квантовой задачи, например энергия ротатора, будут существенно отклоняться от своих классических значений. Исходя из этого можно дать оценку для времени t^*, с которого начинается ограничение диффузии по энергии:

$$t^* \sim t_0 \sim k^2 \qquad (2.I0)$$

Эта оценка совпадает с оценкой (I.I2), полученной выше другим методом. Следует однако отметить, что, строго говоря, из полученных теоретических оценок § 2 можно получить только ограничение на время $t^*: t^* \gtrsim t_0$. Так в ряде случаев, которые в дальнейшем будут обсуждаться особо (§ 9), время $t^* \gg t_0$. Дополнительные эксперименты (§ 3) проведенные с моделью (I.I) согласуются с оценкой (2.I0).

Отметим, что в рассматриваемой системе (I.I) параметры квазиклассического приближения k, T не зависят от номера уровня n, и поэтому диффузия вверх по уровням не улучшает квазиклассического приближения. Вместе с тем во многих системах с увеличением n это приближение улучшается (см. ниже). Можно поэтому ожидать, что при достаточно быстрой диффузии квантовые поправки в таких системах будут нарастать значительно медленнее, чем в (I.I).

В качестве примера рассмотрим систему с гамильтонианом (I.I), в котором k степенным образом зависит от времени: $k(t) = k_0 t^\alpha$ (см. § I). Как правило, k является растущей функцией действия $k = k(I)$, а следовательно и времени, так как при наличии стохастичности I растет со временем, что и отражено в выбранной модели, удобной также для численного исследования. Тем не менее надо отметить, что в системах с $k = k(I)$ ситуация оказывается более сложной (см. § 4) и поэтому эту модель следует рассматривать лишь как грубый пример.

При $k_0 T > 1$ переменная x уже после нескольких толчков становится случайной и среднее изменение p за один толчок равно

$$<|\Delta p(t)|^2> = k_0^2 t^{2\alpha} < \sin^2 x(t) > = \frac{k_0^2 t^{2\alpha}}{2} .$$

Отсюда находим закон диффузионного роста энергии $(<\Delta p> = 0)$:

$$E(t) \approx \frac{k_0^2}{4(1+2\alpha)} t^{1+2\alpha} + E(0) . \qquad (2.II)$$

Выражение для δ_1 получается таким же как и (2.7), но теперь уже с $k = k(j)$. В среднем $|\delta_1|^2$ растет как

$$<|\delta_1|^2> \sim \sum_{j=0}^{t} \frac{1}{k^2(j)} \approx \frac{t^{1-2\alpha}}{k_0^2(1-2\alpha)} . \qquad (2.I2)$$

Из (2.I2) следует, что при $\alpha > 1/2$ поправки всегда малы и зависимость энергии от времени описывается (2.II) на всех временах, что также совпадает с выводом, полученным в § I.

Граничным значением является $\alpha > 1/2$. В этом случае диффузионный масштаб $t^* \sim t_0 \sim exp(k_0^2)$. При $0 \leqslant \alpha < 1/2$ квазиклассическое приближение справедливо для

$$t \leqslant t_0 \sim \left[k_0^2(1-2\alpha)\right]^{1/(1-2\alpha)} \qquad (2.I3)$$

и в течение этого времени происходит рост энергии по классическому закону. Последняя оценка отличается от оценки (I.I5) множителем $(1-2\alpha)$, который, однако, является существенным только для $\alpha \approx 1/2$.

Рассмотрим теперь как в более общем случае, используя результаты Маслова /5I,52/, можно определить масштаб времени, на котором применимо квазиклассическое приближение для СКС.

Пусть классическая система описывается гамильтонианом

$H = H_0(J) + \varepsilon V(J, x, \tau)$, где J, x – действие и фаза невозмущенной задачи, $\varepsilon \ll 1$. В этом случае для исследования квантовых поправок достаточно ограничиться разложением H вблизи начального J_0 вплоть до членов $(\Delta J)^2$. При $J_0/\hbar \gg 1$ стандартное квантование /I2,I4/ приводит к гамильтониану:

$$H = \omega \hat{I} + \gamma \hat{I}^2 + \varepsilon \Big[V(J_0, x, \tau) + \\ + \frac{1}{2}\big(\hat{I} V_1(x,\tau) + V_1(x,\tau)\hat{I}\big) + \frac{1}{2} \hat{I} V_2(x,\tau) \hat{I} \Big] , \tag{2.I4}$$

где

$$\omega = \left.\frac{dH_0}{dJ}\right|_{J=J_0}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left.\frac{d\omega}{dJ}\right|_{J=J_0}, \quad V_1 = \left.\frac{dV}{dJ}\right|_{J=J_0},$$

$$V_2 = \left.\frac{d^2V}{dJ^2}\right|_{J=J_0}, \quad I = J - J_0 , \quad \hat{I} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} .$$

Следуя /5I,52/, получим асимптотическое квазиклассическое разложение для волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера с гамильтонианом (2.I4) и начальным условием $\psi(x, \tau = 0) = \varphi_0(x) \exp(iS_0(x)/\hbar)$:

$$\psi(x,\tau) = \sum_{\ell=1}^{N} |\mathcal{J}_\ell|^{-1/2} \exp\Big(\frac{i}{\hbar} S_\ell(x,\tau) - i\frac{\pi}{2}\mu_\ell\Big) \cdot \\ \cdot \Big\{ \sum_{m=0}^{\infty} \Big[\hat{L}_\ell^m \varphi_0(x_0)\Big]\Big|_{x_0 = x_0^\ell(x,\tau)} \Big\} , \tag{2.I5}$$

где суммирование по ℓ проводится по всем классическим траекториям, приходящим в точку x в момент времени τ и удовлетворяющим начальным условиям:

$$x_0(x,\tau) = x_0^\ell ; \quad I_0(x_0) = \left.\frac{\partial S}{\partial x_0}\right|_{x_0 = x_0^\ell} ;$$

$$\mathcal{J}_\ell = \left.\frac{\partial x(x_0,\tau)}{\partial x_0}\right|_{x_0 = x_0^\ell} .$$

$S_\ell(x,\tau)$ – действие вдоль классической траектории, соединяющей x_0^ℓ и x ; μ_ℓ – индекс Морса, а оператор $\hat{L}_\ell$ определяется посредством

$$\hat{L}_\ell \varphi_0(x_0) = i\hbar \int_0^\tau \Big\{ (\gamma + \frac{\varepsilon}{2} V_2) |J_\ell|^{1/2} (J_\ell^{-1} \frac{\partial}{\partial x_0})^2 (|J_\ell|^{-1/2} \varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} |J_\ell|^{-3/2} \frac{\partial V_2}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} (|J_\ell|^{-1/2} \varphi_0) \Big\} d\tau \quad (2.16)$$

Сумма по m есть фактически разложение по степеням $\hbar$. Основная квантовая поправка дается членом с $m = 1$, т.е. выражением (2.16). С точностью до членов, не нарастающих со временем, для ее вычисления достаточно дифференцировать только якобиан $J_\ell(x_0)$. Определим квантовую поправку $\delta_1^{(\ell)}$ равенством: $\hat{L}_\ell \varphi_0 \approx \approx \delta_1^{(\ell)} \varphi_0$. Тогда из (2.16) находим

$$|\delta_1^{(\ell)}| = \left| i\hbar \int_0^\tau \Big\{ (\gamma + \frac{\varepsilon}{2} V_2) \Big[\frac{5}{4} J_\ell^{-4} (\frac{\partial J_\ell}{\partial x_0})^2 - \frac{1}{2} J_\ell^{-3} \frac{\partial^2 J_\ell}{\partial x_0^2} \Big] - \frac{\varepsilon}{4} J_\ell^{-3} \frac{\partial V_2}{\partial x_0} \frac{\partial J_\ell}{\partial x_0} \Big\} d\tau \right| \ll 1 \quad (2.17)$$

Последнее неравенство и есть условие применимости квазиклассического приближения. При этом интеграл по времени в (2.17) следует понимать в смысле разности первообразных в моменты времени τ и 0. Так как в промежуточные моменты времени J_ℓ может обращаться в ноль (прохождение каустики), то результат интегрирования не является знакоопределенным. Поскольку $J_\ell \sim \exp(h\tau)$; $\frac{\partial J_\ell}{\partial x_0} \sim \exp(2h\tau)$; $\frac{\partial^2 J_\ell}{\partial x_0} \sim \exp(3h\tau)$, то δ_1 растет не быстрее τ и таким образом квазиклассическое приближение применимо на временах $t_0 \propto 1/\hbar$.

Рассмотрим теперь специальный вид возмущения: $\varepsilon V(I,x) g(\tau)$, где $g(\tau)$ имеет вид толчков, действующих в течение времени T_0 и следующих друг за другом с интервалом $T (T \gg T_0)$. Пусть изменение действия за время толчка равно ΔI и выполнен критерий стохастичности $K \approx \gamma T \Delta I \gg 1$ /4,6,36/. Разбивая интеграл в (2.17) на сумму интегралов по интервалам $T+T_0$ и учитывая, что члены суммы статистически независимы из-за стохастичности классической системы, а $J(Tt+T_0+\tau) \sim J(Tt+T_0)(1+K\frac{\tau}{T_1})$;

$\frac{\partial^n \mathcal{J}}{\partial x_0^n} \sim \mathcal{J}^{n+1}(Tt+T_0)\cdot(1+K\frac{\tau}{T})$, получим, что $\delta_1^{(\ell)}$ в среднем растет по закону

$$<|\delta_1^{(\ell)}|^2> \sim \hbar^2 \sum_{j=0}^{t} \left(\frac{1}{\overline{\Delta I_\ell(j)}} + \gamma^{(\ell)} T_0\right)^2 \quad , \qquad (2.I8)$$

где $\overline{\Delta I_\ell(j)} = <(\Delta I_\ell(j))^2>^{1/2}$ – изменение действия за толчок, усредненное по случайной переменной x . Так как $\Delta I \sim \varepsilon$, то членами εV_2 в (2.I7) можно пренебречь.

Вычислим, в качестве примера, квантовую поправку для системы (I.I), используя (2.I7). Согласно (I.2), (I.3) получаем выражение для $p(\tau)$, $x(\tau)$ на интервале между соседними толчками ($\hbar$ = 1):

$$p(\tau) = p_t + k\sin x_t \quad ,$$
$$x(\tau) = x_t + p_t\tau + k\tau\sin x_t \, , \qquad (2.I9)$$

где p_t , x_t – значение переменных непосредственно перед последним толчком. Из (I.3) следует соотношение:

$$\frac{\partial x_t}{\partial x_0} = (kT)^{t-1}\cos x_{t-1}\cos x_{t-2}\ldots\cos x_0 + O(\frac{1}{kT}) \, ,$$

согласно которому имеем

$$\frac{\partial x(\tau)}{\partial x_0} = \frac{\partial x_t}{\partial x_0}(1+k\tau\cos x_t) + O(\frac{1}{kT}) \, ;$$

$$\frac{\partial^2 x(\tau)}{\partial x_0^2} = -(\frac{\partial x_t}{\partial x_0})^2 k\tau\sin x_t + O(\frac{1}{kT}) ;$$

$$\frac{\partial^3 x(\tau)}{\partial x_0^3} = -(\frac{\partial x_t}{\partial x_0})^3 k\tau\cos x_t + O(\frac{1}{kT}) \, .$$

Разбивая интеграл в (2.I7) на сумму интегралов от t до $t+1$, получим

$$\delta_1^{(\ell)} = \frac{i}{2}\sum_{j=0}^{t}\int_0^T\Big\{\frac{5}{4}\,\frac{(k\tau)^2\sin^2 x_j^\ell}{(1+k\tau\cos x_j^\ell)^4} +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{k\tau\cos x_j^\ell}{(1+k\tau\cos x_j^\ell)^3}\Big\}d\tau + O(\frac{1}{kT}) \quad .$$

После интегрирования получаем выражение (2.7) и далее (2.8).

Можно показать, что и для непрерывной классической системы сохраняются соотношения $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_0} \sim \mathcal{J}^2$; $\frac{\partial^n \mathcal{J}}{\partial x_0^n} \sim \mathcal{J}^{n+1}$. Тогда интеграл в (2.I7) можно разбить на сумму интегралов по интервалам времени $\Delta\tau \sim 1/h$, которые уже будут статистически независимыми, и, таким образом получим

$$|\delta_1^{(\ell)}|^2 \sim \hbar^2 \int_0^\tau (\gamma^{(\ell)}/h)^2 h d\tau \ll 1 \quad . \tag{2.20}$$

При $\gamma = const$ (2.20) дает $\delta_1 \sim \frac{\hbar\gamma}{h}(h\tau)^{1/2}$. Так, например, если

$$H = \gamma \frac{I^2}{2} + k \sum_{m=-M}^{M} \cos(x + m\Omega\tau + \varphi_m) \ ,$$

где φ_m – набор случайных фаз и $M \gg s = (k\gamma)^{1/2}/\Omega \gg 1$, то $h \sim \Omega s^{4/3}$ /3/ и диффузионный масштаб $\tau^* \sim \tau_0 \sim h/(\hbar^2\gamma^2)$.

Таким образом для широкого класса систем удается выяснить условия применимости квазиклассического приближения. Вместе с тем задача об особенностях квантовой динамики на больших временах требует дальнейшего исследования.

§ 3. Численные эксперименты

Для проверки полученных результатов проводилось численное исследование модели (I.I). При решении уравнения Шредингера использовалось то, что действие толчка сводится к умножению волновой функции на $exp(-iV(x))$. Затем при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ) находились ее фурье-компоненты A_n, для которых свободное вращение давало сдвиг в фазе $-i\frac{Tn^2}{2}$. По полученным значениям A_n путем БПФ находилась волновая функция и т.д. При этом число уровней достигало N_L = 4097 (-2048, 2048), но ввиду симметрии начальных условий $\psi(x) = \psi(-x)$ и гамильтониана (I.I) счет фактически велся с 2049 уровнями.

Контроль за точностью счета заключался в проверке совпадения результатов (до I%) при изменении N_L в два раза и малой населенности $|A_n|^2$ верхних уровней. Кроме того, был проведен проверочный счет на совпадение (до 10^{-7}) результатов с /49/ при одинаковых условиях. Основное ограничение на длительность счета накладывает конечность выбранного числа уровней. При достаточно большом возмущении, особенно при $k=k(t)$, происходит быстрое возбуждение высоких уровней системы и ошибки счета становятся значительными. Время счета на БЭСМ-6 в типичных экспериментах (N_L = I025, t = 300) составляло I0 мин.

Начальные условия варьировались в широких пределах (см. § I). Существенной зависимости от начальных условий не наблюдалось. При обработке результатов счета вычислялась энергия ротатора $E=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n^2|A_n|^2$ и одновременно строились графики зависимости энергии от времени и функции распределения $f(n)$ в нормированных координатах:

$$X=\frac{n^2(1+2\alpha)}{k_0^2 t^{1+2\alpha}}, \quad f_N(n)=|A_n|^2\sqrt{\frac{\pi k_0^2}{(1+2\alpha)}t^{1+2\alpha}}. \qquad (3.I)$$

Чтобы проверить существенно ли влияние каустик и островков устойчивости /6/ при квантовом рассмотрении, была исследована система, которая не имеет каустик и в которой мера устойчивой компоненты (островков) строго равна нулю /I/. Это модель того же ротатора, но с другим внешним возмущением по X:

$$V(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{(x-\pi)^2}{2}-\dfrac{\pi^2}{4}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}; \qquad (3.2)$$

$$V(x)=V(x+2\pi)\,; \quad V(x)=V(-x).$$

Классическую динамику системы можно описывать отображением, аналогичным (I.3):

$$\bar{p} = p - k\frac{\partial V}{\partial x}\ , \quad \bar{x} = x + T\bar{p}\ . \tag{3.3}$$

При $kT > 4$ движение становится полностью стохастическим и энергия растет по диффузионному закону:

$$E(t) = \frac{\pi^3 k^2}{12}t + E(0)\ . \tag{3.4}$$

Исследование квантовой задачи (3.2) показало, что качественное поведение системы остается таким же как и в системе (I.I) - начиная с некоторого времени t^* скорость диффузии по энергии резко падает. Это качественная неизменность движения указывает на то, что замедление диффузии не связано с наличием каустик и островков устойчивости. Отметим, что в отличии от (I.I) фурье-спектр толчка $exp(-ikV(x))$ спадает всего лишь степенным образом $\sim n^{-3}$. (здесь оказалось незаменимым БПФ) и уже один толчок связывает практически все уровни, в то время как в (I.I) один толчок захватывает с экспоненциальной точностью $\approx 2k$ уровней.

Для системы (I.I) было проведено сравнение более тонких характеристик классической и квантовой задач, а именно - зависимости коэффициента диффузии D на временах меньших t^* от параметра kT (для классической системы этот вопрос изучался в /6/, /6I/). Результаты экспериментов (см.рис.3) указывают на хорошее согласие зависимостей $D(kT)$ для классического (данные работы /6I/) и квантового случаев (начальные условия в квантовой системе - основное состояние с $n = 0$). Для квантовой модели наблюдаются такие же осцилляции D и с тем же периодом, что и в классике.

Для проверки теоретических предсказаний, изложенных в §§I,2, был проведен ряд дополнительных численных экспериментов для мо-

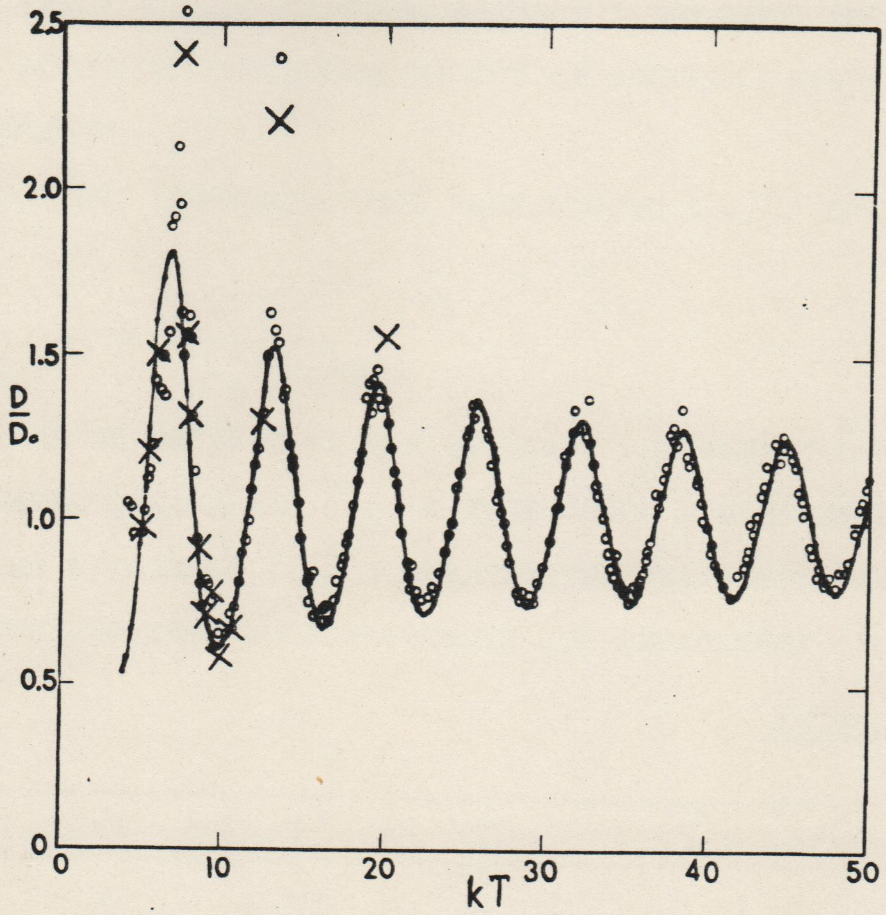

Рис.3. Зависимость коэффициента D от параметра kT :
о – экспериментальные значения для классической системы (I.2), гладкая кривая – теоретическая зависимость для (I.2), взяты из работы /6I/; х – экспериментальные значения для квантовой системы (I.I) с $k \approx 40$; $D_0 = k^2/4$.

дели ротатора (I.I) с $k = \text{const}$ и $k(t) = k_0 t^\alpha$.

По численным данным определялось время t^*, в течение которого диффузия близка к классической. При этом за значение t^* принимался такой момент времени, начиная с которого энергия квантового ротатора отличалась на 25% от значения энергии в классическом пределе.

Для проверки функциональной зависимости (2.I2) вычислялась величина

$$\delta = \left[\frac{(t^*)^{1-2\alpha}}{k_0^2(1-2\alpha)}\right]^{1/2} . \qquad (3.5)$$

Экспериментальные результаты для среднего значения $\langle\delta\rangle$, среднеквадратичного отклонения σ_δ и диапазонов изменения параметров приведены в таблице I. Эти результаты показывают, что в согласии с теоретическими предсказаниями при увеличении k и с

Таблица I

kT	k	α	t^*	δ	$\langle\delta\rangle$	$\sigma_\delta/\langle\delta\rangle$
5-36	5-80	0	5-320	0,I4-0,50	0,27	0,32
5-I0	5-I0	0,I-0,35	40-500	0,53-I,7	I,I	0,3I

ростом α время t^* резко возрастает. При $k = \text{const}$ зависимость t^* от k можно аппроксимировать степенным законом $t^* = Ck^\beta$. Подгонка по методу наименьших квадратов дает: $\langle \lg C\rangle = -0.44$, $\langle\beta\rangle = $ I.5. Теоретическая зависимость

$$t^* = Ck^2 \qquad (3.6)$$

(см. (I.I2), (2.I0), (3,5), $C = \delta^2$) оказывается в пределах разброса экспериментальных данных с $\langle \lg C\rangle = -$ I.I9 (см.рис.4). К сожалению, более точной проверки функциональной зависимости (2.I2) провести не удается из-за ограниченности числа уровней

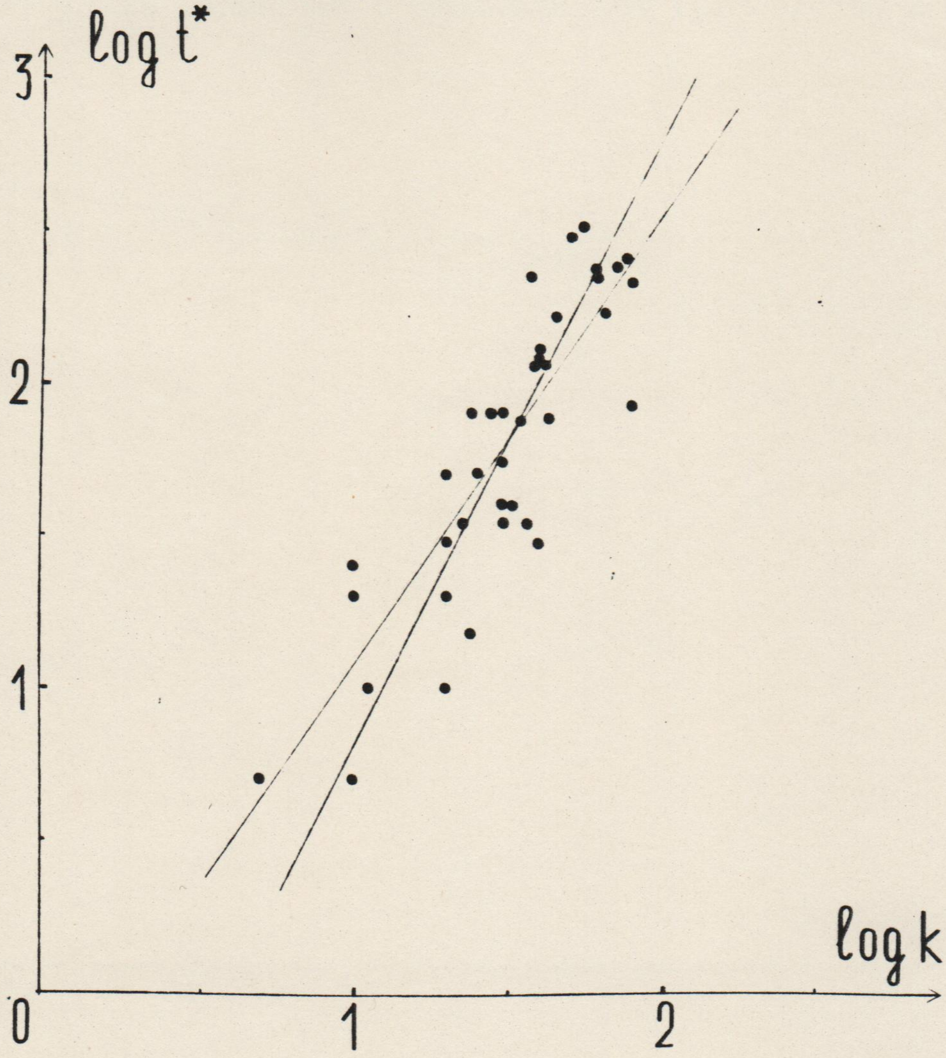

Рис.4. Зависимость времени квантового ограничения диффузии t^* от параметра k . Точки - экспериментальные значения, две прямые линии соответствуют линейной интерполяции (наклон β = I.5) и теоретической формуле (3.6) (наклон β = 2); логарифм десятичный.

модели и резкого возрастания времени счета при увеличении k и α. Замедление роста энергии удается отчетливо наблюдать лишь для $\alpha < 0{,}35$. Важно отметить, что при $\alpha \geqslant 0{,}35$ не только закон диффузии совпадает с классическим (рис.5), но и функ-

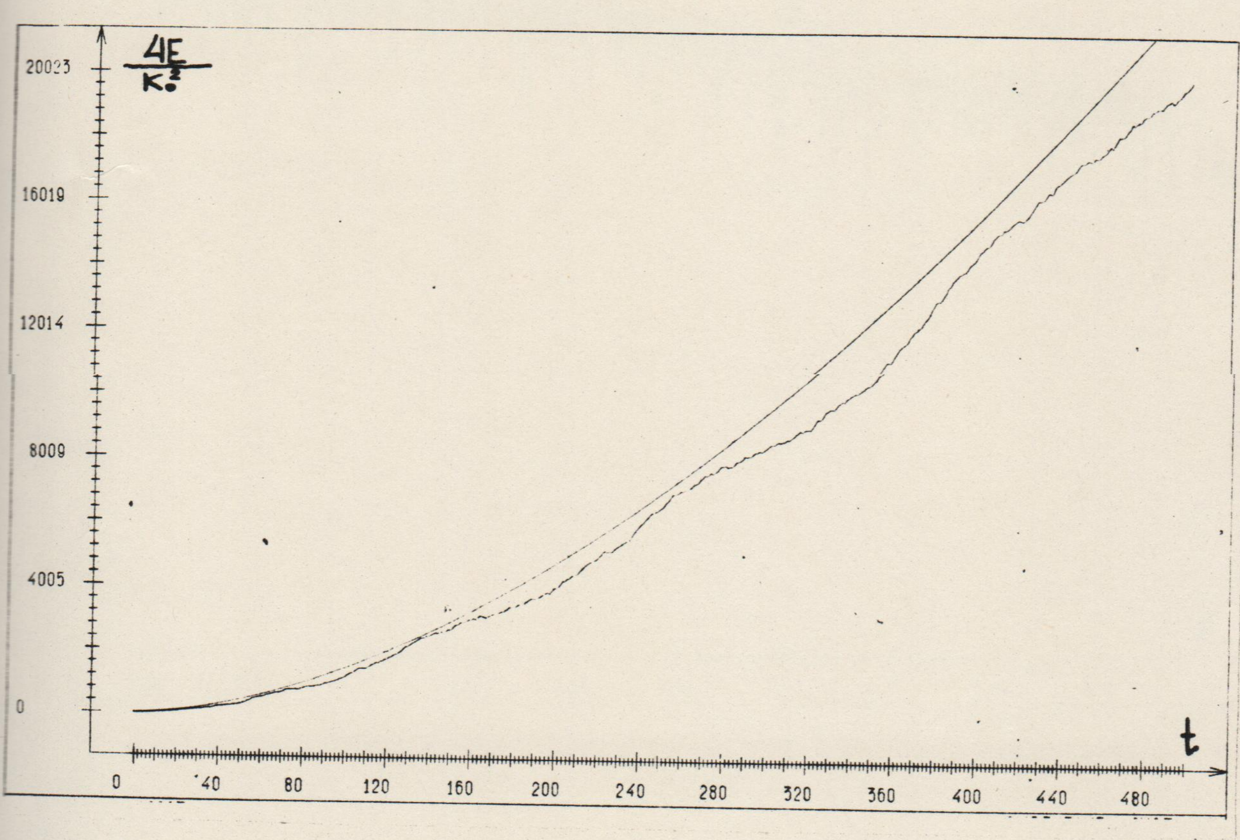

Рис.5. Зависимость энергии ротатора E от времени для системы (I.I) с $k=k_0 t^{\alpha}$, $k = 5$, $T = 1$, $\alpha = 0.35$, $t = 500$. Плавная линия соответствует классической диффузии (2.II). Ломаная линия – экспериментальный результат.

ция распределения системы по уровням близка к классическому гауссову распределению (рис.6).

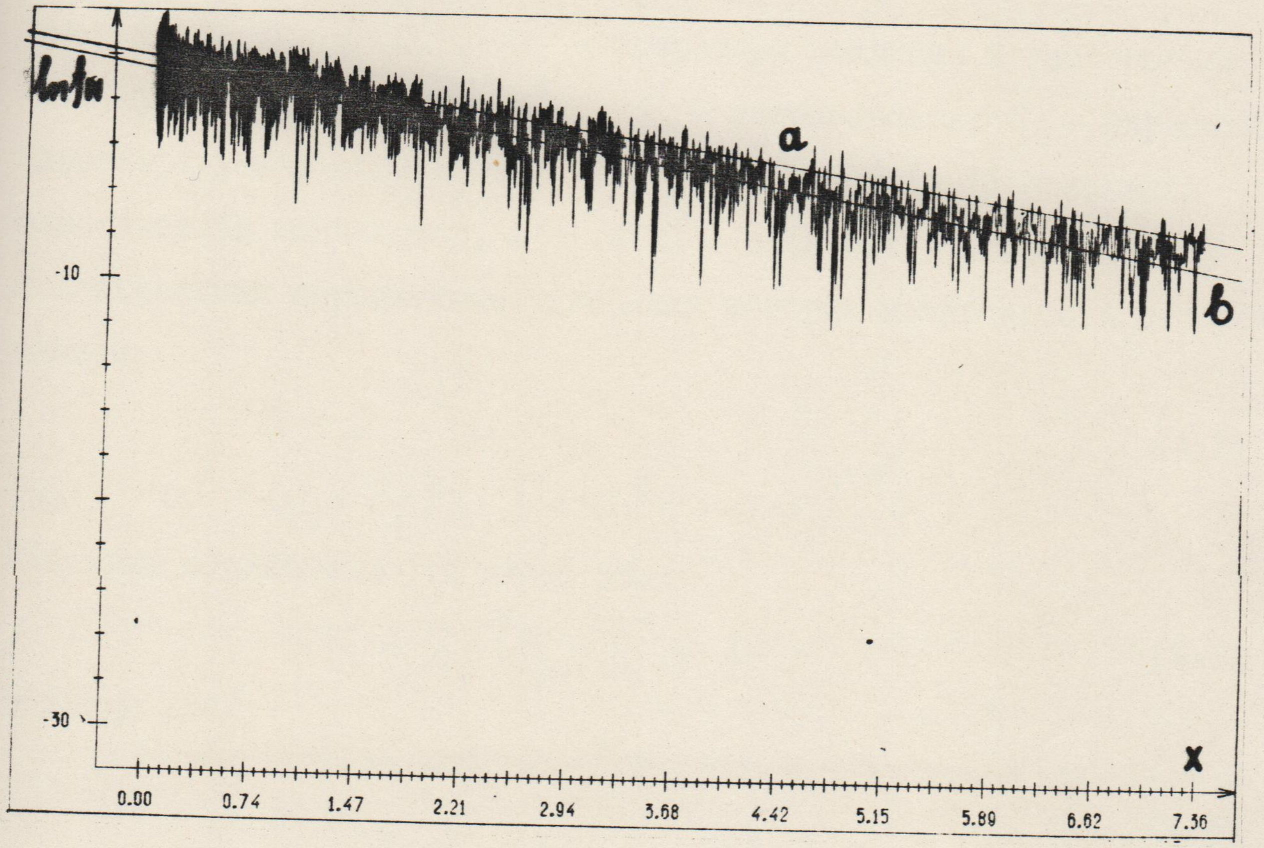

Рис.6. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (I.I) с $k = k_0 t^{\alpha}$ в нормированных координатах $f_N(n)$ и χ (см.(3.I)) для значений рис.5. Прямая "а" соответствует теоретической формуле (3.I), "в" – линейная интерполяция, ломаная линия – экспериментальный результат.

§ 4. Модель нелинейного квантового осциллятора

Рассмотрим нелинейный осциллятор с внешним возмущением, описываемый гамильтонианом:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{I} + \gamma \hat{I}^2 + \tilde{g}_0 (\hat{a}^+ + \hat{a}) \delta_{\tilde{T}}(\tau) \quad , \tag{4.I}$$

где $\hat{I} = \hat{a}^+ \hat{a}$; $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ - операторы рождения и уничтожения с коммутатором $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar$, γ - нелинейность; $\tilde{g}_0$ - параметр, характеризующий возмущение. При $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 0$ (4.I) описывает классический осциллятор, а a^+ и a - становятся классическими каноническими переменными, динамику которых можно задать отображением:

$$\bar{a} = e^{-i\omega \tilde{T}} a - \tilde{g}_0 \quad , \tag{4.2}$$

где $\omega = \omega_0 + 2\gamma I$; $I = |a|^2$; $a = \sqrt{I}\, e^{i\theta}$.

Критерий стохастичности имеет вид:

$$K = 2\gamma \tilde{T} \tilde{g}_0 \sqrt{I_0} \gg 1 \tag{4.3}$$

и тогда /36/:

$$\begin{gathered} I(t) = I_0 + \tilde{g}_0^2\, t \quad , \\ (I - I_0)^2 = 2 \tilde{g}_0^2 I_0 t + 2 \tilde{g}_0^4 t^2 \quad . \end{gathered} \tag{4.4}$$

В случае, когда система (4.I) является квантовой, удобно описывать ее динамику через амплитуды A_n невозмущенных состояний (ср. § I):

$$\begin{aligned} i \dot{A}_n = {} & (\omega_0 n + \hbar \gamma n^2) A_n + \\ & + g_0 (\sqrt{n+1}\, A_{n+1} + \sqrt{n}\, A_{n-1}) \delta_{\tilde{T}}(\tau) \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $g_0 = \tilde{g}_0 / \sqrt{\hbar}$; $T = \hbar \tilde{T}$; $n = I/\hbar$ - номер уровня невозмущенной системы. Примем далее $\hbar = 1$.

Проведенные численные эксперименты показали, что качественно динамика системы (4.I) похожа на (I.I). Как и для квантового ротатора с некоторого момента времени t^* начинается замедление диффузионного роста величин I и $(I-I_0)^2$. Значения t^* для некоторых параметров представлены в таблице 2 (t^* определялось численно также как в § 3). Из данных таблицы 2 видно, что время

Таблица 2

$$\omega_0 T = 1000; \; \gamma T = 1;$$

g_0	n_0	t^*	δ_{cr}
I	0	29	2,45
I	I5	30	I,32
I	3I	55	I,22
I	63	5I	0,87
I	83	70	-
I,5	0	I5	I,I2
2	0	40	I

квантового ограничения диффузии t^* растет с увеличением параметров g_0 и n_0 (n_0 - начальный уровень). Существенно, что диффузионное возбуждение осциллятора может происходить прямо из основного состояния (рис.7). Как показали численные эксперименты необходимым условием такого возбуждения является, как и в модели (I.I), превышение квантовой границы устойчивости $g_0 \geqslant 1$ (в возбужденном состоянии $g_0\sqrt{n_0} \geqslant 1$) и выполнение классического критерия стохастичности (4.3). Проведены были также эксперименты с периодическим возмущением обладающим конечной длительностью толчка — $\delta_T(\tau)$ в (4.I) заменялось ступенчатой функцией $\vartheta_T(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \vartheta(\tau - nT)$ ($\vartheta(\tau) = \frac{1}{T_0}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant T_0$, а вне этого интервала ноль). Никакой существенной зависимости от T_0 при изменении его в интервале $0 \leqslant T_0 \leqslant 10^{-2}/\gamma$ не наблюдалось.

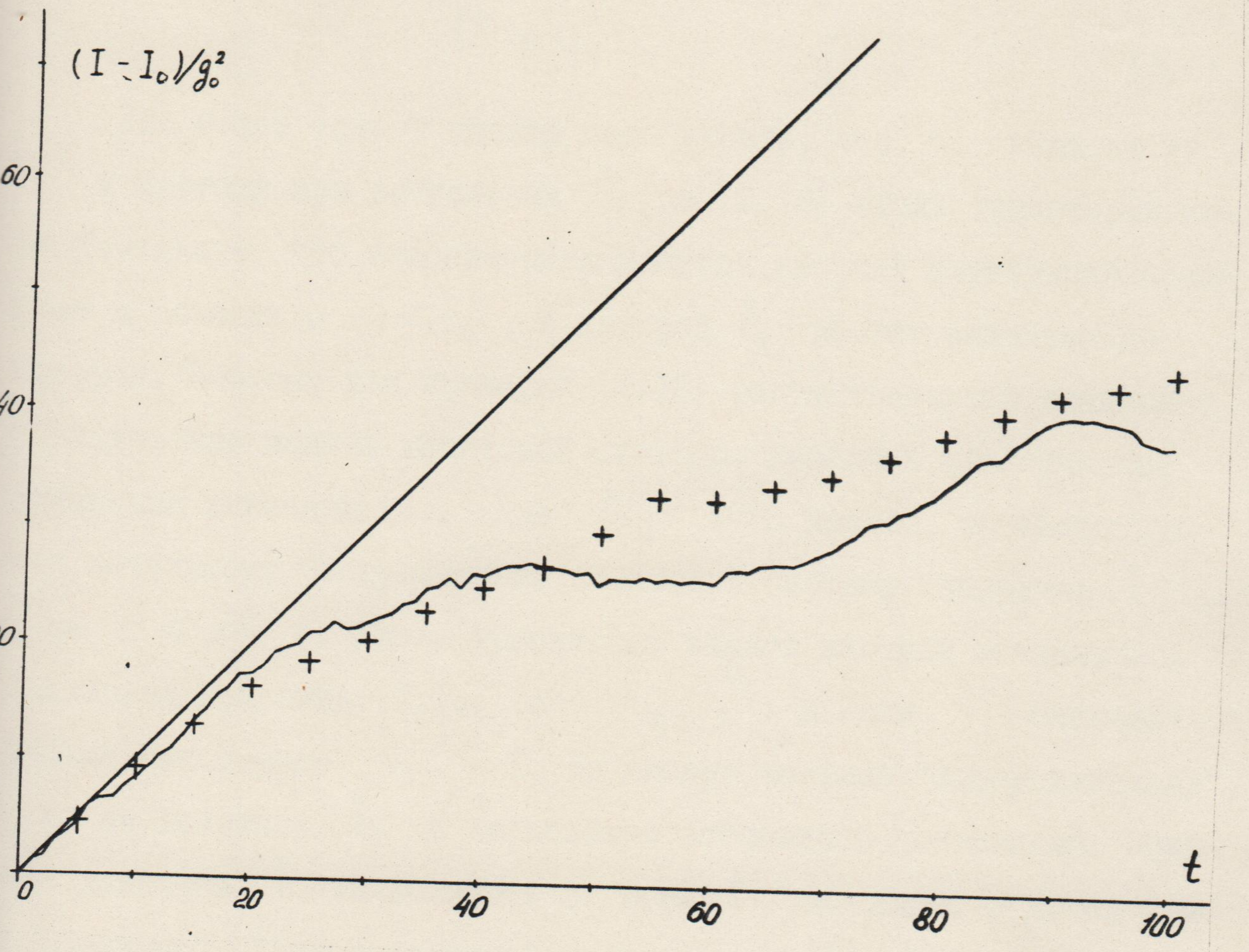

Рис.7. Зависимость действия нелинейного осциллятора от времени для системы (4.I) с $n_0 = 0$; $g_0 = 1$; $\omega_0 T = 1000$; $\gamma T = 1$. Прямая линия соответствует классической диффузии (4.4), ломаная линия – численный результат; + – модель "замороженных частиц".

Время квантового ограничения диффузии может быть получено на основе результатов § 2. Действительно, используя (2.18) при $q_0^2 \ll n_0$ и соотношение $\Delta I \approx 2 q_0 \sqrt{I} \cos\theta$, получим грубую оценку для t^*:

$$t^* \sim q_0^2 n_0 \,. \tag{4.6}$$

Для более точной оценки надо учесть, что ΔI зависит от I и поэтому при вычислении δ_1 по (2.18) вдоль траектории надо учитывать, что классическая частица за счет флуктуаций попадает в область с $I < I_0$, в которой δ_1 растет значительно быстрее. Поэтому для проверки (2.18) рассматривалась следующая классическая модель квантовой системы. Решались классические уравнения движения (4.2) для $N_0 = 1000$ частиц, соответствующих начальному распределению квантовой системы (например, $I = I_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$). Вдоль траектории каждой частицы вычислялась квантовая поправка (2.18) (с $\overline{\Delta I} = q_0 I_\ell^{1/2}$) и если $\delta_1^{(\ell)}$ становилась больше некоторого $\delta_{cr} \sim 1$, то данная частица "замораживалась", т.е. ее действие I_ℓ в дальнейшем оставалось постоянным. Среднее действие I вычислялось по всем N_0 частицам, включая "замороженные". "Замораживание" частиц в классической системе (4.2) соответствует тому эмпирическому факту, что в случае, когда квантовые поправки велики ($\delta_1^{(\ell)} \gtrsim 1$) скорость диффузии резко падает (мы приняли, что эта скорость падает до нуля). Возможность представления квантового состояния в виде пучка классических траекторий вытекает из малости интерференционных членов при $|\delta_1| \lesssim 1$ (см. § 2).

Критическое значение δ_{cr} определялось из того условия, чтобы I, вычисленное в модели "замороженных частиц", было близко к своему квантовому значению. Оказалось, что варьируя этот единственный параметр (см.табл.2) в небольшом интервале, можно добиться хорошего совпадения квантовых характеристик с характеристиками модели "замороженных частиц" (см.рис.7,8) для широкого набора параметров n_0 , g_0 (см.табл.2). Это указывает на

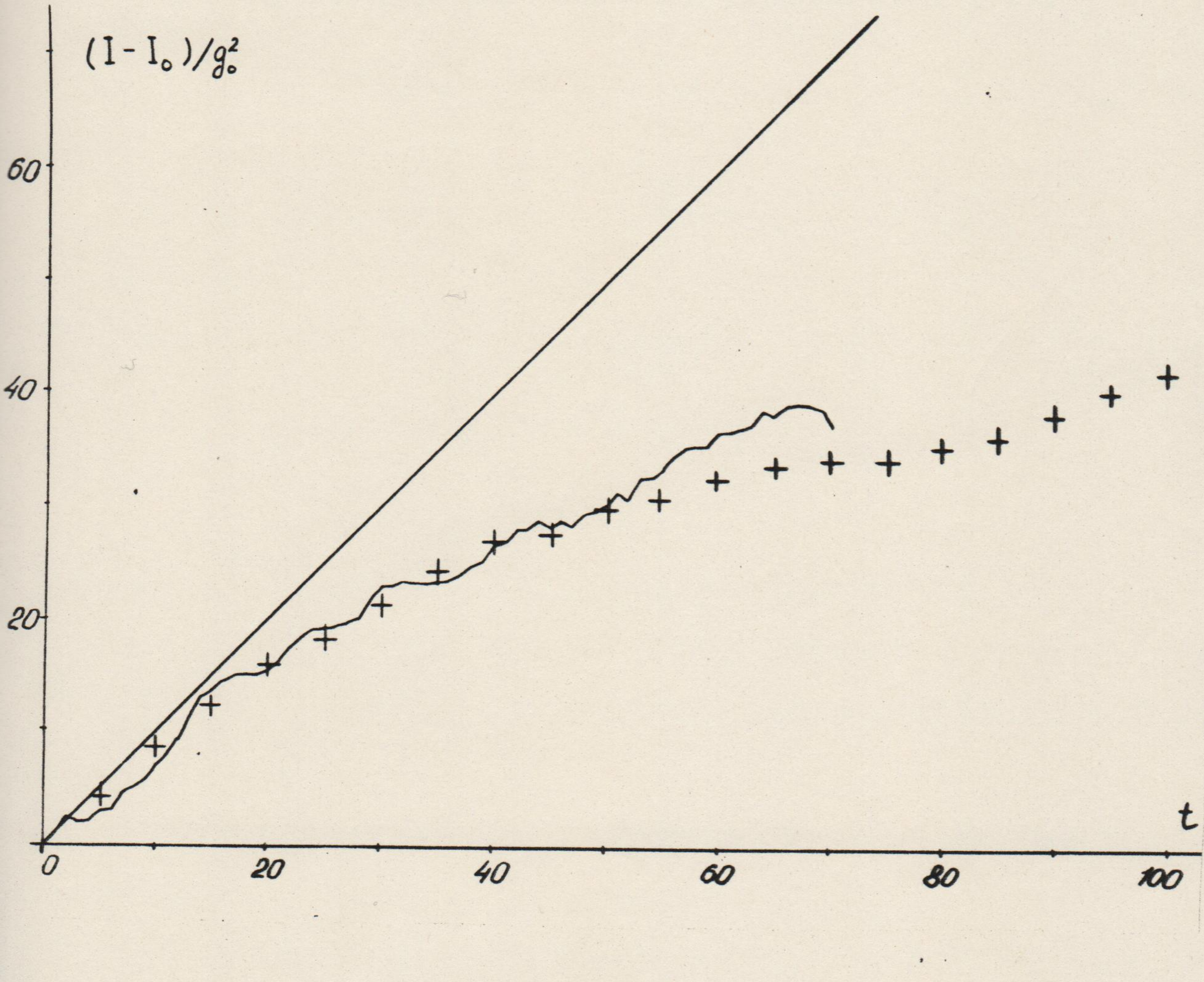

Рис.8. Тоже, что и на рис.7 при $n_0 = 15$.

справедливость оценки (2.I8), а также на то, что с помощью предложенной классической модели можно описывать квантовую динамику системы (4.I) на временах, значительно превышающих t^*. Такое классическое моделирование квантовой динамики на основе модели "замороженных частиц" может быть применено и для более сложных систем, где такой подход во всяком случае позволяет определить нижнюю границу возбуждения квантовой системы (см. § 2).

Г Л А В А II

КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 5. Квантовые операторные отображения.

Основными типичными свойствами классических стохастических систем являются положительность КС-энтропии /57,58,2,6/ и, как правило, экспоненциальное затухание разновременных корреляций. На примере модели (I.I) покажем, что квантовые системы стохастические в классическом пределе такими свойствами не обладают /47/.

При исследовании квантовой системы (I.I) будем исходить из уравнений для гейзенберговских операторов, которые после интегрирования на периоде $\tilde{T}$ переходят в операторное отображение:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{t+1} &= \hat{p}_t + \tilde{k}(t)\sin x_t \ , \\ \hat{x}_{t+1} &= \hat{x}_t + \tilde{T}\hat{p}_{t+1} \ , \end{aligned} \qquad (5.\mathrm{I})$$

где $\hat{p}_t$, $\hat{x}_t$ - операторы,удовлетворяющие коммутационному соотношению $[\hat{p}_t, \hat{x}_t] = -i\hbar$, $\tilde{k}$ может зависеть от времени. При $\hbar = 0$ (5.I) переходит в отображение для классического ротатора (I.3). Далее $\hbar = 1$.

Следует отметить, что в отображении (5.I) оператор $\hat{x}$ соответствует непрерывной фазе, меняющейся от $-\infty$ до ∞ . При этом в случае плоского ротатора оператор $\hat{p}$ представим в виде $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$ /62/. Периодическую фазу φ , изменяющуюся в интервале от 0 до 2π , можно определить посредством соотношения $\hat{\varphi} = \Phi(\hat{x})$, где $\Phi(x)$- периодическая (с периодом 2π) разрывная функция, причем, $\Phi(x) = x$ для $0 \leqslant x < 2\pi$ /62/. Поскольку $\hat{\varphi}_t = U^+ \Phi(\hat{x}_0) U = \Phi(x_t)$ (U - оператор эволюции (I.I)), то для произвольной периодической функции g (с периодом 2π) имеет место соотношение $g(\hat{\varphi}_t) = g(\hat{x}_t)$ и поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться исследованием свойств оператора $\hat{x}_t$, однозначно определяющего $\hat{\varphi}_t$.

Для анализа полученного отображения представим $\hat{p}_t$, $\hat{x}_t$ в нормальной форме по отношению к начальным операторам $\hat{p}_0$, $\hat{x}_0$ (например, пусть все $\hat{p}_0$ стоят справа), после чего уже просто получить проекцию этих операторов на пространство начальных состояний. Такой метод исследования в квазиклассическом приближении был применен в /36/.

Оказывается, что для операторного отображения (5.I) удается получить точную нормальную форму $\hat{p}_t$, $\hat{x}_t$. Это позволяет показать, что корреляции в квантовой системе убывают не быстрее некоторой степени времени, а КС-энтропия квантовой системы равна нулю. Используя известное равенство (см., например, /63/)

$$\exp(\hat{a}+\hat{b}) = \exp\left(\hat{b}\,\frac{e^c-1}{c}\right)\exp(\hat{a}) \qquad (5.2)$$

для операторов с коммутационным соотношением $[\hat{a},\hat{b}] = c\hat{b}$ получим

$$\begin{aligned} &\hat{p}_1 = \hat{p}_0 + k(0)\sin\hat{x}_0 \,; \\ &\hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \Delta\hat{p}_2 \,; \\ &\Delta\hat{p}_2 = \frac{k(1)}{2i}\left\{\sum_{m_0=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_{1,0})\, e^{i\frac{T}{2}(m_0+1)}\, e^{i(m_0+1)\hat{x}_0}\, e^{i\hat{p}_0 T} - \text{к.с.}\right\}, \end{aligned} \qquad (5.3)$$

где $k_{1,0} = 2k(0)\sin T/2$, $J_{m_0}(k_{1,0})$ – функция Бесселя, к.с. – комплексносопряженный член. Из (5.I), (5.3) следует, что нормальная форма $\Delta\hat{p}_3 = k(2)\sin\hat{x}_2$ по отношению к $\hat{p}_1$, $\hat{x}_1$ получается из $\Delta\hat{p}_2$ заменой индексов I → 2, 0 → I. Применяя (5.2), получим из нее нормальную форму $\Delta\hat{p}_3$ по отношению к $\hat{p}_0$, $\hat{x}_0$. Произвольное $\Delta\hat{p}_{t+1} = k(t)\sin\hat{x}_t$ получается из $\Delta\hat{p}_t$ рекурентным способом. Так если $\hat{p}_t$, $\hat{x}_t$ уже представлены в нормальной форме, то

$$\hat{p}_{t+1} = \hat{p}_t + \Delta\hat{p}_{t+1} \quad ;$$

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + T\hat{p}_{t+1} \quad ;$$

$$\Delta\hat{p}_{t+1} = \frac{k(t)}{2i}\Big\{\sum_{m_0,m_1,\dots,m_{t-1}=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_{1,t-1})J_{m_1}(k_{2,t-2})\times\dots \tag{5.4}$$

$$\dots\times J_{m_{t-1}}(k_{t,0})\exp(i\varphi_{m_0,\dots,m_{t-1}})\times$$

$$\times\exp(i\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}}\hat{x}_0)\times\exp(i\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}T\hat{p}_0) - \text{к.с.}\Big\},$$

где

$$\varphi_{m_0} = \frac{T}{2}(1+m_0);$$

$$\alpha_{m_0} = m_0 + 1 \;; \quad \beta_{m_0} = 1 \;;$$

$$\varphi_{m_0,\dots,m_n} = \varphi_{m_0,\dots,m_{n-1}} + \frac{T}{2}m_n(\alpha_{m_0,\dots,m_{n-1}} + \beta_{m_0,\dots,m_{n-1}}) + \frac{T}{2}\alpha^2_{m_0,\dots,m_{n-1}} \;;$$

$$\alpha_{m_0,\dots,m_n} = \alpha_{m_0,\dots,m_{n-1}} + m_n \;; \quad \beta_{m_0,\dots,m_n} = \alpha_{m_0,\dots,m_{n-1}} + \beta_{m_0,\dots,m_{n-1}} \;;$$

$$k_{n,t} = 2k(t)\sin\frac{T}{2}\beta_{m_0,\dots,m_{n-1}} \;.$$

Для исследования полученного отображения спроектируем (5.4) на базис начальных состояний $\psi_n(x_0) = (2\pi)^{-1/2} e^{inx_0}$. Тогда (5.4) переходит в С-числовое отображение (с заменой $\hat{p}_0$ на $\hbar n$), которое можно рассматривать как отображение описывающее динамику некоторой классической системы, для которой средние значения $\hat{p}_t$, $\hat{x}_t$ ($\langle p_t\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_t(n,x_0)dx_0$) совпадают с квантовыми средними и которая при $\hbar\to 0$ переходит в классическую систему с отображением (I.3) с $\tilde{k} = \tilde{k}(t)$. Таким образом для понимания свойств квантовой системы следует изучить классическую систему описываемую отображением (5.4), где p_0 и x_0 – С-числа.

Отметим, что полученное отображение не сохраняет якобиан $J = \frac{\partial(p_t, x_t)}{\partial(p_0, x_0)}$ (при $\hbar = 0$, $J = 1$), который со временем осциллирует, что указывает на наличие "затухания" с переменным знаком и негамильтоновость отображения (5.4). Более подробно свойство негамильтоновости получаемых таким методом отображений обсуждалось впоследствии в /64/.

Рассмотрим случай, когда $k(t)=k=const$. В классике ($\hbar = 0$) $m_0 \sim kT$, $m_1 \sim m_0 kT \sim (kT)^2$ и т.д. Поэтому $\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}} \sim (kT)^t$, $\frac{\partial x_t}{\partial x_0} \sim \alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}} \sim (kT)^t$ и близкие траектории экспоненциально быстро расходятся. При $\hbar \neq 0$ для $t < t_s$,

$$t_s \sim \frac{\ln(\tilde{k}/\hbar)}{\ln(kT)}, \tag{5.5}$$

т.е. пока $T\beta_{m_0,\dots,m_{t_s}} \ll 1$, синус в функции Бесселя в (5.4) можно заменить аргументом и тогда попрежнему имеет место локальная неустойчивость близких траекторий. Когда $t > t_s$ воспользуемся тем, что в (5.4) $|m_n| \leqslant 2k$ (иначе $J_{m_n}(k)$ – экспоненциально мал) и следовательно $|\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}}| \leqslant 2kt$, $|\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}| \leqslant 2kt^2$. Тогда при $t > t_s$ $d/d_0 \sim \frac{\partial x_t}{\partial x_0} \sim (|\beta_{m_0,\dots,m_t}| + |\alpha_{m_0,\dots,m_t}|) \leqslant 2kt^2$ и энтропия h убывает со временем согласно

$$h \sim \frac{\ln k + 2\ln t}{t}. \tag{5.6}$$

Таким образом для системы (I.I) энтропия равна нулю и значит (I.I) не является К-системой, хотя в то же время для соответствующей классической системы $h \approx \ln(\frac{kT}{2}) > 0$ ($kT > 4$) /6/. Отметим, что при $k(t) = k(0)t^\alpha$ энтропия также стремится к нулю по закону близкому к (5.6) (перед $\ln t$ стоит другая константа).

Рассмотрим теперь как ведут себя разновременные корреляторы в квантовой системе (I.I): $R(t,n,q) = \frac{1}{2} < n|e^{-iq\hat{x}_0} e^{i\hat{x}_t} +$

$+e^{i\hat{x}_t}e^{-iq\hat{x}_0}|n>$, где среднее берется по начальному состоянию $\psi_n(x_0)=(2\pi)^{-1/2}\exp(inx_0)$. Из (5.4) получаем выражение для $R(t,n,q)$ ($k=\mathrm{const}$):

$$R(t,n,q)=\frac{1}{2}\sum_{m_0,\dots,m_{t-1}} J_{m_0}(k_1)J_{m_1}(k_2)\dots J_{m_{t-1}}(k_t)\cdot \\ \cdot\exp(i\varphi_{m_0,\dots,m_{t-1}})\exp(i\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}Tn)\cdot \\ \cdot(1+\exp(-i\beta_{m_0,\dots,m_{t-1}}Tq))\delta_{\alpha\, m_0,\dots,m_{t-1},q}\,. \tag{5.7}$$

При $t<t_s$ квантовыми поправками в (5.7) можно пренебречь и воспользоваться классическим значением R . Тогда $R(t,n,q)\sim e^{-\sigma t}$ где $\sigma\sim\frac{1}{2}\ln(kT)$ /4,36/. К моменту $t\sim t_s$ (5.5) корреляции достигают величины $R(t_s,n,q)\sim k^{-1/2}$ и для дальнейшего вычисления R надо использовать точное выражение (5.7), что представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся лишь определением нижней границы для $|R(t,n,q)|$.

Для нахождения максимально возможной скорости убывания $R(t,n,q)$ воспользуемся условием унитарности оператора $e^{i\hat{x}_t}$ и тождеством $<n|\exp(-i\hat{x}_t)\exp(i\hat{x}_t)|n>\equiv 1$, из которого имеем: $\exp(i\hat{x}_t)|n>=(\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m^{(n)}e^{imx_0})|n>$ и $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|A_m^{(n)}|^2=1$. Но из (5.4) следует (т.к. $\alpha_{m_0,\dots,m_{t-1}}\sim kt$), что сумма по m содержит $m_{max}\sim kt$ членов ($A_m^{(n)}$ с $|m|>m_{max}$ экспоненциально малы). Предполагая, что все A_m с $|m|<m_{max}$ одного порядка (в противном случае найдется q с $|q|<m_{max}$, для которого корреляции будут убывать медленнее чем (5.8)) и используя точное равенство $R(t,n,q)=\frac{1}{2}(A_q^{(n)}+A_q^{(n-q)})$, получим для $t\gg t_s$:

$$|R(t,n,q)|\gtrsim\frac{1}{\sqrt{kt}}\,. \tag{5.8}$$

В случае $k(t)=kt^{\alpha}$ в (5.8) надо сделать замену $t\to t^{1+\alpha}/(1+\alpha)$.

Отметим, что хотя уже через время $t\sim t_s$ классическое значение коррелятора будет отличаться от квантового (при сравнении рассматриваем область квазиклассики) абсолютная величина коррелятора будет малой $R \sim \sqrt{\hbar/\tilde{k}}$ и поэтому величины, не уменьшающиеся в классике (например, энергия ротатора $E = \langle n|\frac{1}{2}\hat{p}_t^2|n\rangle$), будут отличаться на малую величину $\sim(\hbar/\tilde{k})^{1/2}$ в течение времени $t_0 \propto \hbar^{-1}$ (число разновременных корреляторов в выражении для E растет со временем по степенному закону).

Таким образом, в динамике СКС можно явно выделить два временных масштаба t_s и t^* (или t_0), о которых говорилось выше. Так в течение времени $t < t_s$ движение квантовой системы полностью случайно, энтропия h близка к своему классическому значению, корреляции как и в классике затухают экспоненциально. При этом в области квазиклассики квантовые средние (например, $E(t)$ или $R(t,n,q)$) могут быть представлены в виде формального ряда Тейлора по степеням $\hbar$. На примере такого разложения для $R(t,n,q)$ в (5.7) видно, что в области стохастичности $kT \gg 1$ квантовые поправки к основному (классическому) члену в таком тейлоровском разложении нарастают со временем экспоненциально (ранее такой результат для модели (4.I) был получен в /36,45,50/). Тем не менее полная квантовая поправка к классическим средним оказывается малой по абсолютной величине ($\propto O(\hbar)$, см. выше §§ 5,2) в течение значительно большего интервала времени $t_0 \gg t_s$ (ср. (2.I0) и (5.5)). Причина этого заключается, по-видимому, в различной структуре квазиклассического разложения для средних и для волновой функции. В то время как выражение для средних на малых временах представимо в виде степенного ряда по $\hbar$, квазиклассическое представление для волновой функции уже сразу является неаналитическим по $\hbar$. Преимущество такого представления связано видимо с тем, что в СКС при $t \gtrsim t_s$ точное выражение для средних оказывается неаналитическим по $\hbar$. Так, например, выражение

(5.7) при $t \sim t_s$ содержит неаналитические члены $\propto e^{i\varphi_{m_0,\dots,m_{t_s}}} \propto$ $\propto e^{ik}$ ($m_{t_s} \sim (kT)^{t_s}$). Таким образом, Тейлоровское разложение для средних через время t_s оказывается неприменимым. В то же время квантовые поправки в разложении для ψ малы вплоть до $t \sim t_0 \gg t_s$, а неаналитичность ψ сказывается в выражении для средних только в интерференционных членах, вклад которых может быть оценен и оказывается малым $\propto O(\hbar^{1/2})$ (см. § 2). Интересно однако отметить, что относительная величина поправок для некоторых характеристик, например, для $R(t,n,q)$, оказывается большой через $t \sim t_s$. При $t \gg t_s$ в квантовой системе уже отсутствует экспоненциальное затухание корреляций, а КС-энтропия h =0. Таким образом, статистические свойства СКС оказываются значительно более слабыми чем в классическом случае.

Здесь следует заметить, что причиной степенного убывания корреляций является степенной рост числа гармоник x в U со временем, или другими словами - числа заселенных уровней невозмущенной системы (один толчок захватывает $\approx 2k$ уровней). Ввиду этого число гармоник x в $\hat{p}_t = U^{+}(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})U$ также растет степенным образом, что и приводит к h =0 и неэкспоненциальному затуханию корреляций. Поскольку указанное свойство U имеет место практически для всех возмущений, то естественно ожидать, что и другие квантовые системы, стохастические в классическом пределе, будут обладать равной нулю КС-энтропией и степенным убыванием корреляций. Это подтверждается результатом работы /48/, где было показано, что в модели (4.1) h =0, а для скорости затухания корреляций было получено ограничение аналогичное (5.8). Полученные в этом параграфе результаты указывают на то, что обобщение понятия колмогоровской энтропии на квантовые системы /34,35/ не оказывается столь же важным, как в классических системах.

§ 6. Квантовые корреляции в модели ротатора.

Для исследования свойств корреляций в квантовой модели (I.I) были проведены численные эксперименты /53/ в которых вычислялись корреляции

$$R_t(\tau) = \langle 0|\cos\hat{x}_t \cos\hat{x}_{t+\tau} + \cos\hat{x}_{t+\tau}\cos\hat{x}_t|0\rangle \quad , \qquad (6.I)$$

где $\cos\hat{x}_t = U_t^+ \cos x U_t$ – гейзенберговский оператор в момент времени t , U_t – оператор эволюции гамильтониана (I.I), $\langle 0|\ldots|0\rangle$ – означает среднее по начальному состоянию. В принципе можно рассматривать и другие корреляции, например, корреляции $\sin\hat{x}$. Качественное поведение корреляций $\sin\hat{x}$ такое же как и для $\cos\hat{x}$ за исключением одной особенности, о которой будет сказано ниже (см. § 8).

Численный алгоритм нахождения корреляций заключался в определении волновых функций $\psi_t = U_t|0\rangle$, $\varphi_{t+\tau} = U_\tau \cos x \psi_t$, $\psi_{t+\tau} = U_{t+\tau}|0\rangle$ по уравнению (I.6) методом описанным в /49,46/ и дальнейшем вычислении среднего $2Re(\langle\psi_{t+\tau}|\cos x|\varphi_{t+\tau}\rangle) = R_t(\tau)$.

Результаты численных экспериментов представлены в таблице 3. В ней проведено сравнение классических R_{cl} и квантовых корреляций R_q при $t=0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 7$ (см. (6.I)) в случае начального классического состояния: $p=0$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ($R_{cl} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \cos x_\tau dx$) и соответствующего квантового: $\psi(x,0) = (2\pi)^{-1/2}$. Из этих данных видно, что при $kT = 5$, $5+2\pi$, когда мера островков устойчивости пренебрежимо мала /6/, классические корреляции при $\tau \leqslant 7$ очень быстро затухают со временем. При этом квантовые корреляции близки к классическим только для $\tau \lesssim t_s \approx 3$, а при $\tau \gtrsim t_s$ они различаются в несколько раз.

Таблица 3

τ	R_{cl}	R_q/R_{cl} k=5	R_q/R_{cl} k=20	R_q/R_{cl} k=40	R_q/R_{cl} k=I00
0	I	I	I	I	I
			kT =2		
I	0.5767	0.9880	0.9993	0.9998	I.0000
2	0.4986	0.965I	0.9976	0.9994	0.9998
3	0.96I4	0,9753	0.9982	0.9996	0.9999
4	0.6794	I,I785	I.0745	I.0294	I.0053
5	0.5688	I.5397	I.0742	0.9552	0.9754
6	0.6504	0.937I	0.9294	I.I233	I.0I52
7	0.7648	0.8375	I.0365	0.9678	0.9946
			kT =5		
I	-0.I3I0	0.83I3	0.9908	0.9977	I.0000
2	0.0I229	I4.9880	7.4768	2.7307	0.9723
3	0.3384	2.0254	0.8543	I.0774	0.9069
4	0.08002	5.4849	2.7656	I.492I	I.3884
5	0.09999	I.070I	2.3252	I.5372	0.I946
6	0.09I67	2.5472	I.994I	2.4490	0.3505
7	0.00965	82.404	-3.8520	I2.6I5	II.703
			kT =5+2π		
I	-0.03770	-0.6053	0.8963	0.9756	0.9960
2	0.08725	-4.0I83	0.04544	I.0256	0.90I2
3	0.I389	I.7423	I.4I04	I.I857	0.2I9I
4	0.0I64I	-5.6684	0.4I88	4.4308	0.2732
5	0.0I945	-9.3060	-9.4807	4.985I	2.0925
6	0.02I84	0.6062	2.I323	8.0998	-3.07I4
7	0.00752	33.524	8.7I8I	I9.6676	-I.I330

Теоретическое значение t_s (5.5) также оказывается равным всего нескольким толчкам, что согласуется с результатами численных экспериментов. При этом, например, для $k=40.0$, $kT=5$ энергия квантового ротатора отличается от классического значения менее чем на 25% в течение времени $t^*=120 \gg t_s \approx 3$. В случае $kT=2$, когда меры устойчивой и стохастической компонент оказываются приблизительно одинаковыми, классические корреляции не затухают со временем и различие между R_{cl} и R_q остается меньшим 20% в течение времени $\tau \approx 100 \gg t_s \approx 3$ ($k = 40$). Таким образом, характеристики не уменьшающиеся со временем экспоненциально, например, энергия ротатора, корреляции при $kT=2$, оказываются близкими в течение времени $t^* \gg t_s$. Отметим, также, что в области устойчивости $kT=0.5$ ($k=20$) отличие квантовых и классических корреляций оказывается на уровне 0.1% для $\tau \approx 20$ (при $k=5$, $\tau \approx 20$ на уровне 10%).

Типичный вид поведения квантовых корреляций представлен на рис.9. Видно, что имеются остаточные корреляции не уменьшающиеся со временем. Величина этих корреляций уменьшается с ростом k, но явный вид зависимости от k проследить не удается ввиду резкого возрастания требуемой памяти и времени счета с k.

Величину остаточных корреляций можно оценить следующим образом. Пусть $\tau \gg t^*$. Тогда волновая функция $|\psi\rangle = e^{\pm ix}U_\tau^+ e^{\pm ix}U_\tau|0\rangle$ содержит приблизительно $\sqrt{k^2 t^*}$ гармоник x (при $\tau \gg t^*$ рост энергии практически прекращается). Т.к. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, то средняя амплитуда гармоник Q определяется из условия $Q^2\sqrt{k^2 t^*} \sim 1$. Тогда из соотношения $R(\tau) \sim \langle 0|\psi\rangle \sim Q$ и (3.6) получаем оценку

$$|R_t(\tau)| \sim (k^2 t^*)^{-\frac{1}{4}} \sim k^{-1}, \qquad t+\tau \gg t^* . \tag{6.2}$$

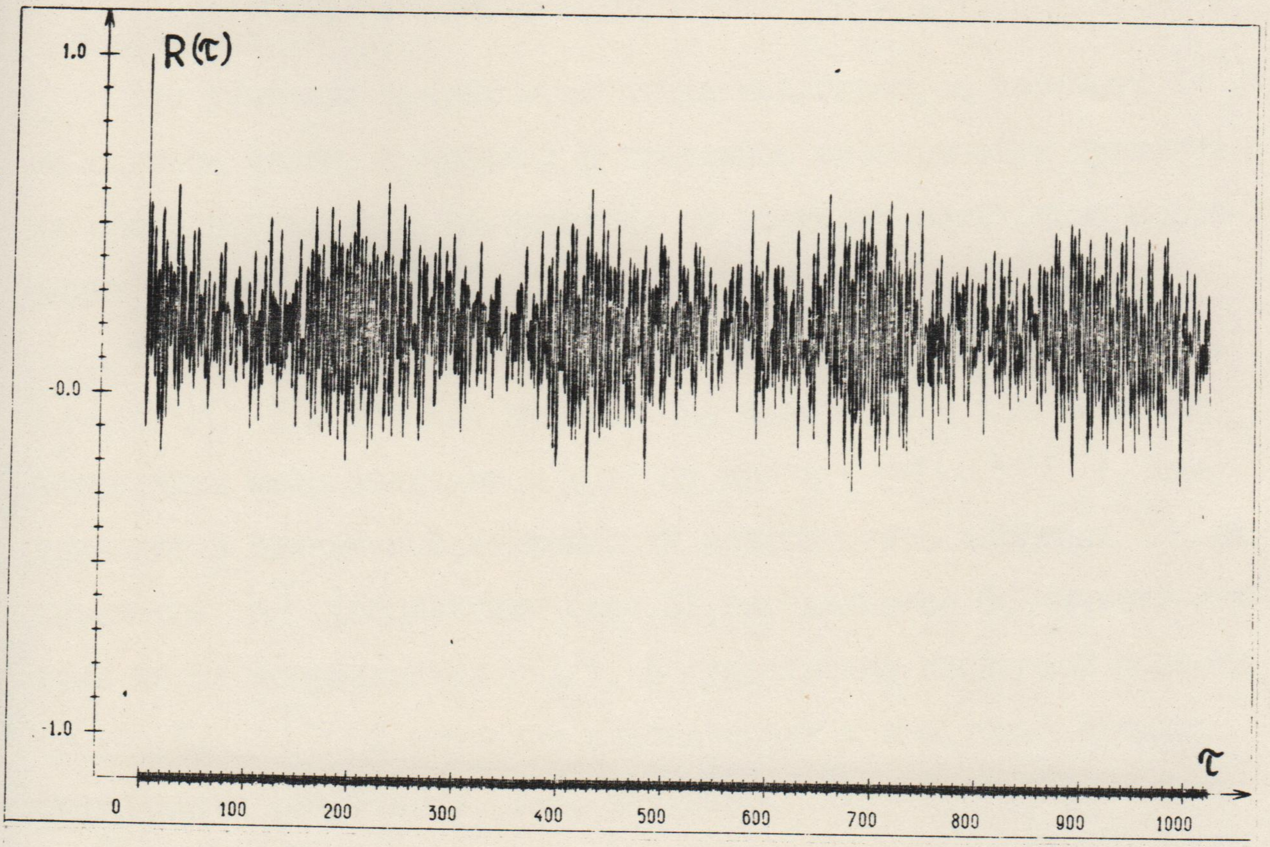

Рис.9. Зависимость квантовых корреляций R (см. (6.I)) от τ для системы (I.I) при $k = 5$, $kT = 5$, $t = 100$, $\tau = 1024$.