

2
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

О Г Л А В Л Е Н И Е :
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт ядерной физики

ГЛАВА I. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ В КЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ 14

ШЕПЕЛЯНСКИЙ Дмитрий Львович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ В КЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

(О1.04.02 - теоретическая и математическая физика)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук

Б.В. Чириков

г.Новосибирск

1981 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е :

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ В КЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ	14
§ 1. Простая модель "квантовой стохастичности"	14
§ 2. Границы применимости квазиклассического приближения для стохастических квантовых систем	25
§ 3. Численные эксперименты	36
§ 4. Модель нелинейного квантового осциллятора	44
ГЛАВА II. КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ	50
§ 5. Квантовые операторные отображения	50
§ 6. Квантовые корреляции в модели ротатора	57
§ 7. Квантовый резонанс	66
ГЛАВА III. ДИФфуЗИОННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ	80
§ 8. Двумерная модель	80
§ 9. Модель с несоизмеримыми частотами	86

ГЛАВА У. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ 102

§ 10. Стохастизация высоковозбужденного атома в
поле низкочастотной электромагнитной
волны 102

§ 11. Стохастическая ионизация атома водорода . . . 108

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 111

ЛИТЕРАТУРА 113

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы был достигнут большой успех в изучении поведения динамических систем классической механики (см., например, /1-6/). В частности, было открыто явление так называемой динамической стохастичности, которое может иметь место в очень простых механических системах. Причем то, что движение детерминированной (динамической) системы в этом случае оказывается крайне нерегулярным, сложным и непредсказуемым, определяется исключительно внутренней динамикой системы и никак не связано с каким-либо влиянием внешних случайных сил. Понятен и механизм возникновения такого чрезвычайно сложного, случайного (без кавычек) движения, связанный с сильной локальной неустойчивостью траекторий системы. В частности, можно считать, что такая неустойчивость как бы "развертывает" во времени ту сложность и своеобразие каждой конкретной реализации случайного процесса, которая уже заложена в точно заданных начальных условиях классического движения /7/. При этом следует отметить, что статистические свойства классического движения не связаны с "практической неопределенностью начальных условий", как это иногда считается, и проявляются также и на отдельной траектории.

В то время как динамическая стохастичность в классических системах уже достаточно хорошо изучена, исследование динамики нелинейных квантовых систем, являющихся стохастическими в классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$), началось сравнительно недавно. Возрастающий интерес к таким стохастическим квантовым системам (СКС) связан с возникновением новых возможностей экспериментального исследования поведения молекул и атомов в поле сильной электромагнитной волны /8,9/, стимулировавшим появление большого числа работ по динамике нелинейных квантовых систем (см., например, /10-13/).

Поскольку возникновение стохастичности в нелинейных системах является довольно типичной ситуацией (см. /1-6/), то исследование СКС представляется важным как для изучения статистических свойств квантовых систем, так и для понимания особенностей поведения молекул и атомов в области стохастичности /14-16/.

Среди различных подходов используемых в работах посвященных стохастичности в квантовой механике можно, грубо говоря, выделить два основных направления. В первом из них авторы исходят из фундаментального отличия квантовой динамики от классической, связанного с дискретностью спектра энергий (и частот) квантового движения для замкнутых систем. На этом основании некоторые авторы просто отказываются от рассмотрения проблемы квантовой стохастичности /17/. Другие придерживаются более конструктивной позиции: принимая, явно или неявно, отмеченное выше фундаментальное различие между классической и квантовой динамикой, они ставят вопрос иначе (см., например, /18-23/): каковы особенности квантовой динамики тех систем, которые в классическом пределе являются стохастическими? При этом значительное внимание уделяется исследованию статистических свойств распределения уровней энергии впервые начатому в работах /24-26/. В этом направлении наряду с теоретическими работами /18-20, 25-28/ и экспериментальными исследованиями /29,30/ сравнительно недавно были проведены численные эксперименты /31,32/ в которых было обнаружено расталкивание близких уровней в СКС, исследовавшееся в /24-26, 18,20/.

Авторы второго направления пытаются, наоборот, обобщить все свойства и понятия классической стохастичности на квантовые системы в очевидном противоречии с философией первого направления (см., например, /14, 33-39/). Следует сразу отметить, что с точки зрения физики имеются серьезные аргументы в пользу второго направ-

ления, опирающиеся на принцип соответствия, согласно которому при больших квантовых числах должен существовать какой-то переход к классической механике, в том числе и для стохастического движения. Эти общие соображения можно дополнить ссылкой на хорошо известную теорему Эренфеста, из которой следует, что достаточно узкий квантовый пакет движется по классической траектории, в том числе и по стохастической траектории.

В работе /40/ предпринята попытка разрешить это кажущееся противоречие с помощью представления о переходной, или временной стохастичности. Этот подход основан на введении разных масштабов времени таким образом, что различные статистические свойства классической динамики проявляются на некоторых конечных интервалах времени квантового движения.

Следует отметить, что дискретность квантового спектра замкнутой системы с гамильтонианом не зависящим от времени существенно ограничивает возможные статистические свойства квантового движения и, в частности, полностью исключает стохастичность в классическом понимании этого слова (см./I-6/). По-видимому, впервые на эту трудность обратил внимание Крылов /41/ и затем она обсуждалась в ряде других работ (см., например, /42,43,17/). Действительно, дискретность спектра влечет за собой почти-периодическую эволюцию во времени как волновой функции системы, так и ее матрицы плотности (или функции Вигнера). В классической механике такой тип движения рассматривается обычно как противоположный стохастичности предельный случай, характерный для полностью интегрируемых систем. Заметим, что для удобства сравнения с квантовой механикой полезно перейти от обычной картины движения отдельной классической системы по траектории к эволюции некоторой функции фазового пространства системы (например, но не обязательно, функции распределе-

ния ансамбля систем) согласно уравнению Лиувилля. Спектр последнего может быть как дискретным (регулярное движение), так и непрерывным (стохастичность). Таким образом единственное, и самое слабое, статистическое свойство, которое может иметь место в замкнутых квантовых системах, — это эргодичность (см. /22,23/). Отсюда следует, что в таких квантовых системах энтропия Колмогорова-Синая h (КС-энтропия) /2,6/ равна нулю, а разновременные корреляции операторов не затухают со временем. Более строго этот результат был получен в /44/. Имеются две основные проблемы, связанные со статистическими свойствами таких квантовых систем. Это, во-первых, исследование распределения квантовых уровней /24-26, 18-20/ и, во-вторых, эргодические свойства собственных функций /22,23/.

Вместе с тем, ввиду бурного развития исследований по диссоциации молекул и ионизации атомов в поле сильной электромагнитной волны /8,9/ значительный интерес представляет исследование нестационарных квантовых систем. Важно также, что в нестационарных СКС спектр движения может быть непрерывным и поэтому такие системы могут обладать некоторыми статистическими свойствами классических стохастических систем. Тем не менее статистические свойства в нестационарных СКС оказываются значительно слабее чем в стохастических классических системах. Так, например, в физически реальных СКС КС-энтропия $h = 0$ (см. § 5), отсутствует экспоненциальное расщепление корреляций, а наиболее сильным статистическим свойством, которое может иметь место в СКС, оказывается перемеживание (степенное расщепление корреляций).

С другой стороны, для квантовой системы, стохастической в классическом пределе, узкий волновой пакет все-таки движется по стохастической траектории (теорема Эренфеста)! Правда, пакеты, как известно, расплываются. Однако скорость этого расплывания

можно сделать сколь угодно малой, если уйти достаточно далеко в квазиклассическую область. Поэтому, по крайней мере в течение некоторого времени, квантовое движение будет столь же стохастическим, в частности, случайным, как и классическое. Это наводит на мысль, что для разрешения кажущегося противоречия между дискретностью квантового спектра и принципом соответствия следует ввести различные масштабы времени квантового движения /40/. Фактически два таких масштаба уже известны. В одном из них $t \lesssim T_r(t_s)$, который будем называть случайным, квантовое движение близко к классическому пределу, правда, при дополнительном ограничении на начальное состояние квантовой системы, волновая функция которого должна быть квазиклассической. На этом и только на этом масштабе времени, как мы увидим ниже, квантовая система может быть полностью стохастической, или случайной. Вторым масштаб $t \gtrsim T_d(t^*)$ можно назвать дискретным, на нем в полной мере проявляется характерная для квантовых систем дискретность спектра. Дополнительные численные эксперименты (см. § 8) показали, что в нестационарных СКС имеется также и третий масштаб движения $T_w(t_w)$. На этом масштабе $t \lesssim T_w$ квантовая система все еще обладает некоторыми слабыми статистическими свойствами. Так, например, в спектре квантовых корреляций при $T_r \lesssim t \lesssim T_w$ наряду с дискретными линиями все еще наблюдается непрерывная компонента. Одной из основных задач является выяснение следующего вопроса: совпадают ли (по порядку величины) эти масштабы T_r, T_d, T_w и если нет, то какой характер имеет движение между ними?

Поскольку теоретическое исследование СКС даже в квазиклассической области сталкивается со значительными трудностями (см., например, /21, 36, 37, 40, 45-48/), которые связаны с локальной неустойчивостью классических траекторий, приводящей к экспоненциально

быстрому расплыванию квазиклассического пакета, и нарастанием квантовых поправок со временем, то важное значение приобретают численные эксперименты с простыми моделями СКС. Такие эксперименты позволяют проверить имеющиеся теоретические оценки, а также получить ряд новых результатов в той области, где использовавшиеся пока теоретические подходы оказываются неприменимыми.

Насколько нам известно, первые численные эксперименты с простой моделью СКС (квантовый ротатор под действием периодического возмущения) были проведены в работе /49/ (см. глава I, § I). Основным результатом этих экспериментов состоит в том, что движение квантового ротатора похоже при определенных условиях на стохастическое движение классической системы. Так, например, наблюдался диффузионный рост энергии ротатора со временем с коэффициентом диффузии близким к классическому. Вместе с тем начиная с некоторого момента времени t^* имело место существенное уменьшение скорости диффузии. Результаты исследований /49/ показали также, что временные масштабы T_r и T_d существенно различаются ($T_r \ll T_d$), а движение системы при $t \ll T_d$ характеризуется классической диффузией. На основе наглядных представлений (см. /40/) в § I получены оценки масштабов T_r и T_d . Далее в главе I обсуждаются условия применимости квазиклассического приближения для СКС. Первые исследования предпринятые в этом направлении /36/ показали, что для начального когерентного состояния отличие квантовых средних от классических нарастает со временем экспоненциально в течение времени $t \ll t_s \sim \frac{\ln n_{ch}}{h}$, где n_{ch} - характерное квантовое число ($n_{ch} \propto \hbar^{-1}$). Однако, для времени $t \geq t_s$ использовавшийся метод исследования (метод C-числовых квантовых отображений /36,48/) оказался неприменимым и поэтому вопрос о том в течение какого времени t_0 отличие между квантовыми и

классическими средними является малым $\propto O(\hbar)$ требовал дальнейшего исследования. В /50/ аналогичный результат был получен для начального распределения являющегося суперпозицией когерентных состояний. Интересный метод суммирования квантовых поправок вида $(\hbar e^{\hbar t})^n$, основанный на технике функционального интегрирования, использовался в /45/. Вместе с тем такой метод также оказался применим только для $t \leq t_s$ из-за экспоненциального нарастания поправок вида $\hbar^2 e^{\hbar t}$. Поскольку время t_s только лишь логарифмически зависит от \hbar , то оно оказывается довольно таки небольшим даже для макроскопических стохастических систем. Поэтому оценка времени t_0 представляет принципиальный интерес. В § 2 (/46/) на основе результатов В.П.Маслова /51,52/ показано, что квазиклассическое приближение применимо и при $t \gg t_s$ вплоть до $t_0 \propto \hbar_{ch}$. В рамках данного метода получена оценка для времени t^* диффузионного возбуждения СКС в предположении, что $t^* \sim t_0$ (строго можно утверждать, что $t^* \geq t_0$). Эта оценка подтверждается проведенными численными экспериментами для модели квантового ротатора в поле периодического возмущения (§ 3) и для модели нелинейного квантового осциллятора с периодическим возмущением (§ 4). В § 4 показано, что при определенных условиях нелинейный квантовый осциллятор может быть диффузионно возбужден прямо из основного состояния. В этом же параграфе обсуждается классическая модель "замороженных частиц", которая позволяет хорошо аппроксимировать зависимость квантовых средних от времени. Такая модель позволяет получить нижнюю границу для степени диффузионного возбуждения СКС, которая в ряде случаев совпадает с истинной. Однако, при определенных условиях СКС может быть возбуждена существенно выше границы даваемой моделью "замороженных частиц" (см. § 9).

В главе II (§ 5-7) исследуются свойства квантовых корреляций

в СКС. В § 5 для квантового ротатора строятся операторные квантовые отображения. На основе анализа этих отображений получено, что КС-энтропия $h = 0$ (для классической системы $h > 0$), а разновременные квантовые корреляции в отличие от классических (когда мера островков устойчивости достаточно мала) не затухают экспоненциально со временем /47/. Более того, удается строго показать, что в СКС корреляции затухают не быстрее некоторой степени времени. В этом же параграфе приведены простые физические соображения в пользу того, что во всех физически реальных СКС (см. § 5) отсутствует экспоненциальное убывание корреляций, а КС-энтропия равна нулю. Этот вывод подтверждают также результаты полученные впоследствии в /48/, где показано, что в модели нелинейного квантового осциллятора $h = 0$, а экспоненциальное затухание корреляций отсутствует. В § 5 получено, что через время $t_s \sim \frac{\ln n_{ch}}{h}$ относительное различие между квантовыми и классическими корреляциями становится больше единицы (при этом по абсолютной величине корреляции $\propto O(\hbar)$). Теоретические результаты § 5 подтверждаются численными экспериментами, описанными в § 6 (/53/). Следствием нулевой КС-энтропии является устойчивость квантовой эволюции (§ 6).

В § 7 рассматривается явление квантового резонанса впервые обнаруженного в /49/ и подробно исследованного в /54/. Показано, что в системе имеется бесконечное, всюду плотное множество таких резонансов, и найдено общее условие их возникновения. Определяются основные характеристики движения системы в резонансе. Аналитически показывается, что на больших временах энергия ротатора растет квадратично со временем. Вид асимптотики не зависит от величины возмущения и является универсальным. Проводится анализ структуры спектра квазиэнергий, который в резонансе является непрерыв-

ным.

В главе III (§ 8, § 9) исследуется динамика возбуждения квантовой системы с двумя степенями свободы (§ 8). Оказывается, что может иметь место режим, в котором ведущая степень свободы, возбуждаясь только до определенного уровня (квантовое ограничение диффузии /49/ и § I), таким образом "шумит" на вторую степень свободы, что по ней возбуждение идет диффузионным образом значительно дольше, чем по ведущей степени свободы (возможно неограниченно) /53/. Результаты численных экспериментов § 8 указывают также на присутствие непрерывной компоненты в спектре квантовых корреляций в модели ротатора. В § 9 исследуется возбуждение квантового ротатора внешним возмущением квазипериодическим по времени (две и три несоизмеримых частоты). Численные эксперименты указывают на то, что этот случай качественно отличается от случая периодического возмущения — в нем отсутствует квантовое ограничение диффузии, а набор энергии продолжается во времени практически неограниченно. На основе результатов главы III выдвинута гипотеза о том, что в квантовых системах с двумя степенями свободы (или больше двух) и периодической (или квазипериодической) внешней силой диффузионный интервал t^* либо экспоненциально быстро увеличивается с ростом параметра квазиклассичности, либо вообще оказывается неограниченным. При этом коэффициент диффузии оказывается близким к классическому значению. Такое диффузионное возбуждение имеет место при условии, что выполнен классический критерий стохастичности и превышена квантовая граница устойчивости для возмущения /14/.

В главе IV (§ 10– § 11) исследуются эффекты стохастичности движения в различных физических системах. В § 10 (/55/) теоретически исследуется воздействие на высоковозбужденный атом интен-

сивного монохроматического излучения с частотой много меньшей частоты атомных переходов. Получено условие стохастизации движения электрона, имеющее место при достаточно низких частотах электромагнитного поля, исследован спектр излучения. В § II обсуждается возможность стохастической ионизации низковозбужденного атома водорода монохроматическим электромагнитным излучением. При частоте излучения $\omega \approx n^{-3}$ (в атомных единицах) и напряженности электрического поля $\varepsilon \geq \max((27n^4)^{-1}, n^{-6})$ стохастическая ионизация возможна вплоть до $\Pi \approx 2$. Вероятность стохастической ионизации $W \sim \varepsilon^2 n^5$ существенно превышает вероятность многофотонной ионизации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /40, 46, 47, 53-55/ и докладывались на следующих семинарах: 1) Теоретический семинар ИЯФ СО АН СССР; 2) Семинар под руководством В.П. Маслова (МИСИ им.В.В.Куйбышева); 3) Теоретический семинар ИМ СО АН СССР; 4) Семинар сектора Я.А.Сморodinского (ИАЭ им.И.В.Курчатова); 5) Общественный семинар по теоретической физике (руководитель академик В.Л.Гинзбург, ФИАН СССР), а также на II-ой Всесоюзной школе по математическим моделям ближнего космоса (секция "Нелинейная динамика и турбулентность", г.Красноярск, 1979), на Всесоюзном семинаре "Автостохастические явления и системы" (г.Горький, 1980) и на VI Всесоюзной школе по нелинейным волнам (г.Горький, 1981).

$$H = \frac{p^2}{2} + k \cos x \delta_T(t) \quad (1.2)$$

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ
СТОХАСТИЧЕСКИХ В КЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

§ I. Простая модель "квантовой стохастичности".

В качестве простейшей модели квантовой системы стохастической в классическом пределе в работе /49/ был выбран квантовый аналог стандартного отображения /6/. Эта модель была выбрана по следующим соображениям. Во-первых, ее динамика в классическом пределе была уже подробно изучена /6/. Во-вторых, в классической механике к стандартному отображению приводятся многие конкретные задачи, например, движение заряженной частицы в магнитной ловушке, и что более существенно - движение в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса довольно общего вида /6/. Наконец, в третьих, эта модель является незамкнутой системой (отображение эквивалентно физически некоторому внешнему периодическому возмущению), в которой, в принципе, непрерывный спектр квазиэнергий /56/ не исключен как в замкнутой системе.

Рассматриваемая модель представляет из себя ротатор во внешнем поле с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{k} \cos x \cdot \delta_{\tilde{T}}(\tau), \quad (I.1)$$

где x - угловая переменная, \tilde{k} - параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\tilde{T})$ - периодическая дельта-функция (периодические толчки), J - момент инерции ротатора. Далее $J = 1$.

Соответствующая классическая задача имеет гамильтониан:

$$H = \frac{p^2}{2} + \tilde{k} \cos x \cdot \delta_{\tilde{T}}(\tau) \quad (I.2)$$

Ввиду периодичности возмущения движение ротатора удобно описать отображением:

$$\bar{p} = p + \tilde{k} \sin x, \quad \bar{x} = x + \tilde{T} \bar{p}, \quad (I.3)$$

которое сводится к стандартному отображению /6/ с параметром $K = \tilde{k} \tilde{T}$, \bar{p} , \bar{x} - значения переменных после толчка.

Отображение (I.3) подробно исследовалось в /6/, где было показано, что значение $\tilde{k} \tilde{T} \approx 1$ является границей устойчивости. При $\tilde{k} \tilde{T} < 1$ движение устойчиво и изменение величины p ограничено ($|\Delta p| \leq \sqrt{\tilde{k}/\tilde{T}}$). При $\tilde{k} \tilde{T} \gg 1$, так уже при $\tilde{k} \tilde{T} = 5$, движение становится стохастическим. В этом случае почти для любых начальных условий, за исключением малых (при $\tilde{k} \tilde{T} \gg 1$) островков устойчивости, близкие траектории расходятся экспоненциально: $d = d_0 \exp(ht)$, где $d = \sqrt{(\tilde{T} \Delta p)^2 + (\Delta x)^2}$, а $h \approx \ln(\frac{\tilde{k} \tilde{T}}{2})$ (при $\tilde{k} \tilde{T} > 4$) - КС - энтропия /6,57,58/. Такая локальная неустойчивость движения приводит к тому, что фаза X становится случайной переменной, энергия ротатора растет по диффузионному закону:

$$E(t) = \frac{\langle p^2(t) \rangle}{2} \approx \frac{\tilde{k}^2}{4} t + E(0), \quad (I.4)$$

а функция распределения по импульсу имеет гауссовский вид:

$$f(p, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \tilde{k}^2 t}} \exp\left(-\frac{p^2}{\tilde{k}^2 t}\right). \quad (I.5)$$

Здесь и далее t - безразмерное время, измеряемое в числе толчков, скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по большому числу траекторий, отвечающих различным начальным данным.

Движение квантовой системы (I.1) также удобно описывать отображением для волновой функции Ψ через период \tilde{T} /49/:

$$\Psi(x, t+1) = e^{-ik \cos x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) \frac{\exp(inx - i \frac{T n^2}{2})}{\sqrt{2\pi}}, \quad (I.6)$$

$$\text{где } A_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Psi(x, t) e^{-inx} dx, \quad k = \frac{\tilde{k}}{\hbar}, \quad T = \hbar \tilde{T}.$$

Из (I.6) получаем следующее отображение для амплитуд A_n через период \tilde{T} :

$$\bar{A}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm} A_m, \quad (\text{I.7})$$

где $F_{nm} = (-i)^{n-m} \exp(-i \frac{T m^2}{2}) J_{n-m}(k)$; $J_\ell(k)$ — функция Бесселя. Из свойств функций Бесселя следует, что один толчок захватывает с экспоненциальной точностью $\approx 2k$ уровней и поэтому сумма в (I.7) фактически содержит $\approx 2k$ членов, что и было использовано при численном исследовании модели (I.I). Отображение (I.7) содержит два независимых параметра k , T , которые и будут использоваться ниже. Далее положим $\hbar = 1$, тогда квазиклассическому пределу соответствует $k \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$, $kT = \text{const}$.

Проведенные численные эксперименты /49/ показали, что движение квантовой системы (I.I) обладает следующей интересной особенностью. При $kT > 1$ и $k \gg 1$ в квантовой системе, как и в классической, происходит диффузия по энергии E со скоростью

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \frac{k^2}{4}, \quad (\text{I.8})$$

где $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{2} |A_n|^2$ средняя энергия ротатора. Однако скорость диффузии остается близкой к классической только в течение некоторого времени t^* . При $t > t^*$ скорость диффузии существенно падает (см. рис. I) и на очень больших временах диффузия практически прекращается. Время t^* растет с ростом k .

При $t > t^*$ распределение по уровням в нормированных координатах $X = n^2/k^2 t$, $f_N(n) = |A_n|^2 \sqrt{\pi t} k$ также существенно отличается от классического: $f_N = e^{-X}$ (см. рис. 2). При счете

использовались различные начальные условия: возбуждение только нулевого уровня ($\Pi_0 = 0$, равномерное по X); возбуждение до 400 нижних уровней со случайными и одинаковыми амплитудами; гауссовское распределение с шириной $4 \lesssim \Delta \Pi \lesssim 400$ вблизи уровня $\Pi_0 = 0,500, 1000$ (полное число уровней в модели достигало 4001). Существенной зависимости движения от начальных условий не наблюдалось.

В области параметров $kT < 1$, $k > 1$ изменение энергии, как и в классическом пределе, оказывается ограниченным. То же самое имеет место и при $k \lesssim 1$, $kT > 1$, что указывает на существование квантовой границы устойчивости, предсказанной в /14/. В рассматриваемом случае механизм этой квантовой устойчивости вполне понятен из выражения (1.7). Действительно, для $k \ll 1$ все F_{nm} пренебрежимо малы за исключением $F_{nn} \approx 1$. Это значит, что переходы между невозмущенными уровнями практически отсутствуют. Можно предположить, что квантовая граница устойчивости грубо соответствует условию $k \sim 1$.

Существует еще один своеобразный тип движения рассматриваемой системы, который был обнаружен в /49/ и назван квантовым резонансом. Он имеет место при $T = 4\pi m$, где m - любое целое число. При точном резонансе средняя энергия ротатора растет пропорционально t^2 . Такое же поведение было обнаружено численно и при некоторых дробных резонансах $T = 4\pi \frac{p}{q}$, тогда как для полуполого резонанса $T = 2\pi$ движение оказалось строго периодическим. Подробное исследование квантового резонанса было проведено в /54/ (см. § 7). Для иррациональных значений T/π (мера которых по T равна единице) влияние резонансов оказывается несущественным (§ 7) и поэтому явление замедления диффузии требует отдельного исследования.

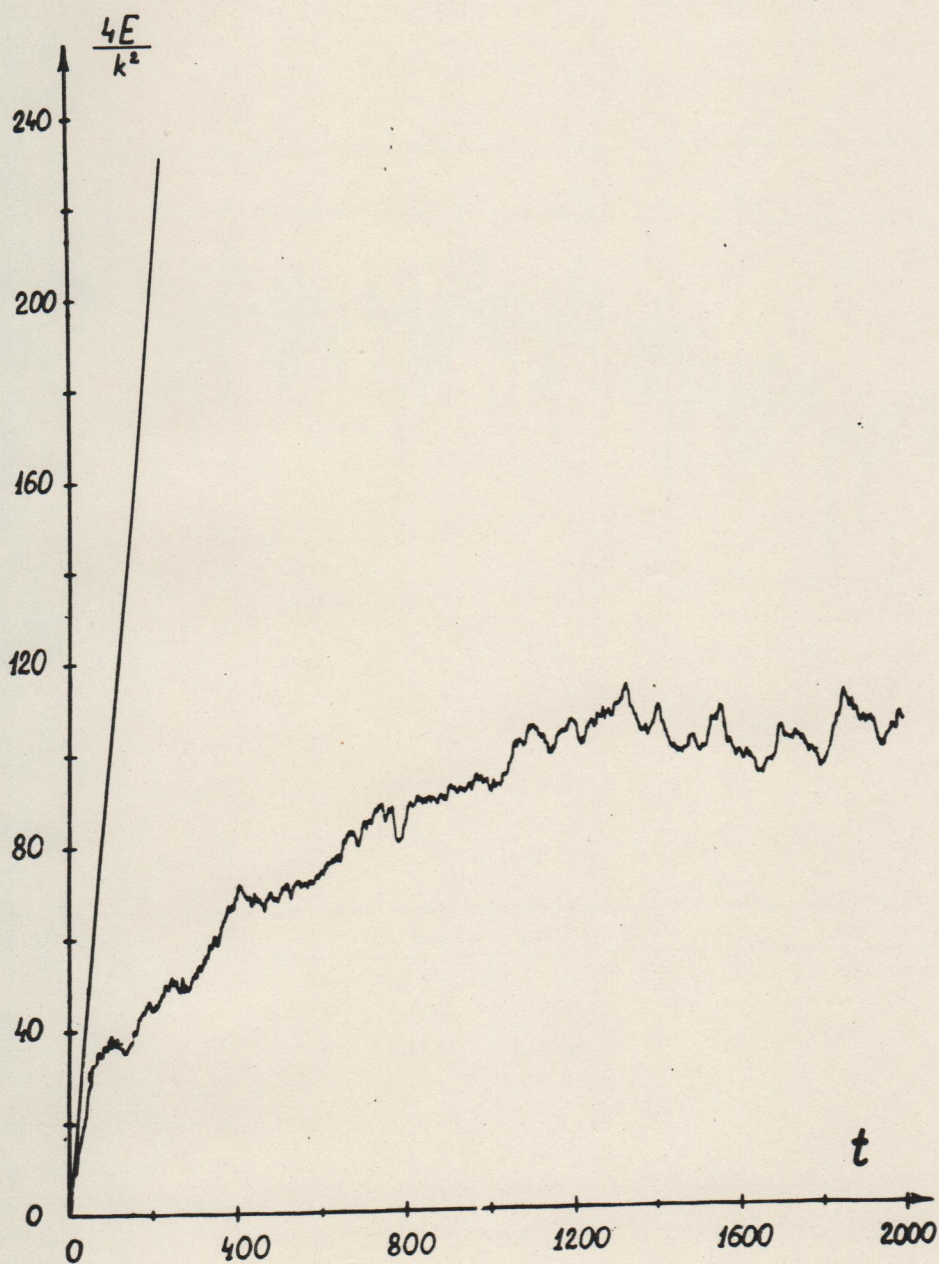


Рис. I. Зависимость энергии ротатора E от времени для системы (I.1) с $k = 20$; $T = 0,25$; $t = 2000$. Прямая линия соответствует классической диффузии (I.4), ломанная линия — численный результат для (I.1).

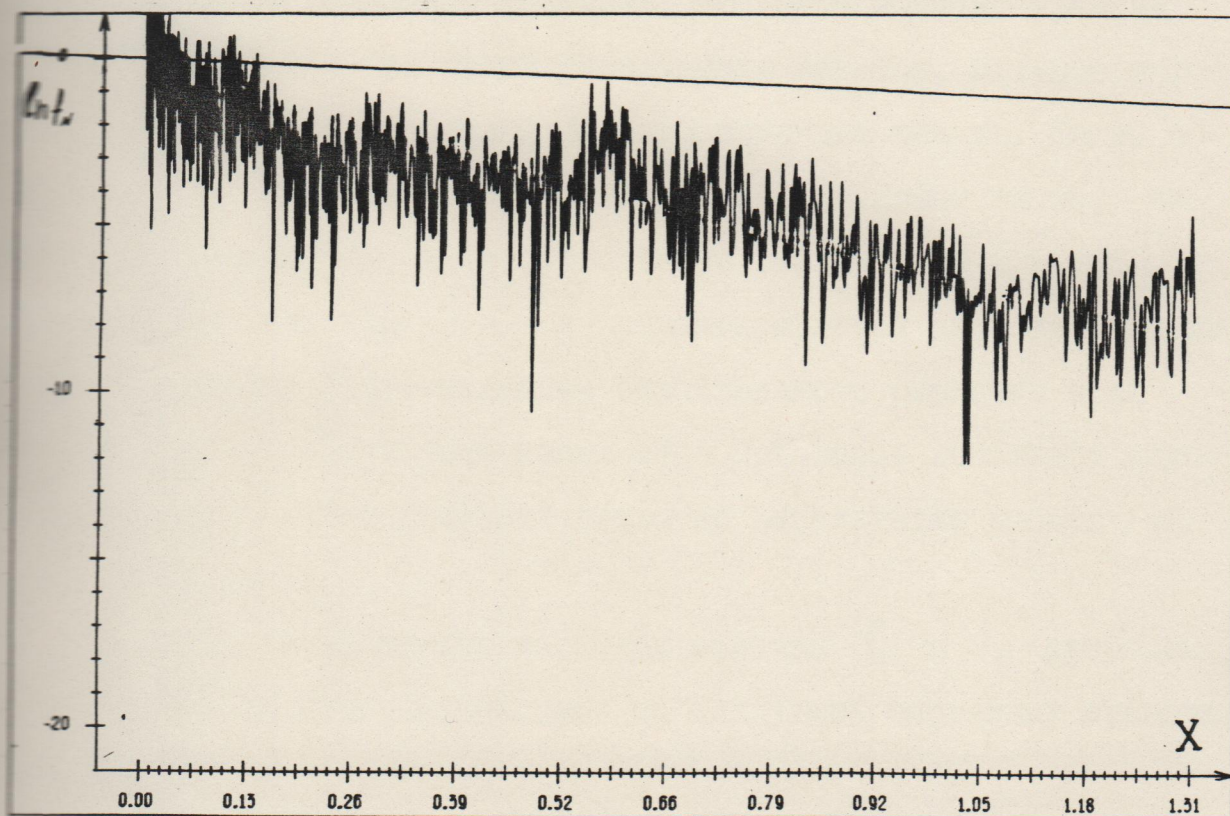


Рис. 2. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (1.1) в нормированных координатах (см. § I). Прямая соответствует классической функции распределения (1.5); ломаная линия — численный результат.

Таким образом, результаты исследований /49/ указывают на существенное отличие в поведении квантовой системы по сравнению с классической на достаточно больших временах ($t > t^*$). Специальные численные эксперименты показали, что этот масштаб времени значительно больше, чем время расплывания пакетов, которое в условиях экспериментов составляло всего один-два толчка. Таким образом результаты численного моделирования указывают на то, что введенные масштабы T_r и T_d существенно различаются ($T_r \ll T_d$), а движение системы при $t \ll T_d$ характеризуется классической диффузией. Косвенным подтверждением значительного различия этих масштабов служит отсутствие каких-либо признаков локальной неустойчивости квантового движения согласно результатам работы /49/ (см. также главу II).

Для того, чтобы понять масштабы величин T_r и T_d приведем некоторые оценки /40/, основанные на следующих наглядных представлениях.

Действительно, стохастичность классической системы приводит к экспоненциально быстрому расплыванию квазиклассического пакета (см. § 2), определяя тем самым введенный масштаб времени T_r , на котором квантовое движение может быть полностью случайным. Расплывание квантового пакета можно грубо оценить как расхождение пучка классических траекторий (при этом интерференционными членами можно пренебречь как будет показано ниже в § 2). Скорость расплывания пакета определяется при этом классической КС-энтропией системы h , следовательно, полное время расплывания t_s зависит от начальных размеров пакета: ΔX_0 - по фазе и Δp_0 - по импульсу (квантовому числу ротатора). Можно считать, что пакет полностью расплылся, когда его конечный размер $\Delta X \sim 1$ или когда $\Delta p \sim 1/T = k/K$, где $K = kT$ - классический параметр устойчивости системы (I.3).

Условие на $\Delta\rho$ вытекает из второго уравнения (I.3), так как при $\Delta\rho \cdot T \geq 1$ размер ΔX становится ≥ 1 на одном периоде возмущения. Учитывая, что из соотношения неопределенности $\Delta X_0 \geq \frac{1}{\Delta\rho_0}$, а $\Delta\rho_0 \geq 1$, найдем время полного расплывания по фазе $t_s^{(x)} \approx \frac{\ln(\Delta\rho_0)}{h}$ и по импульсу $t_s^{(p)} \approx \ln(k/K\Delta\rho_0)/h$. Фактически время расплывания пакета будет порядка наименьшего из $t_s^{(x)}$; $t_s^{(p)}$. Из условия $t_s^{(x)} \sim t_s^{(p)}$ найдем $\Delta\rho_0 \sim \sqrt{k/K}$, соответствующее наибольшему

$$t_s \sim \frac{\ln(k/K)}{2h} \quad (I.9)$$

Для типичных значений параметров модели ($k = 40; kT = 5$) $t_s \sim 1$ в соответствии с результатами численных экспериментов /49/. Масштаб (I.9) ($T_r \sim t_s$), вообще говоря, очень мал и слабо зависит от параметра квазиклассического приближения k .

Вместе с тем ограничение диффузии наблюдается лишь при $t \geq t^* \gg t_s$. Возможное объяснение явления ограничения диффузии состоит в том, что спектр квазиэнергий в этой незамкнутой системе, который в принципе может быть непрерывным, на самом деле оказывается дискретным, хотя, по-видимому, присутствие непрерывной компоненты также имеет место (§ 8). Предположим, однако, что спектр чисто дискретный со средним расстоянием Δ между соседними линиями. Из соотношения неопределенности между частотой и временем следует, что дискретность такого спектра будет проявляться только для $t \geq 1/\Delta$, тогда как при $t \leq 1/\Delta$ спектр можно считать квазинепрерывным, т.е. временная эволюция квантового состояния будет такой же, или близкой, как и при непрерывном спектре /59/. Но непрерывный спектр движения означает, в частности, перемешивание и диффузию. Поэтому можно попробовать отождествить по порядку величины границу дискретного режима T_d с диффу-

вонным масштабом времени t^* для квантовой модели (I.I):

$$T_d \sim t^* \sim 1/\Delta. \quad (I.I0)$$

Фактически сходная идея была высказана еще в работе /49/, однако, величина Δ связывалась там с невозмущенным спектром энергии ротатора. На самом деле Δ характеризует дискретность спектра квазиэнергий, который устанавливается в системе под действием возмущения.

Так как все уровни квазиэнергии расположены на ограниченном интервале (2π в нашем случае), то $1/\Delta \sim N_\psi$, где N_ψ — эффективное число собственных функций возмущенной системы, определяющих эволюцию заданного начального состояния $\Psi(x, 0)$. Поясним, что полное число собственных функций, а, следовательно, и полное число уровней квазиэнергии, бесконечно (если отвлечься от маловероятного бесконечного вырождения уровней). Однако каждое заданное состояние системы может эффективно представляться некоторым конечным числом собственных функций N_ψ .

Верхнюю границу для N_ψ можно оценить следующим образом. Согласно численным данным /49/ диффузия резко замедляется при $t > t^*$. Предположим, что диффузия в конце концов полностью прекращается. Это означает, что возмущение, действующее на свободный ротатор, связывает конечное число невозмущенных состояний, а именно такое число состояний, которое попадает в интервал диффузии $\Delta p(t^*)$ за время t^* (по порядку величины). Ясно, что таким же, по порядку величины, будет и максимальное число собственных функций, представляющих состояние системы в этом интервале Δp . Отсюда

$$N_\psi \sim \Delta p(t^*) \sim k\sqrt{t^*}. \quad (I.II)$$

Подставляя эту оценку в (I.I0), получим:

$$t^* \sim k^2 \sim D_{cl} \quad (I.12)$$

Эта оценка, по-видимому, не противоречит численным экспериментам, согласно которым среднее значение $\langle t^*/k^2 \rangle \approx 0.07$ (см. § 3).

Последняя оценка в (I.12) подчеркивает связь статистических характеристик квантового движения (в данном случае диффузионного масштаба t^*) со стохастичностью в классическом пределе, где скорость диффузии $D_{cl} \approx k^2/4$.

Сравнивая оценку для $t^* \sim T_d$ (I.12) с оценкой для масштаба расплывания $t_s \sim T_r$ (I.9), мы видим, что в квазиклассической области ($k \gg 1$) оба масштаба имеют, действительно, совершенно разный порядок ($T_r \ll T_d$), что подтверждает численные результаты /49/.

Более серьезный вопрос связан с ролью начальных условий в рассматриваемой задаче. Действительно, уже сам факт уменьшения скорости диффузии со временем показывает, что эта скорость, вообще говоря, зависит от начального состояния системы. С другой стороны среди нескольких сот начальных состояний, которые фактически использовались в численных экспериментах, не было ни одного со значительно меньшей, чем классическая, начальной скоростью диффузии. Это показывает, что начальные состояния с пониженной скоростью диффузии весьма специфичны. К такому же выводу можно прийти и по-другому. Оценка (I.1) дает полное число состояний в интервале $\Delta\rho(t^*)$. Тот факт, что наблюдаемое значение диффузионного масштаба t^* всегда более или менее соответствует этой оценке, показывает, что для широкого класса начальных условий действительно возбуждаются большинство из N_ψ собственных функций. Это означает, в свою очередь, что собственные функции обладают некоторым свойством, напоминающим эргодичность: проекции почти любого Ψ - вектора состояния на каждую

из собственных функций близки по величине. Ясно, что это не может быть справедливо для любой квантовой системы. Естественно связать такую эргодичность собственных функций со стохастичностью движения в классическом пределе. По-видимому, впервые такой подход был использован в работе /22/ (см. также /23/). Эти же соображения позволяют понять характер и специфику недиффузионных начальных состояний в стохастической области ($kT > 1$). Ясно, что такие состояния должны быть суперпозицией небольшого числа собственных функций (в пределе — одна единственная собственная функция). Отсюда следует также, что такое начальное состояние является очень специальной суперпозицией большого числа ($\sim \Delta p(t^*) \sim k^2$) состояний свободного ротатора.

Описанные представления о переходной (временной) стохастичности можно проверить с помощью видоизменения квантовой модели. В частности, можно поставить вопрос, нельзя ли выбрать такую (незамкнутую) квантовую систему, чтобы вообще избавиться от ограничения диффузии ($t^* \rightarrow \infty$). Оказывается, это действительно возможно! Чтобы понять, как надо изменить исходную квантовую модель, обратим внимание на следующую особенность механизма ограничения диффузии. Из сравнения (I.I0) и (I.II) видно, что ограничение диффузии происходит вследствие того, что число состояний в интервале диффузии $\Delta p(t) \sim k\sqrt{t}$ растет медленнее, чем диффузионный масштаб $T_d \sim t$. Отсюда естественно возникает идея сделать параметр возмущения k переменным, растущим со временем таким образом, чтобы $\Delta p(t)$ возрастало быстрее t . Правда, при этом возмущение ротатора становится аperiodическим и понятие квазиэнергии, строго говоря, теряет смысл. Однако можно рассматривать модель с переменным $k(t)$ как упрощенное представление модели с $k(n)$, зависящим от номера уровня свободного

ротатора и растущим со временем вследствие диффузии. Такая ситуация является, по-видимому, типичной для квантовой системы и связана с уменьшением среднего расстояния между уровнями энергии с ростом квантовых чисел (см. §§ 2-4).

Пусть, например,

$$k(t) = k_0 t^\alpha, \quad (I.13)$$

где α - некоторая постоянная. Тогда

$$\Delta p(t) \sim k_0 t^{\alpha+1/2} \quad (I.14)$$

и можно высказать предположение, что при $\alpha \geq 1/2$ диффузия будет продолжаться неограниченно. При $0 < \alpha < 1/2$ диффузионный масштаб также возрастает. Из (I.14) и (I.10) находим аналогично предыдущему

$$t^* \sim k_0^{1/(1/2 - \alpha)} \quad (I.15)$$

Результаты численных экспериментов с переменным $k(t)$, описанные ниже в § 3, действительно указывают на подобный эффект.

Другой более общий и более строгий метод оценки диффузионного масштаба T_d состоит в использовании квазиклассического приближения для расчета временной эволюции квантового состояния и обсуждается в следующем параграфе.

§ 2. Границы применимости квазиклассического приближения для стохастических квантовых систем

Численные эксперименты, описанные в § I показали, что в квазиклассической области при $kT > 1$ по крайней мере в течение некоторого времени отдельные статистические характеристики квантовой системы (I.1) оказываются близкими к классическим. Покажем, что этот результат может быть получен в квазиклассическом прибли-

Для этого воспользуемся отображением (I.6), которое удобно представить в виде:

$$\bar{\Psi}(x) = (2\pi i T)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x_1) \exp(-ik \cos x_1 + i \frac{(x-x_1)^2}{2T}) dx_1. \quad (2.1)$$

Ввиду периодичности $\Psi(x)$ с периодом 2π $\bar{\Psi}(x)$ также периодична и нормирована на период $\int_0^{2\pi} |\bar{\Psi}(x)|^2 dx = 1$. Из (2.1) получаем выражение для Ψ в момент времени t :

$$\Psi(x, t) = (2\pi i T)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_0) \exp(i S(x, x_{t-1}, \dots, x_0)) dx_0 \dots dx_{t-1}, \quad (2.2)$$

где $S(x, x_{t-1}, \dots, x_0) = \frac{(x-x_{t-1})^2}{2T} - k \cos x_{t-1} + \dots + \frac{(x_1-x_0)^2}{2T} - k \cos x_0 + S_0(x_0)$, $\Psi(x, 0) = \varphi_0(x_0) \exp(i S_0(x_0))$.

В дальнейшем нас будет интересовать квазиклассика в области стохастичности, что соответствует $k \gg 1$ (число квантов в толчке велико), $T \ll 1$, $kT \gg 1$. В этом случае t -мерный интеграл вычисляется методом стационарной фазы /60/:

$$\Psi(x, t) = \sum_{\ell=1}^N |J_{\ell}|^{-1/2} \exp[i S_{\ell}(x) + i \frac{\pi}{4} \mu_{\ell} - i \frac{\pi}{4} t] \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{L}_{\ell}^m [\varphi_0(x_0) \exp(i \tilde{S})] \Big|_{\vec{x} = \vec{x}^{\ell}} \right\}, \quad (2.3)$$

где $\vec{x} = \vec{x}^{\ell}$ - стационарная точка в t -мерном пространстве, являющаяся решением системы уравнений

$$\frac{\partial S(x, x_{t-1}, \dots, x_0)}{\partial x_i} = 0; \quad i = 0, \dots, t-1;$$

N - полное число стационарных точек; $H_{ij}^{\ell}(x) = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{x} = \vec{x}^{\ell}}$

$$= \frac{1}{T} \left\{ (-1 + T \frac{\partial^2 S_0(x_0)}{\partial x_0^2}) \delta_{i,0} + (2 + kT \cos x_i) \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} \right\} \Big|_{x_i = x_i^{\ell}};$$

$J_{\ell}(x) = \det(T H_{ij}^{\ell}(x))$; $\hat{L}_{\ell} = \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{t-1} (H_{ij}^{\ell})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$; $\mu_{\ell} = \text{sign } H^{\ell}$;

$$\tilde{S} = S - S_\ell - \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{t-1} H_{ij}^\ell (x_i - x_i^\ell)(x_j - x_j^\ell)$$

Из системы уравнений для $S(x, x_{t-1}, \dots, x_0)$ и (I.3) следует, что стационарной точкой \vec{x}^ℓ являются координаты классической траектории системы (I.3) в моменты времени i ($0 \leq i \leq t-1$), удовлетворяющей условиям

$$x = x(x_0, t), \quad \rho(x_0, 0) = \frac{\partial S_0(x_0)}{\partial x_0} \quad (2.4)$$

Число решений (2.4) равно числу стационарных точек N , соответствующих различным траекториям $x^\ell(x_0, t)$ из начального распределения $\rho(x_0, 0)$, приходящим в момент времени t в точку X с различными импульсами. Для стохастических систем в силу локальной неустойчивости траекторий число членов в сумме (2.3) N и якобиан $J_\ell(x) = \frac{\partial x^\ell(x_0, t)}{\partial x_0}$ (см. /I-4/) растут экспоненциально со временем $N \sim \exp(ht)$, $J_\ell \sim \exp(ht)$, где h - КС - энтропия.

Из (2.3) видно, что квазиклассическое разложение несправедливо вблизи вырожденных стационарных точек, в которых $J_\ell(x) = 0$. В этом случае волновая функция в точке X имеет каустическую (фактически каустика находится на ℓ -ой траектории, при этом $\partial \rho_\ell(x, t) / \partial x = \infty$). Но даже при наличии q вырожденных стационарных точек в (2.3) наряду с этим в X имеется $N - q$ квазиклассических членов. Со временем q , также как и N , растет экспоненциально, но так как размер каустики конечен ($\sim k^{-2/3}$) и они распределены по X более или менее равномерно, то $q \sim \sim k^{-2/3} N \ll N$. Отметим также, что высота пика по амплитуде вблизи вырожденной точки экспоненциально уменьшается со временем ($\sim k^{1/6} \exp(-ht)$). Это ясно уже из того, что через один

наг вырожденная стационарная точка возникает из какого-то квазиклассического члена суммы (2.3) имеющего экспоненциально малую предэкспоненту. Таким образом, в произвольную точку x через время $t > t_{\text{cau}} \sim \ln(k^{2/3})/h$ будет приходить $q \sim k^{-2/3}$ -exp(ht) классических траекторий, имеющих каустики, в нее же будет приходить гораздо большее число классических траекторий $N - q \sim \exp(ht)$. Из (2.2), (2.3) видно, что основной вклад в t -мерный интеграл дают области $\Delta V \sim k^{-t/2}$, откуда следует, что стационарные точки являются хорошо изолированными. На основе сказанного, в отличие от /21/, приходим к выводу о том, что влияние каустик на всех временах является малым и им можно пренебречь. Этот результат подтверждается проведенными численными экспериментами (см. § 3).

Считая квантовые поправки к основному квазиклассическому члену ($m=0$) в (2.3) малыми, найдем зависимость энергии ротатора от времени $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx$. Основной вклад в энергию дает дифференцирование действия S_ℓ в экспоненте. Дифференцирование предэкспоненты и сдвига в фазе μ_ℓ дает не нарастающие со временем поправочные члены порядка k^{-1} от основного вклада:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \sum_{\ell, \ell_1=1}^N p_\ell(x) p_{\ell_1}(x) \left| \mathcal{J}_\ell \mathcal{J}_{\ell_1} \right|^{-1/2} \right. \quad (2.5)$$

$$\left. \cdot \exp \left[i \left(S_\ell(x) - S_{\ell_1}(x) + \frac{\pi}{4} (\mu_\ell - \mu_{\ell_1}) \right) \right] \varphi_0^\ell(x_0^\ell(x,t)) \varphi_0^{\ell_1}(x_0^{\ell_1}(x,t)) \right\},$$

где $p_\ell(x) = \partial S_\ell(x) / \partial x$ - классический импульс вдоль ℓ -ой траектории, приходящий в точку x , $x_0^\ell(x,t)$ - начальная точка ℓ -ой траектории как функция конечной. Оценим вклад от интерференционных членов с $\ell \neq \ell_1$ 2π . Их число $N_{\text{int}} \sim N^2$, а величина каждого члена $RQ \sim \mathcal{J}^{-1} \int_0^{2\pi} dx \exp(i(S_\ell(x) - S_{\ell_1}(x))) = \mathcal{J}^{-1} I_{\ell\ell_1}$. Так как классическая система является стохастической, то интер-

интерференционный вклад \sum_{int} дается суммой N_{int} случайных величин с амплитудой $|RQ|$. В том случае, когда условие стационарной фазы в интеграле $I_{\ell\ell_1}$ не выполнено ($p_\ell - p_{\ell_1} = \Delta_{\ell\ell_1} \gg \Delta_0 \sim \hbar$), его величина оказывается экспоненциально малой $I_{\ell\ell_1} \propto O(e^{-k})$. Поэтому вклад таких членов в \sum_{int} оказывается $\sim N_{\text{int}}^{1/2} J^{-1} I_{\ell\ell_1} \sim I_{\ell\ell_1} \propto O(e^{-k})$ и им можно пренебречь. Таким образом, величина \sum_{int} определяется членами с $p_\ell - p_{\ell_1} = \Delta_{\ell\ell_1} \lesssim \Delta_0 \sim \hbar$, т.е. областями с $\Delta \ell \sim \Delta_0 N$. Вклад каждой области $\sim [(\Delta_0 N)^2]^{1/2} J^{-1} \sim \Delta_0$ так как в области $I_{\ell\ell_1} \sim 1$, а фаза всех интерферирующих членов случайна. Число таких областей $\sim \Delta_0^{-1}$ и поскольку их вклад статистически независим, то $\sum_{\text{int}} \sim \Delta_0 \Delta_0^{-1/2} \sim \hbar^{1/2}$. Следовательно интерференционными членами с $\ell \neq \ell_1$ в (2.5) можно пренебречь и остается только сумма по $\ell = \ell_1$, дающая классическое значение энергии.

Таким образом для определения времен, на которых характеристики квантовой задачи совпадают с классическими с точностью до $O(k^{-1})$ в относительной величине, надо исследовать на каких временах остаются малыми члены с $m \neq 0$ в (2.3) по сравнению с основным квазиклассическим членом ($m = 0$). Заметим, что при $kT \gg 1$ величина элементов матрицы $(H^\ell)^{-1}$ легко оценивается прямо из ее явного вида: $(H^\ell)^{-1}_{i,i+m} \sim (kT)^{-m-1}$. Найдем вначале поправку $\delta_1 \sim k^{-1}$ к слагаемому с $m = 0$ в (2.3) с точностью до членов $(kT)^{-1}$, при этом будем учитывать действие \hat{L}_ℓ только на $\exp(i\tilde{S})$, т.к. это дает поправки наиболее быстрорастущие со временем. Поправки, не нарастающие со временем, оказываются малыми при $k \gg 1$, $T \ll 1$. Сумму по m представим в виде:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{L}_\ell^m [\varphi_0(x_0) \exp(i\tilde{S})] \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_\ell} \approx \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(\ell)} \varphi_0, \quad (2.6)$$

где $\delta_0 = 1$, $\delta_{j+1} \sim \delta_j/k$.

Вычисления приводят к следующему выражению для δ_1 (в него да-
ет вклад члены с $m = 2; 3$):

$$\delta_1^{(l)} = \frac{i}{8} \sum_{j=0}^t \frac{3 \cos^2 x_j^l + 5 \sin^2 x_j^l}{3k \cos^3 x_j^l} + O\left(\frac{1}{kT}\right). \quad (2.7)$$

Отметим, что расходимость в знаменателе возникает при нали-
чии каустики в точке x ($J_e(x) = 0$), но т.к. влияние каустик
мало, то при суммировании по всем N траекториям вклад от этих
расходимостей также будет мал. В силу случайности классической
траектории сумма по j растет как $t^{1/2}$ и следовательно в
среднем по времени

$$\delta_1 \sim i\alpha \frac{t^{1/2}}{k}, \quad (2.8)$$

где численный коэффициент $\alpha \sim 1$. Заметим, что следующие члены
по $(kT)^{-1}$ в выражении для δ_1 растут не быстрее $t^{1/2}$ и поэто-
му ими можно пренебречь. Анализ следующих членов разложения по
 k^{-1} показывает, что $\delta_j \sim (t/k^2)^{j/2}$. Таким образом,
на временах

$$t \ll t_0 \sim k^2 \quad (2.9)$$

квантовые поправки малы и характеристики квантовой системы совпа-
дают с классическими с точностью до $O(k^{-1})$. Надо однако под-
черкнуть, что величины экспоненциально уменьшающиеся в классике,
например, разновременные корреляторы, за время $\sim t_s$ становятся
порядка $O(k^{-1})$ и для их дальнейшего вычисления требуется
учет квантовых поправок (см. §§ 5,6).

На временах $t \sim t_0$ все поправки $\delta_j \sim 1$ и квазиклас-
сическое приближение становится неприменимым. Таким образом,
естественно ожидать, что со времен $t \geq t_0$ характеристики