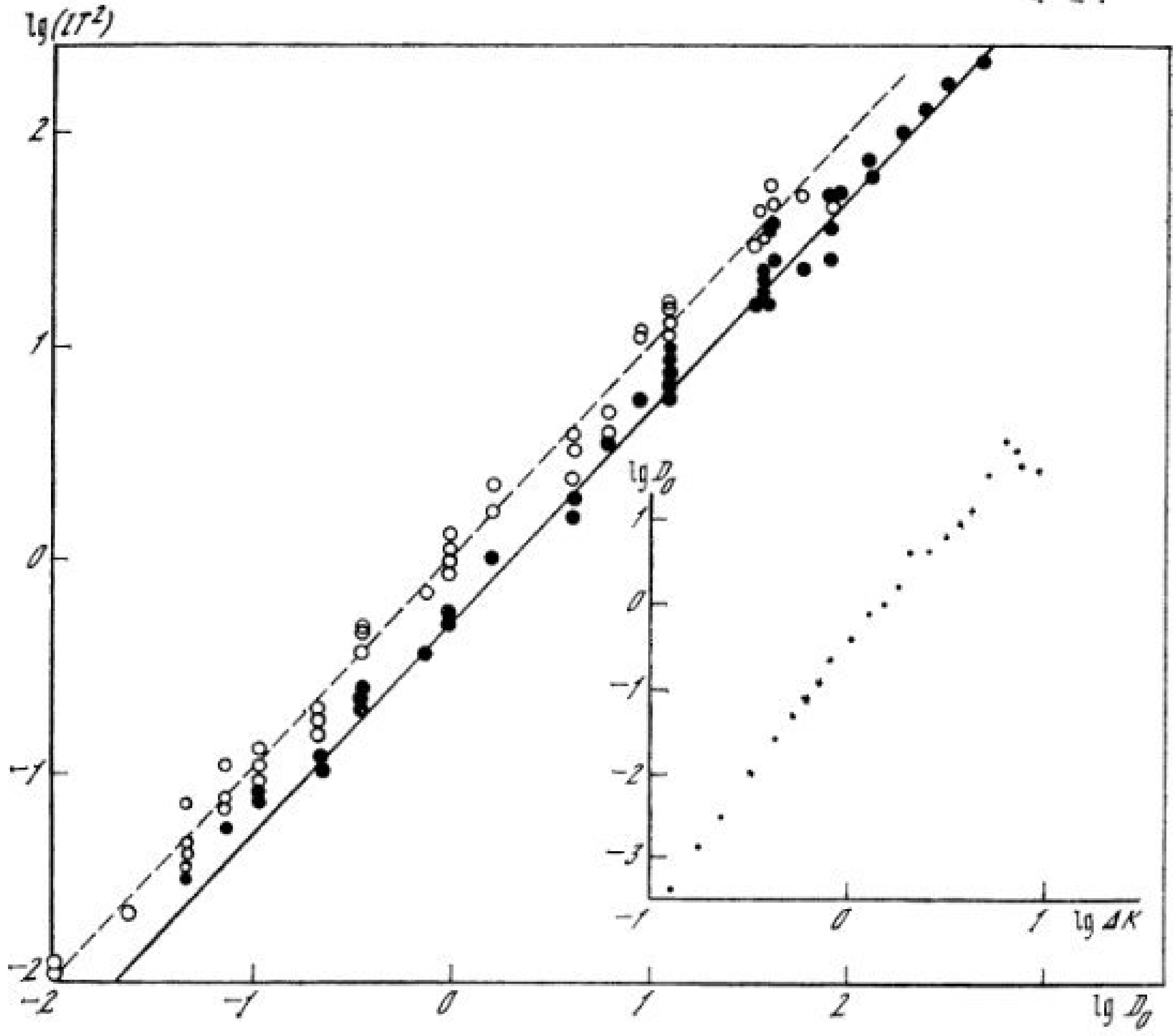


Рис. 1

В том случае, когда отличны от нуля только W_r с $|r| \leqslant N$, столбец из $2N$ известных значений $\overline{u_n}$ определяет значения СФКЭ при любом n.

Рекуррентное вычисление $\overline{u_n}$ из (7) можно рассматривать как некоторую динамическую систему в дискретном времени n. Динамика $2N$-компонентного вектора определяется матрицей переноса M_n, вид которой легко определяется из (7). Можно показать, что динамика по n является гамильтоновой и в системе имеются N положительных и N отрицательных показателей Ляпунова (ПЛ), причем $\gamma_i^+ = -\gamma_i^-$ (см., например, [3]). Асимптотически длина локализации СФКЭ определяется минимальным положительным ПЛ $\gamma_1 = 1/l$ [23, 24]. Отличие γ_1 от нуля приводит к тому, что все СФКЭ экспоненциально локализованы: $u_n \propto \exp(-|n|/l)$, а спектр квазиэнергий является чисто точечным. Техника вычисления *всех* ПЛ подробно описана в [3].

Выбрав $g = 1$, получим, что для (1) $W_r = J_r(k/2)$, $\varphi_r = -\pi r/2$, $\chi_n = (\nu - Tn^2/2)/2$, где $J_r(k/2)$ — функция Бесселя. Из-за быстрого падения W_r при $|r| > k/2$ можно ограничиться конечным числом соседей $N \sim k/2$. Результаты численных экспериментов [23], полученных методом ПЛ (точки на рис. 1), показывают, что в квазиклассической области ($T \leqslant 1$, $5 \leqslant k \leqslant 75$, $1{,}5 \leqslant K \leqslant$

$\leqslant 29$, $T/4\pi$ — типичное иррациональное число) длина локализации СФКЭ удовлетворительно описывается соотношением (прямая)

$$l = D_0\,(K)/2T^2, \tag{8}$$

которое сохраняется не только в области развитого хаоса с $K \geqslant 4{,}5$, где мера островков устойчивости пренебрежимо мала [1], но и при $\Delta K = K - K_{\text{кр}} \leqslant 1$, когда скорость диффузии определяется сложной критической структурой [22] и устойчивая компонента занимает около 50% всей фазовой плоскости [1]. При этом скорость диффузии в стандартном отображении D_0 меняется на четыре порядка (рис. 1, на вставке дана зависимость D_0 от ΔK [6]). Численное значение $\alpha = 1/2$ получено путем сравнения (4) с точно решаемой моделью Ллойда [23].

На рис. 1 приведены также численные данные [6] для длины локализации стационарного распределения вероятностей по невозмущенным уровням, устанавливающегося в процессе эволюции начального состояния с $n = n_0$: $\bar{f}\,(n) \propto \exp(-2\,|\,n - n_0\,|/l)$. Среднее значение $\langle\alpha\rangle = 1{,}04$ (пунктирная прямая) близко к единице и существенно отличается от значения $\alpha = 1/2$ для СФКЭ. Причина этого заключается в сильных флуктуациях СФКЭ [6, 25].

3. ДИФФУЗИОННЫЙ ФОТОЭФФЕКТ В АТОМЕ ВОДОРОДА

Рассмотрим процесс ионизации высоковозбужденного атома водорода в монохроматическом линейно-поляризованном поле. Для состояний, вытянутых вдоль поля (магнитное квантовое число $m = 0$, а параболические числа $n_1 \gg n_2$), динамику возбуждения можно описывать одномерным гамильтонианом [13—15]

$$H = -\frac{1}{2n^2} + \varepsilon n^2 \cos\omega t\left[\frac{3}{2} - 2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J'_s\,(s)}{s}\cos\,(s\lambda)\right], \tag{9}$$

где n, λ — сопряженные действие — фаза; ε, ω — напряженность и частота поля и использованы атомные единицы.

От непрерывных уравнений движения удобно перейти к отображению за один оборот электрона вокруг ядра. Чтобы найти производящую функцию G для этого отображения запишем координату z в невозмущенных переменных и проинтегрируем уравнения Гамильтона на одном обороте. В результате получим, что

$$G\,(\bar{N},\ \varphi) = \bar{N}\varphi + 2\pi\,(-2\omega\,\bar{V})^{-1/2} + kA\,(\bar{\varkappa})\cos\varphi.$$

Здесь $N = E/\omega = -1/\,(2\omega n^2)$; φ — сопряженная с N переменная, равная значению ωt в момент прохождения перигелия; $k = 0{,}822\pi\varepsilon/\omega^{5/3}$, а $A\,(\varkappa) = \dfrac{\varkappa^{2/3}}{0{,}411}\,\underline{J}'_\varkappa(\varkappa)$, где $\underline{J}_\varkappa\,(\varkappa)$ — функция Ангера (при целых $\varkappa$ она совпадает с функцией Бесселя, при $\varkappa \to 0$ производная $\underline{J}'_\lambda\,(\varkappa) = {}^1/_2\varkappa$, $\varkappa = \omega\,(-2\omega\bar{N}))^{-3/2}$.

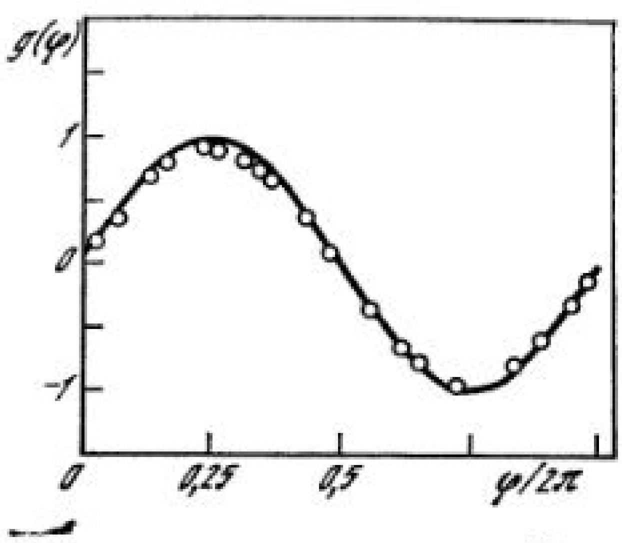


Рис. 2

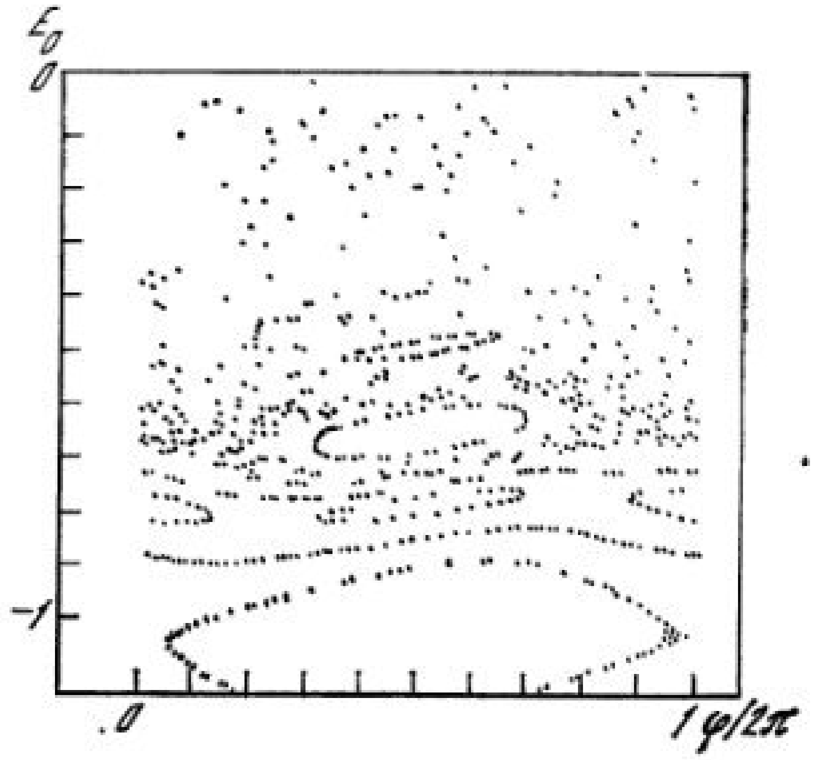
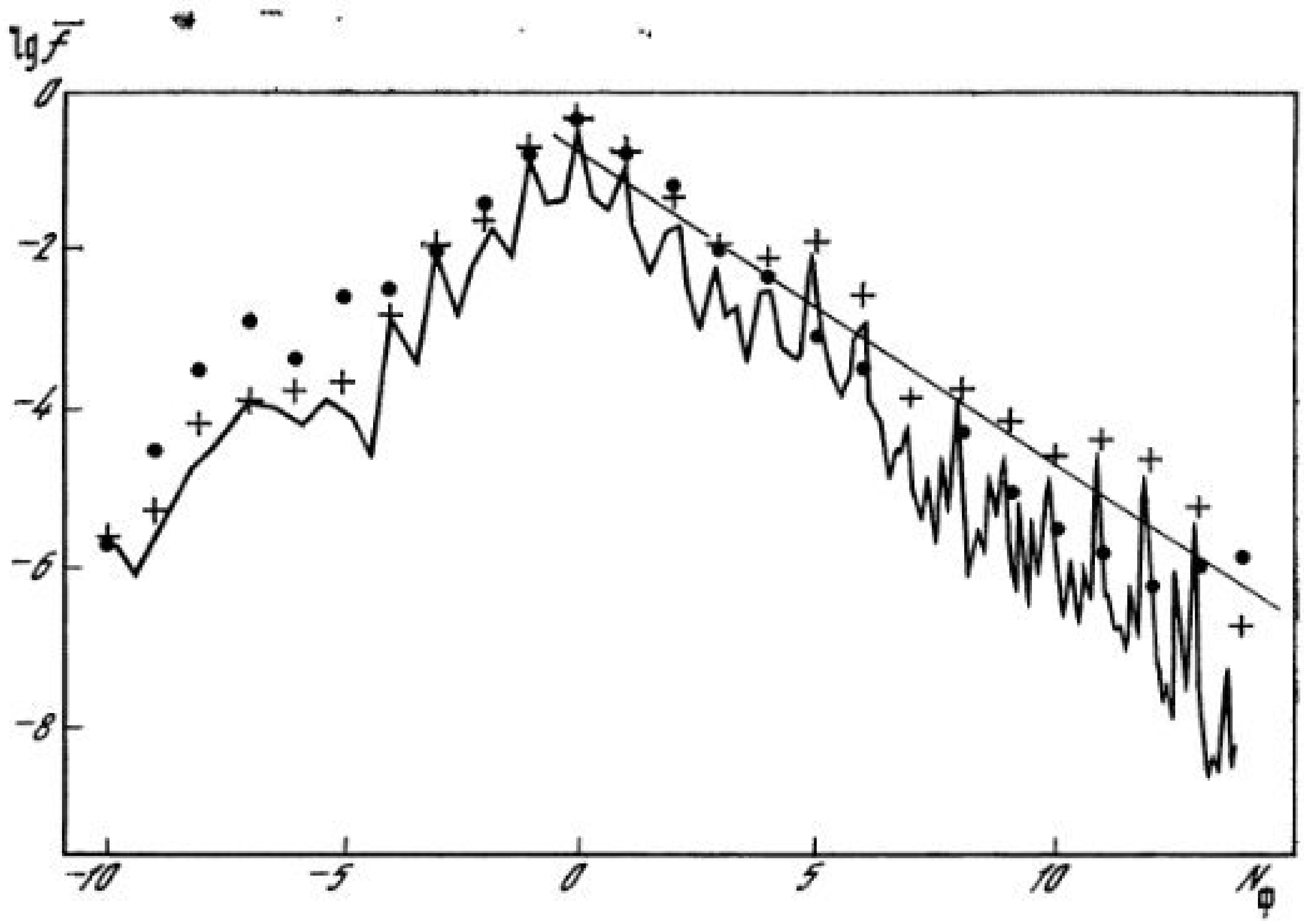


Рис. 3

Рис. 4



При $\varkappa \gg 1$ функция $A \to 1$ и отображение принимает особенно простой вид

$$\bar{N} = N + k \sin \varphi, \qquad \bar{\varphi} = \varphi + 2\pi\omega\,(-2\omega\,\bar{V})^{-3/2}, \tag{10}$$

где черта означает новые значения переменных после одного оборота. Для проверки (10) при численном решении непрерывных уравнений (9) фиксировалась фаза $\omega t = \varphi$ в момент прохождения перигелия. По трем полученным значениям φ находилась функция $g(\varphi) = (\bar{N} - N)/k$. Сравнение теоретической зависимости $g = \sin \varphi$ (линия) с численными данными (точки) представлено на рис. 2 для начальных условий с $\varepsilon_0 = \varepsilon n_0^4 = 0{,}04$, $\omega_0 = \omega n_0^3 = 1{,}5$. Таким образом, (10) вполне удовлетворительно описывает динамику вплоть до $\omega_0 \approx 1$.

Линеаризацией по N отображение (10) локально может быть сведено к стандартному отображению (2) с параметрами k, $T = 6\pi\omega^2 n_0^5$ и $K = kT = \varepsilon_0/\varepsilon_c$, где $\varepsilon_c \approx 1/(49\omega_0^{1/3})$. Глобальная диффузия в системе возникает при $K > 1$, т. е. $\varepsilon_0 > \varepsilon_c$, что согласуется с [11]. В процессе диффузии значение K растет, фазы φ становятся случайными и независимыми, а скорость диффузии по N равна $D = k^2/2$.

Пример фазовой плоскости в переменных $E_0 = N\omega n_0^2$, φ при $\varepsilon_0 = 0{,}04$, $\omega_0 = 3$ приведен на рис. 3. Показаны шесть устойчивых траекторий и одна хаотическая. Отметим, что ионизация в (10) происходит в результате одного «последнего» толчка, который переводит $N < 0$ в $N > 0$, после чего траектория уходит на бесконечность. Время ионизации, выраженное в числе оборотов, равно $t_I = N_I^2/D$, где $N_I = 1/(2\omega n_0^2)$.

Теперь перейдем к квантованию (10) [26]. Из обычного соотношения $\hat{E} = -i\partial/\partial t$ следует, что $\hat{N} = -i\partial/\partial\varphi$ $(-\infty < \varphi < \infty)$. Поскольку возмущение периодично по φ, то в системе (10) наряду с квазиэнергией сохраняется квазиимпульс. Для начального уровня n_0 квазиимпульс равен дробной части $N_0 = -N_I$. Внешнее возмущение приводит к возбуждению высоких гармоник квазиимпульса. Поскольку $\varphi \propto t$, то этот квазиимпульс соответствует обычной квазиэнергии в исходной системе (9). Таким образом, квантовое отображение (10) описывает процесс диффузии по квазигармоникам в (9). Номер квазигармоники соответствует числу поглощенных фотонов и равен $N_\Phi = N - N_0$. Квантование дает $\hat{N}_\Phi = -i\partial/\partial\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. В результате получаем отображение для волновой функции

$$\bar{\psi} = \exp(-i\hat{H}_0)\,\hat{P}\exp(-ik\cos\varphi)\,\psi, \tag{11}$$

где $\hat{H}_0 = 2\pi\,[-2\omega\,(N_0 + \hat{N}_\Phi)]^{-1/2}$, а $\hat{P}$ — оператор проекции на дискретные состояния $(N < 0)$.

Как и в модели (1), следствием квантовых эффектов является локализация диффузии. Однородность диффузии приводит к однородной экспоненциальной локализации стационарного распределения с длиной $l_\Phi = D$. В результате устанавливается распределение вида [6, 26]

$$\bar{f}_{N_\Phi} = \frac{1}{2l_\Phi}(1 + x)\,e^{-x}, \quad x = \frac{2\,|N_\Phi|}{l_\Phi}, \quad l_\Phi = 3{,}33\,\frac{\varepsilon^2}{\omega^{10/3}}. \tag{12}$$

Пример стационарного распределения показан на рис. 4 для $n_0 = 100$, $\varepsilon_0 = 0{,}04$, $\omega_0 = 3$ (сплошная линия — данные квантового моделирования (9), крестики — суммарная вероятность в интервале $[N_\Phi - 1/2,\ N_\Phi + 1/2]$, точки — результат итерирования отображения (11), прямая — среднеквадратичная подгонка по максимумам в распределелении $\bar{f}$ при $N_\Phi > 0$). Здесь экспериментальное значение l_Φ в 1,6 раза больше теоретического (12).

В том случае, когда длина локализации сравнима с числом фотонов, требуемым для ионизации $l_\Phi \approx N_I = -N_0$, в системе происходит делокализация и процесс возбуждения близок к классическому. Полученные результаты находятся в согласии с [14, 15]. Вместе с тем они позволяют описать процесс возбуждения на высоких уровнях и объяснить наблюдавшиеся в [14] многофотонные пики в распределении по уровням.

Из (11) получаем, что скорость однофотонной ионизации (в числе оборотов) равна $\gamma_{1\Phi} = (k/2)^2$, что согласуется со стандартным результатом теории возмущений ($k \ll 1$). При $k \gg 1$ и $N_I \ll k$ распределение ионизованных электронов пропорционально $J^2_{N_\Phi}(k)$. В области локализации, когда $N_I > l_\Phi > k > 1$, скорость ионизации равна $\gamma_\Phi \sim \sum\limits_{N=N_I-k}^{N_I} \bar{f}_N \sim k\bar{f}_{N_I}$ (вероятность, теряемая за один оборот). В физическом времени получаем

$$\Gamma_\Phi \sim k f_{N_I} (k\omega)^{3/2} \sim \frac{\omega^{5/4}}{\sqrt{n_0}} \left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} \exp\left[-2\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2\right], \qquad (13)$$

где $\varepsilon_q = \omega_0^{7/6}/\sqrt{6{,}66 n_0}$ — граница делокализации. При $\varepsilon_0 > \varepsilon_q$ скорость ионизации определяется классической диффузией и при $\omega_0 \approx 1$ оказывается значительно больше, чем скорость однофотонной ($\omega_0 = n_0/2$) ионизации при той же напряженности поля $t_I \gamma_{1\Phi} \sim (n_0/2)^{-4/3} \ll 1$ (см. [15, рис. 1]).

В заключение отметим, что длина локализации (12) (выраженная в числе поглощенных фотонов) может быть записана в виде $l_\Phi = 2\pi^2\mu^2\varepsilon^2\rho^2$, где $\mu = 0{,}411/\omega^{5/3}n^3$ и $\rho = n^3$ — соответственно однофотонный матричный элемент и плотность состояний в атоме водорода (9) (подробнее см. [25, 26]). В таком виде эта формула применима и к более общей задаче о возбуждении системы с заданной плотностью уровней монохроматическим полем, которая может рассматриваться как модель бесстолкновительной диссоциации молекул [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chirikov B. V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52, N 5. P. 263—380.
2. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
3. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. *Casati G., Chirikov B. V., Ford J., Izrailev F. M.* Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation // Lect. Notes Phys. 1979. Vol. 93. P. 334—352.
5. *Chirikov B. V., Izrailev F. M., Shepelyansky D. L.* Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics // Sov. Sci. Rev. C. 1981. Vol. 2. P. 209—267.
6. *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.* Локализация динамического хаоса в квантовых системах // Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1041—1049.
7. *Bayfield J. E., Koch P. M.* Multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms // Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33, N 5. P. 258—261.

8. *Делоне Н. Б., Крайнов В. П., Зон Б. А.* Диффузионный механизм ионизации высоковозбужденных атомов в переменном электромагнитном поле // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 2(6). С. 445—453.
9. *Leopold J. G., Percival I. C.* Microwave ionization and excitation of Rydberg atoms // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 41, N 14. P. 944—947.
10. *Меерсон Б. Н., Окс Е. А., Сасоров П. В.* Стохастическая неустойчивость осциллятора и ионизация высоковозбужденных атомов под действием электромагнитного излучения // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 1. С. 79—82.
11. *Делоне Н. Б., Крайнов В. П., Шепелянский Д. Л.* Высоковозбужденный атом в электромагнитном поле // УФН. 1983. Т. 140, № 3. С. 355—392.
12. *Van Leeuven K. A. H., Oppen G. V., Renwick S.* et al. Microwave ionization of hydrogen atoms: Experiment versus classical dynamics // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55, N 21. P. 2231—2234.
13. *Shepelyansky D. L.* Quantum diffusion limitation at excitation of Rydberg atom in variable field // Proc. Intern. Conf. Quantum Chaos, Como 1983, Plenum 1985. P. 187—204.
14. *Casati G., Chirikov B. V., Shepelyansky D. L.* Quantum limitations for chaotic excitation of the hydrogen atom in a monochromatic field // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53, N 27. P. 2525—2528.
15. *Casati G., Chirikov B. V., Guarneri I., Shepelyansky D. L.* New photoelectric ionization peak in the hydrogen atom // Ibid. 1986. Vol. 57, N 7. P. 823—826.
16. *Шуряк Э. В.* Нелинейный резонанс в квантовых системах // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 6(12). С. 2039—2056.
17. *Акулин В. М., Дыхне А. М.* Динамика возбуждения многоуровневых систем зонного типа в лазерном поле // Там же. 1977. Т. 73, № 6(12). С. 2098—2105.
18. *Fishman S., Grempel D. R., Prange R. E.* Quantum dynamics of a nonintegrable system // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29, N 4. P. 1639—1647.
19. *Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982. 358 с.
20. *Greene J. M.* A method for determining a stochastic transition // J. Math. Phys. 1979. Vol. 20, N 6. P. 1183—1201.
21. *Rechester A. B., White R. B.* Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov-Taylor model // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44, N 24. P. 1586—1589.
22. *MacKay R. S., Meiss J. D., Percival I. C.* Transport in Hamiltonian systems // Physica D. 1984. Vol. 13, N 1/2. P. 55—81.
23. *Shepelyansky D. L.* Localization of quasienergy eigenfunction in action space // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, N 7. P. 677—680.
24. *Blümel R., Fishman S., Grinisti M., Smilansky U.* Localization in the quantum description of the periodically perturbed rotor // Lect. Notes Phys. 1987. Vol. 263. P. 212—228.
25. *Шепелянский Д. Л.* Локализация диффузионного возбуждения в многоуровневых системах: Препр. ИЯФ № 86-187. Новосибирск, 1987. 25 с.
26. *Casati G., Guarneri I., Shepelyansky D. L.* Exponential photonic localization for the hydrogen atom in a monochromatic field: Prepr. INP N 87-29. Novosibirsk, 1987. 13 p.

CONTENTS

DYNAMIC CHAOS

EVOLUTION

APPLICATIONS OF NONLINEAR DYNAMICS

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Динамика и эволюция

Утверждено к печати
Институтом прикладной физики АН СССР

Редактор издательства *Л. Е. Кононенко*
Художественный редактор *М. Л. Храмцов*
Технический редактор *Н. Н. Плохова*
Корректор *Н. Б. Габасова*

ИБ № 39715

Сдано в набор 27.01 89
Подписано к печати 4.05.89
Т-00160 Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$
Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 25,0. Усл. кр отт. 25,0. Уч.-изд. л 27,3
Тираж 1950 экз. Тип. зак. 2574
Цена 4 р 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер , 6