

При $t + \tau \ll t^*$ число гармоник в $|\Psi\rangle$ будет порядка $\sqrt{k^2 \tau}$ и, следовательно, на этом временном интервале корреляции убывают с ростом τ :

$$|R_t(\tau)| \sim (k^2 \tau)^{-1/4}; \quad t_s \leq t + \tau \ll t^*. \quad (6.3)$$

Это убывание оказывается очень медленным, а параметр $(t^*)^{1/4}$ не слишком велик, и поэтому в численном эксперименте практически сразу наблюдается неубывающие со временем остаточные корреляции (см. рис. 9).

Тем не менее в области квазиклассики $k \gg 1$, $T \ll 1$, $kT = \text{const} > 1$ в течение времени t_s квантовые и классические корреляции мало отличаются друг от друга ($\propto O(k^{-1})$), что приводит к одинаковой зависимости коэффициента диффузии D от параметра kT (осцилляции (рис. 3) определяются фактически первыми двумя корреляциями /6I/). В существенно квантовой области $k \gg 1$, $T \gtrsim 1$ значения классических и квантовых средних оказываются различными. Так, например, $D_q \approx 0.67$, $D_{cl} \approx 1.24$ ($kT = 14.25 \pi$, $T \approx 2.18$); $D_q \approx 1.10$, $D_{cl} \approx 0.83$ ($kT = 29.25 \pi$, $T \approx 4.48$; в этих случаях значения D_{cl} взяты из /6I/). Тем не менее, как показали численные эксперименты, в этой квантовой области также, как и в области квазиклассики имеет место диффузионное возбуждение ротатора в течение времени t^* (см. теоретическую оценку (I.12)) с коэффициентом диффузии $D_q \sim 1$ (исключение составляют узкие области по T вблизи квантовых резонансов с небольшими Q — подробнее см. § 7). Причина этого заключается в малости квантового коррелятора в этой области (см. (5.7), (5.8), (6.3)). Так уже после первого толчка $R_q \sim k^{-1/2}$.

Отметим, что согласно полученным оценкам (6.2), (6.3) и результатам § 5, экспоненциальное затухание квантовых корреляций отсутствует и в таких системах, где мера классических ос-

тровок устойчивости строго равна нулю (например, система (3.2) при $kT > 4$). Численные эксперименты также показывают, что в такой квантовой системе, в отличие от классической, экспоненциальное затухание корреляций отсутствует.

Оценки аналогичные (6.2), (6.3) можно получить и для случая $k(t) = k_0 t^\alpha$. Поскольку при $\alpha > 1/2$ диффузионное возбуждение (2.II) происходит неограниченно (2.I3), то в этом случае квантовые корреляции затухают со временем: $R_t(\tau) \sim (k_0^2 t^{1+2\alpha})^{-1/4}$.

Интересной особенностью квантовых корреляций операторов $\cos \hat{x}$ является то, что $R_t(\tau) > 0$ практически при любом τ . В результате этого частотный спектр корреляций имеет резкий пик на частоте $\omega = 0$. Более подробно свойства частотного спектра будут обсуждаться в § 8.

Следует отметить, что в квантовой модели не только отсутствует экспоненциальное затухание корреляций, но и КС-энтропия h равна нулю § 5. В силу этого в квантовой системе отсутствует локальная неустойчивость движения, которая имеет место в классической модели (I.2) при $kT > 1$. Наличие локальной неустойчивости ($h > 0$), приводит к тому, что динамика классической системы оказывается фактически необратимой. Действительно, хотя уравнения движения системы с гамильтонианом (I.2) обратимы (гамильтониан системы симметричен по отношению к замене $\tau \rightarrow -\tau$ в моменты времени $\frac{T}{2} + \ell T$, ℓ - целое, и поэтому при замене $p \rightarrow -p$ в момент времени $\frac{T}{2} + \ell T$ в дальнейшем траектория движется точно в обратном направлении и возвращается в начальную точку), но из-за локальной неустойчивости сколь угодно малое возмущение ε полностью изменит траекторию через время $t_\varepsilon \sim \frac{|\ln \varepsilon|}{h}$. Поэтому в численных экспериментах, где есть ошибки округления на уровне $\varepsilon \sim 10^{-12}$ (БЭСМ-6), обратимость во времени классической динамики

отсутствует (см. рис. I0). Вместе с тем динамика квантовой системы оказывается полностью обратимой (точность возврата находится на уровне машинной точности). Более того, обратимость имеет место

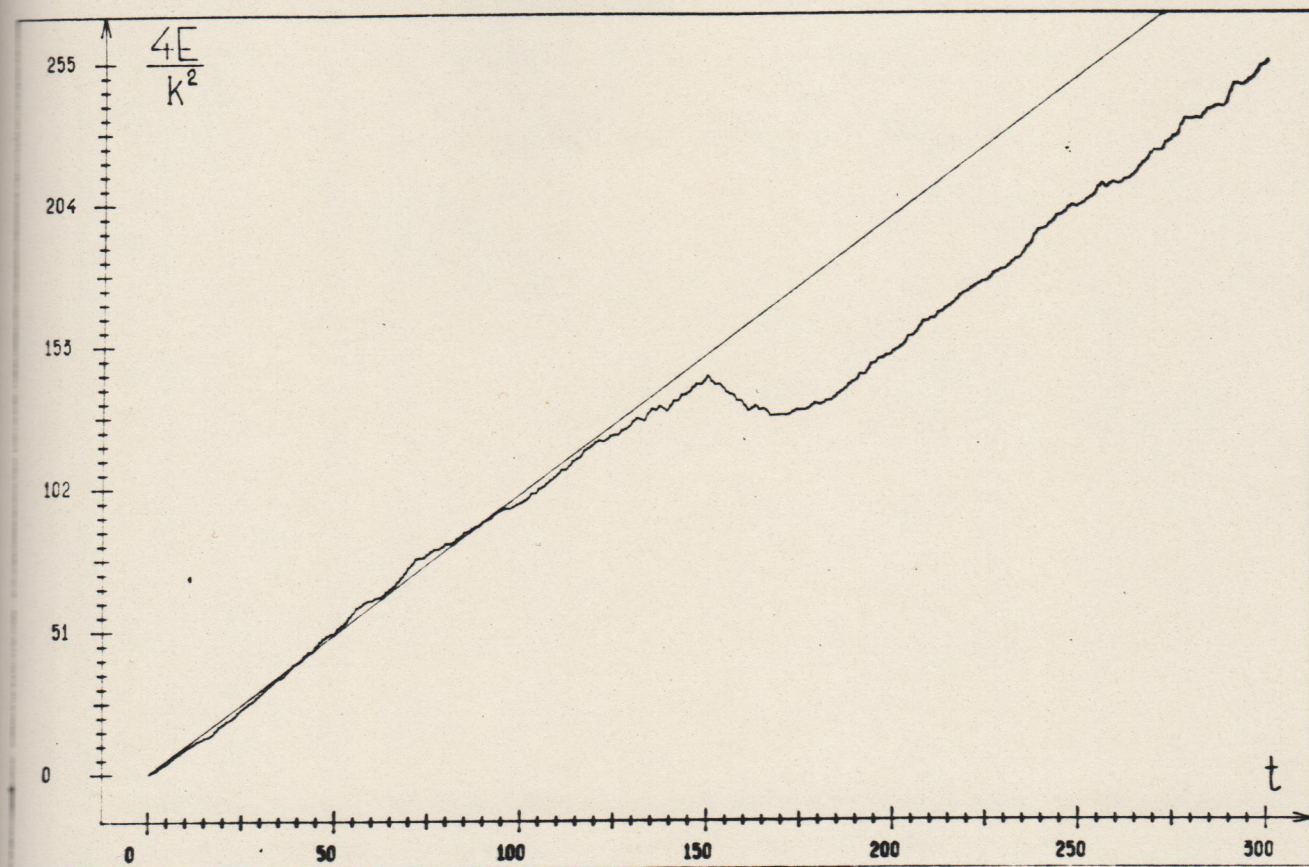


Рис. I0. Зависимость энергии классического ротатора (I.2) от времени при обращении движения в момент $t=150$; движение системы оказывается необратимым ($kT=5$).

даже при случайной сбивке фаз фурье-компонент A_n волновой функции Ψ в интервале $\Delta\varphi$ в момент обращения (см. рис. II, I2). На рис. I2 представлена функция распределения $f(n) = |A_n|^2$ по уровням

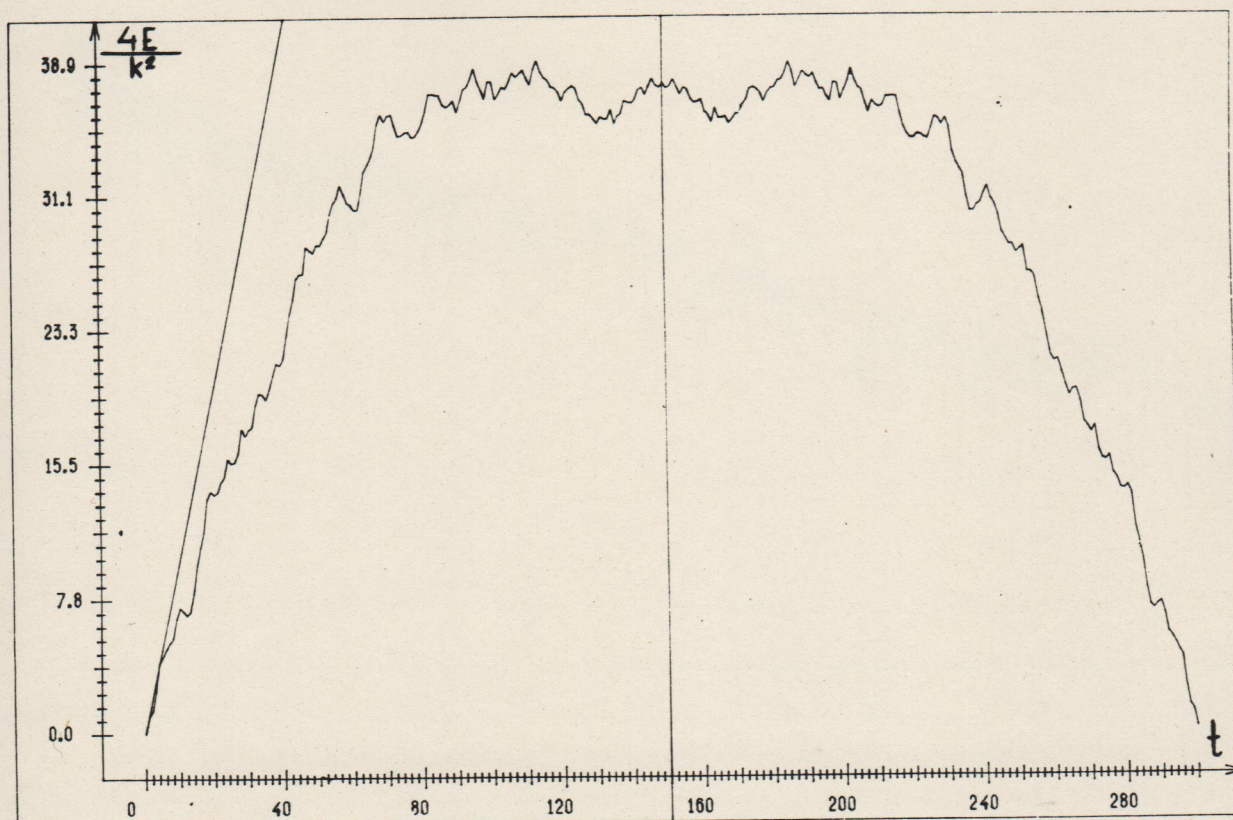


Рис. II. Зависимость энергии квантового ротатора (I.1) от времени при обращении движения и случайной сбивке фаз амплитуд A_n в интервале $\Delta\varphi = 0.1$ в момент времени $t = 150$; движение квантовой системы полностью обратимо ($k = 20$, $kT = 5$); прямая линия соответствует классической диффузии (I.4), вертикальная прямая отмечает момент обращения времени.

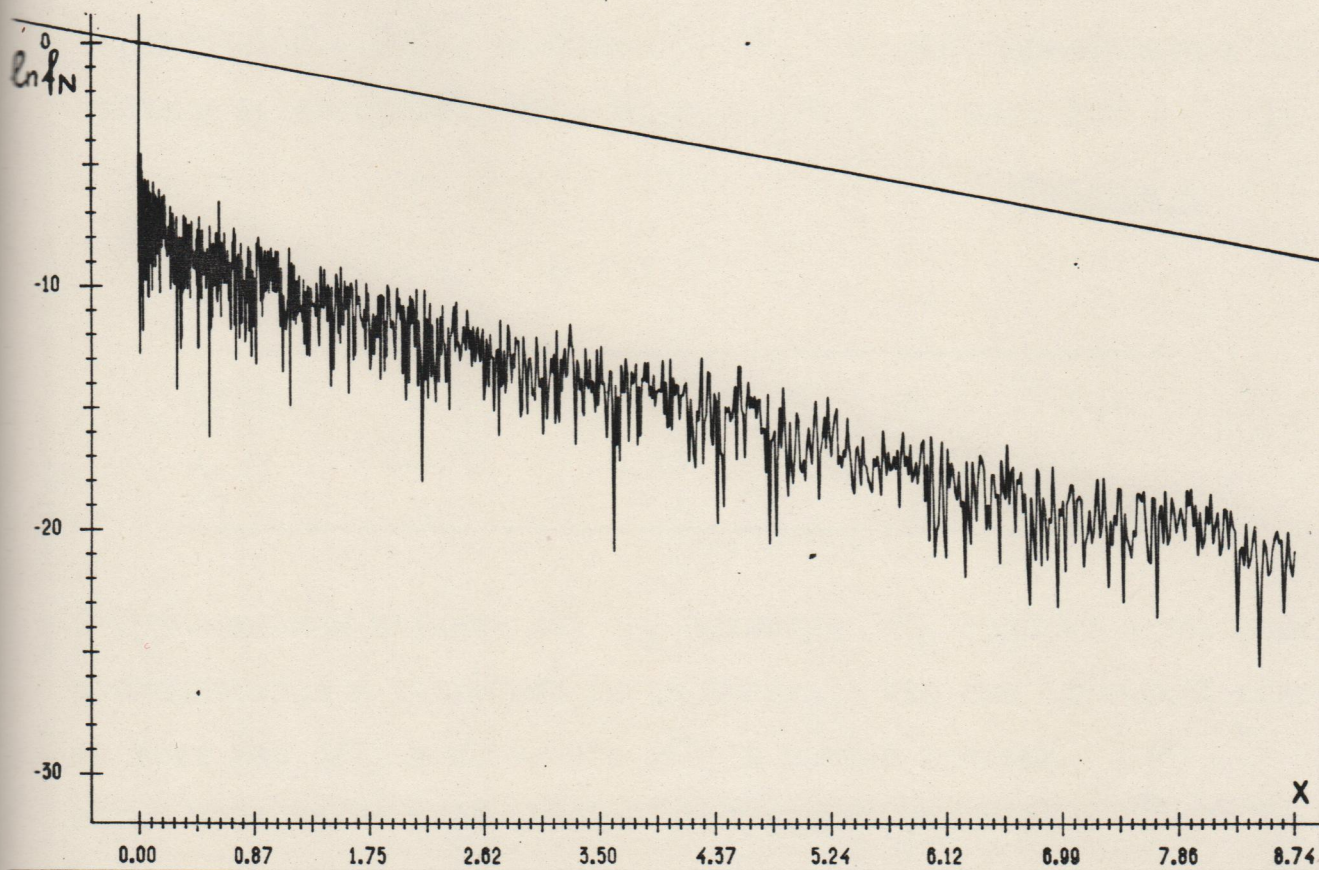


Рис. 12. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (I.1) в нормированных координатах (см. § I) в момент возврата $t = 300$; прямая соответствует классическому распределению (I.5), ломаная линия — численный результат.

невозмущенной квантовой системы в нормированных координатах (см. § I). Резкий пик при $\Pi = 0$ соответствует возвращающейся компоненте ($\Psi(x, t=0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$), доля невернувшейся компоненты составляет $W_L \approx 7.9 \times 10^{-4}$ (сбивка фазы производится в интервале $\Delta\varphi = 0.1$). Зависимость W_L от $\Delta\varphi$ представлена в таблице 4. Интересно, что $W_L \approx 0.079 \ll 1$ даже при $\Delta\varphi = 1$.

Таблица 4

$$k = 20, \quad kT = 5, \quad t = 300$$

$\lg(\Delta\varphi)$	0.8	0.48	0	-0.52	-1.0
$\lg W_L$	-0.02	-0.26	-1,1	-2.13	-3.1

О существенном влиянии фаз φ_n амплитуд A_n говорит и тот факт, наблюдавшийся в численных экспериментах, что при случайной сбивке всех фаз φ_n в интервале 2π в момент времени $t \gg t^*$ снова происходит диффузионное возбуждение ротатора с $D_q \approx 1$ в течение времени t^* .

Полное число уровней в проведенных численных экспериментах достигало $N = 2049$ ($-1024, 1024$). При счете использовались различные начальные условия: возбуждение только нулевого уровня ($\Pi_0 = 0$, равномерное распределение по X), гауссовское распределение с шириной $4 \lesssim \Delta\Pi \lesssim 20$. Также как и в /49,46/ существенной зависимости движения от начальных условий не наблюдалось.

§ 7. Квантовый резонанс.

В /49/ при исследовании системы (I.I) был обнаружен своеобразный тип строго скоррелированного движения названный квантовым резонансом и не имеющий аналога в классической системе.

Действительно, как было отмечено в /49/, в случае основного квантового резонанса $T = 4\pi m$, m - целое из (I.6) имеем:

$$\bar{\Psi}(x) = \exp(-ik\cos x)\Psi(x) \quad (7.1)$$

и энергия ротатора ($E(t) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi^*(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) dx$) на больших временах растет квадратично со временем. Так, если в начальный момент времени $t = 0$ было возбуждено только основное состояние ($n = 0$), то

$$E(t) = \frac{k^2 t^2}{4} \quad (7.2)$$

Здесь и далее t - безразмерное время, измеряемое в числе толчков.

Исследуем теперь общий случай квантового резонанса: $T = \frac{4\pi p}{q}$ /54/. Из (I.6) имеем $\bar{\Psi}(x) = \exp(-ik\cos x)F(x)$, где

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(-i \frac{2\pi p}{q} n^2 + inx) = \\ &= \sum_{m=0}^{q-1} \exp(-i \frac{2\pi p}{q} m^2) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{m+q\ell} \exp(i(m+q\ell)x) = (7.3) \\ &= \sum_{m=0}^{q-1} \exp(-i \frac{2\pi p}{q} m^2) B_m ; \end{aligned}$$

$$B_m = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{m+q\ell} \exp(i(m+q\ell)x).$$

Для нахождения B_m вычислим следующую сумму:

$$\sum_{m=0}^{q-1} \exp(i \frac{2\pi mn}{q}) B_m = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{\ell} \exp(i(x + \frac{2\pi n}{q})\ell) = \Psi(x + \frac{2\pi n}{q}). \quad (7.4)$$

Откуда $B_m = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \exp(-i \frac{2\pi mn}{q}) \Psi(x + \frac{2\pi n}{q})$.

В итоге получаем основное соотношение для $\bar{\Psi}(x)$:

$$\bar{\Psi}(x) = \exp(-ik\cos x) \sum_{n=0}^{q-1} \gamma_n \Psi(x + \frac{2\pi n}{q}) \quad (7.5)$$

где
$$\gamma_n = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \exp\left(-i \frac{2\pi p}{q} m^2 - i \frac{2\pi mn}{q}\right).$$

Перепишем (7.5) в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\bar{\Psi}\left(x + \frac{2\pi m}{q}\right) = \sum_{n=0}^{q-1} S_{mn} \Psi\left(x + \frac{2\pi n}{q}\right). \quad (7.6)$$

S_{mn} - матрица, имеющая вид:

$$S = \begin{pmatrix} \beta_0 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \beta_{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{q-1} \\ \gamma_{q-1} & \gamma_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{q-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

$$\beta_j = \exp(-ik \cos(x + \frac{2\pi j}{q})), \quad S_{mn} = \beta_m \gamma_{n-m}.$$

В силу унитарности матрицы S , ее собственные значения $\lambda_j(x) = \exp(i\alpha_j(x))$, $|\lambda_j| = 1$. Подчеркнем, что λ_j в общем случае, как показывается далее, зависит от x .

Матрицу S удобно представить в виде

$$S_{mn} = \sum_{\ell=0}^{q-1} Q_{m\ell} e^{i\alpha_\ell} Q_{\ell n}^{-1}, \quad (7.8)$$

где Q - некоторая унитарная матрица ($Q^{-1} = Q^+$) размерности $q \times q$ с элементами Q_{mn} , зависящими от x .

Введем в рассмотрение вектор-столбец $\Phi(x, t)$ с элементами $\Phi_m(x, t) = \Psi\left(x + \frac{2\pi m}{q}, t\right)$. Из (7.6) и (7.8) находим зависимость Φ_m от времени:

$$\Phi_m(x, t) = \sum_{n, \ell=0}^{q-1} Q_{mn} \exp(i\alpha_n(x)t) Q_{\ell n}^* \Phi_\ell(x, 0). \quad (7.9)$$

Зная $\Phi_m(x, t)$ можно найти зависимость импульса и энергии ротатора от времени:

$$p(t) = -\frac{i}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Phi_m(x, t) dx, \quad (7.10)$$

$$E(t) = -\frac{1}{2q} \sum_{m=0}^{q-1} \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_m(x,t) dx . \quad (7.11)$$

Непосредственно из (7.10) и (7.11) получаем

$$p(t) = p(0) + a_1 t + b_{10} + \sum_{m, m_1=0}^{q-1} P_{mm_1}(t) , \quad (7.12)$$

где

$$b_{10} = -\frac{i}{q} \sum_{m, \ell, \ell_1} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \Phi_\ell(x,0) \Phi_{\ell_1}^*(x,0) Q_{\ell_1 m} Q_{\ell m}^* \right\} ;$$

$$a_1 = \frac{1}{q} \sum_{m, \ell, \ell_1} \int_0^{2\pi} \alpha'_m \left\{ \Phi_\ell(x,0) \Phi_{\ell_1}^*(x,0) Q_{\ell_1 m} Q_{\ell m}^* \right\} dx ; \quad (7.13)$$

$$P_{mm_1}(t) = -\frac{i}{q} \sum_{n, \ell, \ell_1} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \Phi_{\ell_1}^*(x,0) \Phi_\ell(x,0) Q_{\ell_1 m_1} Q_{nm_1}^* Q'_{nm} Q_{\ell m}^* \exp(i(\alpha_m - \alpha_{m_1})t) \right\}$$

Здесь и далее штрих означает производную по x .

Так как α_m в общем случае зависит от x , то на асимптотически больших временах $P_{mm_1}(t)$ (для $m \neq m_1$) выражается через интеграл от быстроосциллирующей функции и, следовательно, при больших t $P_{mm_1}(t) = P_{mm_1}(0) \delta_{mm_1} + O(t^{-1})$. На основе сказанного легко находится асимптотическая зависимость импульса ротатора от времени:

$$p(t) = a_1 t + b_1 + p(0) , \quad (7.14)$$

где
$$b_1 = b_{10} + \sum_{m=0}^{q-1} P_{mm}(0) .$$

Аналогичным образом определяется зависимость $E(t)$ на больших временах:

$$E(t) = \eta t^2 + a_2 t + b_2 + E(0) . \quad (7.15)$$

Приведем выражения только для a_2 и η , структура b_2 аналогична b_1 .

$$a_2 = -\frac{i}{q} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \sum_{m, \ell, \ell_1=0}^{q-1} \left[\frac{1}{2} \alpha_m'' \Phi_{\ell_1}^*(x, 0) \Phi_{\ell}(x, 0) Q_{\ell_1 m} Q_{\ell m}^* + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_m' \Phi_{\ell_1}^*(x, 0) Q_{\ell_1 m} (\Phi_{\ell}(x, 0) Q_{\ell m}^*)' \right] + \right. \\ \left. + \sum_{m, \ell, \ell_1, n=0}^{q-1} \left[\alpha_m' \Phi_{\ell_1}^*(x, 0) \Phi_{\ell}(x, 0) Q_{\ell_1 m} Q_{nm}^* Q_{nm}' Q_{\ell m}^* \right] \right\}; \quad (7.16)$$

$$\eta = \frac{1}{2q} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \sum_{\ell, \ell_1, m=0}^{q-1} (\alpha_m')^2 \Phi_{\ell_1}^*(x, 0) \Phi_{\ell}(x, 0) Q_{\ell_1 m} Q_{\ell m}^* \right\} \geq 0.$$

Полученные выражения для энергии и импульса ротатора являются универсальными и дают вид асимптотики на больших временах. Из анализа выражения (7.16) для коэффициента η , который определяет асимптотику, видно, что он равен нулю, когда все λ_j , а значит и α_m , не зависят от x ($\lambda_j = \text{const}$). Кроме того, $\eta = 0$ в случае, когда хотя бы одно значение $\lambda_n = \text{const}$ и начальное распределение удовлетворяет специальному условию $\lambda_n \Psi_{\lambda_n}(x) = \exp(-ik \cos x) \sum_{m=0}^{q-1} \gamma_m \Psi_{\lambda_n}(x + \frac{2\pi m}{q})$.

Перейдем теперь к нахождению спектра квазиэнергий /56/. Из (7.5) следует, что волновые функции с определенной квазиэнергией в момент времени $t = 0$ представимы в виде

$$\Psi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, 0) = \sum_{n=0}^{q-1} C_n^j(x_0) \delta_{2\pi}(x + x_0 + \frac{2\pi n}{q}), \quad (7.17)$$

где

$$\delta_{2\pi}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

Квазиэнергия $\varepsilon_j(x_0)$ и коэффициенты $C_n^j(x_0)$ определяются

из следующей системы линейных уравнений:

$$\exp(-\varepsilon_j(x_0)T) C_n^j(x_0) = \sum_{m=0}^{q-1} \tilde{T}_{nm} C_m^j(x_0) \quad (7.18)$$

где $\tilde{S}_{nm} = \beta_n(x_0) \chi_{n-m}$. Матрица \tilde{S} унитарна и ее собственные значения $\tilde{\lambda}_j(x_0) = \exp(i\tilde{\alpha}_j(x_0))$ определяют спектр квазиэнергий

$$\varepsilon_j(x_0) = -\frac{\tilde{\alpha}_j(x_0)}{T} \quad (7.19)$$

Здесь x_0 — непрерывный параметр: $0 \leq x_0 < 2\pi$.

Из (7.20) следует, что спектр квазиэнергий имеет дискретные уровни только в том случае, когда матрица \tilde{S} имеет собственные значения $\tilde{\lambda}_j = \text{const}$. Используя явный вид \tilde{S} , нетрудно показать, что для любых p/q , (кроме случая $p/q = 1/2$, который будет рассмотрен отдельно) $\text{Sp } \tilde{S}^2 = \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{\lambda}_j^2$ зависит от непрерывного параметра x_0 , т.е. существуют $\tilde{\lambda}_j \neq \text{const}$. Следовательно, спектр квазиэнергий (7.20) в резонансе непрерывен. Наряду с этой непрерывной компонентой спектр может иметь дискретные уровни, число которых равно числу собственных значений $\tilde{\lambda}_j = \text{const}$, откуда ясно, что при резонансе p/q ($p/q \neq 1/2$) имеется не более $q-1$ дискретных уровней.

Зная $\Psi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, 0)$, легко находим $\Psi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, \tau)$:

$$\Psi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, \tau) = \exp(-i\varepsilon_j(x_0)\tau) \varphi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, \tau), \quad (7.20)$$

где $\varphi_{\varepsilon_j(x_0)}$ — собственная функция квазиэнергии $\varepsilon_j(x_0)$ периодическая по времени с периодом T :

$$\varphi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, \tau) = \exp(i\varepsilon_j(x_0)\tau - ik \cos x \vartheta(\tau - T)) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(-i\frac{n^2\tau}{2} + inx); \quad 0 \leq \tau \leq T; \quad (7.21)$$

A_n — фурье-компоненты $\Psi_{\varepsilon_j(x_0)}(x, \tau=0)$ и $\vartheta(\tau - T)$ — единичная ступенчатая функция.

Интересно отметить, что $\langle |n| \rangle$ в резонансе растет пропорционально времени ($\langle |n| \rangle \sim t$), поэтому, если бы невозмущенная система обладала спектром $E_n \sim n^m$, ($m > 1$, целое), то ее

энергия росла бы со временем по закону $E(t) \sim t^m$.

Точный вид $\lambda_j(x)$ найден в трех случаях.

1) $p/q = 1$ - основной резонанс. Зависимость энергии от времени (основное состояние) дается формулой (7.2). Спектр квазиэнергий имеет вид:

$$\varepsilon(x_0) = \frac{k}{4\pi} \cos x_0 \quad (7.22)$$

Так как $\Psi_{\varepsilon(x_0)}(x, t=0) = \delta_{2\pi}(x+x_0)$, то собственная функция квазиэнергии согласно (7.21) определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon(x_0)}(x, \tau) = & \exp(i\varepsilon(x_0)\tau - ik \cos x \vartheta(\tau - T)) \cdot \\ & \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i \frac{n^2}{2} \tau + in(x+x_0)), \end{aligned} \quad (7.23)$$

где $0 \leq \tau \leq T$, $T = 4\pi$.

2) $p/q = 1/4$. Из (7.5) следует

$$\dot{\Psi}(x) = \exp(ik \cos x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\frac{\pi}{4}} \Psi(x) + e^{i\frac{\pi}{4}} \Psi(x+\pi)) \quad (7.24)$$

(При $q=4\ell$, ℓ - целое, коэффициенты $\gamma_{2m+1} = 0$ и S имеет размерность $q/2 \times q/2$). Собственные значения $\lambda_{\pm} = \hat{\lambda}_{\pm} = \exp(\pm i\alpha(x) - i\frac{\pi}{4})$, где

$$\cos(\alpha(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(k \cos(x)) \quad (7.25)$$

При $k \ll 1$ имеем $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \approx -\text{sign}(\alpha) \frac{k^2}{2} \sin 2x$, и если в начальный момент времени $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (основное состояние), то $\eta \approx k^2/16$

Для этих же начальных условий при $k \gg 1$ имеем $\eta \approx k^2/12$. Из

(7.19) находим спектр квазиэнергий

$$\varepsilon_{\pm}(x_0) = \frac{1}{4} \mp \frac{\alpha(x_0)}{\pi} \quad (7.26)$$

Для $k \ll 1$ спектр $\varepsilon_{\pm}(x_0) \approx \frac{1}{4} \mp (\frac{1}{4} + \frac{k^2}{4\pi} \cos^2 x_0)$ представляет собой две узких зоны шириной $\sim k^2$. Для $k \geq \pi$ имеем две широ-

кие полосы: $\frac{1}{2} \leq \varepsilon(x_0) \leq 1$; $\frac{3}{2} \leq \varepsilon(x_0) \leq 2$. Зависимость

$\Psi_{\varepsilon_{\pm}(x_0)}$ от времени дается формулой (7.21), где A_n - фурье-компоненты функции $\Psi_{\varepsilon_{\pm}(x_0)}(x, 0) = C_1(x_0)\delta_{2\pi}(x+x_0) + C_2(x_0)\delta_{2\pi}(x+x_0+\pi)$ здесь (C_1, C_2) - собственный вектор матрицы \tilde{S} .

3) В случае $P/q = 1/2$ из (7.5) получаем:

$$\bar{\Psi}(x) = \exp(-ik \cos x) \Psi(x+\pi) . \quad (7.27)$$

Видно, что через два толчка система возвращается в исходное состояние. Собственные значения $\lambda_{1,2} = \tilde{\lambda}_{1,2} = \pm 1$. Спектр квазиэнергий состоит из двух дискретных уровней с квазиэнергиями

$\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1/2$. Собственными функциями уровня ε_1 , точнее, их значениями в момент времени $\tau = mT$, являются функции

$\Psi_{\varepsilon_1(x)} = g_{\pm}(x)(1 \pm \exp(-ik \cos x))$, где $g_{\pm}(x)$ - произвольная функция, удовлетворяющая соотношению $g_{\pm}(x+\pi) = \pm g_{\pm}(x)$. Собственными функциями уровня ε_2 являются $\Psi_{\varepsilon_2}(x) = g(x) \cdot (1 \pm \exp(-ik \cos x))$. Каждый уровень бесконечнократно вырожден, а функции Ψ_{ε_1} и Ψ_{ε_2} составляют полный набор.

По-видимому, вырождение собственных значений, (когда какие-то $\lambda_j = \text{const}$) является случайным и для других резонансов не имеет места. Действительно, при наличии некоторых $\lambda_j = \text{const}$ при произвольном начальном распределении $\Psi(x)$ часть энергии принадлежала бы дискретной компоненте спектра квазиэнергий. В соответствии с этим в зависимости энергии от времени присутствовали бы периодические незатухающие во времени осцилляции (как в случае $P/q = 1/2$). В проведенных численных экспериментах такой эффект не был обнаружен. При $k \gg 1$ зависимость $E(t)$ была плавной функцией времени, при $k \ll 1$ размер изломов уменьшался со временем (см. рис. 13).

Итак, в квантовом резонансе ($P/q \neq 1/2$) энергия системы растет до бесконечности по асимптотическому закону $E(t) \sim t^2$,

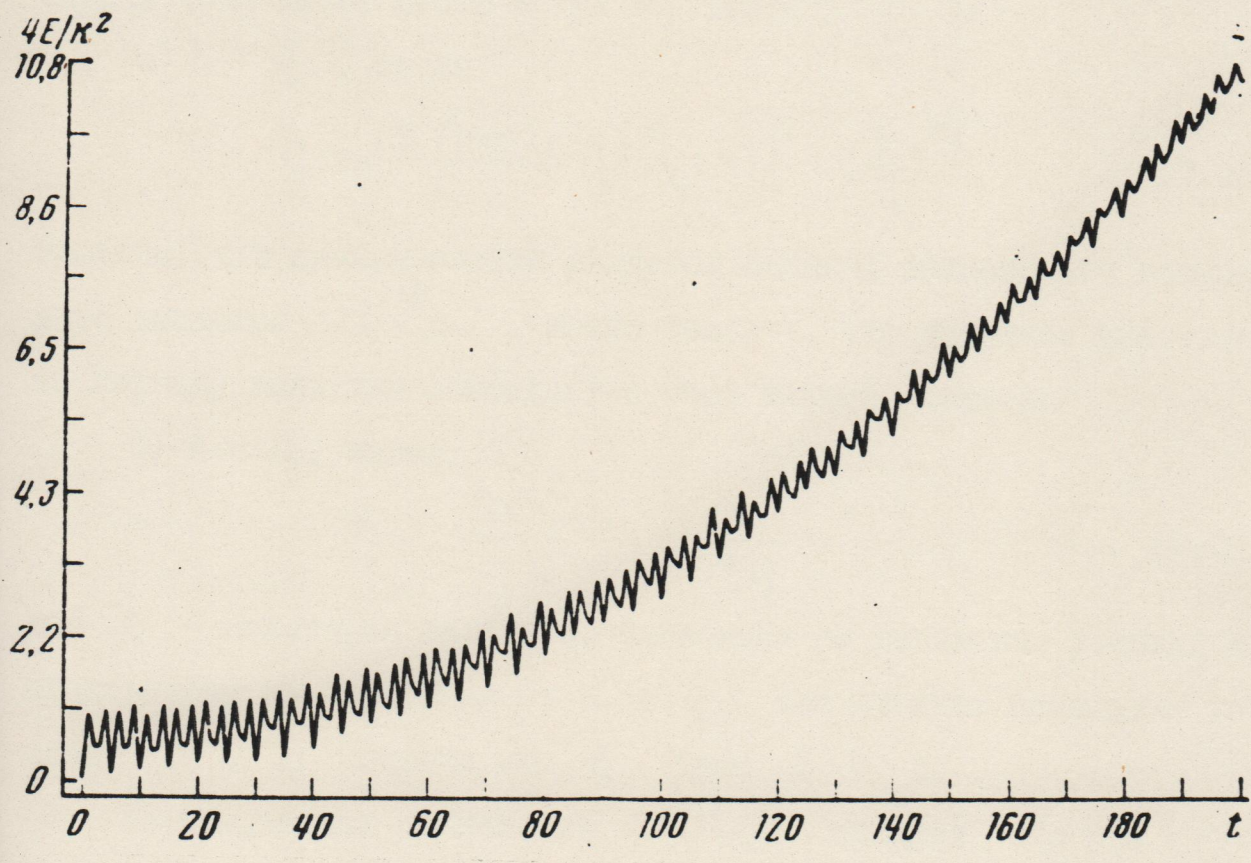


Рис. 13. Зависимость энергии квантового ротатора E от времени в случае квантового резонанса:
 $T = 4\pi \frac{2}{5}$, $k = 0.5$, $t = 200$.

спектр квазиэнергий при этом непрерывен.

Для величин $(\alpha')^2_{\max} \equiv \max_{0 \leq j \leq q-1} \left| \frac{\partial \alpha_j(x)}{\partial x} \right|^2$ (черта означает усреднение по x) из явного вида S удается получить следующие оценки (они имеют место и для $\tilde{\alpha}_j$ матрицы \tilde{S}):

а) $k \ll q$, тогда

$$\eta \sim \frac{(\alpha')^2_{\max}}{2} \geq q |J_q(k)|^2 \sim \left(\frac{k}{q}\right)^{2q}. \quad (7.28)$$

Заметим, что данная оценка является оценкой наименьшего возможного значения $(\alpha')^2_{\max}$. Можно ожидать, что истинное значение по порядку величины совпадает с этой нижней оценкой;

б) $k \gg q$, имеем:

$$\eta \sim \frac{(\alpha')^2_{\max}}{2} \approx \frac{k^2}{\xi q}, \quad (7.29)$$

где ξ — некоторая величина, зависящая от начальных условий и практически не зависящая от k и q . Для плавных начальных условий $\Psi(x, 0)$ оценка для ξ дает $\xi \sim 5$.

Из полученных оценок для $(\alpha')^2_{\max}$ следует, что при $k \ll q$ (p, q — любые взаимно простые числа) спектр квазиэнергий состоит из q экспоненциально узких зон шириной $\Delta \varepsilon \sim \left(\frac{k}{q}\right)^q$. В случае $k \gg q$ для нахождения зонной структуры требуется знание детальных свойств собственных значений матрицы \tilde{S} . К сожалению, явный вид $\lambda_j(x)$ найти не удалось.

Из сказанного выше (см. (7.28), (7.29)) следует, что $\eta \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty, k = \text{const}$. Это означает, что для иррациональных значений $T/4\pi$ величина η равна нулю. В этом случае движение системы носит совершенно иной характер (§ I).

Пусть теперь $T = \frac{4\pi p}{q} + \delta$, где $|\delta| \ll 1$, тогда из-за малости набег фаз следует, что в течение $t_r \sim (d\delta)^{-1}$ ($d \sim \max_{0 \leq t \leq t_r} E_t$)

характеристики системы меняются во времени так же, как и в случае точного резонанса $T = \frac{4\pi\rho}{q}$, что и отчетливо наблюдалось в численном эксперименте. Из условия $\eta t_r^2 \geq k^2 t_r$ найдем величину расстройки δ_r , при которой влияние резонанса ρ/q оказывается значительным (будем считать, что $d \sim k^2 t_r$). При $k > q$ (в противном случае отстройка от резонанса экспоненциально мала: $\delta \sim (\frac{k}{q})^4 q$) имеем:

$$\delta_r \approx \frac{1}{k^2 q^2} \quad (7.30)$$

Для основного резонанса ($q = 1, \rho = 0$) $T = \delta$ и из условия (7.30) следует, что $T \leq k^{-2}$. Как видно, в области квазиклассики ($k \rightarrow \infty, T \rightarrow 0, kT = \text{const}$) неравенство (7.30) не выполняется, т.е. влияние основного резонанса несущественно. Можно найти суммарную величину всех расстроек:

$$\delta_\Sigma \approx \sum_{q=1}^k \sum_{\rho=1}^{q-1} \delta_r(\rho, q) \sim \frac{\ln k}{k^2} \quad (7.31)$$

Так как $\delta_\Sigma \ll 1$, то отсюда следует, что в случае иррациональных $T/4\pi$ резонансы слабо влияют на движение системы.

Проведенные численные эксперименты подтвердили полученные оценки (7.28), (7.29) и позволили уточнить значение ξ . Так для $k < q$ экспериментально хорошо прослеживалась квадратичная зависимость энергии ротатора от времени (см. рис. 13). При $k \ll q$ значения η слишком малы и квадратичный рост энергии на конечных временах $t \leq 200$ практически не заметен. Поэтому трудно говорить о количественном согласии с оценкой (7.28), однако можно утверждать, что η уменьшается значительно быстрее, чем k/q .

Для $k \geq q$ зависимость $\eta(k, q)$ аппроксимируется аналитической оценкой (7.29). Экспериментальные данные показывают неплохое согласие с этой формулой, при этом значение ξ меняется сла-

бо и не зависит явно от k и q . Среднее значение ξ равно $\langle \xi \rangle = 2.4$.

Отдельно проверялось, насколько зависит η от значений p при одном и том же значении q . Как и ожидалось, согласно (7.28-7.29), зависимости от p практически нет.

В области квазиклассики ($k \rightarrow \infty$, $\Gamma = \frac{4\pi}{q} \rightarrow 0$ при $kT = \text{const} \gg 1$) для $k \gtrsim q$ экспериментальные данные показывают, что линейный начальный рост энергии ротатора с $Dq \approx 1$ на больших временах сменяется квадратичным с коэффициентом η близким к теоретической оценке (7.29).

Проведенные исследования показывают, что для квантовых резонансов, система которых является всюду плотной, асимптотическая зависимость энергии ротатора от времени является универсальной и описывается квадратичным законом (7.15). Это означает, что в резонансе отсутствует квантовая граница устойчивости ($k \approx 1$) /14/ наблюдавшаяся в нерезонансном случае /49/, § I. Важно отметить также, что отсутствует и классический критерий устойчивости ($kT < 1$), хотя при этом система может находиться в глубоко квазиклассической области. В то же время для нелинейной системы с классическим гамильтонианом (1.2) согласно теории КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера /65-67/) и численным экспериментам /6/ при малом возмущении движение является устойчивым и энергия системы ограничена. Все это указывает на существенное отличие в поведении квантовой системы по сравнению с классической, во всяком случае на больших временах.

Для относительно небольших t , когда еще нет выхода на асимптотику, характер поведения системы может быть довольно сложным и сильно зависит от параметров k , Γ . Так, например, квадратичный рост энергии системы наиболее четко прослеживается, если $k \gtrsim q \approx 1$ и $\Gamma \gtrsim 1$. В этом случае энергия сразу же

растет пропорционально t^2 . Если же $k < q$, то энергия системы практически осциллирует, квадратичный рост ηt^2 мал из-за $\eta \ll 1$.

Интересно проследить, каким станет движение при $p \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, $p/q = \text{const}$, что соответствует переходу к нерезонансному значению T . В этом случае, как показали численные эксперименты в /49/, движение системы совершенно иное, чем в резонансе. Аналитическое исследование, однако, наталкивается на большие трудности в силу того, что необходимо знать точное решение в резонансе на всех временах, а не только асимптотически. С другой стороны можно также рассмотреть, как будет меняться структура спектра квазиэнергий при переходе к высоким резонансам $Q \gg 1$. При $Q > k$ ширина каждой зоны квазиэнергии экспоненциально мала ($\Delta \varepsilon \sim \sqrt{\eta} \approx (\frac{k}{q})^q$ см. (7.28)), одновременно мала и суммарная ширина всех Q зон. Возможно это указывает на то, что спектр квазиэнергий в нерезонансном случае содержит дискретную компоненту. В случае $k \gg Q$ вопрос о перекрытии и ширине зон квазиэнергий остается открытым.

Сделаем замечание о том, в каких системах возможно появление квантовых резонансов при воздействии периодического дельтаобразного во времени возмущения (которое для одномерного случая представимо в виде $f(x) \delta_T(x)$, где $f(x)$ — произвольная функция координаты x). Нетрудно показать, что для существования резонанса необходимо, чтобы спектр невозмущенного гамильтониана H_0 был дискретным и имел вид полинома от квантового числа с рациональными коэффициентами. При этом также требуется, чтобы было выполнено условие вида $\Psi_m \Psi_n = \Psi_{m+n}$ для собственных функций гамильтониана H_0 . Тогда имеем: $\exp(i \frac{2\pi \ell(m+n)}{q}) \Psi_{m+n} = (\exp(i \frac{2\pi \ell m}{q}) \Psi_m) (\exp(i \frac{2\pi \ell n}{q}) \Psi_n)$ и на основе этого равенства, аналогично рассмотренному случаю

удается свести отображение через период к умножению на матрицу. Вполне вероятно, что последнее условие можно ослабить. Одним из примеров систем с квантовым резонансом является модель (4.1) /45/.

Г Л А В А Ш

ДИФФУЗИОННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

§ 8. Двумерная модель.

Аналитические исследования и результаты численных экспериментов (см. главу II) с моделью (I.I) показали, что статистические свойства квантовой системы оказываются значительно более слабыми чем классической. Вместе с тем представляется интересным исследовать каким образом такая система будет воздействовать на другую степень свободы при наличии слабой связи. В случае когда связь является слабой ее влиянием на первую степень свободы можно пренебречь и тогда возбуждение второй степени свободы будет определяться статистическими свойствами движения по первой степени свободы.

В качестве примера рассмотрим систему с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \omega \hat{p}_2 + (k \cos x_1 + \varepsilon \cos x_1 \cos x_2) \delta_T(\tau), \quad (8.1)$$

где $\hat{p}_1 = -i \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\hat{p}_2 = -i \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\hbar = 1$.

Решая уравнение Шредингера с гамильтонианом (8.1) получим отображение для волновой функции через период:

$$\Psi(x_1, x_2, t+1) = \exp(-i(k \cos x_1 + \varepsilon \cos x_1 \cos x_2)) \times \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} A_{n_1, n_2}(t) \exp\left[i(n_1 x_1 + n_2 x_2 - \frac{T}{2} n_1^2 - \omega T n_2)\right], \quad (8.2)$$

которое и использовалось в численных экспериментах /53/. Рассмотрим

случай, когда $\varepsilon \ll 1$, а по второй степени свободы начально возбужден только один основной уровень ($A_{n_1 n_2} = A(n_1) \delta_{n_2, 0}$).

Тогда число возбужденных уровней определяется статистическими свойствами системы (8.1). Действительно, из уравнений для гейзенберговских операторов имеем:

$$\hat{p}_2(t) = \hat{p}_2(0) + \varepsilon \sum_{t_1=1}^{t-1} \cos \hat{x}_1(t_1) \sin(\hat{x}_2 + \omega T t_1) \quad (8.3)$$

Из (8.3) получим число возбужденных уровней n_2

$$\langle n_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\sum_{t_1=0}^t \left(\sum_{\tau=0}^{t-t_1} R_{t_1}(\tau) \cos \omega T \tau - \frac{1}{2} R_{t_1}(0) \right) \right] \quad (8.4)$$

В классическом случае ввиду экспоненциального затухания корреляций в суммах в (8.4) основной вклад давали члены с $\tau = 0$ и поэтому происходило диффузионное возбуждение как по первой (I.4), так и по второй степени свободы:

$$\langle n_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon^2}{4} t \quad (8.5)$$

В квантовой системе наличие остаточных корреляций (см. рис. 9) приводит к резкому ограничению роста энергии по первой степени свободы при $t > t^*$ (влиянием второй степени свободы можно пренебречь, т.к. $\varepsilon \ll \hbar$), но вопрос о том, как они повлияют на возбуждение второй степени свободы требует дополнительных исследований. В случае если частотный спектр $\tilde{R}(\nu)$ корреляций $R(\tau)$ является чисто дискретным (это может быть в случае когда спектр квазиэнергий системы (I.1) содержит только дискретные уровни), то для значений параметра ωT совпадающих с дискретными частотами $R(\tau)$ будет наблюдаться квадратичный рост $\langle n_2^2 \rangle \sim t^2$. Если же спектр $\tilde{R}(\nu)$ содержит непрерывную компоненту, что может иметь место только в том случае, когда спектр квазиэнергий оказывается непрерывным, то $\langle n_2^2 \rangle$ растет диффузионно со временем ($\langle n_2^2 \rangle = D \frac{\varepsilon^2}{4} t$), причем коэффициент диффузии $D \propto \tilde{R}(\omega T)$.

Движение квантовой системы (8.1) исследовалось численно на основе формулы (8.2). При этом параметр ε выбирался равным $\varepsilon = 10^{-5}$ (изменение ε в интервале $10^{-5} \div 10^{-3}$ оставляло неизменной величину $4 \langle n_2^2 \rangle / \varepsilon^2$ с точностью до 0,1%). В счете использовалось конечное число уровней $-400 \leq n_1 \leq 400$, $-2 \leq n_2 \leq 2$, при этом ввиду малости ε среднее $\langle n_2^2 \rangle$ определялось только вероятностью W_{n_2} нахождения на уровнях $n_2 = \pm 1$. В течение всего вре-

мени счета $W_{n_2} = \pm 2 < 10^{-14}$ и поэтому влиянием уровней с $n_2 = \pm 2$ можно было пренебречь (эти уровни использовались для контроля точности счета). Точность счета контролировалась также по сохранению вероятности $W = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} |A_{n_1 n_2}|^2 = 1$. Во всех случаях ошибка δW для полной вероятности не превышала 10^{-3} , а динамика возбуждения первой степени свободы (например, $\langle n_1^2 \rangle$) совпадала со случаем $\varepsilon = 0$ с точностью до 0.1%.

Проведенные численные эксперименты показали, что возбуждение второй степени свободы существенно зависит от параметра ωT . При этом можно выделить три различных ситуации:

1. По второй степени свободы также как и по первой наблюдается квантовое ограничение диффузии; при $k = 5$, $T = 1$, это имело место для $\omega T = 1, 1.5, 1.87, 2.42, 2.37$.

2. Для некоторых значений ωT наблюдалось резонансное возбуждение второй степени свободы ($\langle n_2^2 \rangle \sim t^2$), что при $k = 5$, $T = 1$ имело место для $\omega T = 0, 0.5, 1.27, 1.71$ (см. рис. 14).

3. В некоторых случаях ($k = 5$, $T = 1$, $\omega T = 2.4, 2.5, 2.52$) наблюдалось диффузионное возбуждение, причем для $\omega T = 2.5$ $\langle n_2^2 \rangle$ росло практически линейно со временем вплоть до $t = 2000$ (см. рис. 15), тогда как ограничение диффузии по первой степени свободы происходило всего через несколько толчков ($t^* = 5$). Для $\omega T = 2.4, 2.52$ линейный рост наблюдался в течение всего времени счета ($t = 750$), со средними коэффициентами диффузии $D_q/D_{cl} \approx 0.7$, $D_q/D_{cl} \approx 2$ соответственно ($D_{cl} \approx \varepsilon^2/4$).

При изменении начальных условий существенных изменений движения не происходило (например, резонансы имели место при тех же значениях параметра ωT), но при изменении параметров k, T (даже при $kT = \text{const}$) зависимость от ωT становилась совершенно другой (так, например, при $k = 10$, $T = 0.5$, $\omega T = 1.27$ вместо резонанса наблюдалось ограничение диффузии). Исключением являлось

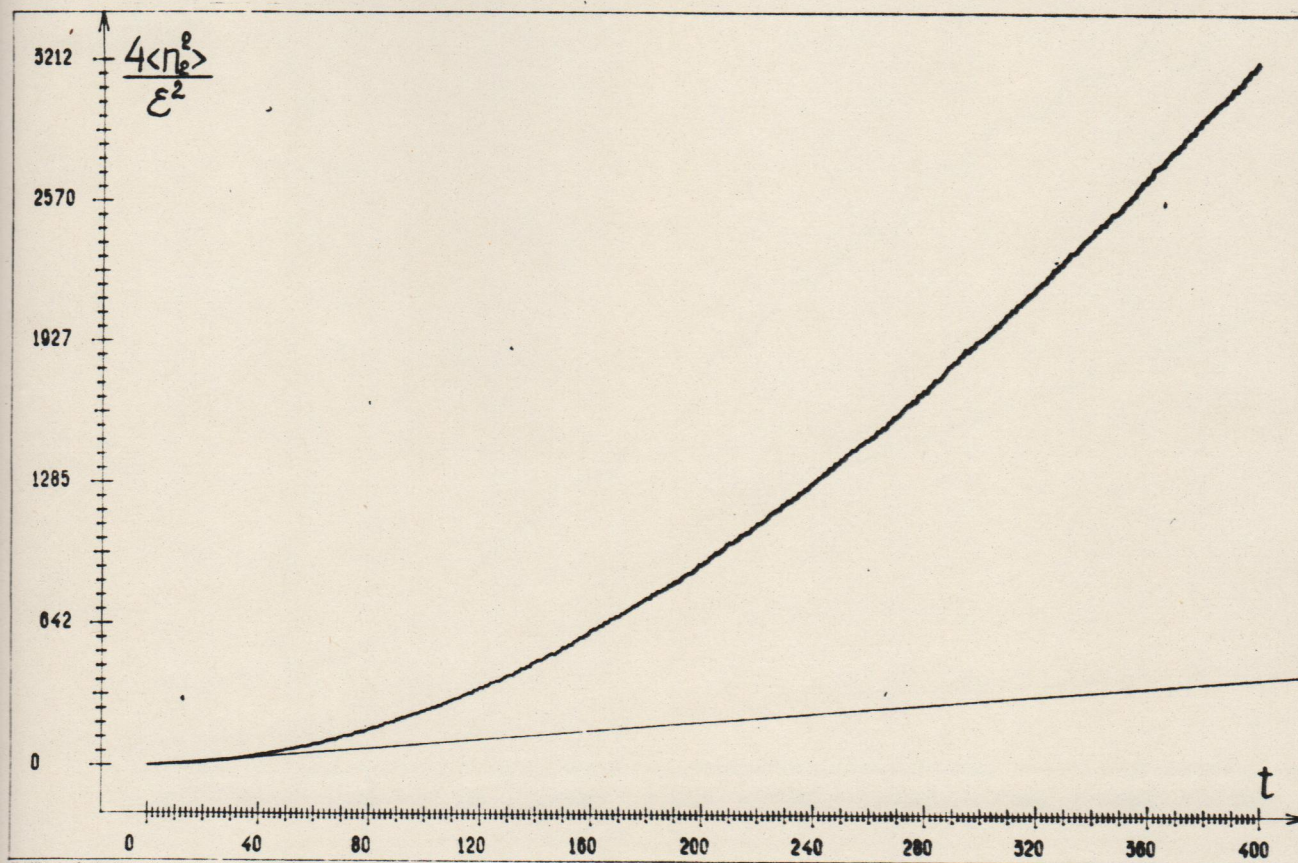


Рис. 14. Зависимость $\langle n_2^2 \rangle$ от времени для системы (8.1) с $k = 5$, $\Gamma = 1$, $\omega\Gamma = 1.27$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $t = 400$.
Прямая линия соответствует классической диффузии (8.5).

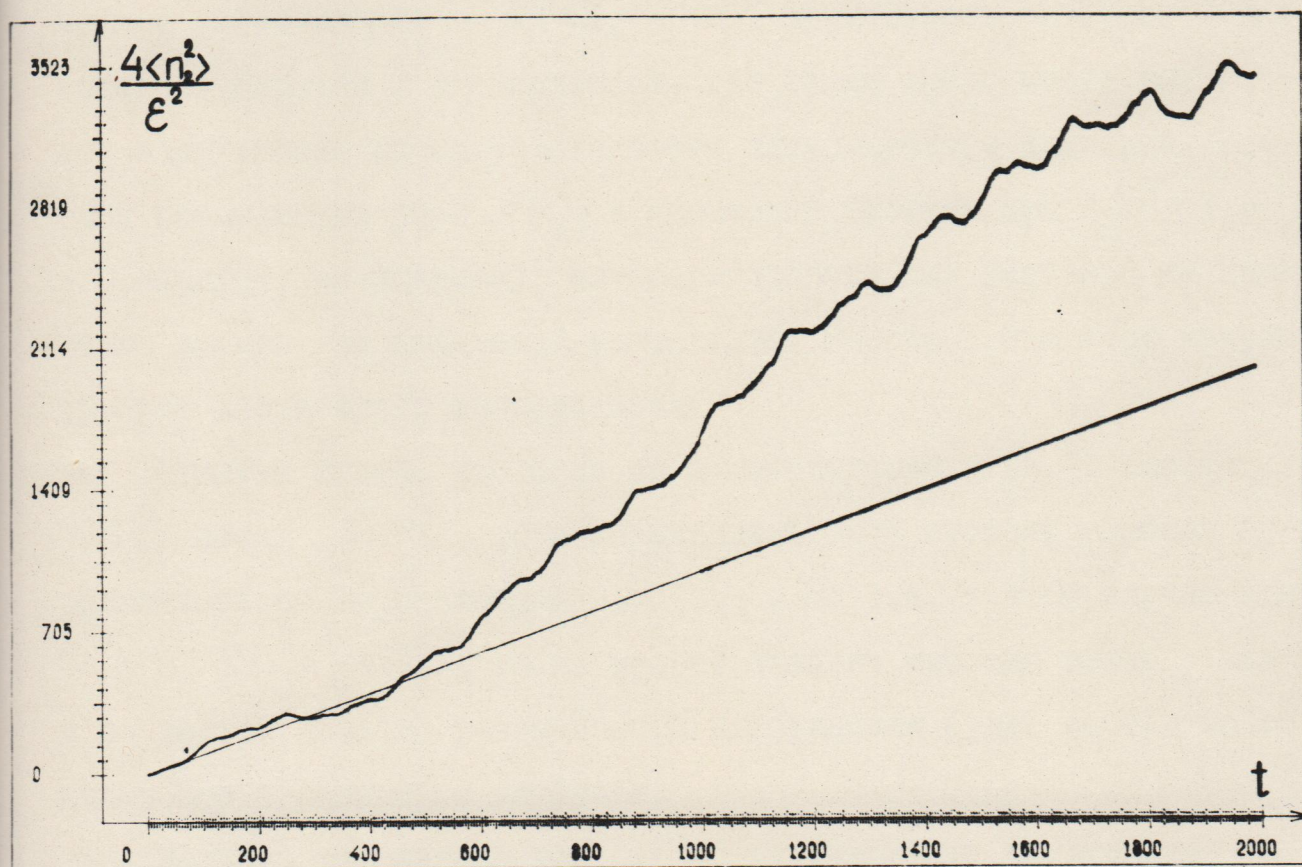


Рис. 15. То же, что и на рис. 14 для $\omega T = 2.5$.

только значение $\omega T = 0$ при котором $\langle n_2^2 \rangle$ росло квадратично со временем для всех использовавшихся значений параметров k, T в областях $k < 1, k > 1$ при $kT < 1$ и $kT > 1$. В области классической устойчивости $kT < 1, k > 1$ зависимость $\langle n_2^2 \rangle$ от t оказывалась близкой к классической, где также имело место резонансное возбуждение из-за устойчивости классического движения. Поэтому резонансный рост $\langle n_2^2 \rangle$ в квантовой системе при $kT > 1, \omega T = 0$ следует, по-видимому, интерпретировать как указание на присутствие дискретной квантовой компоненты. Вместе с тем этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Отметим также, что если бы в гамильтониане (8.1) вместо $\cos \theta_1$ стоял $\sin \theta_1$, то возбуждение второй степени свободы определялось бы корреляциями $\sin \theta_1$. Но т.к. в этом случае при $\omega = 0$ $\langle n_2^2 \rangle \sim \langle n_1^2 \rangle$, то по второй степени свободы также как и по первой, вместо резонансного возбуждения будет иметь место квантовое ограничение диффузии.

Наличие резонансов для $\omega T \neq 0$ указывает на присутствие в спектре корреляций $R(\tau)$ дискретной компоненты и как следствие этого (см. выше) — дискретных уровней в спектре квазиэнергий ($\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n = \omega$). Наоборот диффузионный рост $\langle n_2^2 \rangle$ при некоторых значениях ωT указывает на присутствие в спектре квазиэнергий непрерывной зоны с шириной $\Delta \varepsilon_2 \geq 0.02$ ($k = 5, T = 1$). Однако конечность времени счета t_c позволяет разрешать только линии с $\Delta \varepsilon \geq \frac{1}{T t_c}$ и поэтому, строго говоря, можно лишь утверждать, что в зоне квазиэнергий $\Delta \varepsilon_2$ спектр либо непрерывен, либо состоит из близкорасположенных дискретных линий, расстояние между которыми $\Delta \varepsilon_2 \leq 5 \cdot 10^{-4}$. Резюмируя можно сказать, что кроме двух временных масштабов движения квантовой системы (I.1) t_s и t^* (см./40/ и §1) имеется еще один временной масштаб t_w (T_w), на котором все еще сохраняются некоторые слабые статистические свойства, так, напри-

мер, на этих временах происходит диффузионное возбуждение второй степени свободы в (8.1). Существенно, что масштаб t_w намного превышает t^* и t_s ($t_w \gg t^* \gg t_s$), так при $k=5$, $T=1$ имеем $t_s \approx 1$, $t^* \approx 5$, $t_w \approx 2000$ (см. рис. 14). Вопрос о том, чем определяется масштаб t_w , конечен он или бесконечен требует дальнейших исследований. В случае, если $t_w = \infty$, то спектр квантовых корреляций и спектр квазиэнергий будут содержать непрерывную компоненту. Здесь следует отметить, что непрерывность спектра квазиэнергий еще не означает непрерывности спектра корреляций. Так при $T=4\pi$ (случай квантового резонанса § 7) $\Psi(x,t) = \exp(-ikt \cos x) \Psi(x,0)$ и согласно (6.1) спектр корреляций состоит только из одной дискретной линии, в то время как спектр квазиэнергий в этом случае непрерывен.

§ 9. Модель с несоизмеримыми частотами.

Наряду со случаем рассмотренным в предыдущем разделе может иметь место такая ситуация когда движение по одной степени свободы в течение некоторого времени можно считать заданным и периодическим, а движение по другой степени свободы будет тогда уже определяться полем внешних сил. Для системы (8.1) имеет место именно такая ситуация. Действительно, координата χ_2 меняется периодически со временем: $\chi_2(\tau) = \chi_2(0) + \omega\tau$, а динамика первой степени свободы описывается тогда гамильтонианом (1.1) с переменным по времени k : $k(\tau) = k + \varepsilon \cos \omega\tau$. Проведенные исследования показали, что динамика квантовой системы с $k(\tau)$ периодически меняющимся во времени существенно отличается от случаев исследованных в §§ 1-3, когда $k = \text{const}$ и $k \sim t^\alpha$ ($\alpha < 1/2$) и поэтому изучение такой системы представляется интересным и важным для понимания свойств СКС. В классической системе (1.2) с пе-

ременным $k(\tau)$ также как и в случае с постоянным k происходит стохастизация движения при $(k + \varepsilon)T \geq 1$. При этом фаза χ меняется случайным образом, а энергия ротатора растет диффузионно со временем:

$$E(t) = \frac{k_{ef}^2}{4} t + E(0) \quad (9.1)$$

с $k_{ef}^2 \approx k^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}$. Таким образом, динамика классических систем с постоянным и переменным k не имеет принципиальных отличий. Вместе с тем динамика возбуждения квантового ротатора в этих двух случаях оказывается различной.

Так при постоянном k имеет место квантовое ограничение диффузии (см. § I) приводящее к тому, что при $t \gg t^*$ (см. (3.6)) энергия ротатора практически не растет. Численные эксперименты проведенные с моделью (I.1) при $k(\tau) = k + \varepsilon \cos \omega \tau$ показали, что в случае несоизмеримости частот ω и $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ и при $\varepsilon \geq 1$ энергия квантового ротатора растет диффузионно со временем с коэффициентом диффузии близким к классическому. Так, например, при $k = 0$, $\varepsilon = 7$, $\varepsilon T = 7$, $\omega T = 2$ диффузионный рост энергии продолжается в течение всего времени счета $t = 1000$ (см. рис. I6, I7), причем распределение по уровням близко к классическому гауссовскому распределению (I.5), с $k = k_{ef}$. При этом для $k = 7$, $T = 1$, $\varepsilon = 0$ время диффузионного роста составляло всего лишь $t^* \approx 10$. В случае, когда частоты оказывались соизмеримыми ($\omega T = 2\pi p/q$, p, q - целые несоизмеримые числа), наблюдалось квантовое ограничение диффузии, причем время t^* с которого происходит замедление диффузии резко возрастало с ростом q . Так $t^* \approx 60$ при $\omega T = \pi$; $t^* \approx 400$, $\omega T = \frac{2\pi}{3}$; $t^* \approx 450$, $\omega T = \frac{2\pi}{5}$; $t^* > 1000$, $\omega T = \frac{8\pi}{13}$ для $k = 0$, $\varepsilon = 7$, $T = 1$. Интересный режим движения наблюдается при $\omega T = 0.1$. Т.к. время набега фазы $t_p \approx \frac{2\pi}{\omega T} \approx 60 > t^* \approx 10$, то в течение времени $\sim t^*$ наблюдается замедление диффу-

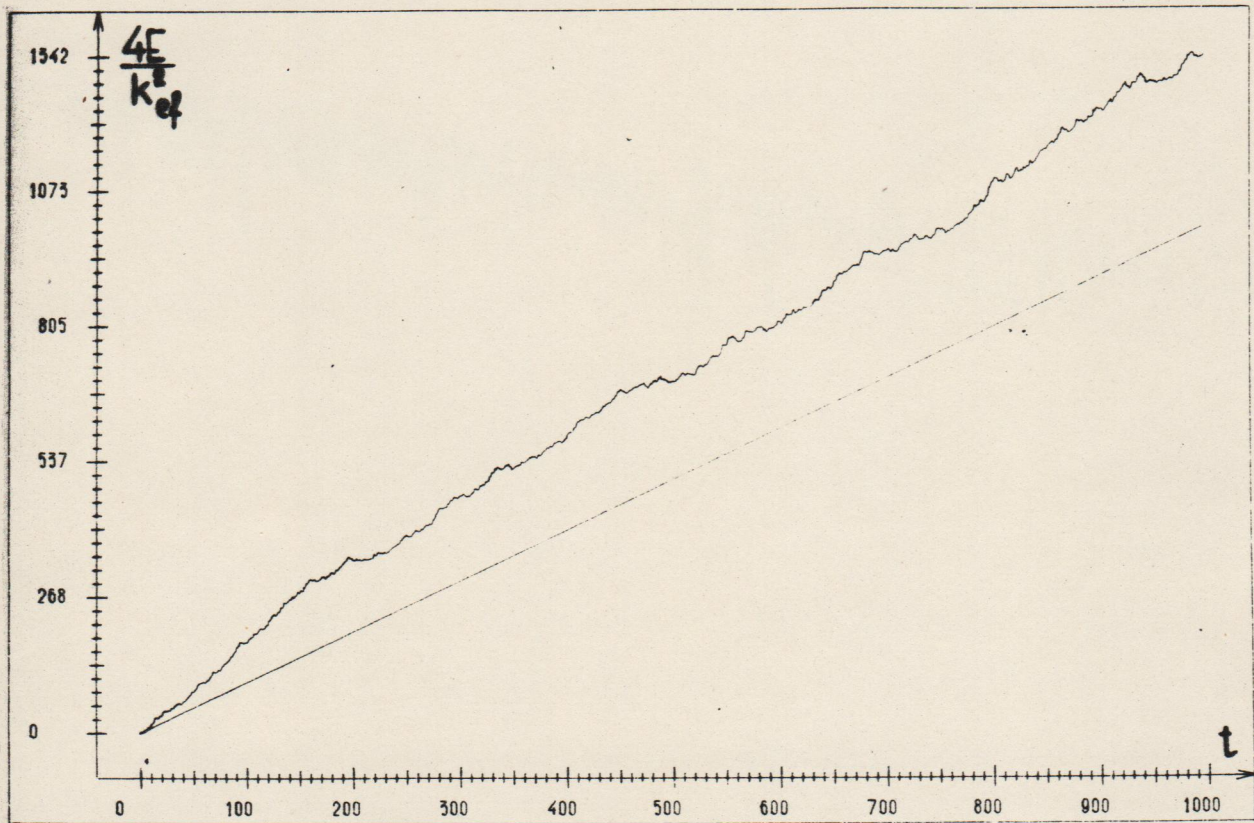


Рис. 16. Зависимость энергии ротатора от времени для системы (I.I) с $k(\tau) = k + \varepsilon \cos \omega \tau$ при $k = 0$, $\varepsilon = 7$, $\varepsilon T = 7$, $\omega T = 2$. Прямая линия соответствует классической диффузии (9.I).

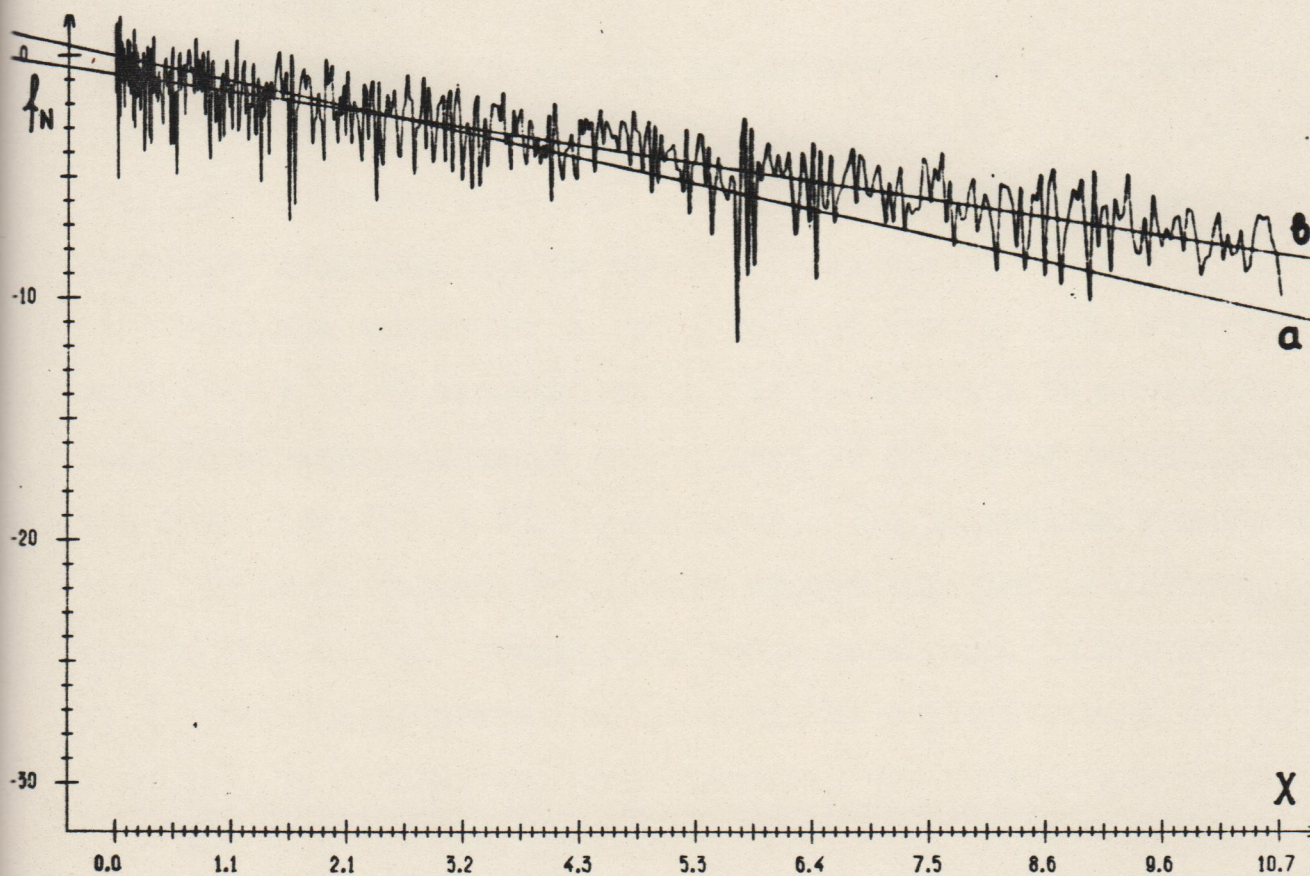


Рис. 17. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (I.1) с $k(\tau) = k + \varepsilon \cos \omega \tau$ в нормированных координатах (см. § I) для значений рис. 16 в момент времени $t = 1000$, прямая "а" соответствует классическому распределению (I.5) с $k = k_{ef}$, прямая "в" - линейная интерполяция, ломаная линия - экспериментальный результат.

зии и рост энергии практически прекращается, но через время $\sim t_p$ изменение фазы становится существенным и энергия вновь возрастает. Таким образом происходит ступенчатый диффузионный рост энергии со временем.

Диффузионный рост энергии наблюдался также и в существенно квантовой области при $k = 0$, $\varepsilon = 3.5$, $\varepsilon T = 7$, $\omega T = 2$ (см. рис. 18). Для небольших значений $\varepsilon \lesssim 4.5$ имело место квантовое ограничение диффузии, причем время t^* возрастало от $t^* \approx 1$ до $t^* > 2500$ при изменении ε от 1 до 4.65 (см. рис. 19). В интервале $1 \leq \varepsilon \leq 4.65$ зависимость t^* от ε близка к экспоненциальной, но экспериментальные возможности не позволяют определить, что будет при $\varepsilon > 4.65$. По-видимому, t^* с дальнейшим увеличением ε будет продолжать возрастать экспоненциально (некоторые оценки для $t^*(k_{ef})$ приведены в конце параграфа). Однако поскольку t^* резко возрастает (на три порядка) с увеличением ε от 1 до 3.5, то приближенно можно считать, что имеется некоторое $\varepsilon_{cr} \approx 3.5$ выше которого происходит фактически неограниченное возбуждение квантового ротатора. Это значение ε_{cr} всего в $S_q = \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_l} \approx 3.5$ раз превышает величину $\varepsilon_l \approx 1$, соответствующую квантовой границе устойчивости /14/. Так для параметров $k = 0$, $\varepsilon = 1$, $T = 5.6$, $\omega T = 2$ отношение квантового и классического коэффициентов диффузии в момент времени $t = 200$ оказывается равным $D_q/D_{cl} \approx 2.4 \times 10^{-4} \ll 1$.

При $k > \varepsilon \geq 2$ происходит диффузионное возбуждение ротатора с $D_q \approx D_{cl}$ и гауссовским распределением по уровням также близким к классическому (см. рис. 20, 21). Отметим, что для $k = 10$, $T = 0.5$, $\varepsilon = 0$, время квантового ограничения диффузии $t^* \approx 25$, в случае же когда $\varepsilon = 2.5$ ($\omega T = 1$) рост энергии продолжается в течение всего времени счета $t = 1000$ (рис. 20). Корреляционная функция $R(\tau)$, определенная согласно (6.1), для этого случая

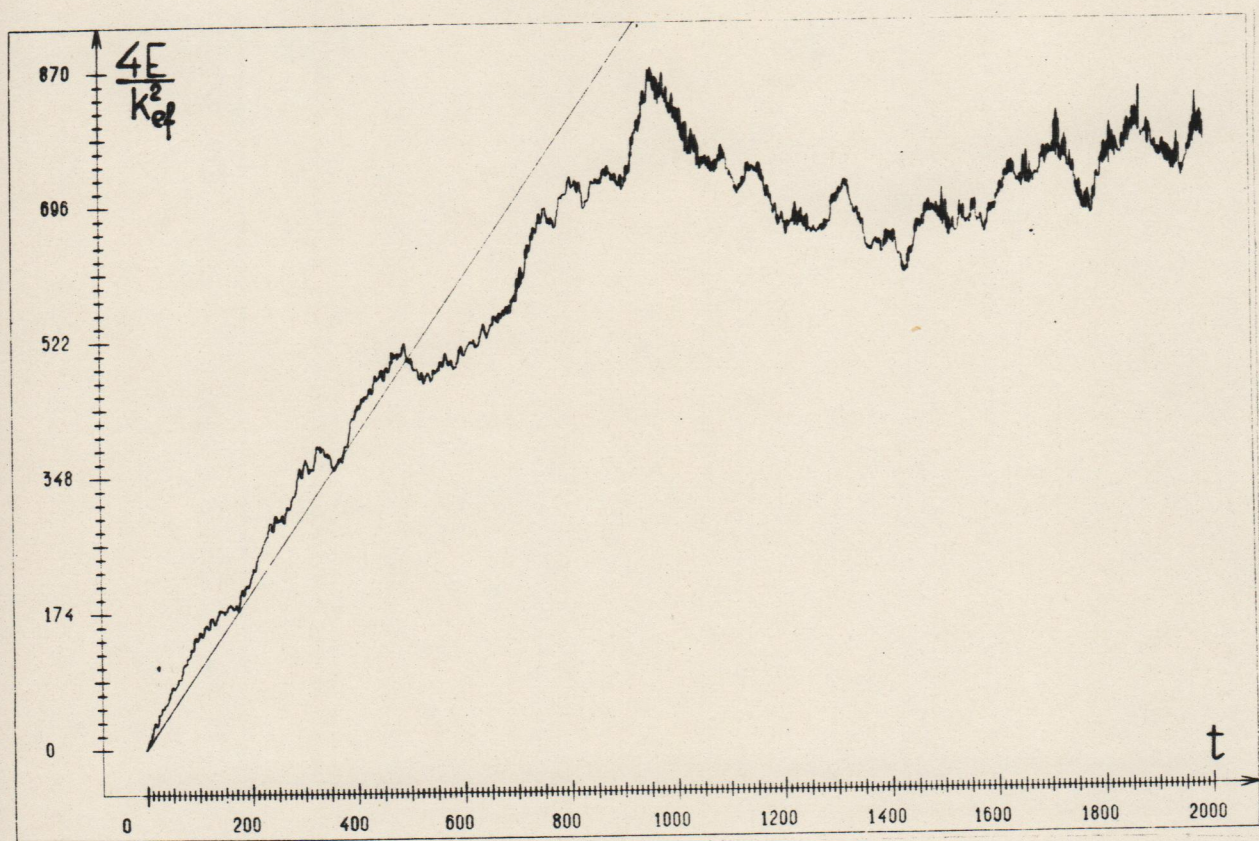


Рис. 18. То же, что и на рис. 16 для $k = 0$, $\varepsilon = 3.5$, $\varepsilon T = 7$,
 $\omega T = 2$.

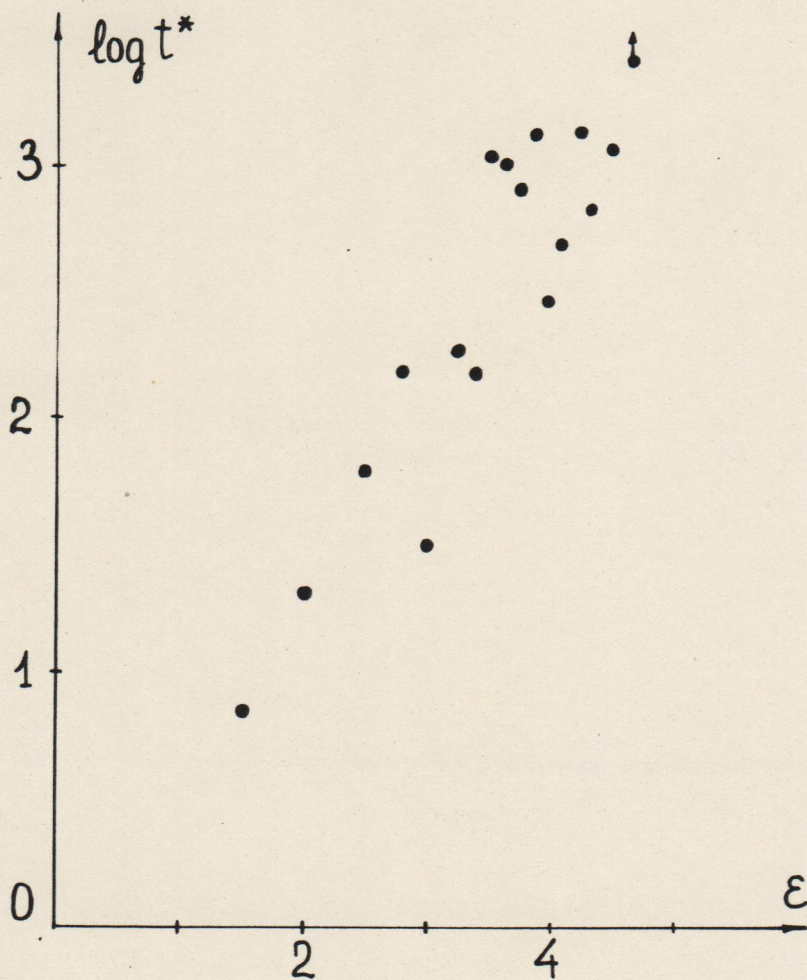


Рис. 19. Зависимость времени t^* от параметра ε для модели (I.1) с $k(\tau) = k + \varepsilon \cos \omega \tau$ при $k = 0$, $\varepsilon T = 7$, $\omega T = 2$; логарифм десятичный.

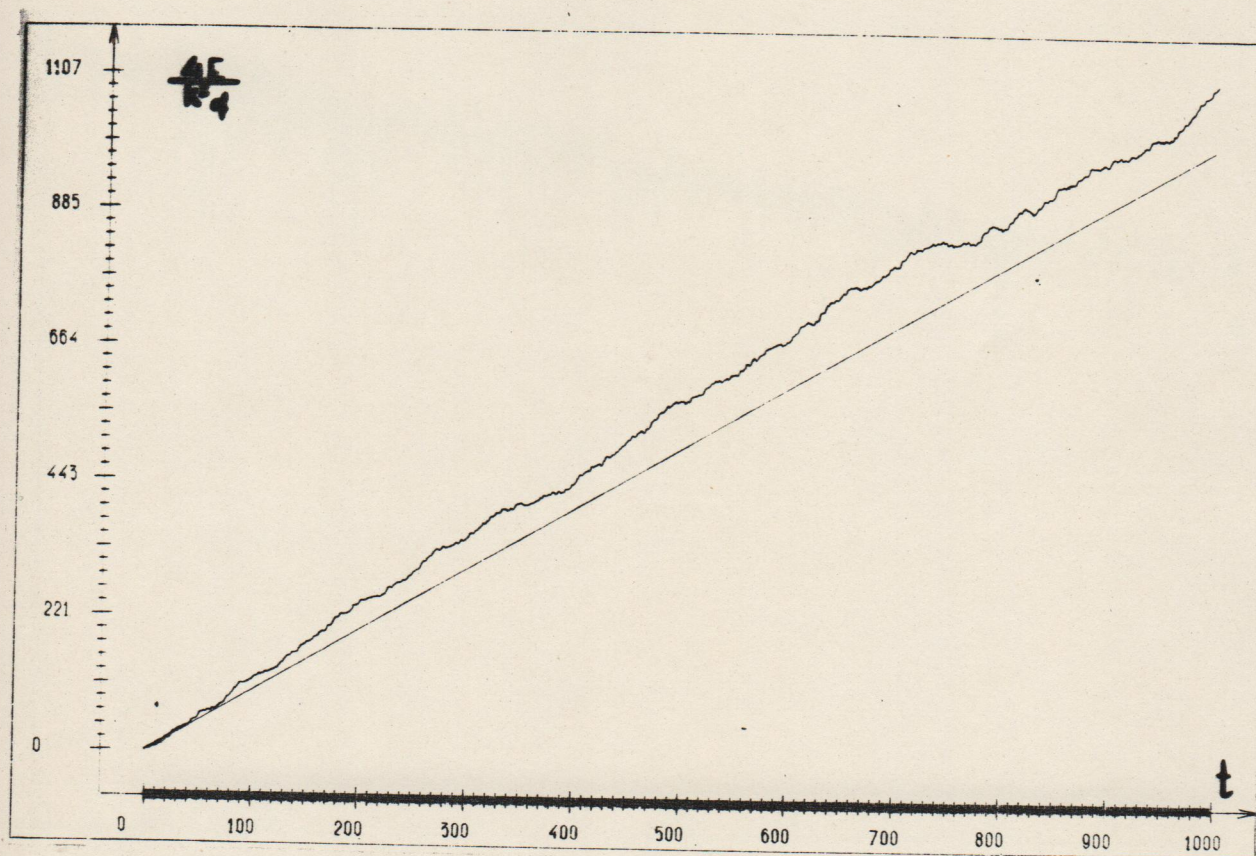


Рис.20. То же, что и на рис.16 для $k = 10, \varepsilon = 2.5, kT = 5,$
 $\omega T = 1.$

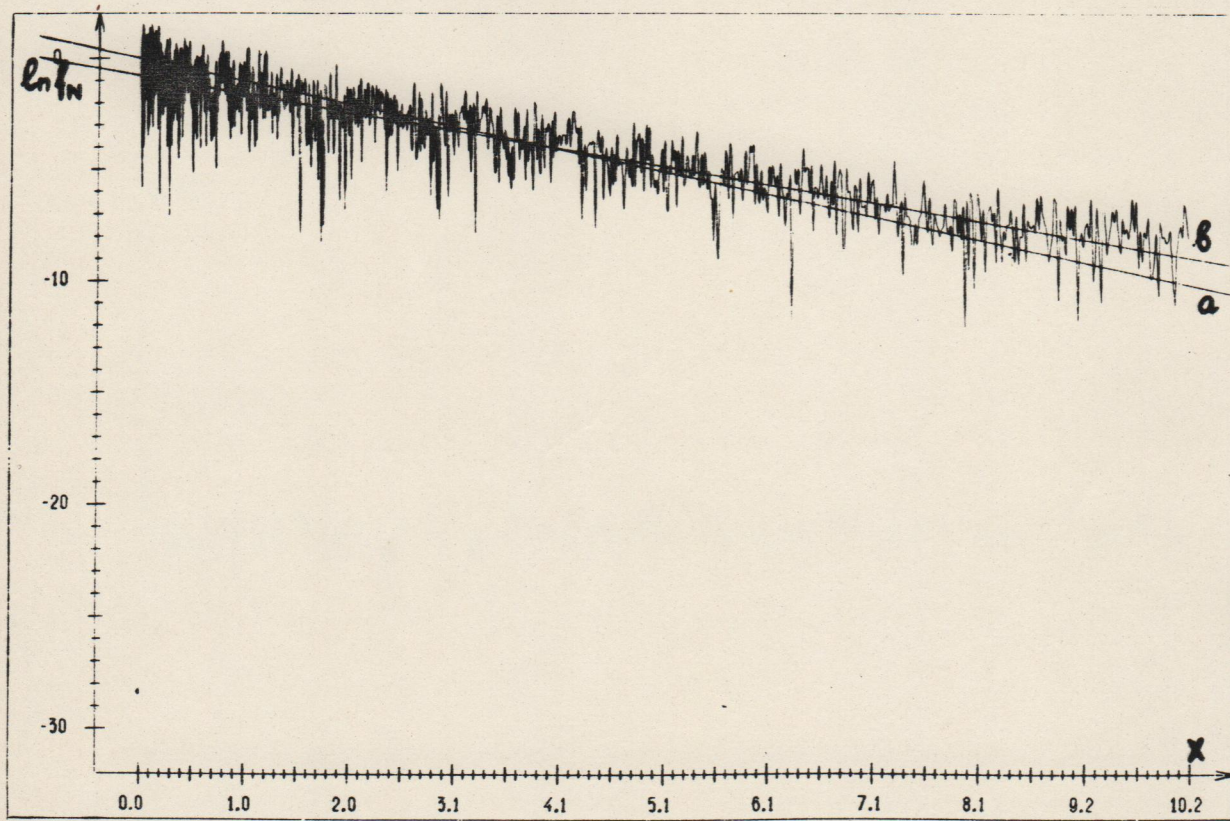


Рис.21. То же, что и на рис.17 для значений параметров рис.20, $\tau = 1000$.

представлена на рис.22. $R(\tau)$ в отличие от случая $\varepsilon = 0$ не содержит явной дискретной компоненты (ср.рис.9), что указывает на непрерывность спектра движения квантовой системы.

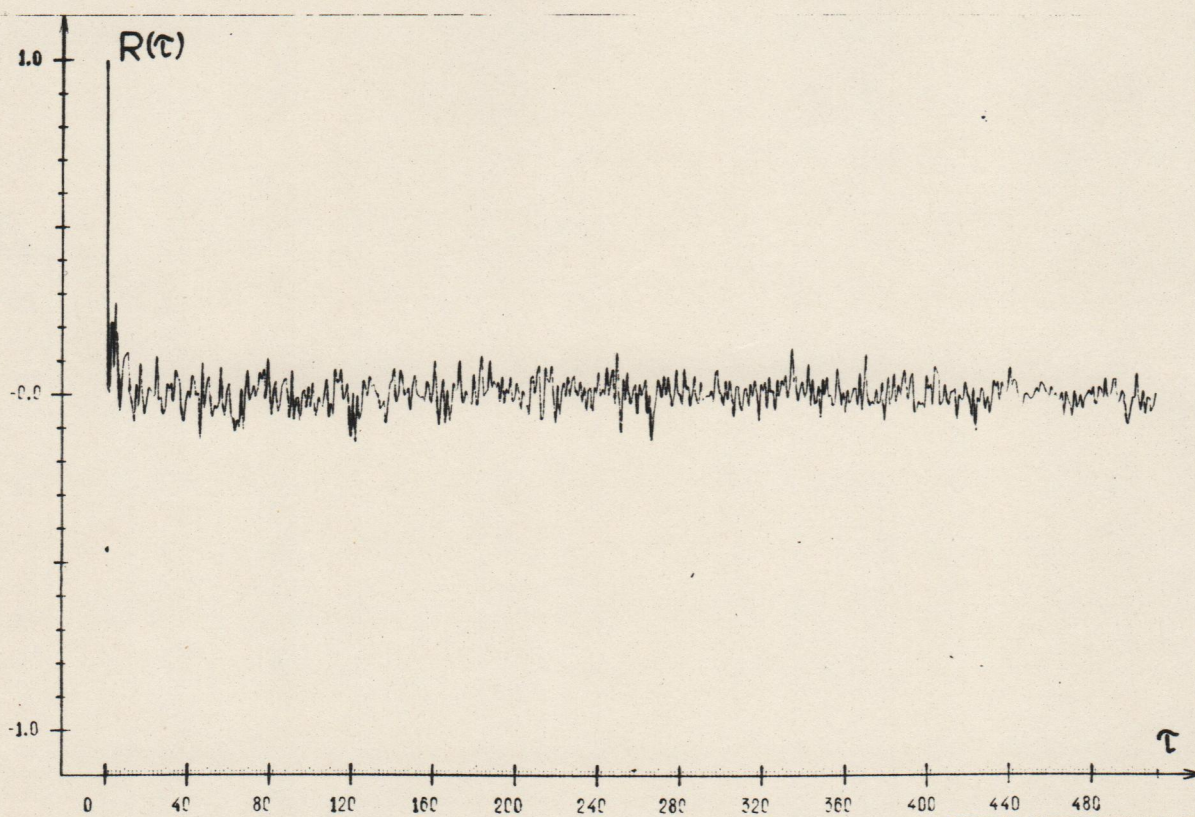


Рис.22. Зависимость квантовых корреляций R (см. (6.1)) от τ для системы (1.1) с $k(\tau) = k + \varepsilon \cos \omega \tau$ для значений параметров рис.20.