

Ф.Ф., гр.3301

Шепелянский Д.Л.

стр. 25.

Дипломная работа

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАНТОВОГО РЕЗОНАНСА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Р С Ф С Р

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет физический  
Кафедра ядерной физики  
Сектор Т-3 Института ядерной физики СО АН СССР

ШЕПЕЛЯНСКИЙ ДМИТРИЙ ЛЬВОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАНТОВОГО РЕЗОНАНСА

Научный руководитель:  
профессор, доктор  
физ. - мат. наук  
Б.В. Чириков

Новосибирск, 1978

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
§ 1. Введение . . . . .	2
§ 2. Исследуемая модель . . . . .	4
§ 3. Квантовый резонанс . . . . .	8
§ 4. Численные эксперименты . . . . .	18
§ 5. Нерезонансный случай . . . . .	21
§ 6. Обсуждение результатов . . . . .	23
Заключение . . . . .	23

## § 1. В в е д е н и е

В последние годы был достигнут значительный успех в изучении свойств динамических систем классической механики (см., например, [1-3]). Одним из важных достижений можно назвать открытие так называемого стохастического движения, которое может проявляться в очень простых системах с небольшим числом степеней свободы. При этом система эволюционирует как бы под действием некоторого случайного возмущения, хотя ее движение и описывается чисто динамическими уравнениями. Условия возникновения такого движения существенны не только для исследования динамической устойчивости, но и для понимания природы статистических закономерностей. Наличие этих условий позволяет вывести кинетические уравнения без введения дополнительных гипотез и приближений, например, таких как приближение хаотических фаз. Причиной возникновения стохастичности является наличие локальной неустойчивости движения. В этом случае расстояние между двумя траекториями со сколь угодно близкими начальными условиями растет экспоненциально со временем. Так в [4] была обоснована возможность статистического описания идеального газа. Физическое исследование условий возникновения стохастичности в реальных системах было начато в [5,6]. Обзор работ в этом направлении дается в [3,7].

Все вышесказанное относится к классической динамике. В то же время ясно, что реальные физические системы описываются квантовой механикой. Вследствие этого представляется интересным проанализировать возможности возникновения стохастического движения в квантовых системах. Работы в этом направлении появились недавно, и среди них выделяется несколько подходов. Упомянем о

некоторых из них. Так в работе [8] делается попытка применить метод локальной неустойчивости к квантовой системе. В этом случае изучается поведение волновой функции  $\psi$  при малом изменении возмущения, находятся условия, при которых зависимость  $\psi$  от возмущения становится очень сильной (экспоненциальной), и авторы рассматривают эти условия как критерий стохастичности в квантовых системах. Авторами [9] проводится рассмотрение квантовой системы под действием периодического во времени возмущения в квазиклассической области (соответствующая классическая система является стохастической). Показано, что на временах  $t < \tau$  ( $\tau \sim \ln n$ , где  $n \gg 1$  представляет собой характерные квантовые числа) система ведет себя квазиклассически и ее можно описывать кинетическим уравнением. К сожалению, при  $t > \tau$  используемый метод анализа оказывается непригодным ввиду экспоненциально быстрого расплывания пакетов в области стохастичности. Еще одно направление представлено в [10,11], где исследуются статистические свойства распределения расстояний между уровнями энергии в квазиклассическом приближении для ограниченной системы, являющейся стохастической в классике. Вопрос о наличии локальной неустойчивости и поведении системы в существенно квантовой области и в квазиклассике, когда соответствующая классическая система стохастична, исследовался в [12]. В качестве модели был выбран плоский квантовый ротатор, находящийся под действием внешней нелинейной силы, периодически зависящей от времени. В результате численных исследований было показано, что при условиях, когда в классической системе возникает стохастичность, поведение квантовой системы в общем похоже на классическое. В то же время авторами обнаружено расхождение в поведении

квантовой системы по сравнению с классической системой даже в глубоко квазиклассической области. Так, например, отсутствует локальная неустойчивость движения, являющаяся причиной возникновения классической стохастичности.

В данной работе продолжается исследование, начатое в [12]. Обнаружено, <sup>что</sup> в системе имеется всюду плотное множество, так называемых, квантовых резонансов. В случае квантового резонанса найдена зависимость характеристик движения ротатора от времени. Показано, что энергия ротатора растет квадратично со временем. В нерезонансном случае задача решается численно, на времена значительно превышающие достигнутые в [12], что позволяет, в частности, достаточно достоверно установить наличие времени  $t^*$  [12], начиная с которого рост энергии ротатора резко замедляется.

## § 2. Исследуемая модель

Выбранная модель описывается гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \tilde{\kappa} \cdot \cos \theta \cdot \delta_{\tilde{\tau}}(t), \quad (2.1)$$

где  $\delta_{\tilde{\tau}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+n\tilde{\tau})$  — временной частотой дельта-функций (толчков),  $J$  — момент инерции ротатора. В дальнейшем считаем  $J = 1$ .  $\theta$  — угловая переменная.

Соответствующая классическая задача имеет гамильтониан:

$$H = \frac{p^2}{2} + \tilde{\kappa} \cos \theta \delta_{\tilde{\tau}}(t), \quad (2.2)$$

и ввиду периодичности возмущения, движение ротатора можно описывать отображением:

$$\begin{cases} \bar{I} = I + \tilde{\kappa} \tilde{T} \sin \theta \\ \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \end{cases}, \quad (2.3)$$

где  $I = p \tilde{T}$ ,  $\bar{I}, \bar{\theta}$  — значения переменных после толчка.

Как было показано в [2], значение  $\tilde{\kappa} \tilde{T} = 1$  является границей устойчивости. При  $\tilde{\kappa} \tilde{T} < 1$  движение устойчиво, и изменение величины  $I$  ( $\Delta I$ ) ограничено ( $|\Delta I| \approx \sqrt{\tilde{\kappa} \tilde{T}}$ ). При  $\tilde{\kappa} \tilde{T} \gg 1$ , так уже при  $\tilde{\kappa} \tilde{T} = 5$ , движение становится стохастическим. В этом случае  $\theta$  становится случайной переменной, а  $\langle (I(t) - I_0)^2 \rangle = \frac{(\tilde{\kappa} \tilde{T})^2 t}{2}$ ,  $\langle I \rangle = I_0$ . Здесь и далее  $t$  — безразмерное время, измеряемое в числе толчков. Скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по большому числу траекторий, отвечающих различным начальным данным, взятым в малой окрестности  $I_0, \theta_0$ .

Перейдем к квантовомеханическому рассмотрению. В этом случае, решая уравнение Шредингера с гамильтонианом (2.1), получим отображение для волновой функции через один шаг (т.е. свободное вращение в течение времени  $\tilde{T}$  и толчок).

$$\bar{\Psi}(\theta) = e^{-i\kappa \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\tau n^2}{2} + i n \theta} A_n, \quad (2.4)$$

где  $\kappa = \tilde{\kappa} / \hbar$ ,  $\tau = \hbar \tilde{T}$  и

$$\Psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i n \theta}, \quad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}(\theta) e^{-i n \theta} d\theta.$$

Положим  $\hbar = 1$ .

Из (2.4) находим связь между фурье-компонентами через шаг

$$\bar{A}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm} A_m \quad (2.5)$$

где  $F_{nm} = (-i)^{n-m} e^{-i\frac{\tau m^2}{2}} J_{n-m}(\kappa)$ ,  $J_{n-m}(\kappa)$  — функция Бесселя.

Хотя суммирование в (2.5) проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$ , но фактически сумма содержит  $\sim 2k$  членов, т.к.  $|J_n(k)|$  экспоненциально падает с ростом  $n$  при  $n > k$  (толчок захватывает  $\sim 2k$  гармоник). Ввиду этого при численном счете использовалось конечное ( $\sim 2k$ ) число функций Бесселя.

Используя (2.5), запишем отображение для вероятности  $W_n = |A_n|^2$  и фазы  $\varphi_n$  ( $A_n = \sqrt{W_n} e^{i\varphi_n}$ ):

$$\begin{cases} \bar{W}_p = \sum_{m,n} J_{m-p}(k) J_{n-p}(k) \sqrt{W_n W_m} \cos(\varphi_n - \varphi_m + \frac{\pi}{2}(m^2 - n^2) + \frac{\pi}{2}(m - n)) \\ \bar{W}_p \cos 2\bar{\varphi}_p = \sum_{m,n} J_{m-p}(k) J_{n-p}(k) \sqrt{W_n W_m} \cos(\varphi_m + \varphi_n - \frac{\pi}{2}(m^2 + n^2) - \frac{\pi}{2}(m + n)) (-1)^p \end{cases} \quad (2.6)$$

Как упоминалось выше, в классической системе (2.2) при выполнении критерия стохастичности ( $kT \gg 1$ )  $\theta$  становится случайной переменной. По аналогии с классической задачей можно ожидать, что и в квантовом случае при  $kT \gg 1$  некоторая переменная также станет случайной. Физическим соображением в пользу того, что это будут фазы  $\varphi_n$ , является указанная в [8] экспоненциально сильная зависимость фаз рассеяния от потенциала рассеяния, появляющаяся при определенных условиях. В соответствии с этим предположим, что при  $kT \gg 1$  фазы  $\varphi_n$  случайны и независимы. Тогда, проведя в (2.6) усреднение по фазам, получим

$$\bar{W}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(k) W_{n-m} \quad (2.7)$$

В предположении, что  $W_{n-m}$  является плавной функцией  $n$  и при  $n \gg m$ , произведем разложение  $W_{n-m}$  в ряд Тейлора.

$$W_{n-m} = W_n - m \frac{\partial W_n}{\partial n} + \frac{m^2}{2} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n^2} + \dots$$

После подстановки в (2.7) имеем

$$\bar{W}_n = W_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 J_m^2(k)$$



Вычислив суммы, находим изменение вероятности за один шаг

$\bar{W}_n - W_n = \frac{\kappa^2}{4} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n^2}$ . При  $|\bar{W}_n - W_n| \ll 1$  можно перейти к дифференциальному уравнению, являющемуся уравнением диффузии:

$$\frac{\partial W_n}{\partial t} = \frac{\kappa^2}{4} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n^2} \quad (2.8)$$

При вводе (2.8) были отброшены члены порядка

$$\frac{\partial^4 W_n}{\partial n^4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^4 J_m^2(k) \sim \kappa^4 \frac{\partial^4 W_n}{\partial n^4} \quad (\text{суммы с нечетными степенями } m$$

равны нулю). Это приближение справедливо, если

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial n^2} \gg \kappa^4 \frac{\partial^4 W_n}{\partial n^4} \sim \frac{\kappa^4}{n^2} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n^2}$$

Т.е. при диффузии  $n^2 \sim \kappa^2 t$ , то это приближение верно при  $t \gg 1$ , т.е. уже через несколько толчков распределение становится достаточно плавным и дальнейшее движение описывается уравнением (2.8)

Для  $W_n(t=0) = \delta_{n,0}$  из (2.8)

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa^2 t}} \exp\left(-\frac{n^2}{\kappa^2 t}\right) \quad (2.9)$$

Из (2.9) находим зависимость энергии ротатора  $\langle E(t) \rangle =$   
 $= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi^*(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Psi(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{2} W_n$  от времени

$$\langle E(t) \rangle = \frac{\kappa^2}{4} t + \langle E(t=0) \rangle \quad (2.10)$$

Исходя из (2.4) также можно получить

$$\begin{aligned} \langle \bar{E} \rangle = \langle E \rangle + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} (A_{n+1}^* A_{n-1} e^{i2Tn}) + \\ + \kappa \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) J_n (A_{n+1}^* A_n e^{i(n+\frac{1}{2})T}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

При случайной фазе  $\varphi_n$  два последних члена в (2.11) исчезают, и (2.11) переходит в выражение для классической диффузии по энергии (2.10).

### § 3. Квантовый резонанс

В действительности предположение о случайности  $\psi_n$  неверно, по крайней мере в случае квантового резонанса, понятие которого вводится, когда  $T = \frac{4\pi p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — целые взаимно простые числа. Действительно, как было отмечено в [12], при  $T = 4\pi l$  ( $l$  — целое)

$$\psi(\theta) = e^{-ik\cos\theta} \psi(\theta),$$

и энергия ротатора растет квадратично со временем. Найдем точную зависимость энергии ротатора от времени для некоторых характерных начальных распределений  $\psi(\theta, t=0)$ . Так, если в начальный момент времени  $t = 0$  было возбуждено только основное состояние ( $n = 0$ ), то

$$\langle E(t) \rangle = \frac{k^2 t^2}{4}.$$

В случае, когда в начальный момент имелся узкий пакет (частица локализована)

$$\psi(\theta, t=0) = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{4\Delta^2} + iI\theta\right)$$

энергия ротатора будет расти со временем по закону

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2} \left[ I^2 + \frac{1}{4\Delta^2} + \frac{k^2 t^2}{2} (1 - \cos 2\theta_0 e^{-2\Delta^2}) + 2Ik t \sin\theta_0 e^{-\frac{\Delta^2}{2}} \right].$$

Покажем, что при  $T = \frac{4\pi p}{q}$  ( $p/q \neq \frac{1}{2}$ ) энергия также будет расти квадратично со временем.

Из (2.4) имеем:

$$\bar{\psi}(\theta) = e^{-ik\cos\theta} F(\theta),$$

где

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi p}{q} n^2 + in\theta} A_n = \\ &= \sum_{m=0}^{q-1} e^{-i\frac{2\pi p}{q} m^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{m+ql} e^{i(m+ql)\theta} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{-i\frac{2\pi p}{q} m^2} B_m, \end{aligned}$$

$$B_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{m+ql} e^{i(m+ql)\theta}$$

Для нахождения  $B_m$  вычислим следующую сумму

$$\sum_{m=0}^{q-1} e^{i \frac{2mn}{q}} B_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{i(\theta + \frac{2\pi n}{q})l} = \Psi(\theta + \frac{2\pi n}{q}).$$

Откуда

$$B_m = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} e^{-i \frac{2\pi mn}{q}} \Psi(\theta + \frac{2\pi n}{q}),$$

$$\bar{\Psi}(\theta) = e^{-ik \cos \theta} \sum_{n=0}^{q-1} \gamma_n \Psi(\theta + \frac{2\pi n}{q}), \quad (3.1)$$

где

$$\gamma_n = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} e^{-i \frac{2\pi m^2}{q} - i \frac{2\pi mn}{q}}.$$

Из (3.1) получаем

$$\bar{\Psi}(\theta + \frac{2\pi m}{q}) = \sum_{n=0}^{q-1} S_{mn} \Psi(\theta + \frac{2\pi n}{q}), \quad (3.2)$$

где  $S_{mn}$  — матрица.

$$S = \begin{pmatrix} \beta_0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{q-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{q-1} \\ \gamma_{q-1} & \gamma_0 & \dots & \gamma_{q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\beta_j = e^{-ik \cos(\theta + \frac{2\pi j}{q})}.$$

Согласно (3.3)  $S_{mn} = \beta_m \gamma_{n-m}$ . Из явного вида  $\gamma_n$

находим вспомогательную сумму

$$\sum_{l=0}^{q-1} \gamma_{l-m} \gamma_{l-n}^* = \delta_{m,n}.$$

Используя полученное выражение, нетрудно доказать унитарность матрицы  $S$ :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{q-1} S_{ml} (S_{ln})^+ &= \sum_{l=0}^{q-1} S_{ml} S_{nl}^* = \\ &= \sum_{l=0}^{q-1} \beta_m \gamma_{l-m} \beta_n^* \gamma_{l-n}^* = \beta_m \beta_n^* \delta_{m,n} = \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица  $S$  унитарна, ее собственные значения  $\lambda_j$ , определяемые уравнением  $\det(\lambda E - S) = 0$  (здесь  $E$  - единичная матрица), имеют вид  $\lambda_j(\theta) = e^{i\alpha_j(\theta)}$ ,  $|\lambda_j| = 1$ . Подчеркнем, что собственные значения  $\lambda_j$  зависят от  $\theta$ .

Матрицу  $S$  можно представить в виде

$$S = Q \begin{pmatrix} e^{i\alpha_0(\theta)} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & e^{i\alpha_{q-1}(\theta)} \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad (3.4)$$

где  $Q$  - некоторая унитарная матрица ( $Q^{-1} = Q^+$ , знак "+" означает эрмитово сопряжение) размерности  $q \times q$  с элементами  $Q_{mn}$ , зависящими от  $\theta$ .

Введем в рассмотрение вектор-столбец  $\Phi(\theta, t)$  с элементами  $\Phi_m(\theta, t) = \Psi(\theta + \frac{2\pi m}{q}, t)$ . Из (3.2), (3.4) находим зависимость  $\Phi$  от времени:

$$\Phi(\theta, t) = Q \begin{pmatrix} e^{i\alpha_0(\theta)t} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & e^{i\alpha_{q-1}(\theta)t} \end{pmatrix} Q^+ \Phi(\theta, 0). \quad (3.5)$$

Зная  $\Phi(\theta, t)$ , можно найти зависимость энергии ротатора от времени

$$\langle E(t) \rangle = - \frac{1}{2q} \int_0^{2\pi} \Phi^+(\theta, t) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi(\theta, t) d\theta. \quad (3.6)$$

На асимптотически больших временах

$$\langle E(t) \rangle = \eta t^2, \quad (3.7)$$

где

$$\eta = \frac{1}{2q} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n,e} [\Psi^*(\theta + \frac{2\pi n}{q}, t=0) Q_{nm} (\frac{\partial \alpha_m(\theta)}{\partial \theta})^2 Q_{em}^* \Psi(\theta + \frac{2\pi e}{q}, t=0)] d\theta \geq 0.$$

Откуда видно, что  $\eta = 0$  только в том случае, когда либо все

$$\lambda_j = \text{const} \quad \left( \frac{\partial \lambda_j(\theta)}{\partial \theta} = 0 \right)$$

(тогда для любого начального  $\Psi(\theta)$   $\eta = 0$ ), либо существует, хотя бы один, собственный вектор  $\Phi^n$  с  $\lambda_n = \text{const}$ , такой, что  $S\Phi^n = \lambda_n\Phi^n$  (при этом начальное распределение  $\Psi_{\lambda_n}(\theta)$  должно удовлетворять уравнению

$$\lambda_n \Psi_{\lambda_n}(\theta) = e^{-ik\cos\theta} \sum_{m=0}^{q-1} \delta_m \Psi_{\lambda_n}(\theta + \frac{2\pi m}{q})$$

и именно для него  $\eta = 0$ .

Из совместного рассмотрения (3.2) и (3.3) следует, что в случае квантового резонанса  $P/q$  спектр квазиэнергий, введенный в работах [13], имеет не более  $q$  дискретных уровней (матрица  $S$  может иметь не более  $q$  собственных значений  $\lambda_j = \text{const}$ ). Как будет показано далее (см. (3.15), (3.17)), всегда, кроме  $P/q = 1/2$ , возможно выбрать такое начальное состояние  $\Psi(\theta)$ , для которого  $\eta > 0$ , т.е. не все  $\lambda_j = \text{const}$ . Следовательно, в случае квантового резонанса спектр квазиэнергий непрерывен (дополнительно может быть несколько, не более  $q-1$ , дискретных уровней).

Покажем, что при любом начальном распределении  $\Psi(\theta)$  величина  $\eta$  ограничена сверху:

$$\eta \leq \frac{(\alpha'_{\max})^2}{2} \quad \left( \alpha'_{\max} = \max_{\substack{0 \leq m \leq q-1 \\ 0 < \theta \leq 2\pi}} \left| \frac{\partial \alpha_m(\theta)}{\partial \theta} \right| \right).$$

Действительно, непосредственно из выражения для  $\eta$  имеем

$$\eta \leq \frac{(\alpha'_{\max})^2}{2q} \cdot \int_0^{2\pi} \sum_{m,n,\ell} [\Psi^*(\theta + \frac{2\pi n}{q}, t=0) Q_{nm} Q_{\ell m}^* \Psi(\theta + \frac{2\pi \ell}{q}, t=0)].$$

Откуда в силу унитарности  $Q$  ( $\sum_{m=0}^{q-1} Q_{nm} Q_{\ell m}^* = \delta_{n\ell}$ ) и условия нормировки  $\int_0^{2\pi} |\Psi(\theta, t=0)|^2 d\theta = 1$ , следует указан-

ное ограничение.

Следует отметить, что  $|n|$  в резонансе растет пропорционально времени ( $|n| \sim t$ ), поэтому, если бы невозмущенная система обладала спектром  $E_n \sim n^m$ , то ее энергия росла бы со временем по закону  $\langle E(t) \rangle \sim t^m$ . В данном случае  $m = 2$ .

Точный вид  $\lambda_j(\theta)$  удастся найти только в трех случаях.

1.  $P/q = 1$  - случай основного резонанса, который был рассмотрен ранее.

2.  $P/q = 1/4$ . Из (3.1) следует

$$\bar{\Psi}(\theta) = e^{-ikc \cos \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\frac{\pi}{4}} \Psi(\theta) + e^{i\frac{\pi}{4}} \Psi(\theta + \pi)).$$

В этом случае собственные значения  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\alpha(\theta) - i\frac{\pi}{4}}$ , где

$$\alpha(\theta) = azcc \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(k \cos \theta)\right).$$

При  $k \ll 1$   $\frac{d\alpha}{d\theta} \approx \frac{k^2}{2} \sin 2\theta$ , и если в начальный момент времени  $\Psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  (основное состояние), то  $\eta \approx \frac{k^4}{16}$ .

Для этих же начальных условий при  $k \gg 1$   $\eta \approx \frac{k^2}{12}$ .

3. В случае  $P/q = 1/2$  из (3.1) получаем

$$\Psi(\theta, t+1) = e^{-ikc \cos \theta} \Psi(\theta + \pi, t).$$

Отсюда видно, что  $\Psi(\theta, t+2) = \Psi(\theta, t)$ , т.е.

через два толчка система возвращается в исходное состояние.

Собственные значения  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . В этом случае легко находится спектр квазиэнергий. Так как

$$\Psi_{\varepsilon_n}(\theta, t+1) = e^{-i\pi n} \Psi_{\varepsilon_n}(\theta, t),$$

то имеется всего два уровня квазиэнергий  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 1/2$ .

Собственными функциями уровня  $\varepsilon_1$  являются функции

$\Psi_{\varepsilon_1}(\theta) = g_{\pm}(\theta)(1 \pm e^{-ikc \cos \theta})$ , где  $g_{\pm}(\theta)$  произвольная функция, удовлетворяющая соотношению

$$g_{\pm}(\theta + \pi) = \pm g_{\pm}(\theta).$$

Собственными функциями уровня  $\varepsilon_2$  являются

$$\Psi_{\varepsilon_2}(\theta) = g_{\pm}(\theta) (1 \mp e^{-ik \cos \theta})$$

Как видно, каждый уровень бесконечнократно вырожден, а функции  $\Psi_{\varepsilon_1}$  и  $\Psi_{\varepsilon_2}$  составляют полный набор.

По-видимому такое вырождение собственных значений  $\lambda_j(\theta)$  в  $\lambda_j$ , независящее от  $\theta$ , является случайным и для других резонансов не имеет места. Действительно, при наличии  $\lambda_j = \text{const}$  зависимость энергии  $\langle E(t) \rangle$  от времени не могла бы быть гладкой. Постоянно наблюдались бы не уменьшающиеся со временем изломы, соответствующие перераспределению энергии между этими  $\lambda_j$  (имеются ввиду произвольные начальные условия), как было в случае  $p/q = 1/2$ .

В проведенных численных экспериментах такой эффект не наблюдался. При  $k \gg 1$   $\langle E(t) \rangle$  было гладкой функцией времени (см. рис. 1), при  $k < 1$  размер изломов уменьшался со временем (см. рис. 2).

Итак, в резонансе энергия системы растет до бесконечности по асимптотическому закону  $\langle E(t) \rangle \sim t^2$  (см. рис. 1, 2). Спектр квазиэнергий в случае квантового резонанса непрерывен.

Дадим теперь оценку для  $|\lambda_j'(\theta)|^2$  в общем случае  $q \neq 2$  (черта означает усреднение по  $\theta$ ). Из (3.3) следует

$$\sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j(\theta) = \lambda_0 \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j = \beta(\theta), \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_j &= \exp\left(-ik \cos\left(\theta + \frac{2\pi j}{q}\right)\right), \\ \lambda_j(\theta) &= e^{i\alpha_j(\theta)}, \\ \beta_0 &= e^{-ik \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k) e^{in\theta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8)

$$|\beta'(\theta)| = \left| \sum_{j=0}^{q-1} \alpha'_j e^{i\alpha_j} \right|,$$

$$|\beta'(\theta)|^2 = \sum_{m,n} \alpha'_m \alpha'_n e^{i(\alpha_m - \alpha_n)}, \quad (3.10)$$

штрих обозначает производную по  $\theta$ .

Из (3.10)

$$\overline{|\beta'(\theta)|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\beta'(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \alpha'_m \alpha'_n \cos(\alpha_m - \alpha_n) d\theta. \quad (3.11)$$

Из (3.11) имеем оценку

1)  $|\alpha'_j| \ll 1$ . Тогда

$$(\alpha')^2 = \max_{0 \leq j \leq q-1} |\alpha'_j(\theta)|^2 \geq \frac{|\beta'|^2}{q^2}. \quad (3.12)$$

2)  $|\alpha'_j| \gg 1$ . Тогда в (3.11) косинус является быстроосциллирующей функцией и

$$(\alpha')^2 = \max_{0 \leq j \leq q-1} \overline{|\alpha'_j(\theta)|^2} \approx \frac{|\beta'|^2}{q}. \quad (3.13)$$

С помощью (3.5) находим  $\overline{|\beta'|^2}$ , ( $|\gamma_0|^2 \sim \frac{1}{q}$  при  $q \neq 4l+2$ , где  $l$  — целое).

$$\overline{|\beta'|^2} = 2 |\gamma_0|^2 q^4 \sum_{l=0}^{\infty} l^2 |J_{ql}(k)|^2 > 0. \quad (3.14)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1)  $k \ll q$ . Тогда в сумме из (3.14) можно ограничиться только членом с  $l=1$ , и согласно (3.12) ( $|\alpha'| \ll 1$ ) имеем

$$\eta \sim \frac{(\alpha')^2}{2} \geq q |J_q(k)|^2 \sim \left(\frac{k}{q}\right)^{2q}. \quad (3.15)$$



Заметим, что данная оценка является оценкой наименьшего возможного значения  $(\alpha')^2$ . Можно ожидать, что истинное значение по порядку величины совпадает с этой нижней оценкой (см. § 4, табл.1).

2)  $k \gg q$ . В сумме из (3.14) достаточно оставить члены с  $l \approx k/q$ . Производя суммирование в (3.14) и используя (3.13), получаем

$$\eta \sim \frac{(\alpha')^2}{2} \approx \frac{k^2}{3\pi q} (1 + \sin 2k \cos \frac{\pi}{2} q) \tag{3.16}$$

(в случае  $\sin 2k \cos \frac{\pi}{2} q = -1$  надо учесть дальнейшие члены в разложении  $J_{qe}(k)$ . Согласно (3.16), можно утверждать, что функциональная зависимость  $\eta$  от  $k$  и  $q$  имеет вид

$$\eta = \frac{k^2}{\xi q} \tag{3.17}$$

где  $\xi$  — некоторая величина порядка 5 (см. § 4, табл.2).

В случае  $q = 4l + 2$   $\gamma_{2m} = \gamma_0 = 0$ ,  $|\gamma_{2m+1}| \sim \frac{1}{\sqrt{q}}$  ( $m$  — целое). Из (3.3) имеем

$$\sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i^2(\theta) = \text{Sp } S^2 = \sum_{m,n=0}^{q-1} \beta_{m+n} \beta_m \gamma_n \gamma_{-n} \tag{3.18}$$

Заметим, что уже из (3.8), видно, что при  $q \neq 2$  всегда есть  $\lambda_j(\theta)$ , зависящие от  $\theta$ .

Из (3.18), действуя аналогично случаю  $q \neq 4l + 2$ , получаем оценку типа (3.15) для  $k \ll q$  и (3.17) для  $k \gg q$  (см. табл.1,2).

Из сказанного выше (см. 3.15), (3.17)) следует, что  $\eta \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty, k = \text{const}$ . Это означает, что для иррациональных значений  $\sqrt[4]{4\pi}$   $\eta = 0$ , и движение системы носит со-

вероятно иной характер (см. § 5).

Пусть теперь  $\Gamma = \frac{4\pi p}{q} + \delta$ , где  $|\delta| \ll 1$ .

Тогда (см. (2.4))

$$e^{-i\frac{n^2\Gamma}{2}} = e^{-i\frac{2\pi p}{q}n^2} e^{-i\frac{n^2\delta}{2}} e^{id\delta} \approx e^{-i\frac{2\pi p n^2}{q}} e^{-i\frac{n_0^2\delta}{2}}$$

при условии  $d\delta \ll 1$ . Здесь

$$d = (n - n_0)n_0 - \frac{(n - n_0)^2}{2}$$

Из этих выражений следует, что в течение времени  $t_z \sim \frac{1}{|d|\delta}$  характеристики системы меняются во времени, так же, как и в случае точного резонанса

$$\Gamma = \frac{4\pi p}{q}$$

Т.е.  $|d| \sim \max\{k^2, \langle E(t_z) \rangle\}$ , то из условия

$\eta t_z^2 \geq k^2 t_z$  находим величину расстройки  $\delta_z$ , при которой сильно сказывается влияние резонанса  $\frac{p}{q}$  (будем считать, что  $|d| \sim k^2 t_z$ ).

Пусть  $k = q$  (в противном случае  $\delta_z \sim (\frac{k}{q})^{2q}$ ), тогда

$$\delta_z \approx \frac{1}{k^2 q^2} \quad (3.19)$$

Для основного резонанса ( $q = 1, p = 0$ )  $\delta = \Gamma$ , и из условия (3.19) следует  $\Gamma \approx \frac{1}{k^2}$ . Как видно, в области квазиклассики ( $k \rightarrow \infty, \Gamma \rightarrow 0, k\Gamma = \text{const}$ ) неравенство (3.19) не выполняется, т.е. основной резонанс несущественен.

Найдем суммарную величину расстрой

$$\delta_\Sigma = \sum_{q=1}^k \sum_p \delta_z(p, q) \sim \frac{\ln k}{k^2} \quad (3.20)$$

Т.е.  $\delta_\Sigma \ll 1$ , то можно сделать вывод, что в случае иррациональных  $\Gamma/4\pi$  резонансы слабо влияют на движение системы.

Вернемся к случаю точного резонанса  $T = \frac{4\pi\rho}{q}$  (далее  $\rho = 1$ ). Согласно (3.7) на больших временах  $\langle E(t) \rangle = \eta t^2$ . Пусть теперь  $k \rightarrow \infty$ ,  $T = \frac{4\pi}{q} \rightarrow 0$ ,  $kT = \text{const} \gg 1$  ( $k \gg q$ ). Тогда, как показывают численные эксперименты (см. § 4, табл. 4, 5; рис. 3), на малых временах

$$\langle E(t) \rangle = \frac{k^2 t^2}{\xi q} + \frac{k^2}{4} t + \langle E(t=0) \rangle \quad (3.21)$$

или в размерных переменных ( $\tau = \tilde{T} t$ )

$$\langle E(t) \rangle = \frac{\tilde{k}^2 \tilde{T} \hbar}{4\pi \xi J} t^2 + \frac{\tilde{k}^2}{4} t + \langle E(t=0) \rangle \quad (3.22)$$

Из выражений (3.21), <sup>(3.22)</sup> следует, что времена, на которых наблюдается классическая диффузия по энергии в точном квантовом резонансе

$$t^* \approx \frac{1}{T} \quad (3.23)$$

В размерных переменных  $\tau^* = t^* \tilde{T} \approx \frac{J}{\hbar}$ . Для  $t > t^*$  энергии растут квадратично со временем, что является чисто квантовым эффектом.

Сделаем замечание о том, в каких системах возможно появление квантовых резонансов при воздействии возмущения вида

$F(x) \delta_{\tilde{T}}(t)$ . Для этого необходимо, чтобы спектр невозмущенного гамильтониана  $H_0$  был дискретным и имел вид полинома от квантового числа с рациональными коэффициентами. При этом также требуется, чтобы было выполнено условие вида  $\Psi_m \Psi_n = \Psi_{m+n}$  для собственных функций гамильтониана  $H_0$ . Возможно, что последнее условие можно ослабить.

#### § 4. Численные эксперименты<sup>М</sup>

Наряду с теоретическим анализом проводилось также исследование модели с помощью численных методов. Счет велся на БЭСМ-6 с использованием языка фортран. По сравнению с [12] было проведено усовершенствование программы, что позволило увеличить скорость счета, примерно, в два раза, а также, благодаря увеличению числа уровней, значительно увеличить возможное время счета. В процессе решения задачи находились фурье-компоненты волновой функции по формуле (2.5). Ввиду того, что один толчок захватывает  $\sim 2k$  уровней в (2.5) использовалось конечное число функций Бесселя (в таблицах оно обозначается через  $N$ ). Для увеличения числа уровней ограничились симметричными начальными распределениями ( $\Psi(\theta) = \Psi(-\theta)$ ). Число уровней выбиралось равным 4001 (-2000, +2000), но ввиду симметрии начальных условий и гамильтониана (2.1) счет фактически велся с 2001 уровнем. Начальные условия варьировались от возбуждения одного уровня (основное состояние), до возбуждения  $\sim 20$  нижних уровней (гауссовский пакет). В ряде случаев начально возбуждалось 100 фурье-компонент  $A_n$ , причем величина  $A_n$  ( $0 \leq n \leq 50$ ) задавалась случайным образом, а  $A_{-n} = A_n$ . Во всех указанных случаях движение системы имело одинаковый характер. При обработке результатов счета выдавались следующие данные:

1) энергия ротатора

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 W_n,$$

2) функция распределения по уровням

$$W_n = |A_n|^2.$$

Вырисовывался график зависимости энергии ротатора от времени.

$\left(\frac{\langle E(t) \rangle}{k^2/4}\right)$ , и методом наименьших квадратов производилась подгонка к линейной функции  $\langle E(t) \rangle = Dt + C$ . Здесь  $D = \frac{dE}{dt}$  имеет смысл скорости диффузии по уровням. В классическом случае  $D_c = k^2/4$ . В таблицах приводится относительная величина  $\varepsilon = D/D_c$ .

Кроме этого, вырисовывался график  $\ln f_N(x)$  (в конце счета),

где

$$f_N = W_n(t) \sqrt{\pi k^2 t}, \quad x = \frac{n^2}{k^2 t}.$$

В случае классической диффузии (2.9)  $f_N(x) = e^{-x}$ ,  $\ln f_N = -x$ .

Экспериментальные результаты подгонялись к гауссовой форме

распределения  $f_N = G e^{-Bx}$  методом наименьших квадратов.

Доля диффундирующих частиц определялась по формуле

$$W_d = \frac{G}{\sqrt{\pi k^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Bn^2}{tk^2}} dn = \frac{G}{\sqrt{B}}. \quad (4.1)$$

В случае квантового резонанса определялась также величина  $\eta$ . Если наблюдался явный резонанс (рис.1), то  $\eta$  находилась методом наименьших квадратов путем подгонки к  $\langle E(t) \rangle =$

$\eta t^2 + \langle E(t=0) \rangle$ . Когда зависимость энергии от времени отличалась от квадратичной (см. (3.21)), методом наименьших квадратов производилась подгонка к  $\langle E(t) \rangle = \eta t^2 + \frac{k^2}{4} \varepsilon^* t + \langle E(t=0) \rangle$ .

Точность численных экспериментов контролировалась по сохранению полной вероятности  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n = 1$ . Во всех случаях отклонение  $\delta$  от единицы не превышало  $3 \cdot 10^{-3}$ .

Обсудим теперь результаты численных экспериментов в случае квантового резонанса. За исключением случаев, когда

$\left(\frac{k}{q}\right)^q \ll 1$  наблюдался квадратичный рост энергии со временем. Малые  $\eta$  не удается наблюдать ввиду ограниченности вре-

мени счета ( $t \sim 200$ ). Значения  $\eta$  для  $k \ll q$  приведены в таблице 1. Так как  $\eta \ll 1$ , то трудно говорить о количественном согласии (3.15) с имеющимися экспериментальными данными, но можно утверждать, что  $\eta$  уменьшается значительно быстрее, чем  $k/q$ , что качественно согласуется с (3.15). Зависимость энергии от времени представляется в виде ломанной линии, с ростом времени приближающейся к параболе (см. рис. 2)

При  $k \gtrsim q$  зависимость  $\eta(k, q)$  хорошо аппроксимируется формулой (3.17). Согласно таблице 2  $\xi = 2.4$ . Заметим, что при  $k \gtrsim q$   $\eta = \frac{k^2}{\xi q}$  для любого  $p$  (см. (3.17)). Данные таблицы 3 хорошо подтверждают этот теоретический результат. Зависимость

$\eta(k)$  для данного  $q$  ( $q = 17$ ) дается в таблице 3А. Из нее видно, что существует некоторое  $k_{cr}$ , причем, при  $k < k_{cr}$ ,  $\eta \ll 1$  и  $\eta \gtrsim 1$  при  $k \gtrsim k_{cr}$ . Экспериментально  $k_{cr} = q/\mu$ , где  $\mu = 2 + 3$ . В случае  $k \gtrsim q$ ,  $q \gg 1$  ( $\tau = \frac{4\pi}{q} < 1$ ) на временах  $t^*$  (см. таблицы 4, 5, рис. 3-3А) наблюдается классическая диффузия по уровням невозмущенной системы. Зависимость энергии от времени хорошо описывается (3.21). Как видно из таблиц 4, 5 величина  $t^*$  растет с уменьшением  $\tau$ .

На основе имеющихся данных можно сделать вывод, что экспериментальные результаты хорошо согласуются с теорией квантового резонанса, развитой в § 3.

### § 5. Нерезонансный случай

В случае иррациональных  $\sqrt{V/4\pi}$  задача решалась численно методами, описанными в § 4. Результаты экспериментов для различных значений параметров в случае, когда начально возбуждались низшие уровни (от 0 до 100), представлены в таблицах 6-9 и на рис. 4(4А) - 6 (6А). Заметим, что упрощенно движение по спектру можно трактовать так, что  $\varepsilon$  принимает значение  $\varepsilon_1$  при  $t \leq t^*$  и  $\varepsilon_2$  при  $t > t^*$ . Время  $t^*$  растет приблизительно пропорционально  $K$ . Из данных таблиц 6-9 видно, что число диффундирующих частиц  $W_d$  со временем уменьшается, т.е. как было отмечено в [12], основная доля частиц имеет малые квантовые числа. В связи с этим проводились эксперименты в случае, когда начально возбуждалась группа уровней с гауссовым <sup>ск</sup>распределением не возле  $n_0 = 0$ , а возле  $n_0 \gg 1$  ( $n_0 = 300, 500, 1000$ ). При этом квадрат ширины распределения  $\langle \frac{(n-n_0)^2}{2} \rangle$  на временах  $t^*$  рос линейно со временем по закону  $\langle \frac{(n-n_0)^2}{2} \rangle = Dt + C$  ( $\varepsilon = D/D_c$ )

(см. рис. 8). Данные этих экспериментов приводятся в таблице 6 (строка, отмеченная \*) и в таблице 10. Как видно из таблиц и рисунка ширина распределения на временах  $t \leq t^*$  растет по диффузионному закону, время  $t^*$  приблизительно такое же, как и в случае  $n_0 = 0$ . Вместе с тем энергия ротатора  $\langle E(t) \rangle$  росла со временем значительно медленнее (в некоторых случаях энергия даже уменьшалась, хотя и незначительно) (см. рис. 7). Такое поведение  $\langle E(t) \rangle$  пока не вполне понятно. Возможно, что это есть явление флуктуаций положения центра распределения.

Заметим, что при  $n_0 \gg 1$  (например, для  $n_0 = 1000$ ) квантовый резонанс по-прежнему наблюдался. Так для  $P/q = 1/17$ ,  $k=19$  энергия ротатора росла квадратично со временем с  $\eta \approx 7$ .

Для того, чтобы понять насколько сильно сказывается влияние резонансов в случае, иррациональных значений  $\tau/4\pi$ , проводились эксперименты, в которых спектр невозмущенного гамильтониана имел вид  $E_n = \frac{n^{\sqrt{5}}}{2}$  (фаза между толчками меняется по закону  $\varphi_n = \frac{\tau n^{\sqrt{5}}}{2}$ ).

Ясно, что для такого спектра никаких резонансов быть не может. Результаты численного счета приведены в таблице 6 (строка \*\*), в таблице 11 и на рис.9. Как видно, характер движения остался таким же, как и при иррациональных  $\tau/4\pi$ .

Так поведение величины  $\langle E^*(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{2} W_n$  обладает теми же особенностями, что и в случае спектра  $E_n = \frac{n^2}{2}$ . По-видимому, это является косвенным указанием на то, что при иррациональных значениях  $\tau/4\pi$  влияние квантовых резонансов сказывается слабо, что согласуется с формулами (3.19), (3.20).



## § 6. Обсуждение результатов.

### Заключение

В результате проведенных исследований было определено поведение системы при наличии квантового резонанса. В этом случае энергия ротатора неограниченно растет со временем по асимптотическому закону  $E = \eta t^2$ . Этот рост происходит при любых  $K$ , т.е. в резонансе отсутствует квантовая граница устойчивости ( $K \sim 1$ ), которая была предсказана в [14] и наблюдалась в нерезонансном случае в [12]. Правда, при  $K \ll 1$

$\eta \sim \left(\frac{K}{q}\right)^{2q} \ll 1$ . В области квазиклассики при  $K\mathcal{T} \gg 1$  на временах  $t^* \sim \frac{1}{\mathcal{T}}$  энергия системы ведет себя также, как и в классическом случае (см. таблицу 5, рис. 3, 3А). В то же время на больших временах энергия растет пропорционально  $t^2$  и ни о какой диффузии говорить не приходится. Система квантовых резонансов является всюду плотной ( $\mathcal{T} = \frac{4\pi p}{q}$ ), а спектр квазиэнергий в резонансе - непрерывным.

В нерезонансном случае (иррациональные  $\mathcal{T}/4\pi$ ), как видно из данных таблиц 6 - 9 и рис. 4(4а) - 6(6а), при  $K\mathcal{T} \gg 1$  и  $K \gg 1$  в системе происходит диффузия по энергии со скоростью близкой к классической, но только на временах  $t^*$ . При  $t > t^*$  скорость диффузии заметно падает. Время  $t^*$  растет приблизительно пропорционально  $K$ . Вопрос о поведении системы на достаточно больших временах в нерезонансном случае остается открытым. Будет ли ее энергия ограничена некоторой константой (в этом случае движение является квазипериодическим) или же будет неограниченно возрастать.

Как видно из результатов работы, на временах  $t^*$  дви -

жение системы в некотором смысле похоже на классическое (так наблюдается диффузия по уровням невозмущенной системы). Вместе с тем имеются и серьезные отличия, обнаруженные в [12] и указывающие на то, что вопрос о переходе в классику требует дальнейших исследований.

В заключении работы автор пользуется случаем, чтобы выразить свою искреннюю благодарность Б.В.Чирикову - за руководство работой, Ф.М.Исраилеву - за ценные советы и замечания, Г.М.Заславскому - за стимулирующие дискуссии.

## Л и т е р а т у р а

1. V. I. Arnold, A. Avez. Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, New York, 1968); J. Moser, Stable and random motions in dynamical systems (Princeton University Press, 1973).
2. B. V. Chirikov. „A universal instability of many-dimensional oscillator systems” To appear in Physics Reports.
3. Г. М. Заславский. Статистическая необратимость в нелинейных системах. "Наука", М., 1970.
4. Я. Г. Синай, ДАН СССР, 153, 1261, (1968).
5. Б. В. Чириков, Атомная энергия, 6, 630, (1959).
6. Б. В. Чириков, "Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности", Препринт ИЯФ Р 267, Новосибирск, (1969).
7. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН, 105, 3, (1971).
8. Н. М. Пухов, Д. С. Чернавский, ТМФ, 7, 219, (1971).
- ✓ 9. G. P. Berman, G. M. Zaslavsky, Physics Letters, 61A, 295, (1977).
10. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ, 65, 643, (1973).
11. Г. М. Заславский, ЖЭТФ, 73, 2039, (1977).
12. G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, J. Ford, "Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation", Proceedings of the 1977 Como Conference on Stochastic Behavior in classical and Quantum Hamiltonian Systems.
13. Я. В. Зельдович, ЖЭТФ, 51, (1966) 1492; В. И. Ритус, там же, стр. 1544.
14. Э. В. Пуряк, ЖЭТФ, 71, 2039, (1976).

Таблица 1

$K/q$	$\eta$	K	$P/q$
.013	$< 10^{-6}$	.1	1/8
.015	$< 10^{-4}$	.25	1/17
.025	$\sim 6 \cdot 10^{-6}$	.1	1/4
.058	$< 10^{-4}$	1.	1/17
.058	$\approx 10^{-4}$	1.	4/17
.083	$\sim 2 \cdot 10^{-6}$	.25	1/3
0.099	$< 10^{-3}$	10.	1/101
.100	$\sim 3 \cdot 10^{-6}$	.5	1/5
.100	$2 \cdot 10^{-5}$	.5	2/5
.116	$< 10^{-4}$	2.	1/17
.150	$10^{-2}$	1.2	1/8
.167	$\sim 5 \cdot 10^{-6}$	1.	1/6
.167	$\sim 2 \cdot 10^{-4}$	.5	1/3
.176	$\sim 10^{-3}$	3.	1/17
.200	$6 \cdot 10^{-4}$	1.	1/5
.206	$\sim 2 \cdot 10^{-3}$	3.5	1/17
.235	.08	4.	1/17
.235	.144	4.	4/17
.333	$5 \cdot 10^{-3}$	1.	1/3
.353	.36	6.	1/17

Таблица 2

$K/q$	$\eta$	$\xi$	K	$P/q$
.706	3.	2.8	12.	1/17
1.12	17.6	1.2	19.	1/17
1.76	23.4	2.3	30	1/17
2.35	30.4	3.1	40	1/17
3.33	52.43	3.2	50	1/15
3.78	166	2.0	87	1/23
5.00	181	2.4	85	1/17
5.38	175	2.2	70	1/13
5.44	284	1.7	87	1/16
5.80	323	1.6	87	1/15
6.21	239	2.3	87	1/14
6.36	292	1.5	70	1/11
6.54	244	2.3	85	1/13
7.69	404	1.9	100	1/13
7.73	246	2.7	85	1/11
8.57	206	2.5	60	1/7
10	238	2.9	70	1/7
10.7	245	3.3	75	1/7
12.4	452	2.3	87	1/7
14.0	276	3.6	70	1/5

Таблица 3

$P/q$	1/17	4/17	7/17	1/23	7/23	10/23
к	40	40	40	87	87	87
$\eta$	30.4	30.	23.5	166	180	188

Таблица 3А  $P/q = 1/17$ 

к	.25	1.	2.	3.	3.5	4.
$\eta$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 2 \cdot 10^{-3}$	.08
к	6.	12	19	30	40	85
$\eta$	.36	3.	17.6	23.4	30.4	181

Таблица 4

$K\Upsilon$	K	$\Upsilon$	$\varepsilon_L$	$t^*$
82.2	85	4 /13	1.1	6
78.1	87	4 /14	1.1	6
68.3	87	4 /16	1.2	6
62.8	85	4 /17	1.2	7
47.5	87	4 /23	1.2	10
4.98	40	4 /101	1.16	30

Таблица 5

$K\Upsilon = 4.98,$      $K = 40,$      $\Upsilon = \frac{4\eta}{101} \approx .1244$

t	$\frac{\langle E \rangle}{K^2/4}$	$\varepsilon^*$	$\frac{4\eta}{K^2}$	B	$W_d$	$\varepsilon$
25	28	.95	$7 \cdot 10^{-3}$	.84	.56	1.07
30	35.8	.94	$8 \cdot 10^{-3}$	.74	.54	1.16
35	43.8	.94	$8.8 \cdot 10^{-3}$	.69	.54	1.22
40	55	.92	$9.6 \cdot 10^{-3}$	.61	.50	1.32
45	65.8	.90	$1.1 \cdot 10^{-2}$	.57	.50	1.42

Таблица 6

$K\Gamma$	$K$	$\Upsilon$	$t$	$\varepsilon_1$	$t^*$	$\varepsilon_2$	$B_1$	$B_2$	$W_d^{(1)}$	$W_d^{(2)}$	$\delta$	$N$
5	10	0.5	1000	0.78	20	0.012	1.23	3.98	0.79	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	38
5	20	0.25	500	0.65	40	0.12	1.23	1.55	0.46	0.088	$-9 \cdot 10^{-4}$	61
5	40	0.125	250	0.98	40	0.58	0.86	0.99	0.52	0.38	$10^{-3}$	101
5	20	0.25	300	0.71	30	0.22	-	-	-	-	$6 \cdot 10^{-4}$	61
5	20	0.25	300	0.62	20	0.14	1.22	1.26	0.42	0.052	$2 \cdot 10^{-3}$	61

\*

\*\*

Таблица 7

$$kT = 5, \quad k = 10, \quad T = 0,5$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$w_d$
20	17	0.78	1.23	0.79
200	27	0.024	1.43	0.015
400	27	0.013	2.17	$6,3 \cdot 10^{-3}$
600	33	0.017	2.71	$2.0 \cdot 10^{-3}$
800	31	0.015	3.33	$1.9 \cdot 10^{-3}$
1000	26	0.012	3.93	$1.3 \cdot 10^{-3}$

Таблица 8

$$kT = 5, \quad k = 20, \quad T = 0.25$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$w_d$
40	28	0.65	1.23	0.46
100	38	0.35	1.19	0.27
200	52	0.21	1.23	0.094
300	64	0.15	1.28	0.039
400	75	0.14	1.40	0.036
500	78	0.12	1.55	0.038



Таблица 9

$\kappa T = 5, \quad \kappa = 40, \quad T = 0.125$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(\kappa^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$w_d$
40	40.8	0.98	0.86	0.52
50	46.6	0.90	0.81	0.42
100	76.2	0.68	0.80	0.31
150	105	0.64	0.86	0.33
200	124	0.59	0.98	0.35
250	140	0.53	0.99	0.33

Таблица 10

$\kappa T = 5, \quad \kappa = 20, \quad T = 0.25, \quad n_0 = 1000$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{100(\kappa^2/4)}$	$\frac{\langle (n-n_0)^2 \rangle}{(\kappa^2/4)}$	$\varepsilon_E$	$\varepsilon$
30	49.08	23	-0.59	0.71
50	48.12	34	-1.59	0.60
100	47.97	54	-1.34	0.49
150	48.03	66	-0.78	0.41
200	47.87	73	-0.52	0.33
250	47.46	77	-0.43	0.27
300	48.25	79	-0.29	0.22

$$\varepsilon_E = \frac{\langle E \rangle}{\frac{\kappa^2}{4} t}, \quad \varepsilon = \frac{\langle (n-n_0)^2 \rangle}{\frac{\kappa^2}{4} t}$$

Таблица 11

$$\kappa T = 5, \quad \kappa = 20, \quad T = 0.25, \quad E_n = \frac{n^{\sqrt{5}}}{2}$$

$t$	$\frac{\langle n^2/2 \rangle}{(\kappa^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$W_d$
20	11.4	0.62	1.22	0.42
50	22.1	0.38	1.06	0.22
100	29.3	0.25	1.21	0.18
150	35	0.20	1.20	0.09
200	42	0.17	1.19	0.07
250	46	0.15	1.23	0.06
300	52	0.14	1.26	0.05

$$\varepsilon = \frac{\langle n^2/2 \rangle}{\frac{\kappa^2}{4} t}$$

Подписи к рисункам.

Рис. 1. Зависимость средней энергии  $\langle E \rangle$  от времени в случае квантового резонанса.  $T = \frac{4\pi}{17}$ ,  $k = 19$ ,  $t = 75$ .  
 Прямая "а" соответствует формуле (2.10), прямая "б" - линейная аппроксимация в момент времени  $t$  (конец счета).  
 Кривая (ломаная) линия - экспериментальный результат.

Рис. 2. То же, что и на рис.1 при  $T = 4\pi \cdot \frac{2}{5}$ ,  $k = 0.5$ ,  $t = 200$ .

Рис. 3. То же, что и на рис.1 при  $T = \frac{4\pi}{101}$ ,  $k = 40$ ,  $t = 45$ .

Рис.3А. Функция распределения спектральной плотности вероятности по невозмущенным уровням в нормированных координатах  $\ln f_N$  и  $x$  для значений параметров рис.3. Прямая "а" соответствует формуле (2.9). Ломанная линия - экспериментальный результат, прямая "б" - линейная аппроксимация (см. § 4).

Рис. 4. То же, что и на рис.1, но в нерезонансном случае.  $T = 0.5$ ,  $k = 10$ ,  $t = 1000$ .

Рис.4А. То же, что и на рис. 3А для значений параметров рис. 4 (нерезонансный случай).

Рис. 5. То же, что и на рис. 4 для значений параметров  $T = 0.25$ ,  $k = 20$ ,  $t = 500$ .

Рис.5А. То же, что и на рис. 4А для значений параметров рис.5.

Рис. 6. То же, что и на рис. 4 для значений параметров  $T = 0.125$ ,  $k = 40$ ,  $t = 250$ .

Рис.6А. То же, что и на рис. 4А для значений параметров рис. 6.

Рис. 7. То же, что и на рис. 4 для значений параметров  $T = 0.25$ ,  $k = 20$ ,  $t = 300$ ,  $n_0 = 1000$ .

Рис. 8. Зависимость величины  $\langle \frac{(n-n_0)^2}{2} \rangle$  от времени для пара -

метров рис. 7. Прямая "а" соответствует  $\langle \frac{(n-n_0)^2}{2} \rangle = \frac{k^2}{4} t$ ,  
 прямая "б" - линейная аппроксимация. Ломанная линия -  
 экспериментальный результат.

Рис.9. Зависимость величины  $\langle \frac{n^2}{2} \rangle$  от времени в случае  $E_n = \frac{n^{\sqrt{5}}}{2}$   
 (см. § 5).  $T = 0.25$ ,  $k = 20$ ,  $t = 300$ . Прямая  
 "а" соответствует  $\langle \frac{n^2}{2} \rangle = \frac{k^2}{4} t$ , прямая "б" - линей-  
 ная аппроксимация. Ломанная линия - экспериментальный  
 результат.

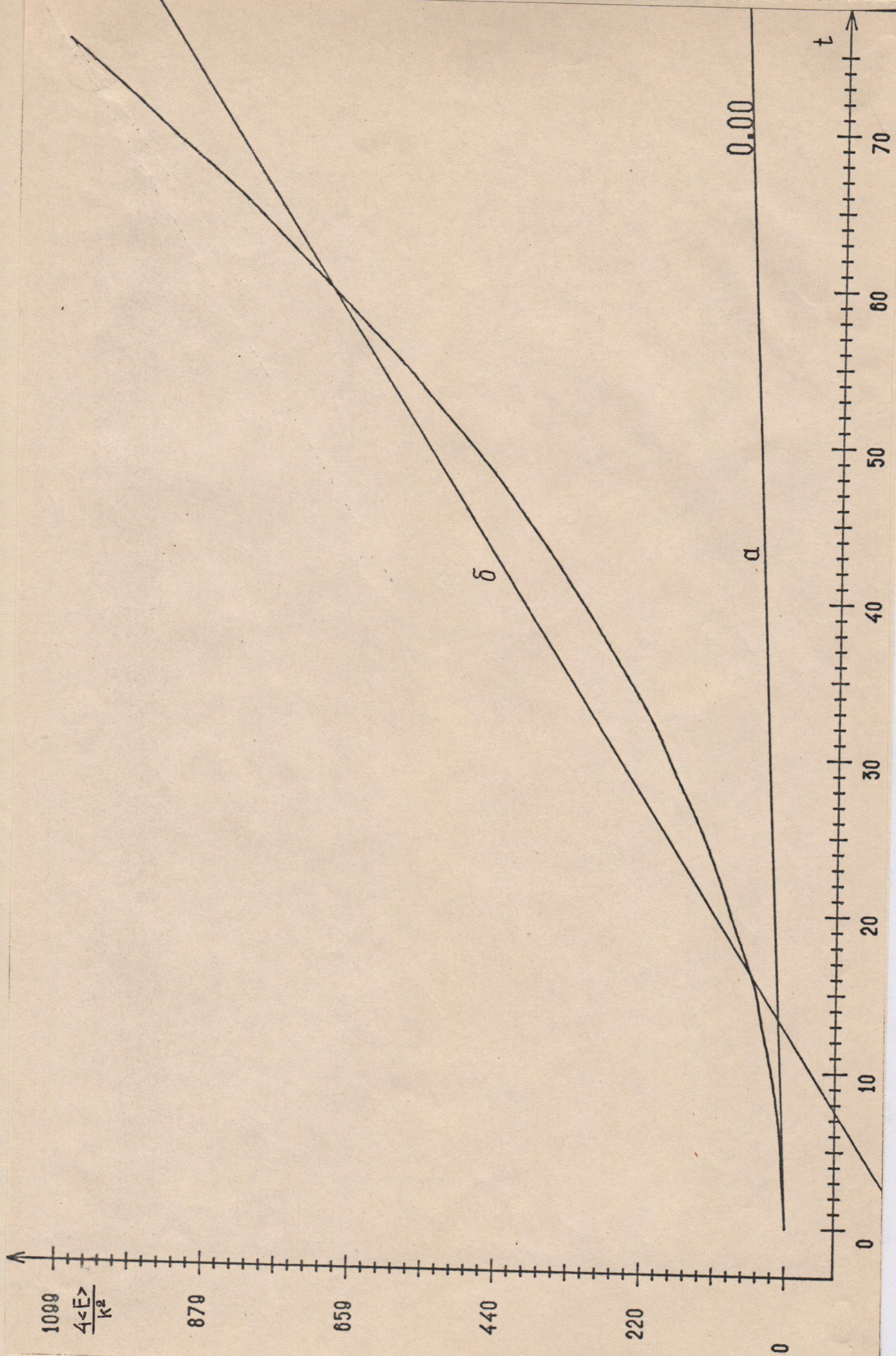


Рис. 1.

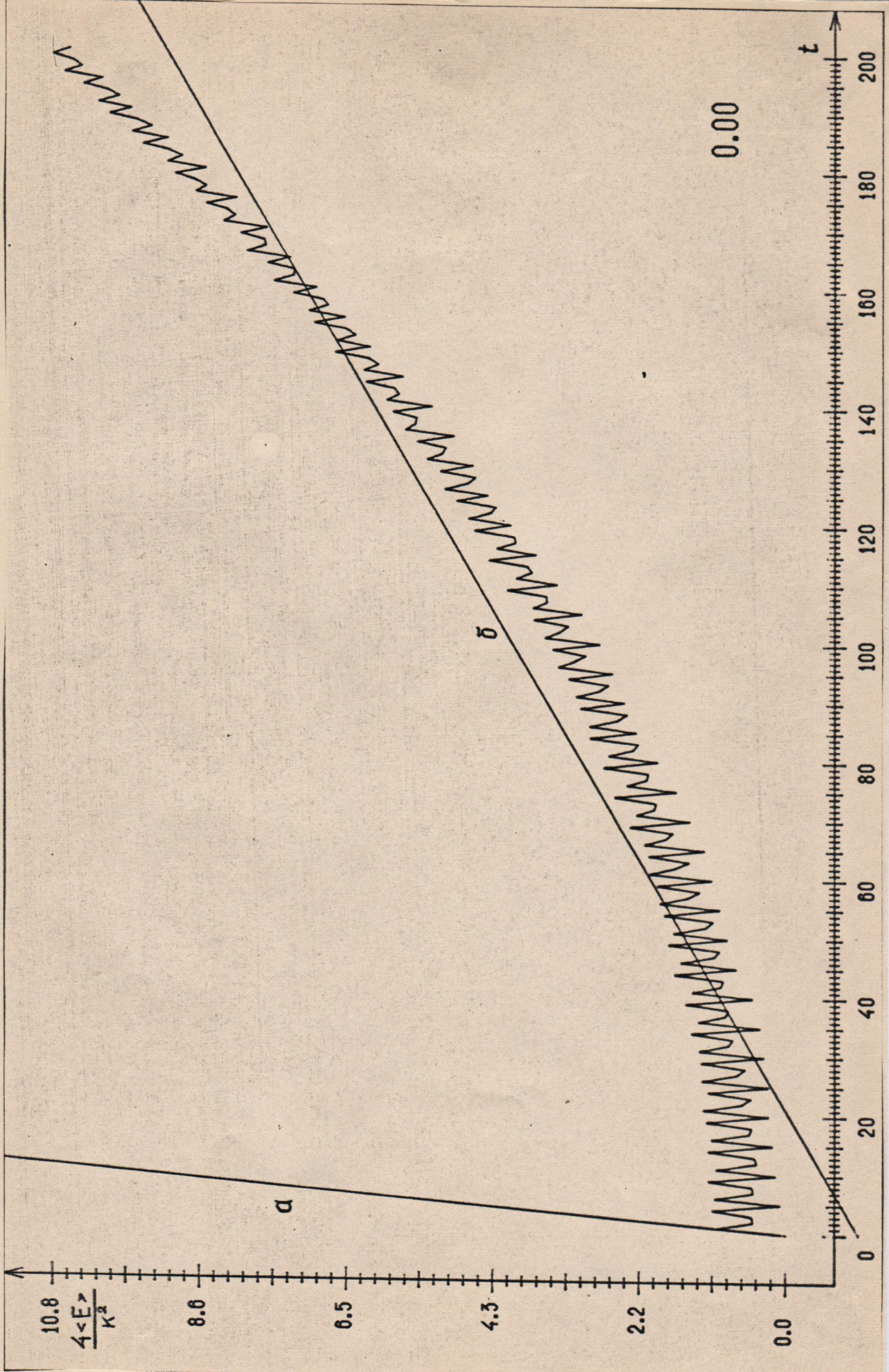


Рис. 2.

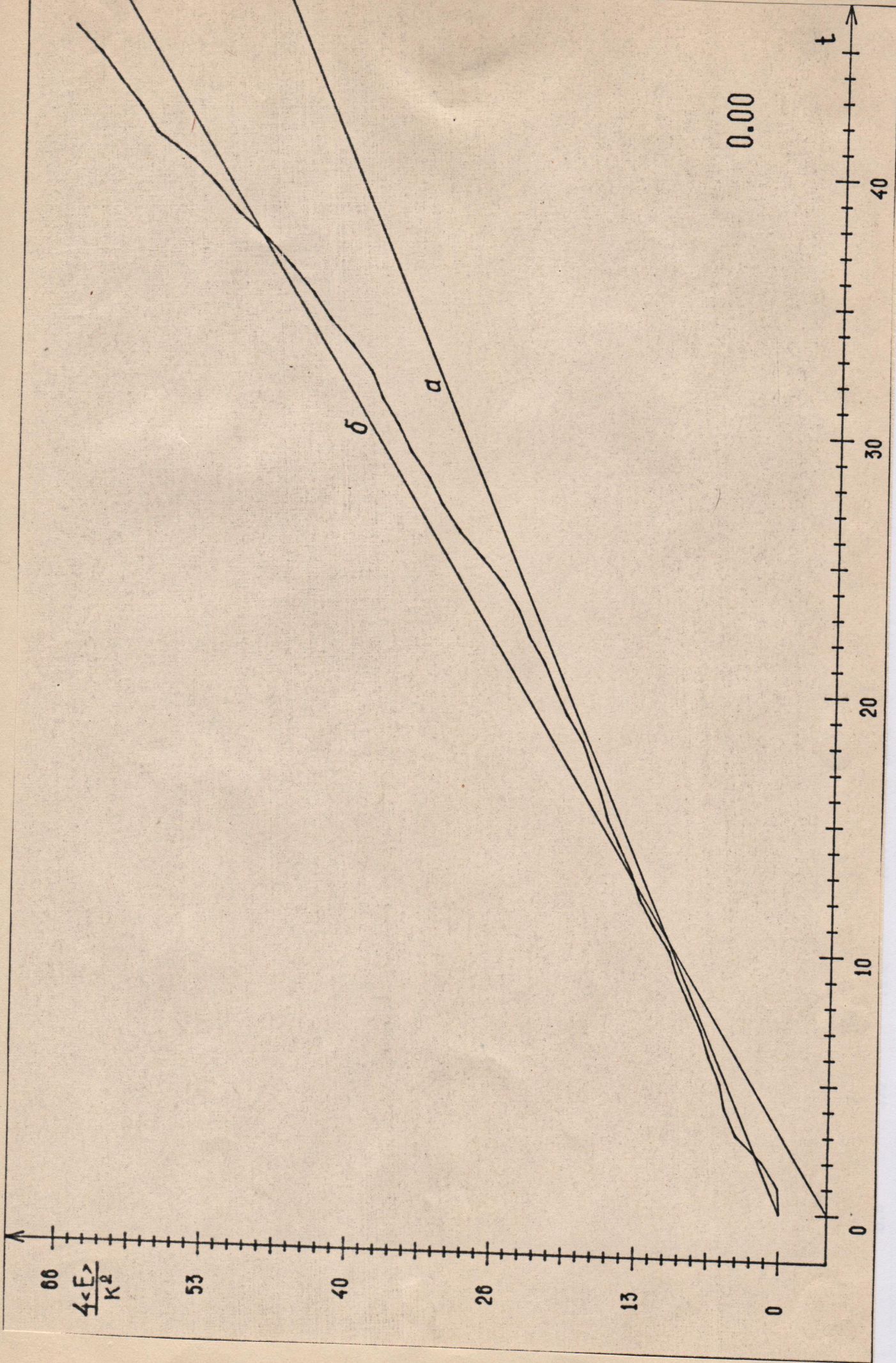


Рис. 3.

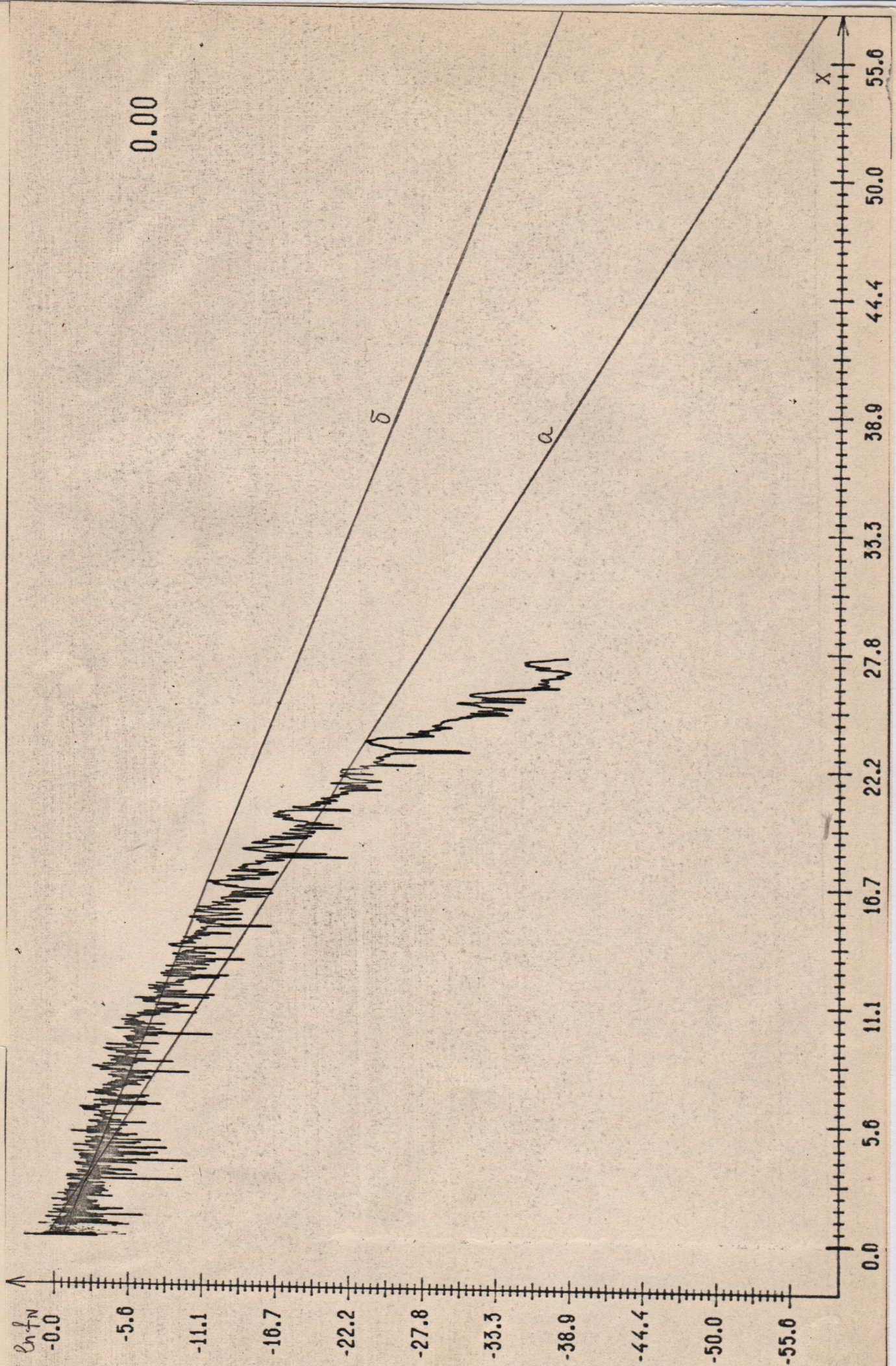


Рис. 3А



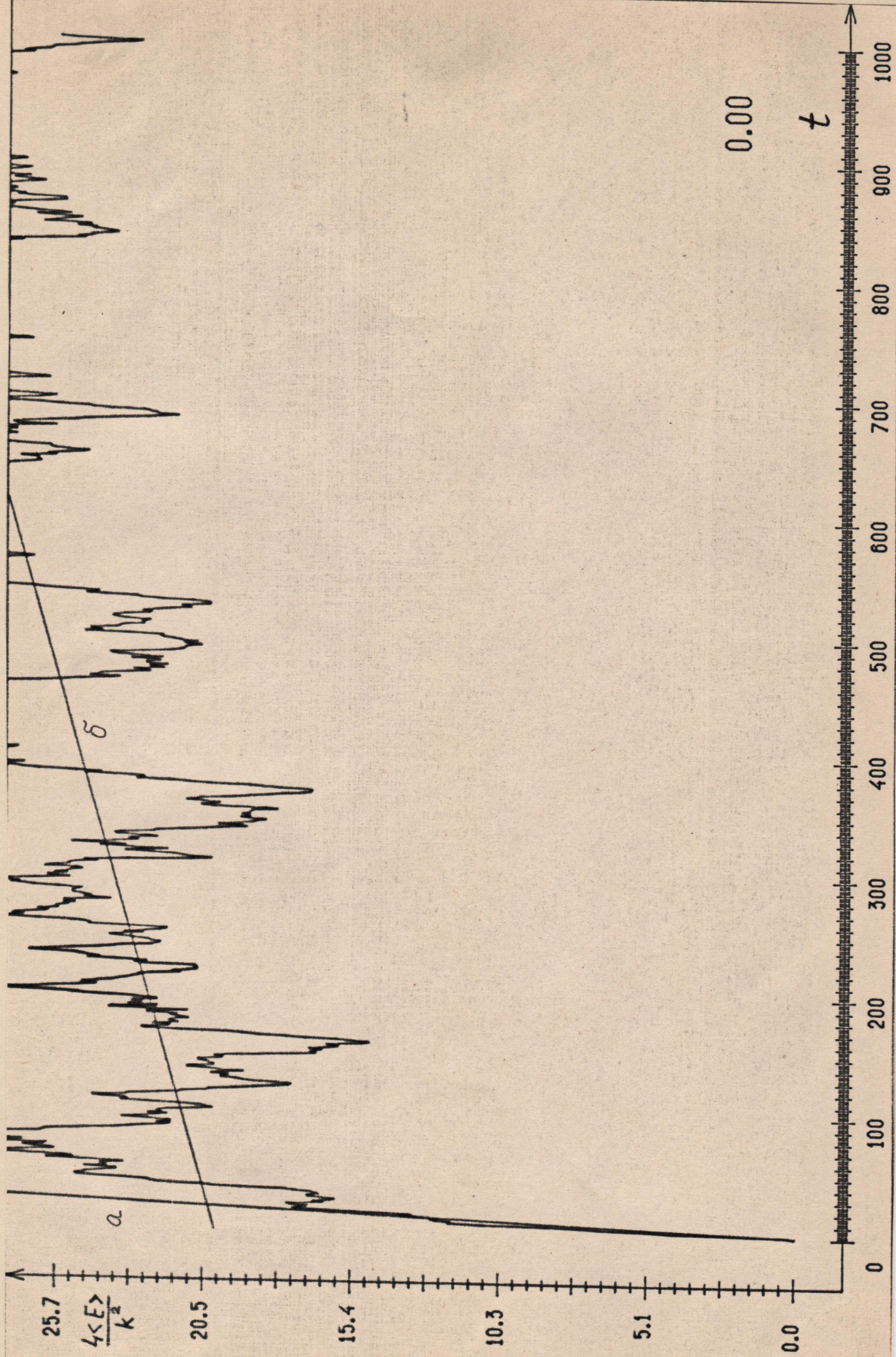


Рис. 4.

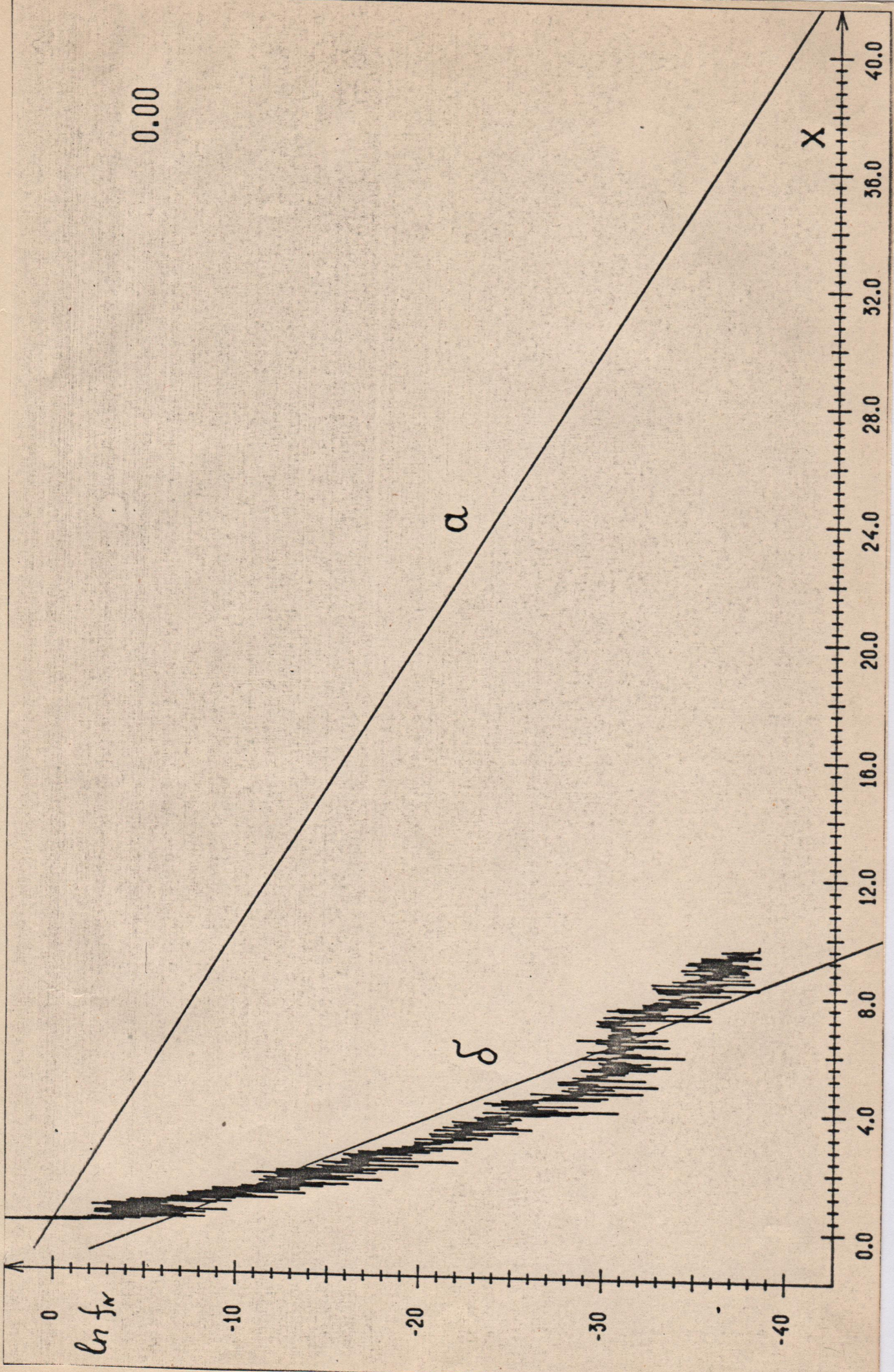


Рис. 4А.

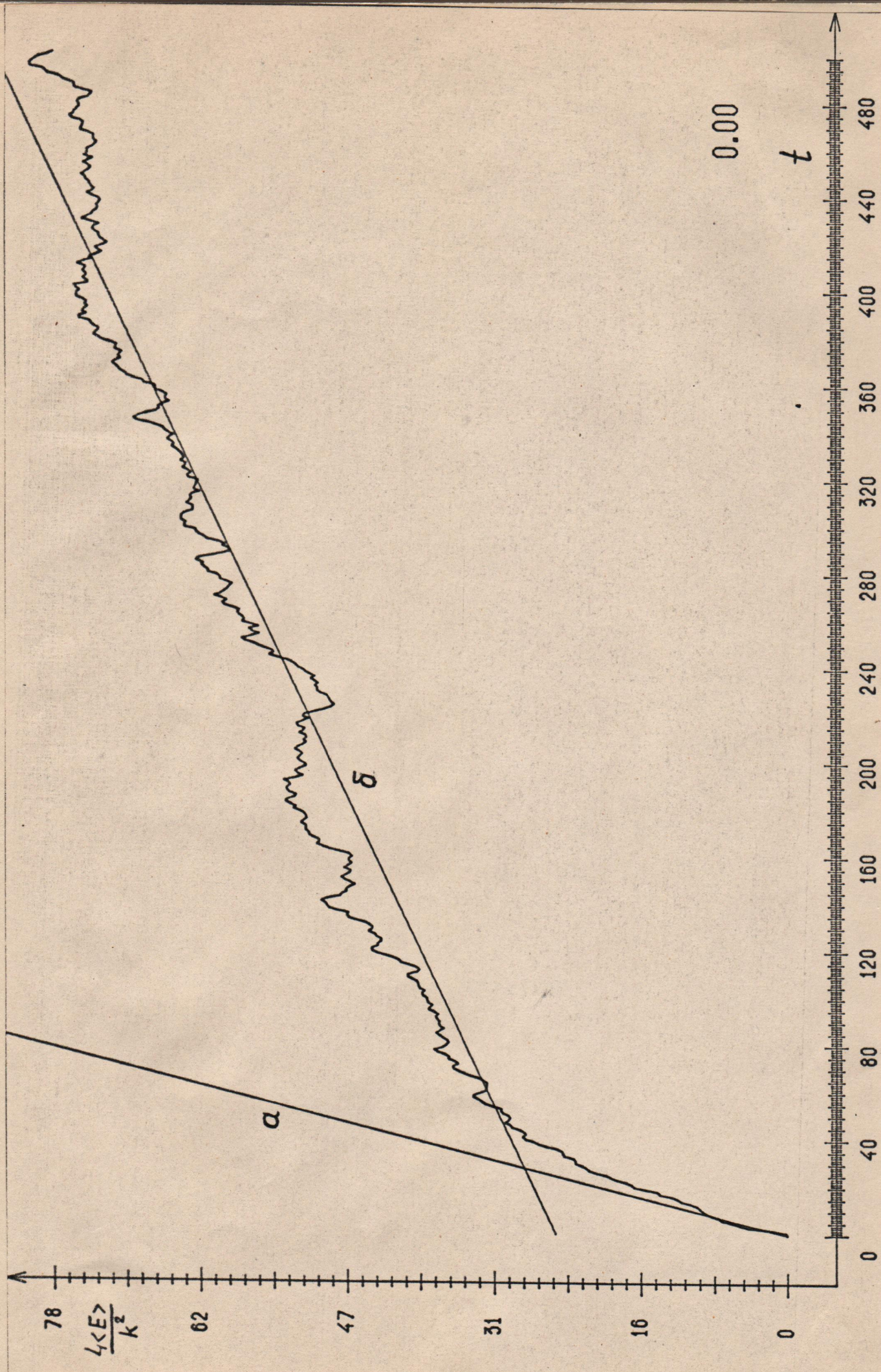


Рис. 5.

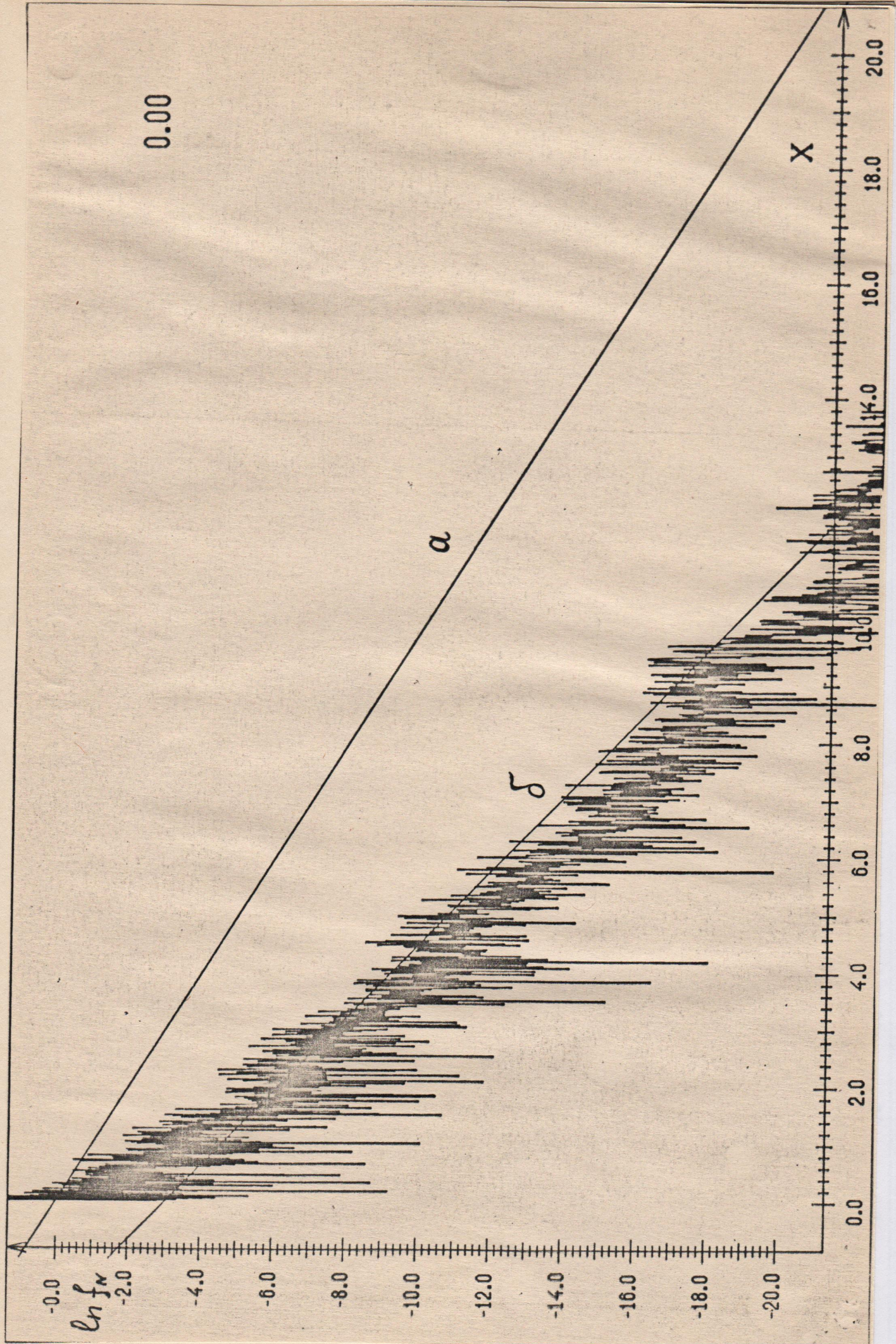


Рис. 5А.

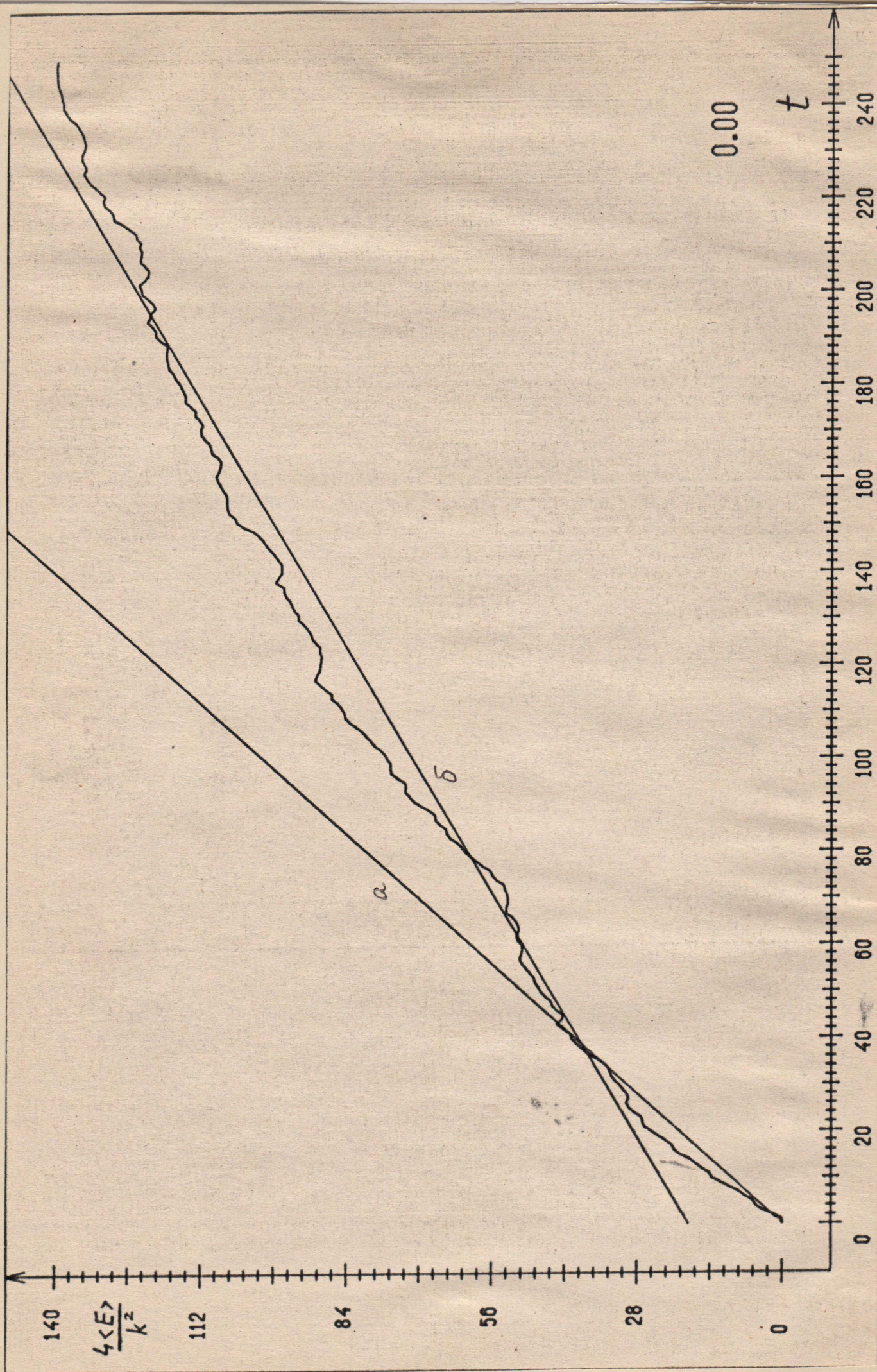


Рис. 6.

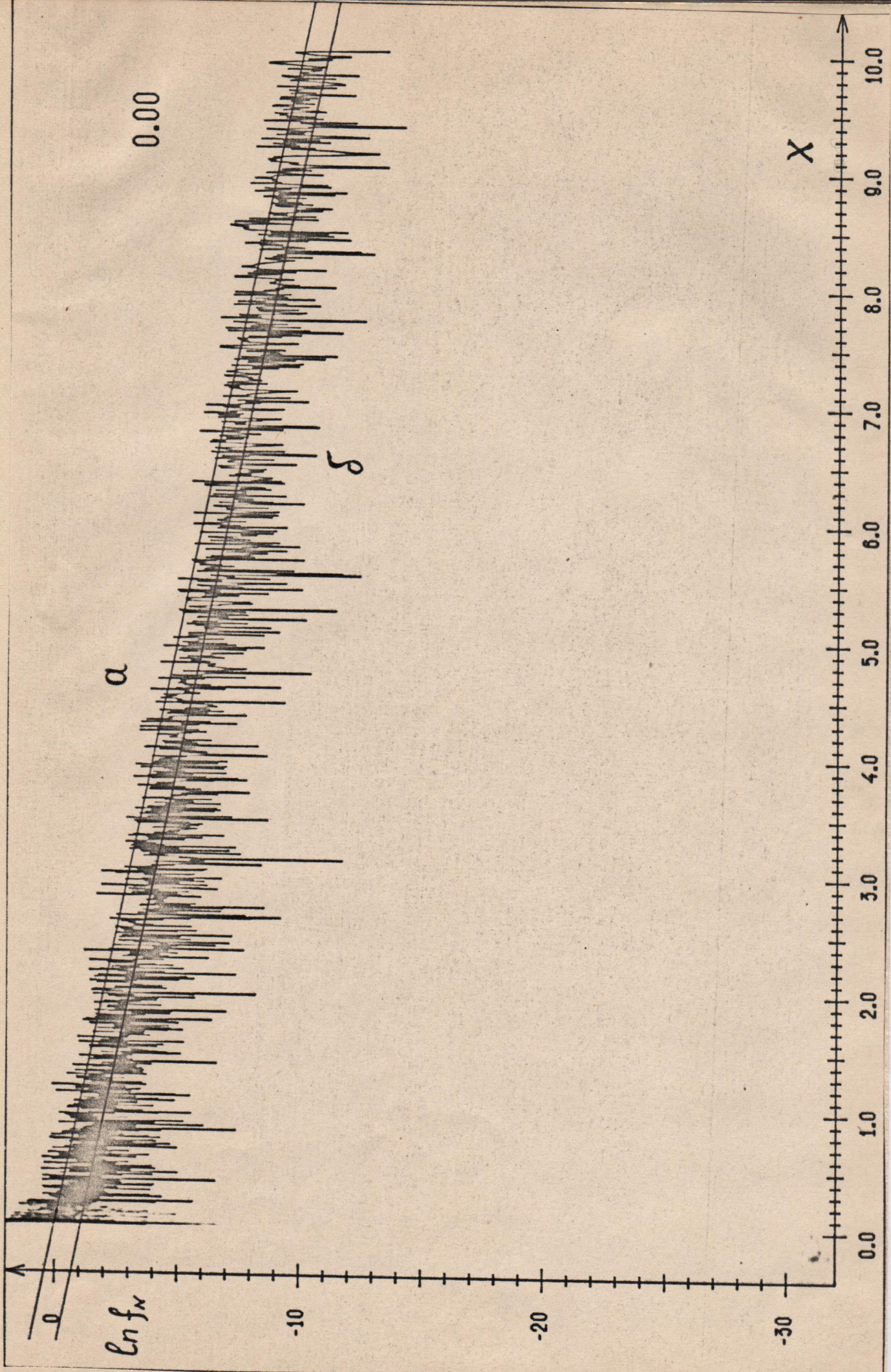


Рис. 6А.

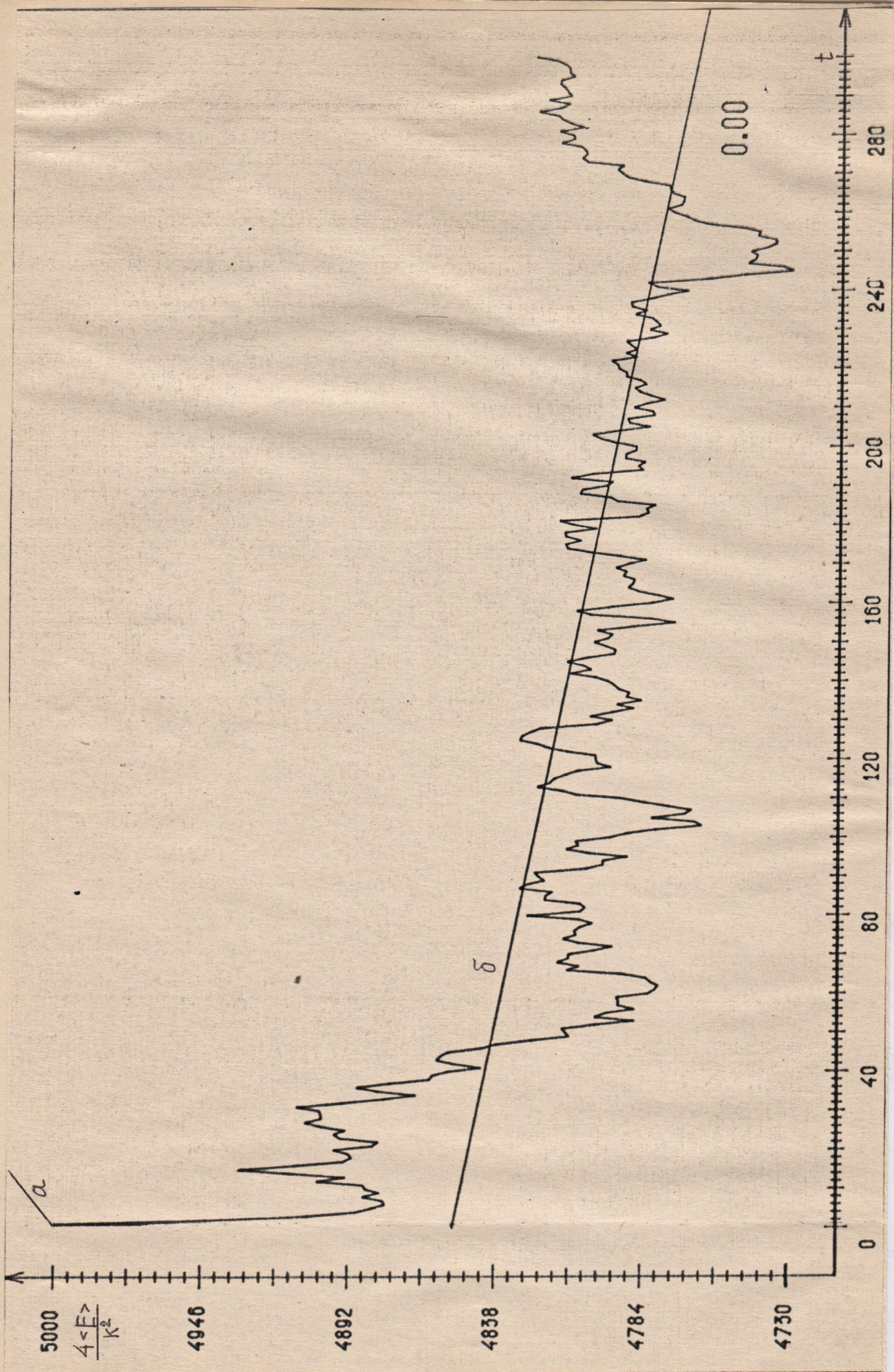
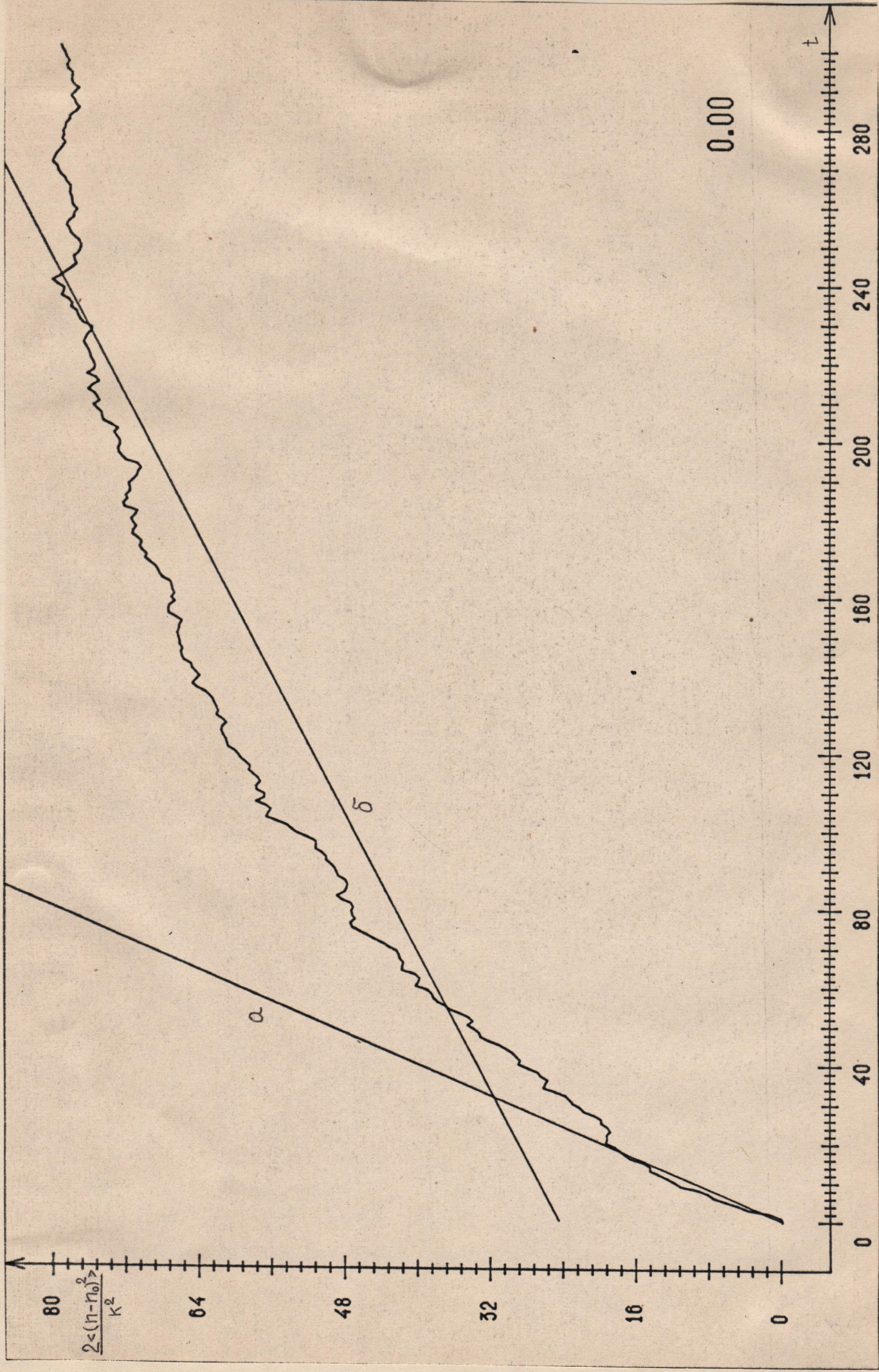


Рис. 7.





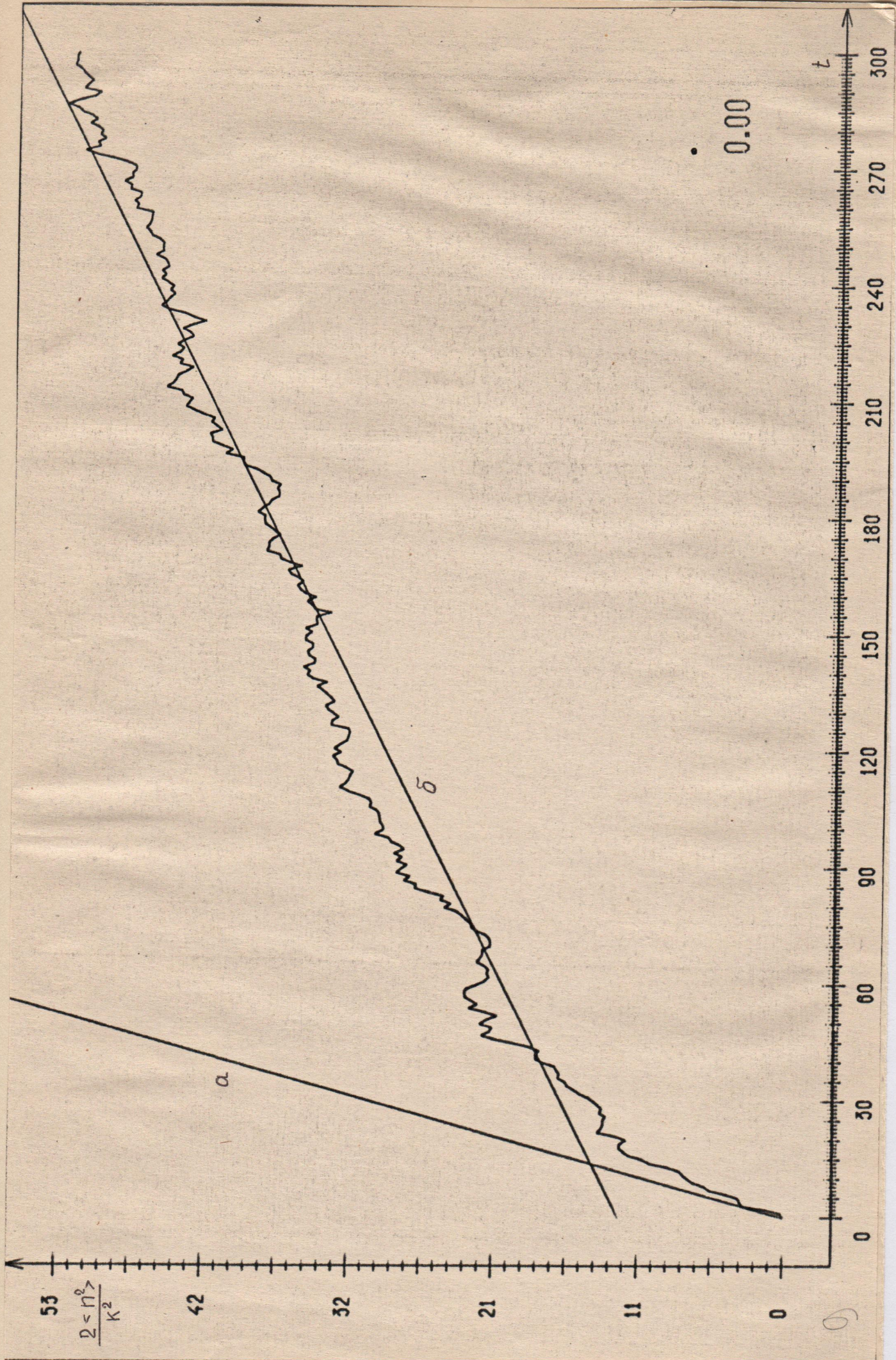


Рис. 9.