

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт ядерной физики

На правах рукописи

УДК 539.184

ШЕПЕЛЯНСКИЙ Дмитрий Львович

ТЕОРИЯ ДИФФУЗИОННОГО ФОТОЭФЕКТА В АТОМЕ ВОДОРОДА
(01.04.02 – теоретическая и математическая физика)



Диссертация на соискание
ученой степени доктора
физико-математических наук

Новосибирск

1988 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ :

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА ...	17
§ 1. Модель квантового ротатора	17
§ 2. Диффузионный масштаб и принцип квантовой локализации хаоса	22
§ 3. Квантовые операторные отображения	29
§ 4. Квантовые корреляции и устойчивость динамики во времени	36
§ 5. Локализация собственных функций квазиэнергии	45
§ 6. Локализация в критической области	57
§ 7. Стационарное распределение	64
ГЛАВА II. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ	72
§ 8. Моделирование классической динамики	72
§ 9. Квантовая динамика в невозмущенном базисе ...	77
§ 10. Штурмовский базис	79
ГЛАВА III. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА В МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	91
§ 11. Классическая динамика и отображение Кеплера	91
§ 12. Диффузионный процесс возбуждения и ионизации	98
§ 13. Локализация фотонных переходов	102
§ 14. Квантовое отображение Кеплера	110
§ 15. Граница делокализации	119
§ 16. Зависимость вероятности ионизации от частоты	123
§ 17. Устойчивость квантовой динамики и обращение времени	134

§ 18. Энергетический спектр ионизованных электронов	138
§ 19. Хаос при взаимодействии атомов с самосогла- сованным полем в случае малой константы связи	143
ГЛАВА IV. ИОНИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОГО АТОМА В МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	153
§ 20. Отображение Кеплера для двумерных классических траекторий	153
§ 21. Квантовая локализация в двумерном случае	166
§ 22. Локализация в эллиптически-поляризованном поле	175
§ 23. Обсуждение лабораторных экспериментов	178
§ 24. Низкочастотный хаос	189
ГЛАВА V. ДИФФУЗИОННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ В ДВУХ- И ТРЕХ- ЧАСТОТНОМ ПОЛЕ	193
§ 25. Квантовый ротатор с двумя несоразмерными частотами	193
§ 26. Локализация Андерсона и спектр показателей Ляпунова	204
§ 27. Переход Андерсона в одномерной системе с тремя несоразмерными частотами	212
§ 28. Ионизация атома водорода в двухчастотном поле	219
§ 29. Одномерная локализация в многомерных системах	226
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	230
ЛИТЕРАТУРА	233

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое количество работ посвящено созданию и исследованию свойств высоковозбужденных атомов [1]. Поскольку у таких атомов внешний электрон сильно удален от ядра и относительно слабо взаимодействует с другими электронами, то свойства высоковозбужденных, или ридберговских, состояний любого атома во многих отношениях близки к свойствам атома водорода с большим главным квантовым числом. В этих состояниях радиационное время жизни достаточно велико, а благодаря большим дипольным матричным элементам атом эффективно взаимодействует даже со слабыми внешними полями. Эти свойства позволили создать высокочувствительный детектор инфракрасного и микроволнового излучения (см., например, [2]). Из других практических приложений отметим использование ридберговских атомов для создания лазера [3], в метрологии [4] и астрофизике [5], для разделения изотопов [6].

Создание перестраиваемых лазеров и развитие техники атомарных пучков позволило возбуждать атомы в состояния с заданными квантовыми числами. При этом в лабораторных экспериментах уже готовятся атомы с главным квантовым числом $n \approx 500$ [7]. Однако, атомы с наибольшим n созданы не в лаборатории, а, как это не неожиданно, просто существуют в межзвездной плазме [8]. Так в астрономических наблюдениях было зарегистрировано самое высоковозбужденное состояние атома (углерода) с $n = 732$ [9]. Такие наблюдения позволяют получать интересную информацию о характеристиках межзвездной плазмы [8-10].

Значительный общефизический интерес представляет задача об ионизации высоковозбужденного атома в монохроматическом электромагнитном поле. Этот процесс представляет собой пример не-

обычного фотозффекта, в котором ионизация на частоте много меньшей энергии ионизации ($\hbar\omega \ll I$) идет гораздо быстрее однофотонной ($\hbar\omega > I$) [11]. Начало исследованиям в этой области положил эксперимент Байфильда и Коча [12], в котором наблюдалась сильная ионизация атома с главным квантовым числом $n \approx 66$ в линейно-поляризованном микроволновом поле с напряженностью $\mathcal{E} \sim 10$ в/см и частотой $\frac{\omega}{2\pi} = 9.9$ ГГц. При этом величина \mathcal{E} была существенно меньше того значения при котором происходит ионизация в статическом поле $\mathcal{E}_{st} = 0.13/n^4$, а для ионизации требовалось поглотить около 100 фотонов (используются атомные единицы).

Для объяснения результатов экспериментов в [13] была выдвинута гипотеза о диффузионном механизме ионизации. На ее основе была вычислена скорость диффузии по энергии и получена оценка для времени ионизации. В работах [14,15] авторы, исходя из того, что квантовое число $n \gg 1$, для описания ионизации применили метод численного решения уравнений движения классического электрона. В результате они получили удовлетворительное согласие между вероятностью ионизации классического атома и ее экспериментальным значением [14]. Объяснение причины возникновения диффузии и ионизации в классической системе было дано в работе [16]. В ней авторы показали, что при напряженности поля превышающей некоторое критическое значение происходит перекрытие резонансов [17] и движение электрона становится хаотическим, что и приводит к его ионизации [16]. Здесь следует подчеркнуть, что при этом никакие случайные силы на атом не действуют, а поле считается строго монохроматическим. В дальнейшем эксперименты и численное моделирование классической динамики были выполнены для разных значений начально возбужденного уровня n при различных напряженностях поля [18,19]. Они продемонстрировали, что вероятность

ионизации, полученная в эксперименте, близка к своему классическому значению и тем самым подтвердили классическую картину процесса ионизации. Эти результаты привели авторов [14-16,18,19] к выводу о том, что за исключением мелких деталей процесс ионизации прекрасно описывается классической механикой, а квантовые эффекты несущественны.

Поскольку ионизация происходит в результате возникновения динамического хаоса в классической системе, то вопрос о роли квантовых эффектов для атома в микроволновом поле оказывается связанным с фундаментальной проблемой квантового хаоса, т.е. динамикой квантовых систем стохастических в классическом пределе. В настоящее время эта новая область физики привлекает к себе все большее внимание исследователей (см., например, [20-22]). При этом можно выделить два основных направления.

Первое - это исследование статистики уровней и собственных функций в консервативных системах. В предельном случае развитого хаоса статистика уровней описывается законом Вигнера-Дайсона [23], полученным для ансамбля случайных матриц и использовавшемся для статистического описания спектра тяжелых ядер и атомов. Из простых систем, в которых выполняется этот закон, можно отметить бильярд Синая [24] и высоковозбужденный атом водорода в достаточно сильном магнитном поле [25].

Второе направление - это исследование возбуждения квантовых систем в периодическом поле. Здесь наиболее интересным является эффект квантового ограничения диффузии, который приводит к тому, что в квантовой системе эффективно возбуждается, вообще говоря, конечное число уровней, в то время как в классической системе динамический хаос приводит к неограниченному диффузионному росту энергии. Впервые это явление было обнаружено в численных экспериментах с моделью квантового ротатора [26]. Даль-

нейшие исследования позволили понять причину квантового ограничения диффузии и связать число возбужденных уровней со скоростью диффузии в классической системе [27-30]. В работах [31,32] было установлено, что это явление в некотором смысле аналогично локализации Андерсона в твердом теле. При этом номер невозмущенного уровня играет роль пространственной координаты (номер узла в решетке). Следует, однако, подчеркнуть, что несмотря на указанную аналогию явление квантовой локализации хаоса принципиально отличается от локализации Андерсона тем, что в системе нет никаких случайных параметров и соответствующий твердотельный потенциал является вполне определенной, детерминированной функцией номера узла решетки.

Таким образом исследования простых моделей с квантовым хаосом позволили понять физику возникающих явлений и применить полученные результаты для решения задачи о микроволновой ионизации высоковозбужденного атома. Оказалось, что квантовые эффекты играют существенную роль при любых Π и приводят, вообще говоря, к локализации диффузионного возбуждения и значительному уменьшению вероятности ионизации по сравнению с классической системой [11,33-37]. Вместе с тем при достаточно сильном поле или низкой частоте длина локализации по энергии, выраженная в числе фотонов, становится сравнимой с числом фотонов требуемым для ионизации. Это условие определяет границу делокализации при превышении которой возбуждение в квантовой системе близко к классическому.

Анализ условий экспериментов [12,18,19] показал, что часть из них была выполнена при частоте поля много меньшей кеплеровской частоты, когда процесс ионизации происходит при полях близких к статической границе ξ_{st} и не является диффузионным. Другая их часть, выполненная при частоте поля сравнимой с кеплеров-

ской частотой ($\omega \Pi^3 \approx 0.5-1.1$), находилась в области делокализации и поэтому в них наблюдалось согласие с численным моделированием классической динамики. Однако, дальнейшее увеличение квантового числа Π или частоты приводит к попаданию в широкую область локализации и резкому уменьшению вероятности ионизации. Эта область параметров вполне достижима и сейчас такие эксперименты уже планируются.

Однако, более эффективным методом исследований оказалось численное моделирование квантовой динамики. При этом существенное продвижение в этом направлении было достигнуто благодаря специальной методике численного моделирования и использованию современного суперкомпьютера CRAY, на котором был выполнен основной объем численных экспериментов. В результате было получено большое количество численных данных для широкого диапазона параметров, что стимулировало развитие теории и позволяло провести ее доскональную проверку. Поскольку диффузионный процесс ионизации имеет место только при $\omega \Pi^3 > 1$, то в основном исследования проводились именно в этой области.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

В первой главе исследуется квантовая локализация хаоса в простых моделях. В § I описана модель квантового ротатора и обсуждаются основные режимы движения наблюдавшиеся в численных экспериментах для различных значений параметров. Основным результатом этих экспериментов [26-28] состоит в том, что движение квантового ротатора при определенных условиях близко к хаотическому движению классической системы. Так, например, наблюдался рост энергии ротатора со временем с коэффициентом диффузии близким к классическому. Вместе с тем, начиная с некоторого момента времени t^* происходило уменьшение скорости диффузии и рост энергии почти полностью прекращался. Особенности квантовой

динамики классически хаотической системы объясняются в § 2 на основе двух масштабов временной эволюции t_E и $t_D \sim t^*$. На первом и самом коротком из них согласно теореме Эренфеста волновой пакет движется по хаотической траектории и в течение времени t_E , пока он еще не расплылся, имеет место полное соответствие с классической динамикой. Однако, из-за экспоненциального разбегания траекторий в области хаоса этот масштаб времени оказывается очень коротким и растет лишь как логарифм некоторого характерного квазиклассического параметра Q . Второй, значительно более длинный и поэтому более важный масштаб степенным образом увеличивается с Q [27-30, 38, 39] и определяет процессы диффузии и релаксации в квантовой динамике. Найдена зависимость масштаба t_D от параметров модели.

В § 3 для квантового ротатора построены операторные отображения. На основе анализа этих отображений показано, что квантовая динамика является устойчивой и поэтому КС-энтропия h , характеризующая неустойчивость, равна нулю (в классической системе $h > 0$). Вследствие этого в области развитого хаоса, когда мера островков устойчивости пренебрежимо мала, квантовые корреляции затухают не быстрее некоторой степени времени, в отличие от классических корреляций затухавших со временем экспоненциально [40]. Здесь же приведены простые физические соображения в пользу того, что во всех реальных системах с квантовым хаосом на больших временах отсутствует экспоненциальное убывание корреляций, а КС-энтропия равна нулю. Теоретические результаты § 3 подтверждаются численными данными приведенными в § 4. В этом же параграфе получена оценка для остаточного уровня корреляций. Кроме того в нем показано, что устойчивость квантовой динамики приводит к ее обратимости во времени, даже если обращение сделано с небольшой неточностью. В этом квантовый случай

кардинально отличается от классического, для которого уже ошибки округления в компьютере вызывают исчезновение обратимости в области хаоса.

В § 5 исследуется локализация собственных функций квазиэнергии (СФКЭ). Задача о нахождении длины локализации СФКЭ сведена к вычислению показателей Ляпунова (ПЛ) в некоторой вспомогательной классической гамильтоновой системе. Такой подход к исследованию СФКЭ был впервые использован в [41,30] и в дальнейшем применялся в [42]. На основе результатов § 2 получено, что длина локализации СФКЭ равна $l = D/2$, где D - классическая скорость диффузии. При помощи метода ПЛ это соотношение проверено для широкого диапазона параметров. Этот метод позволил также определить структуру СФКЭ на границе хаоса при критическом значении параметра и проверить оценку для длины локализации в этой области (§ 6, [29,30]). В § 7 обсуждается влияние флуктуаций СФКЭ на установившееся стационарное распределение вероятностей по уровням. Численно найдено, что эти флуктуации являются гауссовскими и характеризуются некоторой скоростью диффузии влияющей на стационарное распределение.

Во второй главе описаны методы численного моделирования взаимодействия атома с микроволновым полем. В § 8 рассмотрена динамика классических траекторий, показано каким образом можно исключить особенность возникающую при прохождении электрона вблизи ядра и получены формулы по которым строится распределение траекторий соответствующее заданному квантовому состоянию [33]. Методы моделирования квантовой динамики в невозмущенном базисе описаны в § 9. В § 10 получены уравнения для амплитуд вероятности в штурмовском базисе, который позволяет точно учесть влияние непрерывного спектра. Здесь же приведены результаты различных проверок численных методов. Предложен простой метод вычис-

ления гипергеометрической функции с большими значениями параметров [37] .

В главе III рассмотрена микроволновая ионизация атома водорода в одномерном приближении. В линейно-поляризованном поле такое приближение справедливо для состояний электрона вытянутых вдоль поля, когда одно параболическое квантовое число много больше другого, а магнитное квантовое число $M = 0$. В этом случае атом можно считать одномерным, что значительно облегчает численное моделирование [33] . Несмотря на существенное упрощение, одномерная модель содержит в себе основные физические эффекты и позволяет понять картину ионизации в двумерной и трехмерной моделях, которые могут быть эффективно сведены к одномерной и для других состояний.

В § II на основе критерия перекрытия резонансов [17] для классического одномерного атома найдена граница хаоса $\xi > \xi_{cr} = \frac{1}{4} g n^5 \omega^{1/3} (\omega n^3 > 1)$ [43,44] . Получено простое отображение Кеплера для изменения энергии электрона за один оборот вокруг ядра [45] и показано, что локально оно сводится к стандартному отображению [17] . Определена область применимости отображения Кеплера и путем численного решения точных уравнений движения продемонстрировано, что в этой области оно действительно хорошо описывает динамику электрона. В § I2 вычислена скорость диффузии электрона по энергии и дана оценка времени диффузионной ионизации [43,45] . Из решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) найдена аналитическая зависимость функции распределения по уровням от времени [35,37] .

В § I3 на основе результатов главы I найдена длина локализации возбуждения в системе с заданной плотностью уровней под действием монохроматического поля с известным однофотонным матричным элементом. Такая система близка к многозонной модели

возбуждения молекулы в лазерном поле предложенной в [46]. Результаты полученные для такой системы применяются затем для анализа возбуждения в одномерной квантовой модели атома водорода. Показано, что квантовые эффекты приводят к локализации диффузии. Эта экспоненциальная локализация однородна по энергии, а ее длина выраженная в числе фотонов равна $l_{\phi} = 3.33 \varepsilon^2 / \omega^{10/3}$ [45]. Вследствие этого вероятность возбуждения в квантовой системе может быть намного меньше чем в классической [33]. В § I4 получено простое квантовое отображение Кеплера, которое приближенно описывает цепочку эквидистантных (по энергии) однофотонных пиков возникающих в процессе возбуждения. Приводятся данные численных экспериментов, которые позволили провести проверку теории в широком диапазоне параметров [45]. Так, например, мощность излучения менялась на 10 порядков.

В § I5 получено выражение для границы делокализации $\varepsilon > \varepsilon_{qu} = \omega^{7/6} / \sqrt{6.0} n$, выше которой процесс ионизации близок к классическому [33,34,37,45]. В § I6 найдена зависимость вероятности ионизации от параметров и показано, что диффузионная скорость ионизации намного превышает однофотонную $\Gamma_D / \Gamma_{\phi} \sim n^{4/3} \gg 1$ [II,36,37]. Режим квантового возбуждения в области делокализации рассмотрен в § I7. Показано, что распределение по уровням близко к классическому и согласуется с решением уравнения ФПК. Тем не менее из-за устойчивости квантовой динамики эта диффузия, в отличии от классической, оказывается обратимой и при немного неточном обращении времени [35,37]. Исследования проведенные в § I8 показали, что при $\varepsilon \ll 5\omega^{4/3}$ энергии ионизованных электронов определяются отображением Кеплера и приблизительно равномерно распределены в интервале от 0 до $2.6 \varepsilon / \omega^{2/3}$. При $\varepsilon \gg 5\omega^{4/3}$ процесс ионизации атома может быть описан в рамках другой моде-

ли, которая объясняет появление в распределении резкого пика вблизи энергии $\frac{1}{2}(\varepsilon/\omega)^2$.

Если энергия атомов, взаимодействующих с микроволновым полем в резонаторе, становится сравнимой с энергией поля, то последнее должно рассматриваться самосогласованным образом. В качестве примера рассмотрено взаимодействие трехуровневых атомов с двумя модами классического электромагнитного поля (§ 19). При этом считается, что дипольные переходы возможны между всеми тремя уровнями. Такая ситуация реализуется, например, для трех уровней одномерной модели атома. Показано, что при точном резонансе с частотами поля динамика является хаотической при сколь угодно малой плотности атомов. В случае малой отстройки от резонанса найдено критическое значение плотности при которой возникает хаос [47] .

В главе IV исследуется влияние трехмерности атома на процесс ионизации. Показано, что резкое увеличение числа возбужденных состояний не разрушает локализацию, описание которой может быть проведено в рамках эффективной одномерной модели атома. Причина этого связана с медленностью движения вдоль невозмущенной энергетической поверхности обусловленной кулоновским вырождением.

В § 20 установлено, что хаотическое возбуждение имеет место только для состояний с орбитальным моментом $l \lesssim (2/\omega)^{1/3}$ [43]. В этой области для двумерных классических траекторий в линейно-поляризованном поле получено отображение за один оборот электрона вокруг ядра. Его анализ позволил установить существование нового приближенного интеграла движения. При этом происходит расщепление движений поперек и вдоль энергетической поверхности. Последнее происходит в новом "хаотическом" времени, зависящем от поперечного движения. Найден закон, по которому происхо-

дит расплывание внутри оболочки [48]. В § 21 получено выражение для длины локализации в двумерном случае и показано, что она слабо отличается от одномерной. Таким образом, хотя в процессе возбуждения вся оболочка оказывается заполненной, это не сказывается на локализации по энергии. Вследствие этого граница делокализации определяется оценкой близкой к одномерной. Эта граница, однако, существенно понижается при введении достаточно сильного постоянного электрического поля снимающего вырождение: $\xi > \omega^{5/3} / \sqrt{6} \frac{\pi_2}{\pi}$, где π_2 - параболическое квантовое число в начальном состоянии, $\pi_2 < \pi/2$. Существенную роль при исследовании двумерной динамики сыграли численные эксперименты, которые помогли создать правильную теорию. Для эллиптически-поляризованного поля магнитное квантовое число перестает быть интегралом движения, однако, и в этом случае из-за вырождения существует приближенный интеграл и локализация оказывается эффективно одномерной (§ 22).

В § 23 обсуждаются результаты имеющихся к настоящему времени экспериментов по микроволновой ионизации высоковозбужденных атомов [12, 18, 19, 49-53]. Показано, что эксперименты попадающие в область диффузионной ионизации ($\omega \pi^3 > 1$) одновременно попадали в область делокализации и поэтому в них наблюдалось согласие с численным моделированием классической динамики. Указаны условия при которых можно экспериментально наблюдать эффект квантовой локализации хаоса. Дано сравнение границы хаоса, границы делокализации и квантовой границы устойчивости [54] между собой и определены области параметров, где каждая из них является доминирующей. В этом же параграфе обсуждается влияние конечного времени жизни атома, теплового излучения и квантованности поля на локализацию и показано, что их влияние оказывается малым.

В § 24 проведен анализ взаимодействия высоковозбужденного атома с полем, частота которого много меньше кеплеровской ($\omega \ll n^{-3}$). Показано, что из-за кулоновского вырождения классическое движение электрона становится хаотическим при достаточно низкой частоте ($\varepsilon \geq (\omega n^3)^{1/5} / 2n^4$). При этом, однако, скорость диффузии по энергии экспоненциально мала [43,55].

В главе V исследуется локализация хаоса в том случае, когда возмущение содержит две или три частоты. Показано, что в двухчастотном случае длина локализации экспоненциально растет с квазиклассическим параметром. При наличии трех частот все определяется квантовой границей устойчивости [54]. При малом внешнем поле применима квантовая теория возмущений и имеет место локализация. С увеличением поля, когда параметр теории возмущений становится порядка единицы, в системе возникает неограниченная диффузия. Обсуждается связь этих эффектов с двумерной и трехмерной локализацией Андерсона и рассмотрено их проявление при ионизации высоковозбужденного атома.

Вначале исследуется возбуждение квантового ротатора в двухчастотном поле (§ 25). Согласно данным численных экспериментов диффузионный масштаб t_D растет экспоненциально с увеличением параметра квазиклассичности. Получена оценка для t_D [23]. Численное исследование локализации в двумерной модели Ллойда с помощью метода ПЛ (§ 26) показало, что в согласии с теорией слабой локализации [56-58] длина локализации экспоненциально растет со скоростью диффузии. В этом же параграфе численно найден спектр ПЛ для двумерной и трехмерной моделей Андерсона. Для трехмерной модели при большом возмущении спектр является линейным, что согласуется с теоретическими результатами [59,60]. В § 27 представлены результаты численных экспериментов для модели одномерного ротатора с тремя несоразмерны-

ми частотами. Показано, что в ней при превышении квантовой границы устойчивости происходит переход от локализации к неограниченной диффузии и исследована область вблизи окрестности перехода. Этот переход характеризуется критическим индексом, который согласуется с предсказанием теории ренормгруппы [61,62] .

Результаты, полученные для простых моделей, применяются затем к микроволновой ионизации атома водорода в двухчастотном поле (§ 28). Найдена область параметров, в которой вероятность ионизации намного превышает вероятность в одночастотном случае при одинаковой мощности излучения: $\frac{\omega^{5/3}}{2} \lesssim \varepsilon \lesssim \frac{\omega^{7/6}}{3\pi}$ (здесь считается, что напряженности полей и их частоты одного порядка). В § 29 найдены условия, при которых одномерная локализация будет иметь место в многомерных системах [30] .

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [11,27-30,33-41,43-45,47,48, 55] и докладывались на совещаниях секции по фотопроцессам Совета по физике электронных и атомных столкновений АН СССР в Риге (1982 г.) и в Ужгороде (1983 г., 1984 г., 1986 г.), на Всесоюзных конференциях по теории атомов и атомных спектров в Тбилиси (1981 г.) и в Минске (1983 г.), на сессии Отделения общей физики и астрономии и Отделения ядерной физики АН СССР в Москве (1986 г.), на Всесоюзной школе по нелинейным волнам в Горьком (1987 г.), на Вавиловской конференции по нелинейной оптике в Новосибирске (1987 г.), на Международной школе по когерентной оптике в Польше (Устронь, 1985 г.), на Международной рабочей группе по нелинейным и турбулентным процессам в физике в Киеве (1987 г.), на Советско-итальянском симпозиуме по статистической механике в Италии (Комо, 1987 г.).

ГЛАВА I. КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

§ I. Модель квантового ротатора

Для исследования динамики квантовых систем, стохастических в классическом пределе, выберем модель обобщенного ротатора с гамильтонианом:

$$H = H_0(\hat{n}) + V(\theta)\delta_T(t), \quad (I.1)$$

где $\hat{n} = -i\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\delta_T(t)$ - дельта-функция с безразмерным периодом T , θ - фаза в интервале $[0, 2\pi]$, $V(\theta)$ - внешнее возмущение, $\hbar = 1$ [26-30]. Здесь $H_0(n)$ задает энергии невозмущенных уровней n . Динамика соответствующей классической системы определяется уравнениями движения с гамильтонианом (I.1), где n, θ - классические сопряженные переменные действие-фаза. После интегрирования на периоде T получаем отображение:

$$\bar{n} = n - \frac{\partial V}{\partial\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + T \frac{\partial H_0(\bar{n})}{\partial\bar{n}}, \quad (I.2)$$

где $\bar{n}, \bar{\theta}$ - значения переменных n, θ через период. При достаточно сильном возмущении происходит перекрытие резонансов [17], что приводит к диффузионному росту действия $\langle(\Delta n^2)\rangle = Dt$, где t - число периодов. Скорость диффузии D , вообще говоря, сложным образом зависит от параметров системы. Однако, в области развитого хаоса фазы $\theta(t)$ независимы и равновероятно распределены в интервале $[0, 2\pi]$, что позволяет использовать для вычисления D квазилинейное приближение [63]. В этом случае скорость диффузии равна

$$D_{ql} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 d\theta. \quad (I.3)$$

Условия применимости квазиклассического приближения для системы (I.1) заключаются в том, чтобы за один период возмущения возбуждалось большое число уровней $D \gg 1$, а также чтобы безразмерный параметр $T \ll 1$ ($T \propto \hbar$) [26-30,20].

Наиболее исследованной моделью с гамильтонианом (I.1) является модель квантового ротатора [26-30,38-42,64-66]:

$$H = \frac{\hat{n}^2}{2} + k \cos \theta \delta_T(t). \quad (I.4)$$

Динамика соответствующей классической системы задается стандартным отображением [17,63,67]:

$$\bar{p} = p + K \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{p}, \quad (I.5)$$

где $p = Tn$, $K = kT$. При $K \leq K_{сг} = 0.9716\dots$ [68] изменение Δn ограничено $|\Delta n| \leq \sqrt{K/T}$, а при $K > K_{сг}$ величина $(\Delta n)^2$ растет по диффузионному закону со скоростью $D = D_0(K)/T^2$, где $D_0(K)$ - скорость диффузии по p в стандартном отображении (I.5). В единой хаотической компоненте зависимость скорости диффузии от параметра стохастичности K приближенно описывается следующим выражением:

$$D_0 \approx \begin{cases} \frac{K^2}{2} (1 + 2J_2(K) + 2J_2^2(K)), & K \geq 4.5 \\ 0.30 (\Delta K)^3, & K < 4.5 \end{cases}, \quad (I.6)$$

где $J_2(K)$ - функция Бесселя, $\Delta K = K - K_{сг}$. При $K \geq 4.5$ зависимость $D_0(K)$ имеет вид осцилляций затухающих с ростом K [69,70]. Предельное значение $D_0 = K^2/2$ соответствует квазилинейному приближению (I.3), когда фазы $\theta(t)$ в (I.5) случайны и независимы. При $K \rightarrow K_{сг}$ в (I.6) использована эмпирическая формула полученная из численных экспериментов [29]. Величина показателя $\eta \approx 3$ в степенной зависимости $D_0 \propto (\Delta K)^\eta$ близка

к значению [71]. Следует, однако, отметить, что для тех значений параметра, при которых существуют микротронные отстройки устойчивости, скорость диффузии даже в хаотической компоненте может существенно отличаться от (I.6) из-за длительных застреваний траектории на границе хаоса [17, 72-74]. Правда, область этих значений является малой и экспоненциально убывает с ростом K [17].

Движение квантовой системы (I.4) удобно описывать отображением для волновой функции Ψ через период T [26-30]:

$$\Psi(\theta, t+1) = e^{-ik\cos\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) \frac{\exp(in\theta - i\frac{Tn^2}{2})}{\sqrt{2\pi}}, \quad (I.7)$$

где
$$A_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, t) e^{-in\theta} d\theta.$$

Для амплитуд вероятности в невозмущенном базисе из (I.7) получаем

$$\bar{A}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm} A_m, \quad (I.8)$$

где $F_{nm} = (-i)^{n-m} \exp(-i\frac{Tm^2}{2}) J_{n-m}(k)$, $J_n(k)$ - функция Бесселя. Из свойств функций Бесселя следует, что один толчок (действие одного δ -функционального возмущения) захватывает с экспоненциальной точностью $\approx 2k$ невозмущенных уровней. Квазиклассический переход соответствует $k \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$, $kT = \text{const}$.

Численные эксперименты с квантовым ротатором (I.4) [26, 30, 64-66] показали, что в квазиклассической области $K > 1$ и $k \gg 1$ в течение некоторого времени t^* наблюдается диффузионный рост $(\Delta n)^2$. При $t \gg t^*$ этот рост останавливается, т.е. под действием поля эффективно возбуждается конечное число уровней

$\Delta n \sim l$, где l имеет смысл длины локализации (см. рис.1). При численном моделировании использовались различные начальные условия: возбуждение только нулевого уровня ($n_0 = 0$, равномерное распределение по θ); возбуждение до 400 нижних уровней со случайными и одинаковыми амплитудами; гауссовское распределение с шириной $4 \leq \Delta n \leq 400$ вблизи уровня $n_0 = 0, 500, 1000$ (полное число уровней в модели достигало 4001). Существенной зависимости движения от начальных условий не наблюдалось. Аналогичный результат был получен для предложенной в [31,32] динамической модели Ллойда с $V(\theta) = 2 \arctg(E - k \cos \theta)$ [75].

При $t \ll t^*$ зависимость квантовой диффузии D_q от K хорошо повторяет все детали классической диффузии [38] (рис.2), в том числе и не описываемые простым соотношением (1.6), в согласии с принципом соответствия. Для $t \gg t^*$ квантовая диффузия останавливается и переходит в стационарные колебания [26-30, 64,65], что означает дискретность спектра квазиэнергий [76] в модели (1.4).

В области параметров $K < 1$, $K > 1$ изменение энергии, как и в классическом пределе, оказывается ограниченным. То же самое имеет место и при $k \ll 1$, $k > 1$, что указывает на существование квантовой границы устойчивости, предсказанной в [54]. В рассматриваемом случае механизм этой квантовой устойчивости вполне понятен из выражения (1.8). Действительно, для $k \ll 1$ все F_{nm} пренебрежимо малы за исключением $F_{nn} \approx 1$. Это значит, что переходы между невозмущенными уровнями практически отсутствуют. Квантовая граница устойчивости соответствует $K \sim 1$.

Отметим, что если бы в (1.4) переменная θ менялась от $-\infty$ до ∞ , то такая модель соответствовала бы движению частицы в периодическом потенциале. В этой континуальной модели квантового ротатора из-за периодичности потенциала по θ возмущение

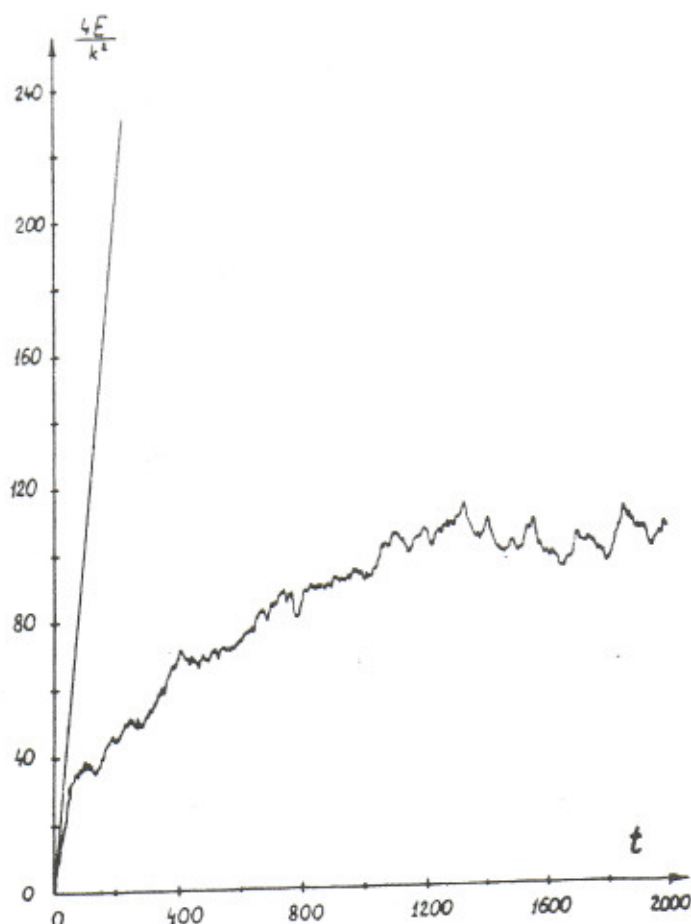


Рис. I. Зависимость энергии ротатора $E = \langle n^2 \rangle / 2$ от времени для системы (I.4) с $k = 20$, $T = 0.25$. Прямая линия соответствует классической диффузии, ломаная линия - численный результат.

дает переходы между состояниями с одним значением квазиимпульса $\Delta(\Psi_\Delta(\theta + 2\pi, t) = e^{i2\pi\Delta} \Psi_\Delta(\theta, t))$. В результате динамика состояний с одним значением квазиимпульса Δ описывается моделью (I.4), где невозмущенный гамильтониан $H_0 = \frac{n^2}{2}$ будет заменен на $H_0 = \frac{(n + \Delta)^2}{2}$. Так как для каждого Δ квантовые эффекты приводят к остановке диффузии, то значит для произвольного начального состояния в континуальной модели ротатора будет происходить локализация диффузии. Таким образом, в этой модели непрерывный спектр не приводит к неограниченной диффузии из-за существования дополнительного интеграла квазиимпульса.

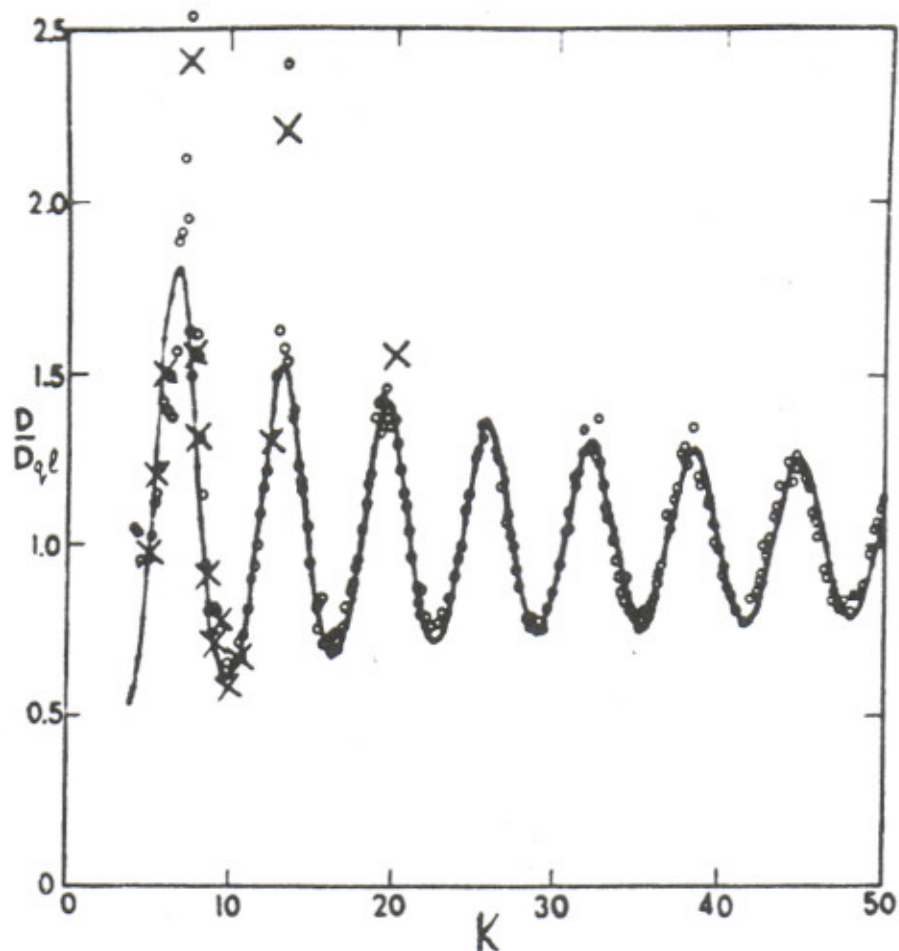


Рис.2. Зависимость скорости диффузии D от параметра $K = kT$: \circ - численные данные для классической системы (I.4), гладкая кривая - теоретическая зависимость (I.6) (взяты из работ [69-70]); \times - численные данные для скорости диффузии в квантовой системе (I.4) с $K \approx 40$,

$$D_{ql} = k^2/2 .$$

§ 2. Диффузионный масштаб и принцип квантовой локализации хаоса

Полученные результаты указывают на существенное отличие в поведении квантовой системы по сравнению с классической на достаточно больших временах ($t \gg t^*$). Специальные численные эксперименты показали, что этот масштаб времени значительно больше, чем время расщепления пакетов t_E , которое из-за экс-

появления экспоненциальной неустойчивости в области хаоса составляло всего один-два толчка. Таким образом, результаты численного моделирования указывают на то, что масштаб распыления пакетов (масштаб Эренфеста) t_E существенно отличается от диффузионного масштаба $t_D \sim t^*$, на котором движение характеризуется классической диффузией. Для того, чтобы понять масштабы величин t_E и t_D приведем некоторые оценки [27], основанные на следующих наглядных представлениях.

Действительно, стохастичность классической системы приводит в силу теоремы Эренфеста к экспоненциально быстрому распылению квазиклассического пакета, определяя тем самым масштаб времени t_E , на котором квантовое движение может быть полностью случайным. Распыление квантового пакета можно грубо оценить как расхождение пучка классических траекторий. Скорость распыления пакета определяется при этом классической КС-энтропией системы h . Однако, полное время распыления t_E зависит от начальных размеров пакета: $\Delta\theta_0$ - по фазе и $\Delta\Pi_0$ - по действию (квантовому числу ротатора). Можно считать, что пакет полностью расплылся, когда его конечный размер $\Delta\theta \sim 1$ или когда $\Delta\Pi \sim 1/\sqrt{T}$. Условие на $\Delta\Pi$ вытекает из второго уравнения (1.5), так как при $\Delta\Pi T \geq 1$ размер $\Delta\theta$ становится ≥ 1 на одном периоде возмущения. Учитывая, что из соотношения неопределенности $\Delta\theta_0 \geq \frac{1}{\Delta\Pi_0}$, а $\Delta\Pi_0 \geq 1$, найдем время полного распыления по фазе $t_E^{(\theta)} \leq \frac{\ln(\Delta\Pi_0)}{h}$ и по действию $t_E^{(n)} \leq \ln(1/\sqrt{T}\Delta\Pi_0)/h$. Фактически время распыления пакета будет порядка наименьшего из $t_E^{(\theta)}$ и $t_E^{(n)}$. Из условия $t_E^{(n)} \sim t_E^{(\theta)}$ найдем $\Delta\Pi \sim 1/\sqrt{T}$, соответствующее наибольшему

$$t_E \sim \frac{\ln(k/K)}{h} \quad (2.1)$$

где при $K > 4$ КС-энтропия $h \approx \ln(K/2)$ [17]. Для типичных значений параметров модели ($k = 40, K = 5$) $t_E \sim 1$ в соответствии с результатами численных экспериментов [26]. Масштаб (2.1), вообще говоря, очень мал и лишь логарифмически зависит от квазиклассического параметра $Q = k$. Первые оценки масштаба t_E были получены в [77] для модели нелинейного осциллятора.

Вместе с тем квантовое ограничение диффузии наблюдается лишь при $t > t_D \gg t_E$. Следуя [27], рассмотрим качественно механизм этого ограничения (рис.1) в модели (1.4). Он основан на следующих простых физических соображениях. По принципу соответствия квантовое движение в квазиклассической области должно быть в каком-то смысле близко к классическому, по крайней мере, на некотором характерном масштабе времени. Это очевидно для самого короткого масштаба t_E , т.е. до расплывания волновых пакетов. При $t > t_E$ квантовая динамика, конечно, не совпадает полностью с классической (см. § 3, § 4), однако, как показывает численное моделирование, классическая диффузия в системе продолжается. Если бы диффузия была неограниченной, как в классическом пределе, то спектр квазиэнергий был бы непрерывным. Существенно, однако, что и в случае чисто дискретного спектра со средней плотностью уровней ρ_0 классическая диффузия может продолжаться в течение времени

$$t \sim t_D \sim \rho_0. \quad (2.2)$$

Это вытекает непосредственно из принципа неопределенности, поскольку при $t \ll \rho_0$ система не разрешает ("не чувствует") дискретный характер спектра. Оценка (2.2) и определяет диффузионный масштаб времени для модели (1.4). Поясним, что плотность ρ_0 в (2.2) определяется только собственными функциями, представлен-

ными в данном состоянии системы, эффективное число которых всегда конечно. Для оценки величины ρ_0 рассмотрим вначале эволюцию одного произвольного невозмущенного состояния. Тогда вследствие классической диффузии за время t_D будет эффективно возбуждено некоторое число соседних невозмущенных состояний $\Delta n \sim (Dt_D)^{1/2}$. Это значит, что точные собственные функции системы являются суперпозициями нескольких ($\sim \Delta n \sim \ell$) невозмущенных состояний. И, наоборот, любое невозмущенное состояние представляется таким же числом собственных функций. Отсюда $\rho_0 \sim \Delta n \sim t_D$ (считаем, что квазиэнергии равномерно распределены на интервале $[0, 2\pi]$) и [27]:

$$t_D \sim D \sim \Delta n \sim \ell, \quad (2.3)$$

где ℓ - эффективное число невозмущенных состояний, вовлеченных в стационарные колебания после прекращения диффузии. Иначе можно сказать, что величина ℓ определяет размер области локализации собственных функций в невозмущенном базисе (по n). Мы будем называть ℓ длиной локализации. Замечательной особенностью соотношений (2.3) является устанавливаемая ими связь существенно квантовых характеристик движения - диффузионного масштаба t_D и длины локализации ℓ со скоростью диффузии D в классическом пределе.

Оценка (2.3) для t_D , очевидно, не зависит от начального состояния системы за исключением маловероятных начальных состояний, близких к собственным функциям квазиэнергии (СФКЭ). Что же касается длины локализации ℓ для стационарных колебаний, то оценка (2.3) справедлива только в том случае, когда размер начального состояния $\ell_0 \ll \ell$. Если же $\ell_0 \geq \ell$, то по порядку величины размер состояния не изменяется.

Описанная выше локализация хаоса имеет место только для иррациональных значений параметра $T/4\pi$. В случае рациональных $T/4\pi$ возникает специфическое для данной модели явление квантового резонанса [78]. При этом спектр квазиэнергий становится непрерывным, а действие $|n|$ растет пропорционально t ($t \rightarrow \infty$) при любом k . Эта особенность модели связана с характером невозмущенного спектра $H_0(n) = n^2/2$ и не является типичной для квантовой динамики. По этой же причине динамика модели (I.4) определяется величиной T , взятой по модулю 4π . Неограниченное возбуждение имеет место и для очень специальных иррациональных значений T/π , экспоненциально близких к рациональным [65,66].

В работах [31,32] была отмечена аналогия между описанной выше локализацией в пространстве действий (по Π) и хорошо известной локализацией Андерсона в случайном потенциале (см., например, [79-81]). Наиболее существенное различие между обоими явлениями связано с тем, что в рассматриваемой модели (I.4) нет никаких случайных параметров (подробнее см. § 5). Продолжая эту аналогию, можно заметить, что квантовый резонанс [78] соответствует делокализованным блоховским состояниям в периодическом потенциале [80,81]. Отметим также, что механизм локализации является, вообще говоря, совершенно различным в зависимости от параметров движения.

На рис.3 показана грубая схема различных режимов движения в модели (I.4). Квазиклассическая область соответствует левому верхнему квадранту. В классическом пределе движение может быть как финитным ($K < 1$), так и инфинитным ($K > 1$), однако, в квантовой системе в обоих случаях происходит локализация возбуждения. При $K > 1$ и $k > 1$ локализация связана с остановкой классической диффузии вследствие квантовых интерференционных эф-

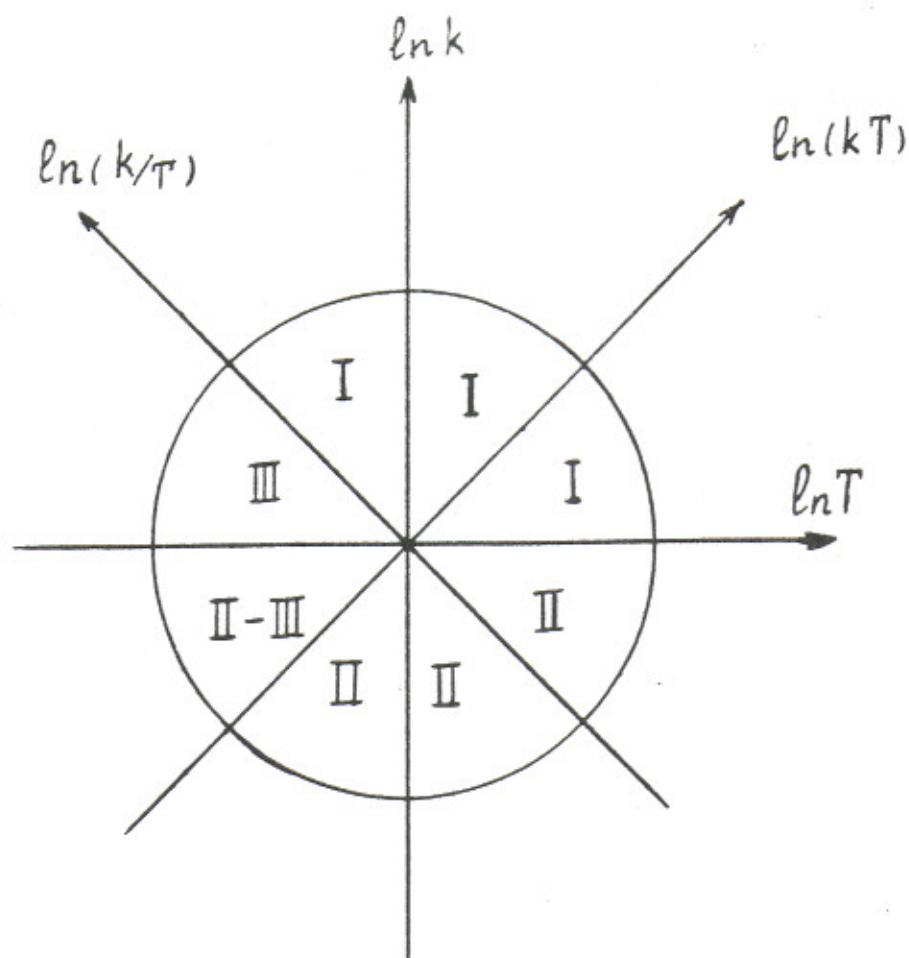


Рис.3. Схема различных режимов модели (I.4):

I - квантовый хаос; II - квантовая теория возмущений; III - изолированные нелинейные резонансы. Область квазиклассики соответствует $k \gg 1$, $T \ll 1$.

фектов. Если же $K < 1$ и $K > 1$, то локализация определяется квантовым туннелированием в классически недоступную область.

При $T \gg 1$ движение является существенно квантовым [20]. Тем не менее, диффузионная локализация сохраняется и в этой области при дополнительном условии $K > 1$ (правый верхний квадрант на рис.3). Однако, его статистические свойства, в частности, скорость начальной диффузии, вообще говоря, отличаются от области $T \ll 1$ даже при $K \gg 1$. В обратном случае $K \ll 1$ справедлива обычная квантовая теория возмущений (в отсутствии резонанса), что означает малость поправок к невозмущенным сос-

тояниям, т.е. регулярность квантовой динамики независимо от характера движения в классическом пределе. Такой механизм квантовой стабилизации классического хаоса был рассмотрен в работе [54].

В случае классического нелинейного резонанса условие квантовой стабилизации принимает вид $\frac{k}{T} \leq 1$, что имеет следующий простой физический смысл: число уровней, захваченных в резонанс, $\sqrt{k/T} \leq 1$ [54]. Если оба параметра малы ($k < 1, \sqrt{k/T} < 1$), то все невозмущенные состояния сохраняются. Это - область глобальной применимости теории возмущений (рис.3, П). При $k \leq 1$, но $k/T \geq 1$ невозмущенные состояния сохраняются только между резонансами. Внутри резонансов невозмущенные состояния смешиваются, однако, движение остается регулярным и можно перейти к новым, резонансным, квантовым числам и соответствующим им собственным функциям квазиэнергии (рис.3, П-Ш). Наконец, в квазиклассической области, при $k \geq 1$ и $k/T \geq 1$ (но $K < 1$) смешивание происходит для всех невозмущенных состояний, область смешивания не превосходит ширины отдельного резонанса (рис.3, Ш).

Принцип квантовой локализации хаоса, основанный на соотношении (2.2), можно применять и к системам с большим числом размерностей. Так, в случае d -мерной невозмущенной системы число возбуждаемых уровней $\Delta n \sim (D_1 \dots D_d)^{1/2} t_D^{d/2}$ и условие квантового ограничения хаоса имеет вид

$$t_D \geq (D_1 \dots D_d)^{1/2} t_D^{d/2} \quad (2.4)$$

Из (2.4) видно, что при $d = 1$ всегда имеет место локализация. При $d \geq 3$ делокализация происходит при $D_1 \dots D_d \geq 1$, что соответствует критерию Андерсона [79] (малый случайный потенциал дает быструю диффузию и большую проводимость). Размерность $d = 2$ является критической и должна рассматриваться отдельно. Эффекты

локализации при $d = 2, 3$ будут более подробно обсуждаться в главе V.

Таким образом, на основе численных экспериментов с моделью (I.4) и принципа квантовой локализации хаоса было показано, что диффузионный масштаб степенным образом растет с увеличением квазиклассического параметра ($\ln t_D \sim \ln q$) и существенно превышает масштаб Эренфеста t_E ($t_E \sim \ln q$). Отметим, что существуют и другие методы оценки t_D . Так в [39] для оценки квантовых эффектов использовалась формула Маслова [82], а в [83, 84] метод функционального интегрирования. Эти методы действительно позволяют показать, что квантовые поправки к средним от различных операторов (например, P или P^2) малы в течение степенного масштаба времени t_q [38, 84], причем $t_q \ll t_D$. Однако, они обладают рядом недостатков. Они являются довольно громоздкими и, что более существенно, дают только нижнюю границу для $t_D \gg t_q$ и не позволяют понять причину локализации. Другой подход к исследованию квантовой локализации хаоса будет использован в § 5.

§ 3. Квантовые операторные отображения

В области развитого хаоса, когда мера островков устойчивости пренебрежимо мала, классическая динамика характеризуется положительной KS-энтропией [85-87, 17] и, как правило, экспоненциальным затуханием разновременных корреляций. На примере модели (I.4) покажем, что квантовые системы стохастические в классическом пределе такими свойствами не обладают [40].

При исследовании квантовой системы (I.4) будем исходить из уравнений для гейзенберговских операторов, которые после интегрирования на периоде T переходят в операторное отображение:

$$\begin{aligned}\hat{n}_{t+1} &= \hat{n}_t + k \sin \hat{\theta}_t \\ \hat{\theta}_{t+1} &= \hat{\theta}_t + T \hat{n}_{t+1}\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $\hat{n}_t, \hat{\theta}_t$ - операторы, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[\hat{n}_t, \hat{\theta}_t] = -i$. Если коммутатор равен нулю, то (3.1) переходит в отображение для классического ротатора.

Следует отметить, что в отображении (3.1) оператор $\hat{\theta}$ соответствует непрерывной фазе, меняющейся от $-\infty$ до ∞ . При этом в случае плоского ротатора оператор \hat{n} представим в виде $\hat{n} = -i \frac{\partial}{\partial \theta}$ [88]. Периодическую фазу φ , изменяющуюся в интервале от 0 до 2π , можно определить посредством соотношения $\hat{\varphi} = \Phi(\hat{\theta})$, где $\Phi(\theta)$ - периодическая (с периодом 2π) разрывная функция, причем, $\Phi(\theta) = \theta$ для $0 \leq \theta < 2\pi$ [88]. Поскольку $\hat{\varphi}_t = U^\dagger \Phi(\hat{\theta}_0) U = \Phi(\hat{\theta}_t)$ (U - оператор эволюции (1.4)), то для произвольной периодической функции g (с периодом 2π) имеет место соотношение $g(\hat{\varphi}_t) = g(\hat{\theta}_t)$ и поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться исследованием свойств оператора $\hat{\theta}_t$, однозначно определяющего $\hat{\varphi}_t$.

Для анализа полученного отображения представим $\hat{n}_t, \hat{\theta}_t$ в нормальной форме по отношению к начальным операторам $\hat{n}_0, \hat{\theta}_0$ (например, пусть все \hat{n}_0 стоят справа), после чего уже просто получить проекцию этих операторов на пространство начальных состояний. Такой метод исследования в квазиклассическом приближении был применен в [77].

Оказывается, что для операторного отображения (3.1) удается получить точную нормальную форму $\hat{n}_t, \hat{\theta}_t$. Это позволяет показать, что корреляции в квантовой системе убывают не быстрее некоторой степени времени, КС-энтропия квантовой системы равна нулю, а ее динамика устойчива. Используя известное равен-

ство (см., например, [39])

$$\exp(\hat{a} + \hat{b}) = \exp(\hat{b} \frac{e^c - 1}{c}) \exp(\hat{a}) \quad (3.2)$$

для операторов с коммутационным соотношением $[\hat{a}, \hat{b}] = c\hat{b}$ получим

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= \hat{n}_0 + k \sin \hat{\theta}_0 \\ \hat{n}_2 &= \hat{n}_1 + \Delta \hat{n}_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Delta \hat{n}_2 = \frac{k}{2i} \left\{ \sum_{m_0=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_1) e^{i\frac{T}{2}(m_0+1)} e^{i(m_0+1)\hat{\theta}_0} e^{i\hat{n}_0 T} - \text{к.с.} \right\},$$

где $k_1 = 2k \sin \frac{T}{2}$, $J_{m_0}(k_1)$ - функция Бесселя, к.с. - комплексносопряженный член. Из (3.1), (3.3) следует, что нормальная форма $\Delta \hat{n}_3 = k \sin \hat{\theta}_2$ по отношению к $\hat{n}_1, \hat{\theta}_1$ получается из $\Delta \hat{n}_2$ заменой индексов $1 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 1$. Применяя (3.2), получим из нее нормальную форму $\Delta \hat{n}_3$ по отношению к $\hat{n}_0, \hat{\theta}_0$. Произвольное $\Delta \hat{n}_{t+1} = k \sin \hat{\theta}_t$ получается из $\Delta \hat{n}_t$ рекуррентным способом. Так если $\hat{n}_t, \hat{\theta}_t$ уже представлены в нормальной форме, то

$$\begin{aligned} \hat{n}_{t+1} &= \hat{n}_t + \Delta \hat{n}_{t+1} \\ \hat{\theta}_{t+1} &= \hat{\theta}_t + T \hat{n}_{t+1} \\ \Delta \hat{n}_{t+1} &= k \sin \hat{\theta}_t = \frac{k}{2i} \left\{ \sum_{m_0, m_1, \dots, m_{t-1}=-\infty}^{\infty} J_{m_0}(k_1) J_{m_1}(k_2) \times \right. \\ &\quad \times \dots \times J_{m_{t-1}}(k_t) \exp(i\varphi_{m_0, \dots, m_{t-1}}) \times \\ &\quad \left. \times \exp(i\alpha_{m_0, \dots, m_{t-1}} \hat{\theta}_0) \exp(i\beta_{m_0, \dots, m_{t-1}} T \hat{n}_0) - \text{к.с.} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\varphi_{m_0} = \frac{T}{2} (1 + m_0);$$

$$\alpha_{m_0} = m_0 + 1; \quad \beta_{m_0} = 1;$$

$$\varphi_{m_0, \dots, m_n} = \varphi_{m_0, \dots, m_{n-1}} + \frac{T}{2} m_n (\alpha_{m_0, \dots, m_{n-1}} + \beta_{m_0, \dots, m_{n-1}}) + \frac{T}{2} \alpha_{m_0, \dots, m_{n-1}}^2;$$

$$\alpha_{m_0, \dots, m_n} = \alpha_{m_0, \dots, m_{n-1}} + m_n; \quad \beta_{m_0, \dots, m_n} = \alpha_{m_0, \dots, m_{n-1}} + \beta_{m_0, \dots, m_{n-1}};$$

$$k_n = 2k \sin \frac{T}{2} \beta_{m_0, \dots, m_{n-1}}.$$

Для исследования полученного отображения спроектируем (3.4) на базис начальных состояний $\psi_n(\theta_0) = (2\pi)^{-1/2} e^{in\theta_0}$. Тогда (3.4) переходит в S -числовое отображение (с заменой \hat{n}_0 на n), которое можно рассматривать как отображение описывающее динамику некоторой классической системы, для которой средние значения $\hat{n}_t, \hat{\theta}_t$ ($\langle n_t \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n_t(n, \theta_0) d\theta_0$) совпадают с квантовыми средними и которая в классическом пределе переходит в стандартное отображение (I.5). Таким образом для понимания свойств квантовой системы следует изучить классическую систему описываемую отображением (3.4), где n_0 и θ_0 - S -числа. Отметим, что полученное отображение не сохраняет якобиан $J = \frac{\partial(n_t, \theta_t)}{\partial(n_0, \theta_0)}$ (в классическом пределе $J = 1$), который со временем осциллирует, что указывает на наличие "затухания" с переменным знаком и негамильтоновость отображения (3.4). Более подробно свойство негамильтоновости получаемых таким образом отображений обсуждалось впоследствии в [90].

В классической системе $m_0 \sim K, m_1 \sim m_0 K \sim K^2$ и т.д. Поэтому $\alpha_{m_0, \dots, m_{t-1}} \sim K^t, \frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_0} \sim \alpha_{m_0, \dots, m_{t-1}} \sim K^t$ и близкие траекто-

рии экспоненциально быстро расходятся. В квантовом случае для $t < t_E$

$$t_E \sim \frac{\ln k}{\ln K}, \quad (3.5)$$

т.е. пока $T\beta_{m_0, \dots, m_{t_E}} \ll 1$, синус в функции Бесселя в (3.4) можно заменить аргументом и тогда по-прежнему имеет место локальная неустойчивость близких траекторий. Когда $t > t_E$ воспользуемся тем, что в (3.4) $|m_n| \leq 2k$ (иначе $J_{m_n}(k)$ - экспоненциально малы) и следовательно $|a_{m_0, \dots, m_{t-1}}| \leq 2kt$, $|\beta_{m_0, \dots, m_{t-1}}| \leq 2kt^2$. Тогда при $t > t_E$ получаем $\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0} \sim \frac{\partial\theta_t}{\partial\theta_0} \sim (|\beta_{m_0, \dots, m_{t-1}}| + |a_{m_0, \dots, m_{t-1}}|) \leq 2kt^2$ и энтропия h убывает со временем согласно

$$h \sim \frac{\ln k + 2\ln t}{t}. \quad (3.6)$$

Таким образом для системы (1.4) энтропия равна нулю и значит ее динамика является устойчивой, хотя для соответствующей классической системы $h > 0$ и движение локально неустойчиво. Численные эксперименты выполненные в [91] действительно показали, что экспоненциальная неустойчивость в квантовой системе имеет место только на коротком масштабе времени, величина которого согласуется с оценкой (3.5).

Рассмотрим теперь как ведут себя разновременные корреляторы в квантовой системе (1.4): $R(t, n, q) = \frac{1}{2} \langle n | e^{-iq\theta_0} e^{i\hat{\theta}_t} + e^{i\hat{\theta}_t} \cdot e^{-iq\theta_0} | n \rangle$, где среднее берется по начальному состоянию $\psi_n(\theta_0) = (2\pi)^{-1/2} \exp(in\theta_0)$. Из (3.4) получаем выражение

$$R(t, n, q) = \frac{1}{2} \sum_{m_0, \dots, m_{t-1}} J_{m_0}(k_1) J_{m_1}(k_2) \dots J_{m_{t-1}}(k_t) \cdot \exp(i\varphi_{m_0, \dots, m_{t-1}}) \exp(i\beta_{m_0, \dots, m_{t-1}} Tn). \quad (3.7)$$

$$\cdot (1 + \exp(-i\beta_{m_0, \dots, m_{t-1}} T q)) \delta_{\alpha_{m_0, \dots, m_{t-1}}, q}.$$

При $t < t_E$ квантовыми поправками в (3.7) можно пренебречь и воспользоваться классическим значением R . Тогда $R(t, n, q) \sim e^{-\beta t}$, где $\beta \sim \frac{1}{2} \ln K$ ($K \gg 1$) [20, 77]. К моменту $t \sim t_E$ (3.5) корреляции достигают величины $R(t_E, n, q) \sim k^{-1/2}$ и для дальнейшего вычисления R надо использовать точное выражение (3.7), что представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся лишь определением нижней границы для $|R(t, n, q)|$.

Для нахождения максимально возможной скорости убывания $R(t, n, q)$ воспользуемся условием унитарности оператора $e^{i\hat{H}_t}$ и тождеством $\langle n | e^{-i\hat{H}_t} e^{i\hat{H}_t} | n \rangle \equiv 1$, из которого имеем: $e^{i\hat{H}_t} | n \rangle = (\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(n)} e^{im\theta_0}) | n \rangle$ и $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m^{(n)}|^2 = 1$. Но из (3.4) следует (т.к. $\alpha_{m_0, \dots, m_{t-1}} \sim kt$), что сумма по m содержит $m_{\max} \sim kt$ членов ($A_m^{(n)}$ с $|m| > m_{\max}$ экспоненциально малы). Предполагая, что все A_m с $|m| < m_{\max}$ одного порядка (в противном случае найдется q с $|q| < m_{\max}$, для которого корреляции будут убывать медленнее чем (3.8)) и используя точное равенство $R(t, n, q) = \frac{1}{2} (A_q^{(n)} + A_q^{(n-q)})$, получим для $t \gg t_E$:

$$|R(t, n, q)| \geq \frac{1}{\sqrt{kt}}. \quad (3.8)$$

Отметим, что хотя уже через время $t \sim t_E$ классическое значение коррелятора будет отличаться от квантового (при сравнении рассматриваем квазиклассическую область) абсолютная величина коррелятора будет малой $R \sim k^{-1/2}$. Поэтому такие величины как, например, энергия ротатора $E = \langle n | \frac{1}{2} \hat{n}_t^2 | n \rangle$, будут отличаться от своего классического значения на малую величину $\sim k^{-1/2}$ в течение времени $t_q \propto \hbar^{-1}$ (число разновремен-

ных корреляторов в выражении для E растет со временем по степенному закону).

Таким образом, в динамике квантовых систем стохастических в классическом пределе можно выделить два временных масштаба t_E и t_D , о которых говорилось выше. В течение времени t_E движение квантовой системы полностью случайно, энтропия близка к своему классическому значению, корреляции как и в классическом случае затухают экспоненциально. При этом в квазиклассической области квантовые средние (например, $E(t)$ или $R(t, n, q)$) могут быть представлены в виде формального ряда Тейлора по степеням \hbar . На примере такого разложения для $R(t, n, q)$ в (3.7) видно, что в области хаоса $K \gg 1$ квантовые поправки к основному (классическому) члену в таком тейлоровском разложении нарастают со временем экспоненциально (ранее такой результат для модели нелинейного осциллятора был получен в [77, 83, 92]). Тем не менее полная квантовая поправка к классическим средним оказывается малой по абсолютной величине ($t_q \gg t_E$, см. § 2, [38-84]) в течение значительно большего интервала времени $t_D \gg t_q \gg t_E$ (ср. (2.1) и (2.3)). Причина этого заключается, по-видимому, в том, что при $t > t_E$ точное выражение для средних оказывается неаналитическим по \hbar . Так, например, выражение (3.7) при $t \sim t_E$ содержит неаналитические члены $\propto e^{i\psi m_0, \dots, m_t t_E} \propto e^{ik}$ ($m_{t_s} \sim K^{t_E}$). Поэтому, хотя квантовые поправки при $t \sim t_E$ малы, но прямое тейлоровское разложение для средних через время t_E оказывается неприменимым. Интересно однако отметить, что относительная величина поправок для некоторых характеристик, например, для $R(t, n, q)$, оказывается большой уже через время $t \sim t_E$. При $t \gg t_E$ в квантовой системе отсутствует экспоненциальное затухание корреляций, а КС-энтропия $h = 0$.

Здесь следует заметить, что причиной медленного убывания

корреляций является степенной рост числа гармоник θ в U со временем, или другими словами - числа заселенных уровней невозмущенной системы (один толчок захватывает $\approx 2k$ уровней). Ввиду этого число гармоник θ в $\hat{h}_t = U^+(-i \frac{\partial}{\partial \theta})U$ также растет степенным образом, что и приводит к $\dot{h} = 0$ и неэкспоненциальному затуханию корреляций. Поскольку указанное свойство U имеет место практически для всех возмущений, то естественно ожидать, что и другие квантовые системы, стохастические в классическом пределе, будут обладать равной нулю КС-энтропией и степенным убыванием корреляций. Это подтверждается результатом работы [93], где было показано, что в модели нелинейного осциллятора $\dot{h} = 0$, а для скорости затухания корреляций было получено ограничение аналогичное (3.8). С другой стороны пример истинного квантового хаоса [94,40] (система с гамильтонианом вида $H = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m_0} (q_m \hat{p}_m + \hat{p}_m q_m)$, где q - периодические нелинейные функции θ_m , $m_0 \geq 3$) показывает, что в этом случае движение является не только инфинитным по действиям, но последние должны еще расти экспоненциально быстро. Вследствие этого в консервативных системах энтропия \dot{h} должна быть равна нулю, что согласуется с результатом [95] полученным другим способом.

§ 4. Квантовые корреляции и устойчивость динамики во времени

Для исследования свойств корреляций в квантовой модели (I.4) были проведены численные эксперименты [28], в которых вычислялись корреляции

$$R_t(\tau) = \langle 0 | \cos \hat{\theta}_t \cos \hat{\theta}_{t+\tau} + \cos \hat{\theta}_{t+\tau} \cos \hat{\theta}_t | 0 \rangle, \quad (4.1)$$

где $\cos \hat{\theta}_t = U^\dagger \cos \theta U_t$ - гейзенберговский оператор в момент времени t , U_t - оператор эволюции гамильтониана (I.4), $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ - означает среднее по начальному состоянию. В принципе можно рассматривать и другие корреляции, например, корреляции $\sin \theta$. Качественное поведение корреляций $\sin \theta$ такое же как и для $\cos \theta$ за исключением той особенности, что для $\cos \theta$ может существовать остаточный уровень корреляций с $R > 0$, в то время как для $\sin \theta$ корреляции должны быть знакопеременными, поскольку они определяют скорость диффузии по уровням, которая в квантовом случае равна нулю ($t \gg t_D$).

Численный алгоритм нахождения корреляций заключался в определении волновых функций $\psi_t = U_t |0\rangle$, $\psi_{t+\tau} = U_\tau \cos \theta \psi_t$, $\psi_{t+\tau} = U_{t+\tau} |0\rangle$ по уравнению (I.7) и дальнейшем вычислении среднего $2\text{Re}(\langle \psi_{t+\tau} | \cos \theta | \psi_{t+\tau} \rangle) = R_t(\tau)$.

Результаты численных экспериментов представлены в таблице I. В ней проведено сравнение классических R_{cl} и квантовых R_q корреляций при $t = 0$, $0 \leq \tau \leq 7$ (см. (4.1)) в случае начального классического состояния: $\Pi = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($R_{cl} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos \theta_\tau d\theta$) и соответствующего квантового: $\psi(\theta, 0) = (2\pi)^{-1/2}$. Из этих данных видно, что при $K = 5, 5+2\pi$, когда мера островков устойчивости пренебрежимо мала [17], классические корреляции при $\tau \leq 7$ очень быстро затухают со временем. При этом квантовые корреляции близки к классическим только для $\tau \leq t_E \approx 3$, а при $\tau \geq t_E$ они различаются в несколько раз. Теоретическое значение t_E (3.5) также оказывается равным всего нескольким толчкам, что согласуется с результатами численных экспериментов. При этом, например, для $k = 40$, $K = 5$ энергия квантового ротатора отличается от классического значе-

Таблица I

τ	R_{cl}	R_q/R_{cl} $k=5$	R_q/R_{cl} $k=20$	R_q/R_{cl} $k=40$	R_q/R_{cl} $k=100$
0	I	I	I	I	I
$kT=2$					
I	0.5767	0.9880	0.9993	0.9998	I.0000
2	0.4986	0.965I	0.9976	0.9994	0.9998
3	0.96I4	0.9753	0.9982	0.9996	0.9999
4	0.6794	I.I785	I.0745	I.0294	I.0053
5	0.5688	I.5397	I.0742	0.9552	0.9754
6	0.6504	0.937I	0.9294	I.I233	I.0I52
7	0.7648	0.8375	I.0365	0.9678	0.9946
$kT=5$					
I	-0.I3I0	0.83I3	0.9908	0.9977	I.0000
2	0.0I229	I4.9880	7.4768	2.7307	0.9723
3	0.3384	2.0254	0.8543	I.0774	0.9069
4	0.08002	5.4849	2.7656	I.492I	I.3884
5	0.09999	I.070I	2.3252	I.5372	0.I946
6	0.09I67	2.5472	I.994I	2.4490	0.3506
7	0.00965	82.404	-3.8520	I2.6I5	II.703
$kT=5+2\pi$					
I	-0.03770	-0.6053	0.8963	0.9756	0.9960
2	0.08725	-4.0I83	0.04544	I.0256	0.90I2
3	0.I389	I.7423	I.4I04	I.I857	0.2I9I
4	0.0I64I	-5.6684	0.4I88	4.4308	0.2732
5	0.0I945	-9.3060	-9.4807	4.985I	2.0925
6	0.02I84	0.6062	2.I323	8.0998	-3.07I4
7	0.00752	33.524	8.7I8I	I9.6676	-I.I330

ния менее чем на 25% в течение времени $t_D = 120 \gg t_E \approx 3$. В случае $K = 2$, когда меры устойчивой и стохастической компонент оказываются приблизительно одинаковыми, классические корреляции не затухают со временем и различие между R_{cl} и R_q остается меньше 20% в течение времени $\tau \approx 100 \gg t_E \approx 3$ ($k = 40$). Таким образом, характеристики не уменьшающиеся со временем экспоненциально, например, энергия ротатора, корреляции при $K = 2$, оказываются близкими в течение времени $t_D \gg t_E$. Отметим, также, что в области устойчивости $K = 0.5$ ($k = 20$) отличие квантовых и классических корреляций оказывается на уровне 0.1% для $\tau = 20$ (при $k = 5$, $\tau = 20$ на уровне 10%).

Типичный вид поведения квантовых корреляций представлен на рис.4. Видно, что имеются остаточные корреляции не уменьшающиеся со временем. Величина этих корреляций уменьшается с ростом k , но явный вид зависимости от k проследить не удастся ввиду резкого возрастания времени счета с k .

Величину остаточных корреляций можно оценить следующим образом. Пусть $\tau \gg t_D$. Тогда волновая функция $|\psi\rangle = e^{+i\theta} U_\tau^+ e^{-i\theta} U_\tau |0\rangle$ содержит приблизительно $\sqrt{k^2 t_D}$ гармоник Q (при $t \gg t_D$ рост энергии прекращается). Т.к. $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, то средняя амплитуда гармоник Q определяется из условия $Q^2 \sqrt{k^2 t_D} \sim 1$. Тогда из соотношения $R(\tau) \sim \langle 0 | \psi \rangle \sim Q$ и (2.3) получаем оценку

$$|R_t(\tau)| \sim (k^2 t_D)^{-1/4} \sim k^{-1}, \quad t + \tau \gg t_D. \quad (4.2)$$

При $t + \tau \ll t_D$ число гармоник в $|\psi\rangle$ будет порядка $\sqrt{k^2 \tau}$ и, следовательно, на этом временном интервале корреляции убывают с ростом τ :

$$|R_t(\tau)| \sim (k^2 t_D)^{-1/4}, \quad t_E \leq t + \tau \ll t_D. \quad (4.3)$$

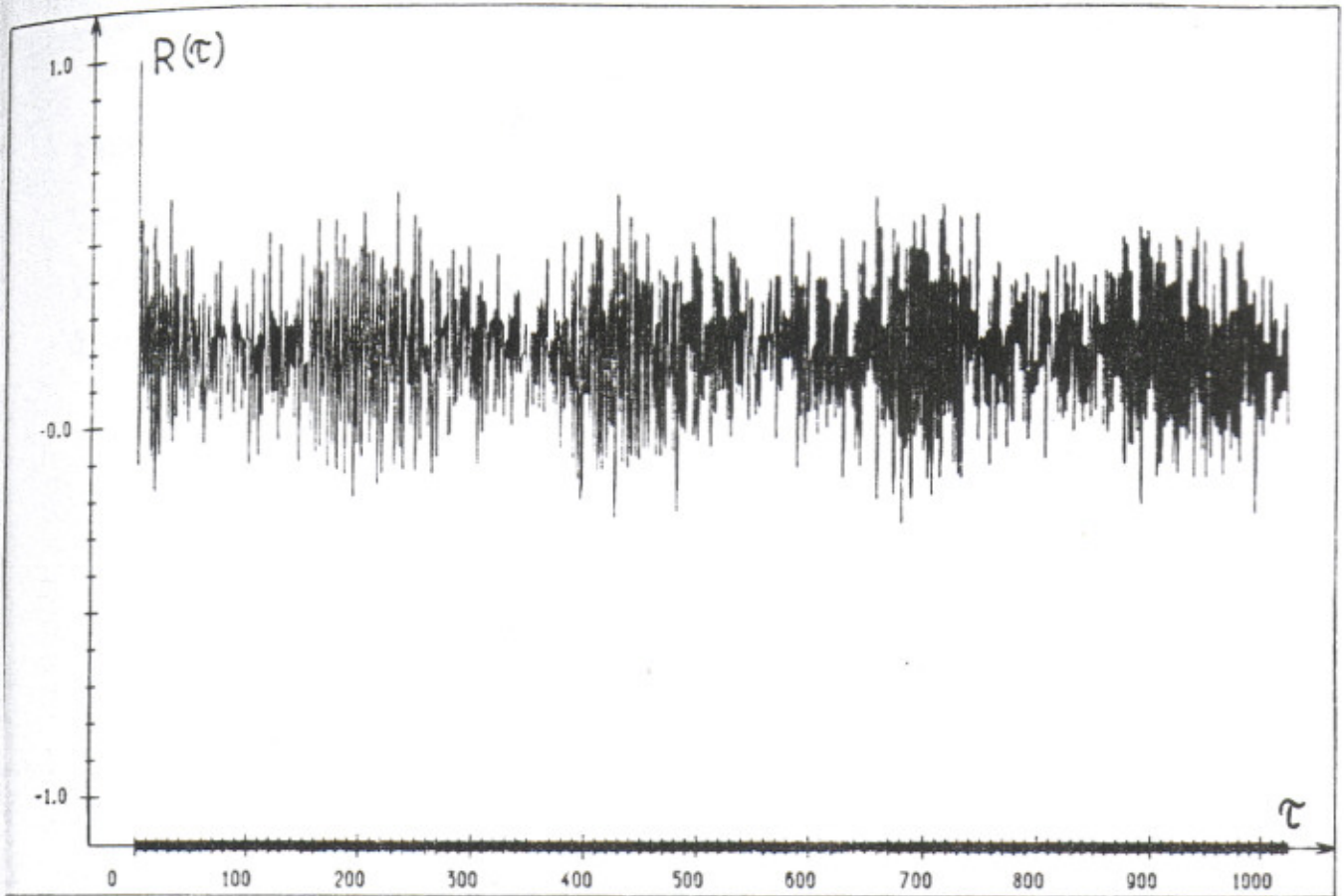


Рис.4. Зависимость квантовых корреляций R (см. (4.1)) от τ для системы (1.4) при $k = 5, K = 5, t = 100$.

Это убывание оказывается очень медленным, а параметр $t_D^{1/4}$ не слишком велик, и поэтому в численном эксперименте практически сразу наблюдаются неубывающие со временем остаточные корреляции (см. рис.4).

Тем не менее в квазиклассической области $k \gg 1, T \ll 1, K > 1$ в течение времени t_E квантовые и классические корреляции мало отличаются друг от друга ($\propto O(k^{-1})$), что приводит к одинаковой зависимости коэффициента диффузии D от параметра K (осцилляции D (рис.2) определяются фактически первыми двумя корреляциями [69,70]). В существенно квантовой области $k \gg 1,$

$T \gg 1$ возбуждение системы происходит диффузионным образом с некоторой квантовой скоростью диффузии D_q . Зависимость D_q от

параметров системы будет найдена в § 5.

Отметим, что согласно полученным оценкам (4.2), (4.3) и результатам § 3 экспоненциальное затухание квантовых корреляций отсутствует и в таких системах, где мера классических островов устойчивости строго равна нулю. В качестве такой системы была выбрана модель (I.1) с $H_0 = n^2/2$ и

$$V(\theta) = \begin{cases} -\frac{\theta^2}{2}, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{(\theta - \pi)^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}; \quad (4.4)$$

$$V(\theta) = V(\theta + 2\pi); \quad V(\theta) = V(-\theta).$$

при $kT > 4$. Численные эксперименты действительно показали, что в такой квантовой системе, в отличие от классической, экспоненциальное затухание корреляций отсутствует.

Следует отметить, что в квантовой модели (I.4) отсутствует не только экспоненциальное затухание корреляций, но и локальная неустойчивость движения, которая имеет место в классической системе. Наличие локальной неустойчивости ($h > 0$) приводит к тому, что динамика классической системы оказывается фактически необратимой. Действительно, хотя уравнения движения системы (I.4) обратимы (гамильтониан системы симметричен по отношению к замене $t \rightarrow -t$ в моменты времени $\frac{T}{2} + lT$, где l - целое, и поэтому при замене в этот момент $p \rightarrow -p$ траектория в дальнейшем движется точно в обратном направлении и возвращается в начальную точку), но из-за локальной неустойчивости сколь угодно малое возмущение ε полностью изменит траекторию через время $t_\varepsilon \sim \frac{|\ln \varepsilon|}{h}$. Поэтому в численных экспериментах, где есть ошибки округления на уровне $\varepsilon \sim 10^{-12}$ (БЭСМ-6), неустойчивость приводит к нарушению обратимости уже через несколько

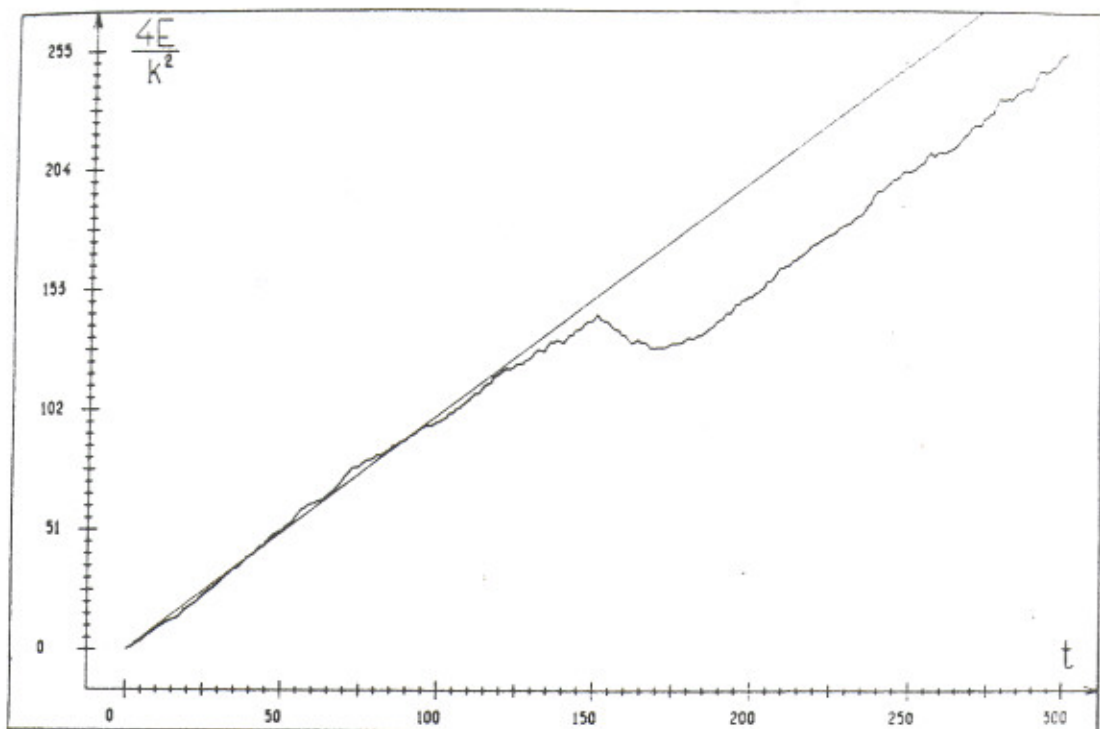


Рис.5. Зависимость энергии классического ротатора (I.4) от времени при обращении движения на компьютере в момент $t = 150$; $K = 5$. Движение системы оказывается необратимым.

периодов: $t_\varepsilon \sim 10$; $(h \approx \ln K/2)$ (рис.5). В квантовой системе неустойчивость отсутствует и обратимость происходит с точностью порядка ε . Более того, обратимость имеет место даже при случайной сшивке фаз фурье-компонент A_n волновой функции Ψ в интервале $\Delta\varphi$ в момент обращения (см. рис.6,7). На рис.7 представлена функция распределения $f(n) = |A_n|^2$ по уровням невозмущенной системы в нормированных координатах. Резкий пик при $n = 0$ соответствует возвращающейся компоненте $(\Psi(\theta, t=0) = (2\pi)^{-1/2})$, доля неперевращенной компоненты составляет $W_L \approx 7.9 \cdot 10^{-4}$ (сбой фаз производился в интервале $\Delta\varphi = 0.1$). Зависимость W_L

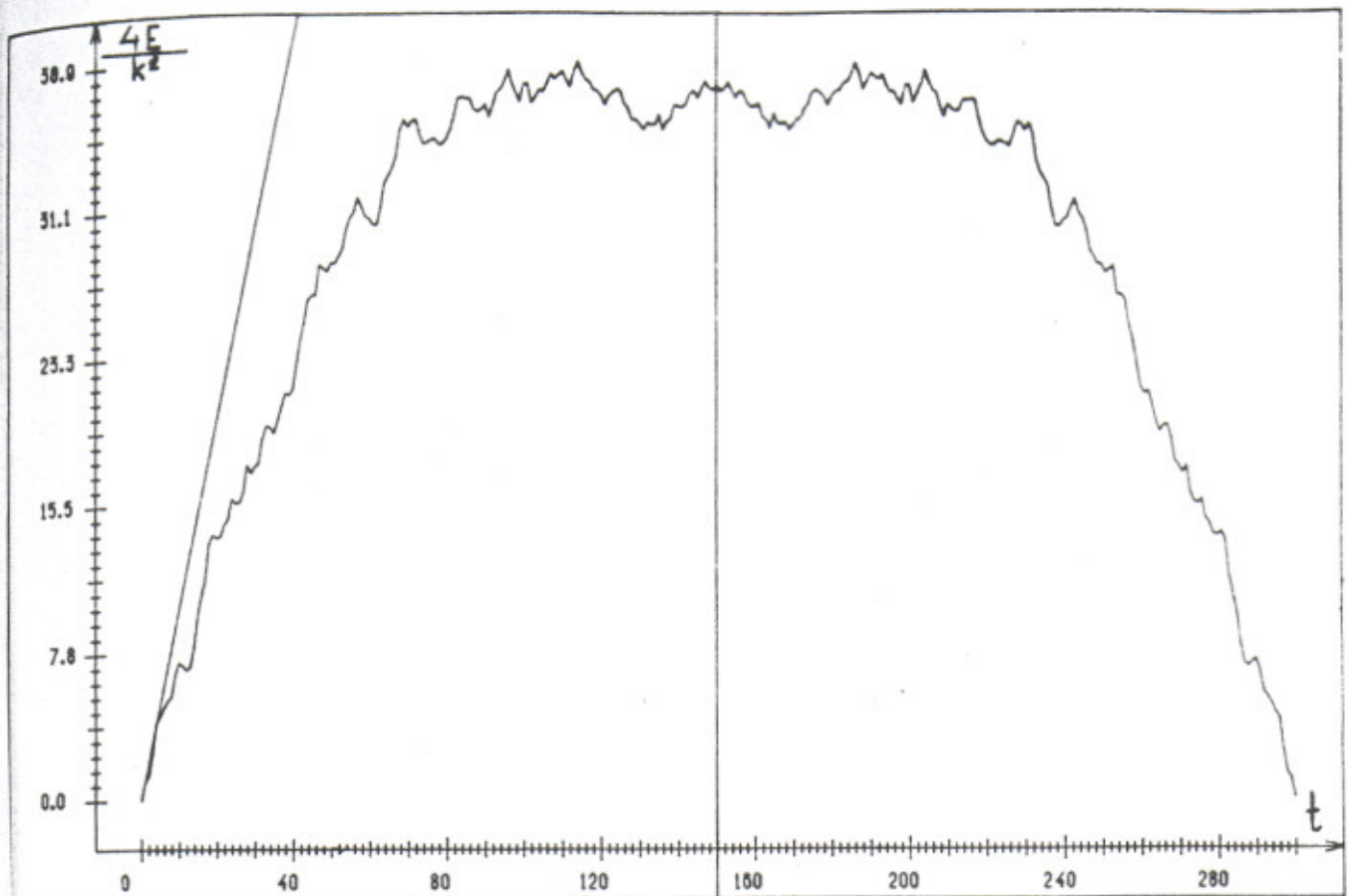


Рис.6. Зависимость энергии квантового ротатора (1.4) от времени при обращении движения и случайной сбижке фаз амплитуд A_n в интервале $\Delta\varphi = 0.1$ в момент времени $t = 150$; $k = 20$, $K = 5$. Прямая линия соответствует классической диффузии, вертикальная прямая отмечает момент обращения времени. Движение квантовой системы обратимо.

от $\Delta\varphi$ представлена в таблице 2. Интересно, что $W_L \approx 0.079 \ll 1$ даже при $\Delta\varphi = 1$. О существенном влиянии фаз φ_n амплитуд A_n говорит и тот факт, наблюдавшийся в численных экспериментах, что при случайной сбижке всех фаз φ_n в интервале 2π в момент времени $t \gg t_D$ снова происходит диффузионное возбуждение ротатора с $D_q \sim D_{cl}$ в течение времени t_D .

Полное число уровней в проведенных численных экспериментах достигало $N = 2049$ ($-1024, 1024$). При счете использовались различные начальные условия: возбуждение только нулевого уровня

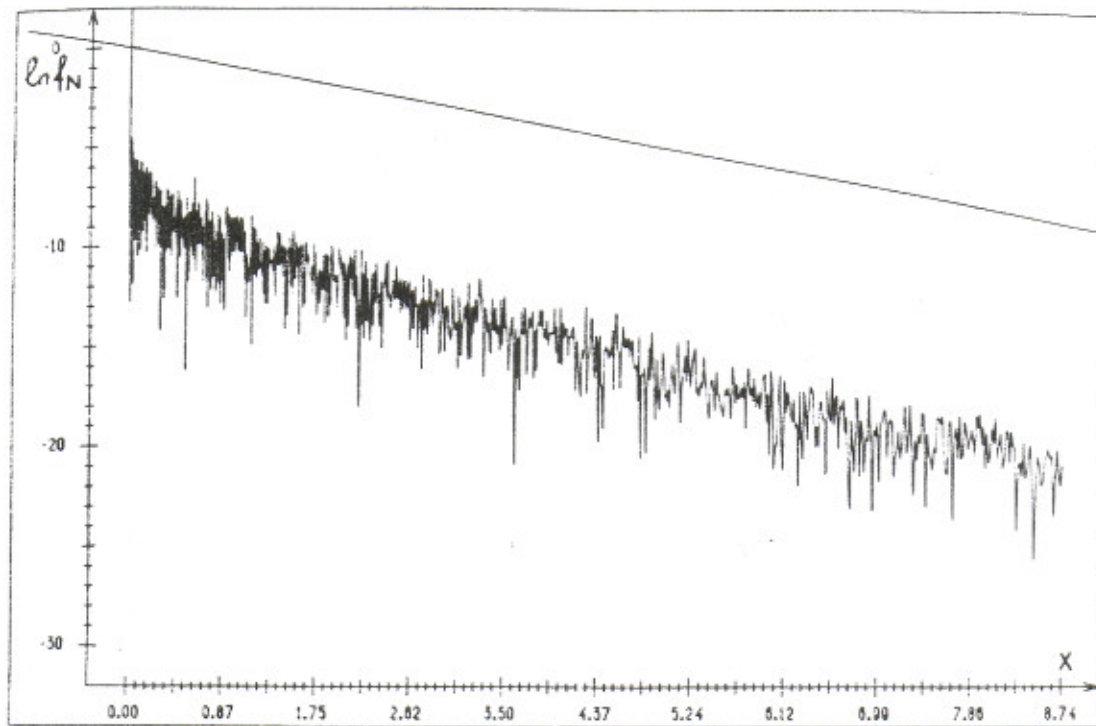


Рис.7. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (I.4) в нормированных координатах

$f_N = f(n) \sqrt{\pi t} k$, $x = n^2/k^2 t$ в момент возврата $t = 300$; прямая соответствует классическому распределению, ломаная линия - численный квантовый результат, параметры те же, что и на рис.6.

Таблица 2

$$k = 20, K = 5, t = 300$$

$\lg(\Delta\varphi)$	0.3	0.48	0	-0.52	-1.0
$\lg W_L$	-0.02	-0.26	-1.1	-2.13	-3.1

$n = 0$, гауссовское распределение с шириной $4 \leq \Delta n \leq 20$. Существенной зависимости от начальных условий не наблюдалось. Сравнение начального гауссова распределения вероятностей $|\psi(\theta)|^2$ с распределениями в момент обращения времени $t = 150$ и в момент возвращения в начальное состояние $t = 300$ представлено на рис.8. Разница распределений $|\psi(\theta)|^2$ при $t = 0$ и $t = 300$ была порядка 10^{-10} . При $t = 150$ волновая функция представляет собой набор предельно узких пиков. Ширина их $\Delta\theta$ определяется числом возбужденных уровней $\Delta\theta \sim 1/\Delta n$ ($(\Delta n)_{\max} \sim (Dt_D)^{1/2}$). Расщепление на пики происходит в процессе диффузии пакета и является отражением дробления классической функции распределения в области хаоса. Следует, однако, отметить, что, в отличие от классической системы, где расщепление происходит экспоненциально быстро и с течением времени идет на все более мелкие масштабы, в квантовой системе размер пиков определяется числом возбужденных уровней и поэтому уменьшается со временем лишь степенным образом или вообще останавливается в случае квантового ограничения диффузии.

§ 5. Локализация собственных функций квазиэнергии

В этом параграфе будет показано, что задача о нахождении длины локализации СФКЭ сводится к вычислению показателей Ляпунова (ПЛ) в некоторой вспомогательной классической гамильтоновой системе [30,41]. Важное преимущество такого подхода заключается в том, что с его помощью можно исследовать свойства СФКЭ без их явного вычисления. Этот метод эквивалентен методу матрицы переноса, который применяется при исследовании локализации в твердом теле [96-98]. Для исследования локализации в модели (I.4) метод ПЛ был использован также в [42].

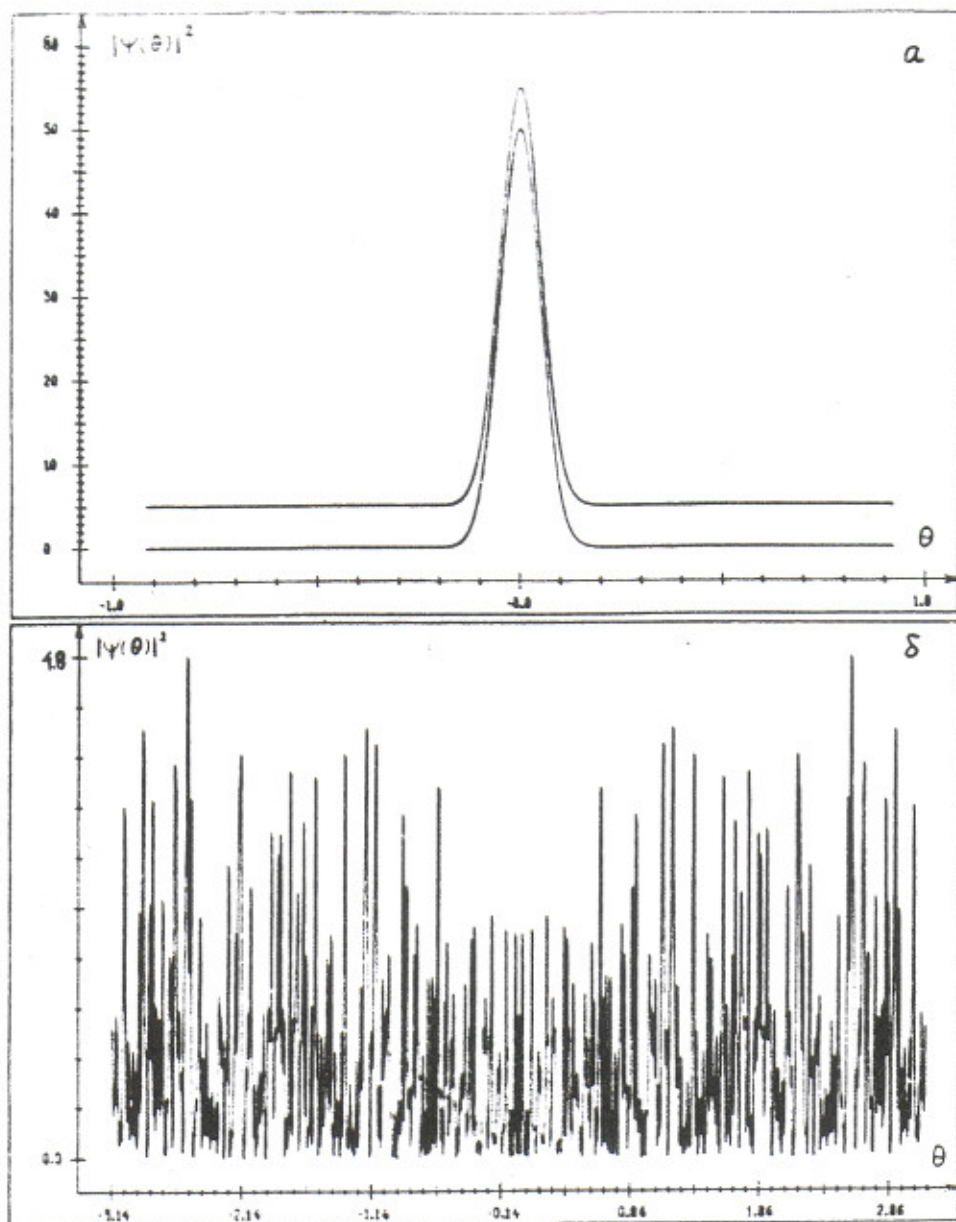


Рис.8. Распределение вероятности по фазе в модели (I.4) для разных моментов времени ($K = 20$, $K = 5$): а - начальное гауссово распределение при $t = 0$ (нижняя кривая), в момент возврата $t = 300$ (верхняя кривая); б - "изрезанное" распределение в момент обращения времени $t = 150$.

Для использования указанного метода рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет СФКЭ в (I.I) с квазиэнергией ν :

$$\begin{aligned} u_n^- &= \exp(i(\nu - TH_0(n)))u_n^+ \\ u^+(\theta) &= \exp(-iV(\theta))u^-(\theta) . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $u^\pm(\theta)$ - значения функции до и после действия возмущения, u_n^\pm - фурье-компоненты $u^\pm(\theta)$. Для численных экспериментов удобней переписать уравнения (5.1) следующим образом. Введем $\bar{u} = e^{\pm iV/2} u^\pm / g$, где g - произвольная действительная функция θ , и ограничимся случаем, когда V и g - четные. Тогда из (5.1) получаем

$$\sum_r \bar{u}_{n+r} W_r \sin(\chi_n + \varphi_r) = 0, \quad (5.2)$$

где $e^{-iV/2} g = \sum_r W_r e^{i(r\theta + \varphi_r)}$, $\chi_n = (\nu - TH_0(n))/2$.

В том случае, когда отличны от нуля только W_r с $|r| \leq N$, вектор из $2N$ известных значений \bar{u}_n определяет значения СФКЭ при любом n . Рекуррентное вычисление \bar{u}_n из (5.2) можно рассматривать как некоторую динамическую систему в дискретном времени n .

Динамика $2N$ -компонентного вектора определяется матрицей переноса $M(n)$, вид которой легко найти из (5.2). Матричные элементы равны $M_{ij} = \frac{-W_{N-j} \sin(\chi_n + \varphi_{N-j})}{W_N \sin(\chi_n + \varphi_N)}$, $M_{ij} = \delta_{i,j+1}$ при

$i > 1$ ($1 \leq i, j \leq 2N$) и $\det M = 1$. Для гамильтоновости требуется, чтобы матрица M наряду с собственным значением λ имела и собственное значение $1/\lambda$ [33]. Для этого необходимо, чтобы характеристический полином $\rho(\lambda) = \det |M - \lambda E|$ был возвратным, т.е.

$$\rho(\lambda) = \lambda^{2N} \rho(1/\lambda) = \lambda^{2N} + a_1 \lambda^{2N-1} + \dots + a_{2N-1} \lambda + 1,$$

где $a_1 = a_{2N-1}$, $a_2 = a_{2N-2}$ и т.д. Из явного вида матрицы M следует, что $a_j = -M_{1j}$ и необходимым условием гамильтоновости является $W_r e^{i\varphi_r} = W_r e^{i\varphi-r}$, что имеет место для четных V и q . Покажем, что при этом условии характеристический полином для произведения произвольного числа матриц $M(n)$ (матрица $M(n)$ меняется с изменением n) также будет возвратным. Тогда произведение матриц $M(n)$ поворотом может быть приведено к симплектической матрице, что и означает гамильтоновость динамики [63]. Для доказательства заметим, что $M^I(n) = M^{-1}(n)$, где знак I означает операцию инверсии элементов матрицы относительно центра. Легко видеть, что если $A^I = A^{-1}$, $B^I = B^{-1}$, то $(AB)^I = B^I A^I = (AB)^{-1}$. Кроме того, $\det A = \det A^I = 1$. Покажем теперь, что если $A^I = A^{-1}$, то характеристический полином является возвратным:
$$\rho(\lambda) = \det |A - \lambda E| = \det |E - \lambda A^I| = (-\lambda)^{2N} \det |(A - \frac{1}{\lambda} E)^I| = \lambda^{2N} \det |A - \frac{1}{\lambda} E| = \lambda^{2N} \rho(1/\lambda)$$
. Что и требовалось доказать.

Вследствие этого динамика по n является гамильтоновой и в системе имеется N положительных и N отрицательных ПЛ, причем $\gamma_i^+ = -\gamma_i^-$. Асимптотически длина локализации СФКЭ определяется минимальным положительным ПЛ $\gamma_1 = 1/l$ [30, 96-98]. Отличие γ_1 от нуля приводит к тому, что СФКЭ экспоненциально локализованы: $u_n \propto \exp(-\frac{|n|}{l})$ при $|n| \rightarrow \infty$, а спектр квазиэнергий является чисто точечным. Техника вычисления всех ПЛ подробно описана, например, в [63]. При этом удастся найти не только все γ_i , но и определить зависимость нормы собственного вектора показателя $\|u_n^{(i)}\| = (\sum_{m=1}^{2N} |u_{n+m}^{(i)}|^2)^{1/2}$ от n .

Отметим, что задача о локализации СФКЭ может рассматриваться и как задача о локализации в твердом теле. Действительно, после простых преобразований (5.1) сводится к виду

$$\hat{H}_{ss} u = \left\{ \cos \frac{\hat{V}}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\nu}{2} - \frac{T}{2} \hat{H}_0 \right) \cos \frac{\hat{V}}{2} - \frac{1}{2} \sin \hat{V} \right\} u = 0, \quad (5.3)$$

где $u = e^{\pm iV/2} u^{\pm}$. После Фурье-преобразования видно, что гамильтониан H_{ss} соответствует некоторой одномерной решетке с взаимодействующими соседями и энергией $E = -\sum_r W_r W_{r+1} \sin \varphi_r \cos \varphi_{r+1}$. При этом квазиэнергия ν как бы определяет потенциал взаимодействия, а собственное значение энергии E рассматривается как параметр. Кроме того, невозмущенный номер уровня Π в модели (I.1) соответствует дискретной пространственной координате в решетке. Аналогия между локализацией СФКЭ и локализацией Андерсона в одномерном случайном потенциале была отмечена в [31, 32].

В том случае, когда $\cos \frac{V}{2} \neq 0$ можно ввести $\bar{u} = \cos \left(\frac{V}{2} \right) u$ и разделив уравнение (5.3) на $q^{-1} = \cos \frac{V}{2}$, свести (5.3) к гамильтониану

$$\hat{H}_{ss} = \operatorname{tg} \left(\frac{\nu}{2} - \frac{T}{2} \hat{H}_0 \right) - \operatorname{tg} \frac{\hat{V}}{2}, \quad (5.4)$$

который соответствует случаю диагонального беспорядка в твердом теле [80]. Такой путь был неявно использован в [31, 32], что привело к возникновению нефизической особенности и не позволило рассмотреть широкий класс потенциалов с $|V| \geq \pi$.

Для модели (I.4) можно выбрать $q = 1$ и тогда получим, что в (5.2)

$$W_r = J_r(k/2), \quad \varphi_r = -\frac{\pi r}{2}, \quad \chi_{\Pi} = \left(\nu - \frac{T \Pi^2}{2} \right) / 2, \quad (5.5)$$

где $J_r(k/2)$ - функция Бесселя. Из-за быстрого падения W_r при $|r| > k/2$ можно ограничиться конечным числом соседей $N \sim k/2$.

Проверка показала, что дальнейшее увеличение N сказывается только на максимальных показателях с $\gamma \sim 1$. Другая проверка состояла в том, что отрицательные показатели должны быть равны по модулю положительным, что также имело место при счете на достаточно большом интервале по N ($(\gamma_1^+ + \gamma_1^-)/\gamma_1^+ \sim 10^{-2}$). Как правило, этот интервал составлял $\sim 10^5$ уровней. Пример вычисления $\gamma_{1,2}^\pm$ приведен на рис.9. Сравнение длины локализации, найденной методом ПЛ, с точными СФКЭ показывает, что этот метод действительно дает правильное значение ℓ (рис.10). Отметим, что величина ℓ не зависит от значения квазиэнергии, которая дает просто сдвиг в фазе χ_n (см. (5.2), (5.5)).

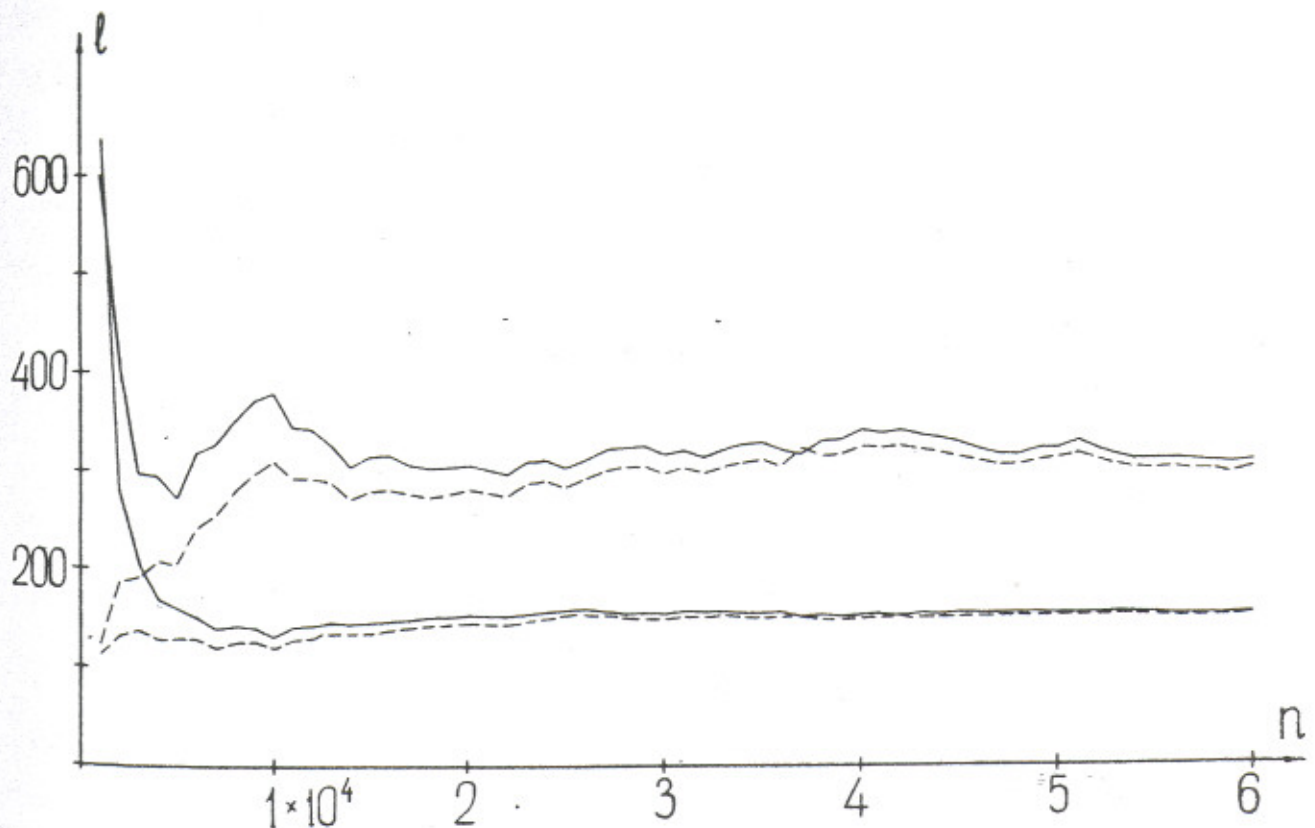


Рис.9. Пример вычисления длины локализации СФКЭ в модели (I.4) при $k = 40$, $K = 10$. Сплошные линии соответствуют положительным показателям Ляпунова, а пунктирные отрицательным. На рисунке приведены два минимальных показателя ($\ell = 1/\gamma$).

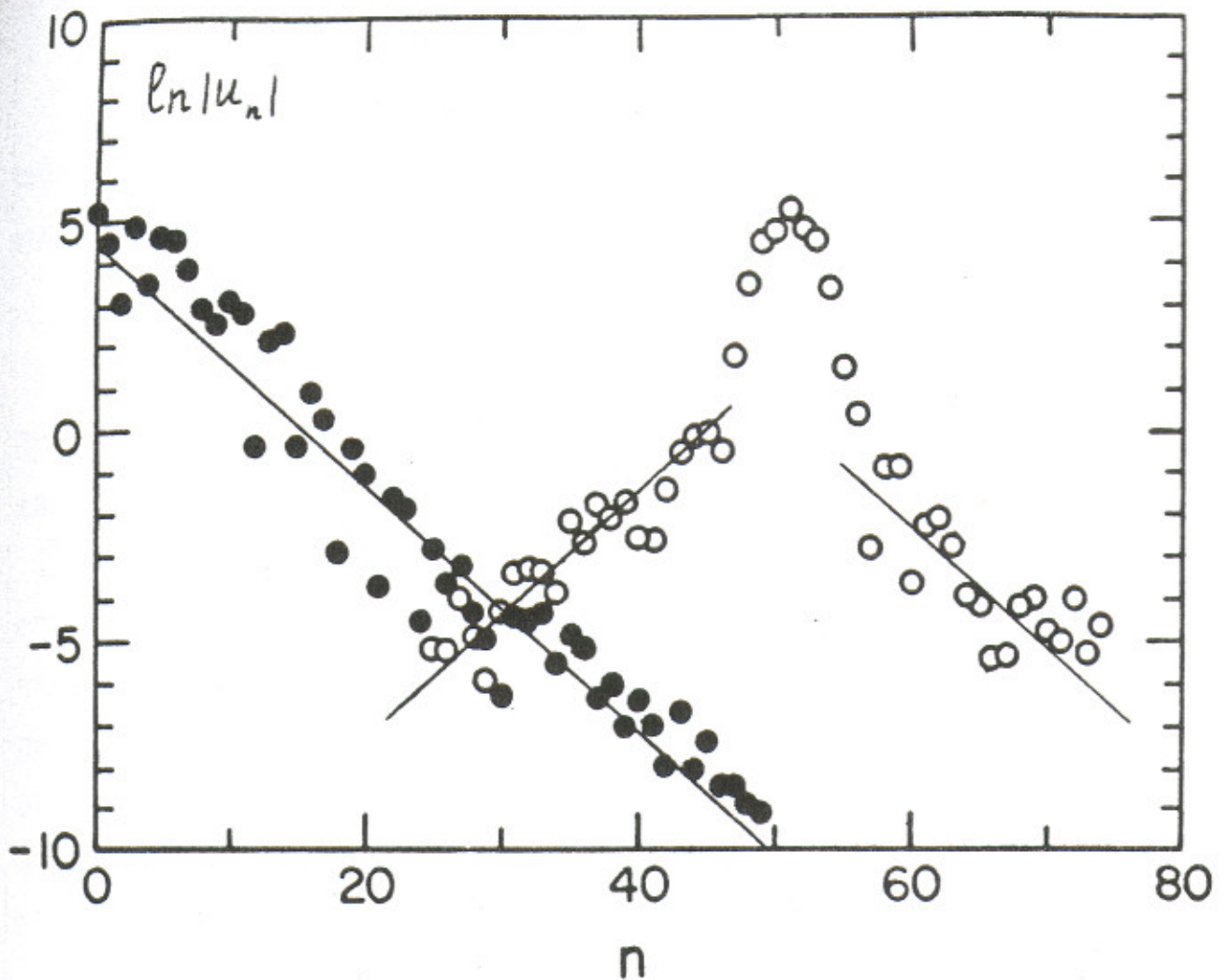


Рис.10. Локализация СФКЭ в модели (I.4) с $K = 2.8$, $T = 4.867$. Точки и кружки - собственные функции с разными квазиэнергиями (численные данные [31]). Прямые соответствуют значению l , полученному методом Ш.

Согласно теоретической оценке (2.3) длина локализации в области хаоса равна

$$l = \alpha D = \frac{D_0(K)}{2T^2} \quad (5.6)$$

Численный множитель $\alpha = 1/2$ может быть получен из сравнения с точно решаемой моделью Ллойда, в которой $V = 2 \arctg(E - 2k \cos \theta)$, а фазы χ_n - случайны и независимы [31, 32]. В этом случае из уравнения (5.4) получаем

$$E_n u_n + k u_{n+1} + k u_{n-1} = E u_n, \quad (5.7)$$

где $E_n = \text{tg} \chi_n$. Длина локализации собственных функций в этой модели вычисляется точно (см. [30], с.148) и равна

$$l = \left[\text{arccch} \left\{ \frac{1}{4k} \left[((2k+E)^2+1)^{1/2} + ((2k-E)^2+1)^{1/2} \right] \right\} \right]^{-1}. \quad (5.8)$$

При $l \gg 1$ из (5.8) получаем $l = \sqrt{4k^2 - E^2}$. Ввиду случайности χ_n фазы $\theta(t) \propto \frac{\partial \chi_n}{\partial n}$ в (1.2) случайны и независимы и $D = D_0 l$. Вычисление интеграла (1.3) в области $D \gg 1$ и его сравнение с l дает $D = 2\sqrt{4k^2 - E^2}$ и $\alpha = 1/2$. Отметим, что численные эксперименты для динамической модели Ллойда, в которой $\chi_n = (\nu - \frac{Tn^2}{2})/2$, показали, что независимо от значений T и ν длина локализации хорошо описывается формулой (5.8) (проверка проводилась в следующих интервалах параметров $0.01 \leq k \leq 1000$, $10^{-5} \leq T \leq 1$, $0 \leq E \leq 2$, $T/4\pi$ - иррационально).

Для модели (1.4) проверка соотношения (5.6) проводилась методом ПИ для различных значений параметров: $5 \leq k \leq 75$; $1.5 \leq K \leq 29$; $T \leq 1$ и $T/4\pi$ - типичное иррациональное число. Было получено, что среднее значение $\langle \alpha \rangle = 0.57 \pm 0.02$ (здесь и далее ошибка статистическая). То, что экспериментальное значение α оказывается несколько больше теоретического связано, по-видимому, с недостаточно малым значением отношения $k/l \sim 1/10$. Сравнение l с D при фиксированном значении $k = 30$ представлено на рис. II. Из него видно, что длина локализации повторяет все осцилляции классической скорости диффузии. Полученные данные удовлетворительно согласуются с формулой (5.6) не только в области развитого хаоса $K \gg 4.5$, где мера островков устойчивости пренебрежимо мала, но и при $\Delta K = K - K_{cr} \ll 1$, когда скорость диффузии определяется сложной критической структурой

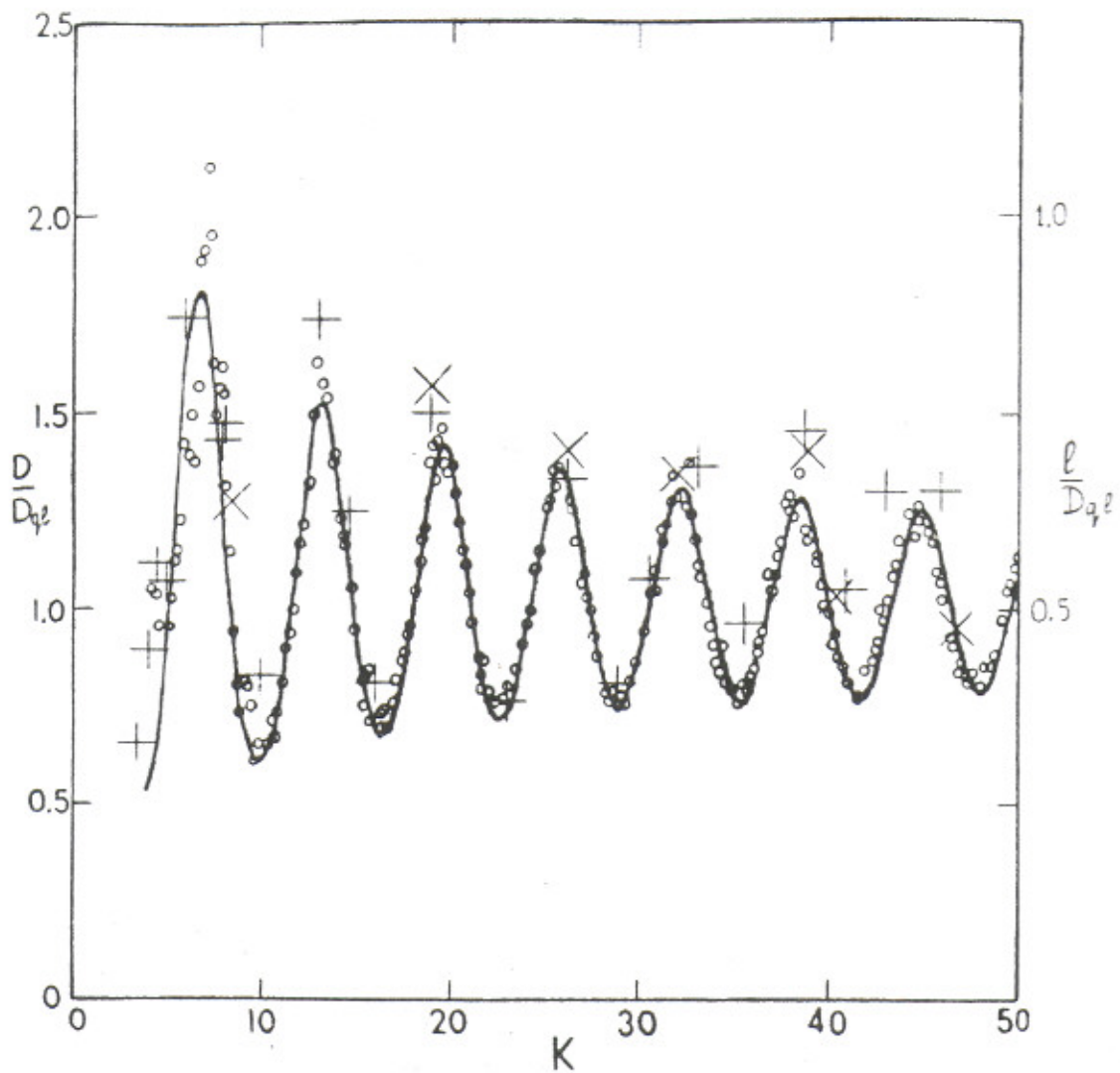


Рис. II. Зависимость длины локализации для модели (I.4) от квантового параметра стохастичности

$K_q = 2k \sin \frac{T}{2} \rightarrow K (T \rightarrow 0)$ при $k = 30$; (+) - $0 < T < \pi$, (x) - $\pi < T < 2\pi$. Кружки и кривая - численные данные и теория для классической скорости диффузии D [69,70].

[17,68,71] и устойчивая компонента занимает около 50% всей фазовой плоскости [17]. При этом скорость диффузии в стандартном отображении D_0 меняется на 4 порядка (см. рис. I2). При проверке (5.6) для $K \leq 10$ в качестве значений D_0 брались данные численных экспериментов (см. вставку на рис. I2), а для $K > 10$ использовалась теоретическая формула (I.6).

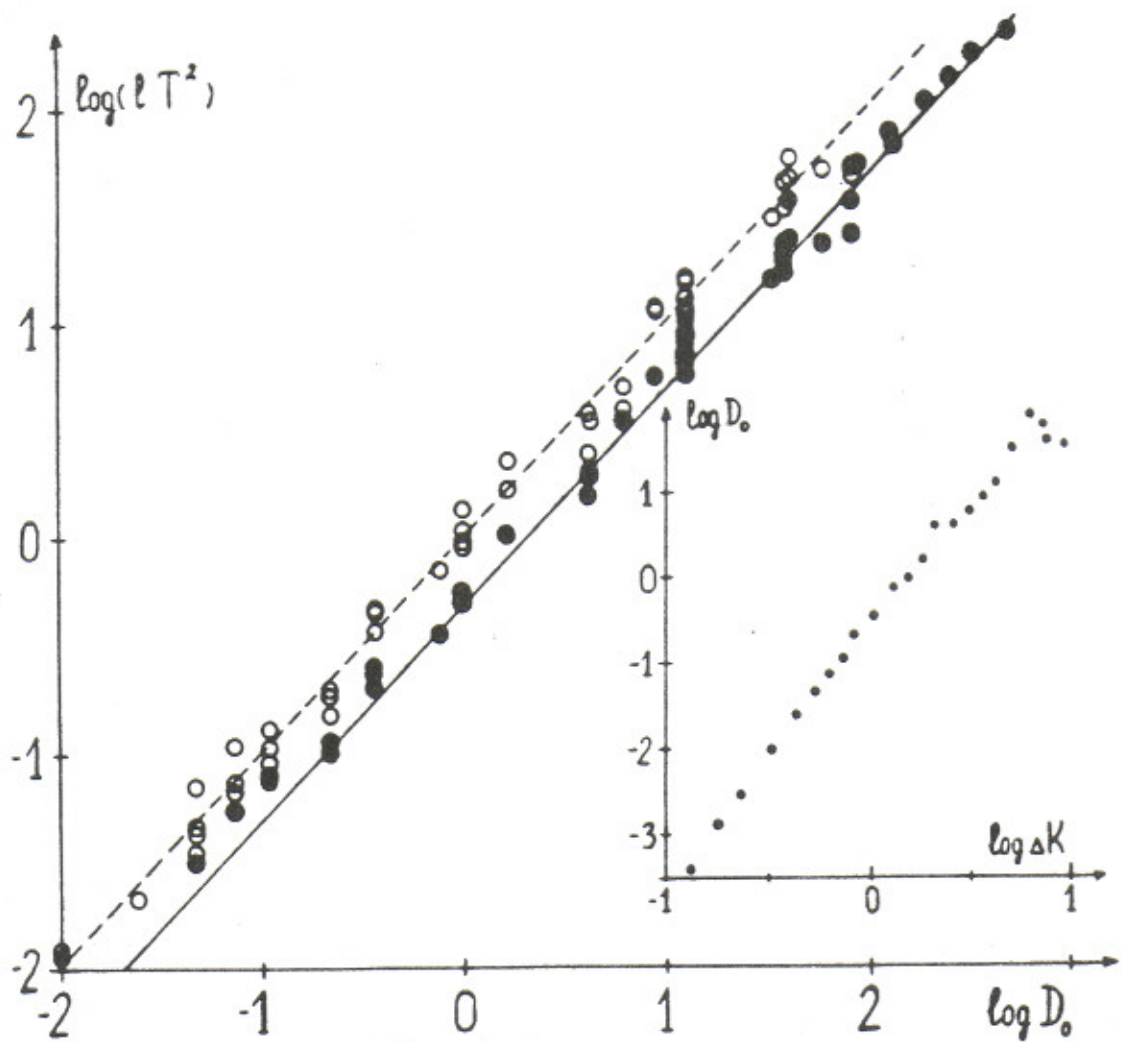


Рис.12. Зависимость длины локализации в (1.4) от скорости диффузии D_0 в стандартном отображении (1.5). Кружки - численные данные для локализации l_s в стационарном распределении (7.4). Пунктирная прямая соответствует среднему значению $\langle \alpha_s \rangle = 1.04$. Точки - длина локализации в СФКЭ, полученная методом ПЛ. Прямая - теоретическая формула (5.6). На вставке представлены численные данные для зависимости D_0 от $\Delta K = K - K_{cr}$
 $K_{cr} = 0.9716\dots$

Отметим, что для специальных значений K (например, $K = 6.6$), когда имеет место "микротронный" резонанс, интеграл от корреляций расходится, что приводит формально к бесконечной классической скорости диффузии [72,73]. В этом случае величина l определяется скоростью диффузии в квантовой системе, которая оказывается конечной из-за того, что совпадение квантовых и классических корреляций имеет место только для нескольких первых корреляций. В результате при $K = 6.6$, $k = 20$ длина локализации $l \approx 220$ и отношение $l/D = 0.7$ оказывается только немного больше теоретического с $\alpha = 0.5$ и D , взятым из (1.6).

Отличие скорости диффузии D от квазилинейного значения $D_{ql} = k^2/2$ связано с влиянием корреляций и приводит к осцилляциям длины локализации с K при фиксированном k (рис. II). Выражение для D имеет вид

$$D = D_{ql} \left[1 + 4 \sum_{\tau=1}^{\infty} R(\tau) \right] \quad (5.9)$$

$$R(\tau) = \langle \sin \theta(\tau) \sin \theta(0) \rangle ,$$

где $R(\tau)$ корреляционная функция, а среднее берется по однородной функции распределения [69,70]. При $K \gg 5$ корреляции быстро затухают и основной вклад дает $R(2) = -\frac{1}{2} J_2(K)$, т.к. $R(1) = 0$. Следующие корреляции дают уже только малые поправки: $R(4) = J_2^2(K)/2 \sim K^{-1}$, $R(3) = (J_3^2(K) - J_1^2(K))/2 \sim K^{-2}$ [69,70].

Такой же метод вычисления скорости диффузии можно использовать и в квантовой системе при $T \gg 1$, $k \gg 1$. В этом случае первые корреляции $R_q(\tau) = \frac{1}{2} \langle 0 | \sin \hat{\theta}(\tau) \sin \hat{\theta}(0) + \sin \hat{\theta}(0) \sin \hat{\theta}(\tau) | 0 \rangle$ дадут скорость квантовой диффузии D_q , по которой можно найти длину локализации $l = D_q/2$. Заметим, что остаточные квантовые корреляции (§ 4) ввиду их малости не влияют на скорость диффузии при $t \ll t_D$, а приводят к прекращению диффузии при $t \gg t_D$.

Для вычисления $R_q(\tau)$ используем полученное в § 3 выражение для $\sin \hat{\theta}(\tau)$ (3.4) и считая, что распределение в фазовом пространстве является приблизительно однородным, так что

$$\langle 0 | e^{im_1 \hat{\theta}(0)} e^{im_2 \hat{\eta}(0)} | 0 \rangle = \delta_{m_1, 0} \delta_{m_2, 0},$$

получим, что первые три корреляции оказываются такими же как в классической системе, но с

заменой $K \rightarrow K_q = 2k \sin \frac{T}{2}$. Выражение для $R_q(4)$ содержит некоторый добавочный член в виде суммы, который, однако, как и $R(4)$ оказывается, вообще говоря, малым:

$$R_q(4) = \frac{1}{2} \left\{ J_2^2(K_q) + \sum_{m \neq -2} [J_m(K_q) J_{m+4}(-K_q) + J_{2m+4}(2k \sin \frac{T}{2} (m+2)) - J_m^2(K_q) J_{2m+2}(2k \sin \frac{T}{2} (m+2))] \right\}. \quad (5.10)$$

Таким образом, скорость квантовой диффузии D_q при $T \gg 1$ приближенно дается соотношением (I.6) с заменой параметра K на его квантовое значение K_q (при $K_q \gg 5$): $D_q = D_0(K_q)/T^2$. Численные данные для длины локализации при $k = 30$, $0 < T < 2\pi$ представлены на рис. II и удовлетворительно согласуются с теоретическим значением $\ell = D_q/2$. На рис. II по горизонтали отложена величина K_q , которая при $T \ll 1$ переходит в классический параметр $K = kT$.

Для $T > 1$ среднее значение $\langle \alpha \rangle \approx 0.6$ несколько превышает $1/2$, что, по-видимому, связано, как и для $T < 1$, с недостаточно большим значением отношения ℓ/k . Из (I.6) следует, что период осцилляций равен $\delta K_q \approx 2\pi$ (рис. II). Отсюда получаем период осцилляций $\ell/D_q \ell$ по k при фиксированном T : $\delta k = \frac{\pi}{\sin T/2}$.

Такие осцилляции для $T = 1, 2$ действительно наблюдались в [42]. Их период удовлетворительно согласуется с полученным значением.

Таким образом, длина локализации существенно зависит от параметра T и приближение случайного потенциала (фазы χ_n - случайны и независимы), предложенное в [31, 32], неправомерно. Задача со случайными χ_n соответствует случайной фазе $\theta \propto \frac{\partial \chi_n}{\partial n}$ в

(I.2) и квазилинейной скорости диффузии $D = D_0 \ell = k^2/2$.
При этом длина локализации $\ell = k^2/4$, что при $k \gg 10$ удовлетворительно согласуется с нашими результатами для случайных χ_n и численными данными [42]. Отметим, что эмпирическое значение показателя для степенной зависимости ℓ от k , полученное в [42], оказалось меньше 2 из-за учета в интерполяции области с $k \sim 1$, в которой квазиклассическое приближение неприменимо.

§ 6. Локализация в критической области

При $K \rightarrow K_{cr}$ скорость классической диффузии в модели (I.4) резко падает вследствие образования специфической критической структуры на границе хаоса [68,71]. Согласно [71] $D_0 \propto (\Delta K)^3$, $\Delta K = K - K_{cr}$. Этот закон согласуется со старыми измерениями [17] и был более аккуратно проверен [29] в интервале $K = 1.1 \div 2.8$, где скорость диффузии можно описать эмпирической формулой (I.6) (см. вставку на рис. I2). Аналогичные результаты были получены в [99].

Выражение (I.6) при $\Delta K \ll 1$ дает среднюю скорость диффузии за время много большее перехода между целыми резонансами ($\approx 130 (\Delta K)^3$). Локальная скорость диффузии в этой области становится резко неоднородной, опять таки за счет образования критической структуры. Тем не менее, закон квантовой локализации (5.6) удовлетворительно выполняется и в этой области при дополнительном условии, что параметр K достаточно большой. Действительно, для применимости (5.6) необходимо, чтобы длина локализации значительно превышала число взаимодействующих соседей $2N \approx k$ или число невозмущенных уровней захваченных одним толчком. В противном случае $D_0/2T^2 \ll k$ диффузия оказывается чересчур медленной и не приводит к увеличению ℓ , которое оста-

ется $\sim k$. Таким образом, соотношение (5.6) выполняется при условии

$$k > k_{cr} = \frac{\alpha K^2}{D_0} \gg 1, \quad K \geq K_{cr}, \quad (6.1)$$

где $\alpha \approx 1$ определяется из численных экспериментов. Неравенство (6.1), впервые полученное в [29], дает условие однородной локализации. В обратном предельном случае $k \ll k_{cr}$ длина локализации $l \sim N \sim k$ оказывается сравнимой с периодом резонансной структуры $\Delta n = 2\pi/T$ и, как и классическая скорость диффузии, становится существенно неоднородной. Пример однородной и неоднородной локализаций представлен на рис.13 (на этом рисунке показана зависимость от n нормы собственного вектора показателя γ_1 : $\|u_n\| = \left(\sum_{m=1}^{2N} |u_{n+m}^{(1)}|^2 \right)^{1/2}$, которая может рассматриваться как СФКЭ на некотором отрезке по n). В неоднородном случае размер наблюдаемых ступенек равен периоду резонансной структуры $2\pi/T$. Эти ступеньки сохраняются и при очень больших значениях n . Так, например, на рис.13 зависимость $\|u_n\|$ от n дана в области с $n \approx 3 \cdot 10^4$.

Значение α в (6.1) численно можно определить из того условия, что при фиксированном $k \gg 1$, начиная с некоторых K , получаемая величина α в (5.6) начинает расти (т.е. соотношение (5.6) нарушается). Таким образом, из данных для $K = 20, 30, 40$ получаем значение $\alpha \approx 1.3$.

Другой способ определения α заключается в анализе распределения вероятности по уровням. Для этого вероятность на невозмущенном уровне усреднялась по достаточно большому интервалу времени $t \gg t_D$ в результате чего получалось стационарное распределение $\bar{f}(n)$. При $k > k_{cr}$ распределение по уровням соответствовало однородной экспоненциальной локализации

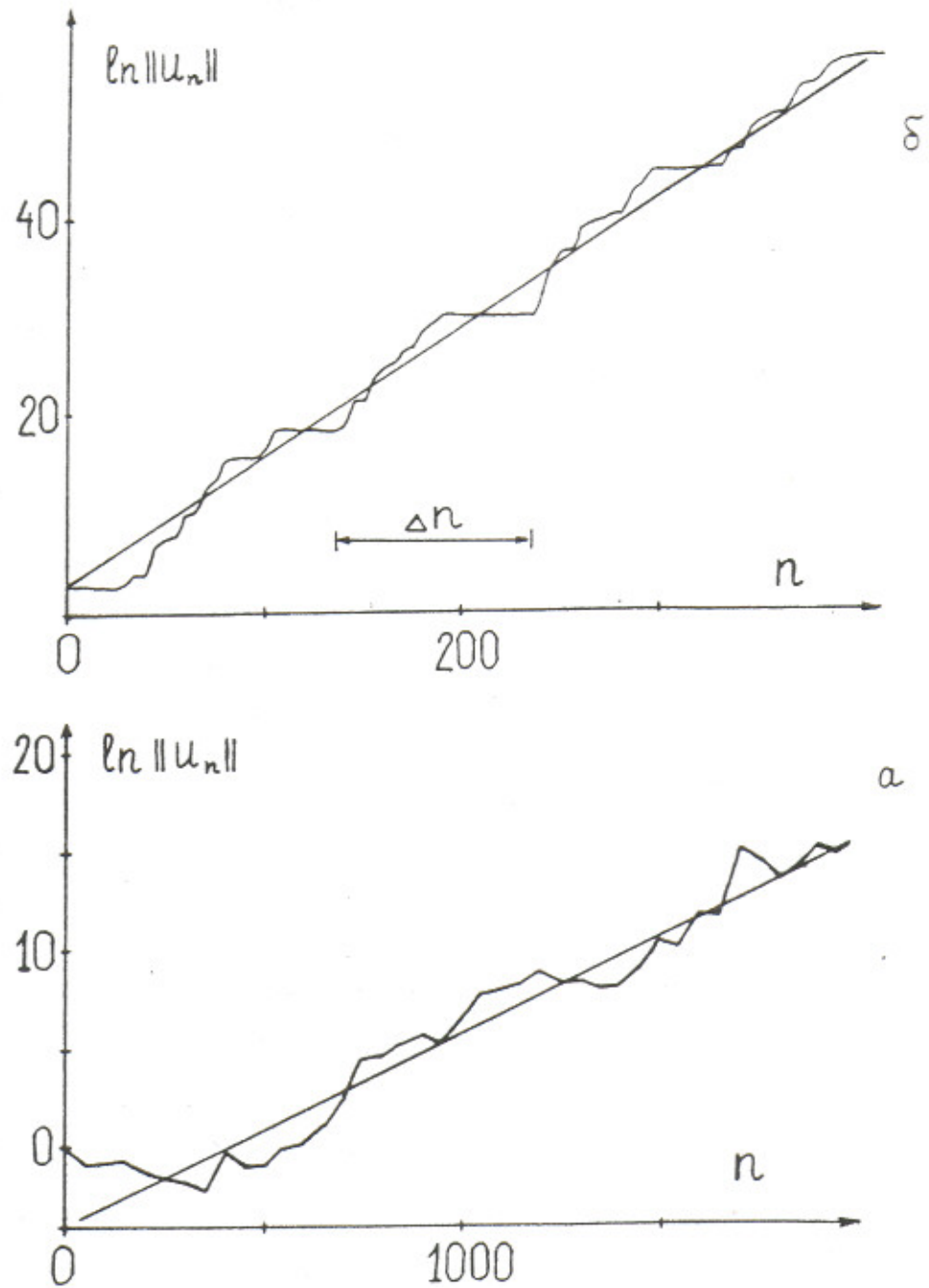


Рис.13. Зависимость усредненной СФКЭ $\|u_n\| = \left(\sum_{m=1}^{2N} |u_{n+m}^{(1)}|^2 \right)^{1/2}$ от Π в (I.4):
 а - однородная локализация при $k = 20, K = 5$;
 б - неоднородная локализация при $k = 20, K = 1.3$.
 Явно видны периодические осцилляции с $\Delta \Pi = 2\pi/\tau$, связанные с резонансной структурой. Прямые соответствуют экспериментальным значениям ℓ , полученным на интервале $\Pi \approx 5 \cdot 10^4$.

$\bar{f}(n) \propto e^{-2\ln/\epsilon_s}$ (см. § 7). В противном случае $k < k_{cr}$ характер стационарного распределения резко менялся (рис. I4, ср. с рис. I6) и оно становилось немонотонным. Так на рис. I4 ясно видны 4 целых резонанса, которые соответствуют "плато". Самое нижнее плато определяется ошибками округления при счете. Эти плато внутри резонансов образуются за счет быстрых колебаний по n . Между резонансами, в области критической структуры, скорость диффузии, а вместе с ней и длина локализации, резко уменьшается, что и приводит к быстрому падению $\bar{f}(n)$. Будем называть этот случай неоднородной локализацией. Эмпирические значения k_{cr} для границы такой локализации, определенные визуально по виду стационарного распределения, приведены в табли-

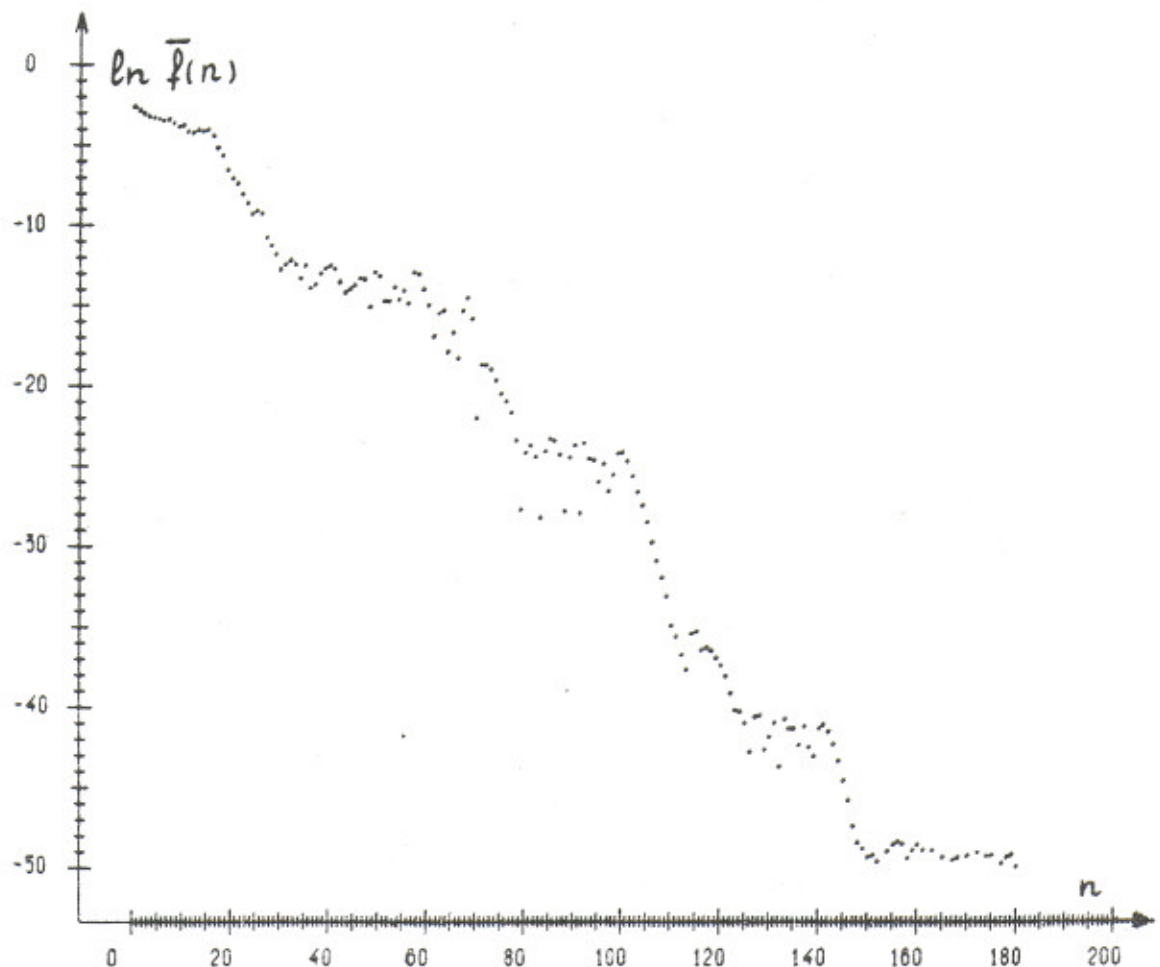


Рис. I4. Пример неоднородного стационарного распределения в критической области: $K = 1.5, \Delta K = 0.528, K = 10$. Период резонансной структуры по n равен $2\pi/\tau \approx 42$.

Таблица 3

Граница неоднородной локализации

K	D_0	k_{cr}	\mathcal{X}
2.0	0.36	15	1.35
1.5	0.047	40	0.84
1.3	0.010	100	0.59

це 3. Расхождения в значениях параметра \mathcal{X} , связанные отчасти с трудностью визуального определения границы, не следует считать слишком большими, учитывая, что скорость диффузии D_0 изменялась почти в 40 раз. Переход к неоднородной локализации наблюдался также в работе [100], результаты которой согласуются с оценкой (6.1).

Границе (6.1) можно придать следующий физический смысл. Выразим критическую длину локализации на границе $l_{cr} \sim k_{cr}$ в единицах периода отображения (1.4) по Π , который равен $2\pi/T$. Тогда

$$\frac{l'_{cr}}{K} \approx \frac{1}{2\pi}, \quad l' = \frac{lT}{2\pi}. \quad (6.2)$$

Таким образом, при $K \rightarrow K_{cr}$ однородная локализация переходит в неоднородную, когда ее длина становится достаточно малой по сравнению с периодом резонансной структуры.

Наконец, можно связать границу (6.1) с характеристиками критической структуры при $K \rightarrow K_{cr}$. Простая резонансная теория такой структуры списана в [73, 101]. Согласно этой теории надкритическое возмущение $\varepsilon = \Delta K > 0$ разрушает все мелкие масштабы критической структуры вплоть до масштаба с характерным временем движения

$$t_{\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1} \quad (6.3)$$

Тогда из (6.1) находим

$$t_{\varepsilon} \sim k_{cr}^{1/3}, \quad (6.4)$$

где использована оценка $D_0 \sim \varepsilon^3$ (I.6) и принято $K \approx 1$.

Если вместо квантового параметра k использовать \hbar , понимая переход к классическому пределу как $\hbar \rightarrow 0$, то оценка (6.4) принимает вид $t_{\varepsilon} \sim \hbar^{-1/3}$ и формально совпадает с результатом [102,103], полученным другим методом. Однако, интерпретация [29] этого результата у нас совершенно другая. Во-первых, в [102,103] время $\hbar^{-1/3}$ никак не связано с величиной возмущения ε . Во-вторых, авторы [102,103] понимают его как диффузионный масштаб t_D . На самом деле, однако, последний много больше, т.к. один толчок захватывает $\approx 2k$ невозмущенных уровней и поэтому $t_D \sim k \sim k_{cr} \sim \hbar^{-1} \gg t_{\varepsilon} \sim k_{cr}^{1/3} (k_{cr} \gg 1)$. Следует также отметить, что численные эксперименты, выполненные в [103], были проведены в области однородной локализации $k \gg k_{cr}$, где $t_D \approx \frac{D_0}{2T^2} \gg k \gg t_{\varepsilon}$. Однако, введение неопределенного критерия для определения t_D из численных данных (фактически просто "на глаз") привело к сильному разбросу экспериментальных значений t_D и не позволило получить достоверной зависимости t_D от k .

В заключении параграфа отметим, что в области устойчивости $K \ll 1$, $k \gg 1$ из-за малого размера нелинейных классических резонансов локализация становится почти однородной. При этом согласно численным данным полученным методом ПЛ длина локализации приближенно равна $l \approx k/4$ и оказывается порядка числа взаимодействующих соседей. При переходе из области хаоса ($K \gg 1$)

в область устойчивости ($K \ll 1$) происходит существенное изменение всего спектра ПЛ χ_i . Типичный пример этих спектров показан на рис.15. Каждому χ_i соответствует собственный вектор показателя косоортogonalный другим векторам. Однако, в силу того, что вектора с $i > 1$ затухают гораздо быстрее, чем с $i = 1$, они, по-видимому, практически не дают вклада в истинные СФКЭ. Этот вопрос требует, однако, дальнейших исследований.

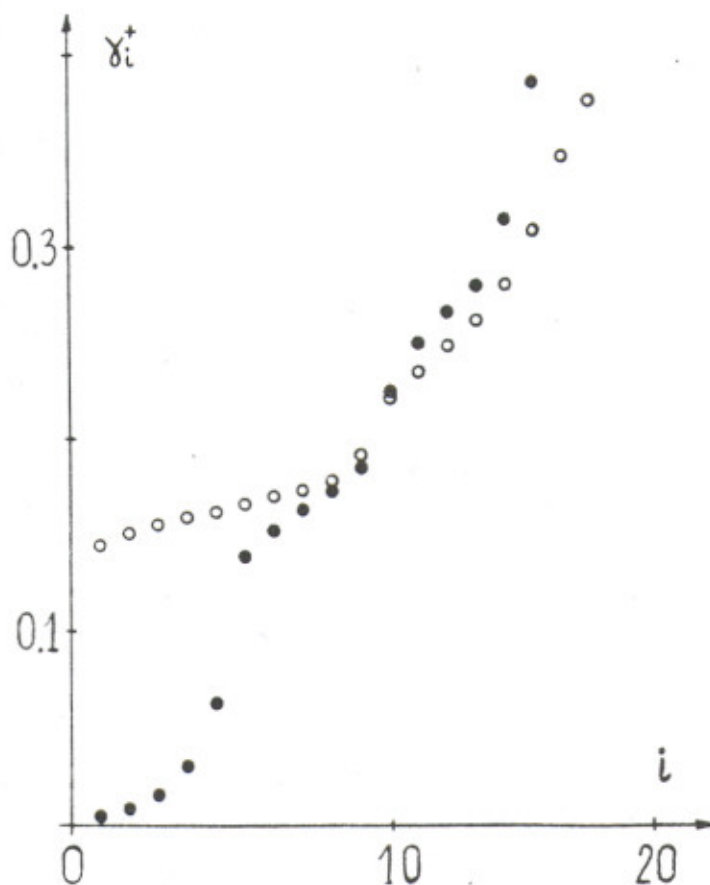


Рис.15. Спектр показателей Ляпунова χ_i^+ в (1.4).
Точки - область квантового хаоса $K = 30, K = 5$;
кружки - область устойчивости $K = 30, K = 0.003$.

§ 7. Стационарное распределение

Рассмотрим теперь вопрос о свойствах стационарного распределения вероятностей по невозмущенным уровням Π , устанавливающегося при $t \gg t_D$. Оно получается путем усреднения вероятностей $|\Psi(n,t)|^2$ на уровнях Π по времени:

$$\bar{f}(n) = \overline{|\Psi(n,t)|^2} = \sum_m |\varphi_m(0) \varphi_m(n)|^2, \quad (7.1)$$

где $\varphi_m(n)$ - СФКЭ с квазиэнергией ν_m , а в качестве начального состояния выбран уровень с $\Pi_0 = 0$. Отметим, что (7.1) аналогично выражению для коррелятора плотность-плотность в твердом теле [80]. Поскольку СФКЭ экспоненциально локализованы, то их можно приближенно представить в виде следующего выражения ($|n| \rightarrow \infty$)

$$|\varphi_m(n)| \propto e^{-|n-m|/\ell + \xi_{nm}}, \quad (7.2)$$

где величина ξ_{nm} характеризует флуктуации вокруг средней экспоненциальной зависимости, причем $\langle \xi_{nm} \rangle = 0$. Учитывая, что в среднем

$$\langle |\varphi_m(n)|^2 \rangle \approx \frac{1}{\ell_s} e^{-2|n-m|/\ell_s}, \quad (7.3)$$

из (7.1) получаем

$$\bar{f}(n) \approx \frac{1}{2\ell_s} e^{-2|n|/\ell_s} \left(1 + \frac{2|n|}{\ell_s}\right), \quad \bar{n}^2 = \ell_s^2. \quad (7.4)$$

Величина ℓ_s , вообще говоря, может отличаться от длины локализации СФКЭ ℓ (см. ниже).

Отметим, что в силу сохранения пространственной четности в

модели (I.4) собственные функции должны быть симметричными или антисимметричными по Π . Этому условию можно удовлетворить, выбрав $\varphi_m(n)$ в виде ($m \geq 0$):

$$\varphi_m(n) = \frac{e^{-|n-m|/\ell + \xi_{nm}} \pm e^{-|n+m|/\ell + \xi_{-nm}}}{\sqrt{2\ell}}. \quad (7.5)$$

Если начально возбужден уровень с $n_0 \gg \ell$, то в силу симметрии СФКЭ стационарное распределение будет иметь два максимума:

$$\bar{f}(n) = \frac{1}{4\ell} \left\{ \left(1 + \frac{2|n-n_0|}{\ell_s}\right) e^{-\frac{2|n-n_0|}{\ell_s}} + \left(1 + \frac{2|n+n_0|}{\ell_s}\right) e^{-\frac{2|n+n_0|}{\ell_s}} \right\}, \quad (7.6)$$

а время установления этого стационара оказывается экспоненциально большим ($\sim \exp(2n_0/\ell_s) \gg t_D$). При этом вначале, за время $\sim t_D$, образуется квазистационарное распределение, соответствующее первому слагаемому в (7.6), которое затем медленно переходит в стационарное распределение (7.6). В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать только начальные состояния с $\Pi_0 = 0$, где распределение имеет вид (7.4).

Пример стационарного распределения показан на рис.16. В пределах статистических флуктуаций закон (7.4) выполняется в огромном диапазоне ($0 \lesssim X \lesssim 25$), охватывающем около 10 порядков изменения \bar{f}_N . Типичная крупномасштабная структура связана, по-видимому, с сильными флуктуациями величины ξ_{nm} .

В численных экспериментах длина локализации определялась из стационарного распределения на основе соотношения (7.4). На рис.12 приведены численные данные [29] для зависимости $\ell_s T^2$ от D_0 :

$$\ell_s = \alpha_s D = \alpha_s \frac{D_0}{T^2}. \quad (7.7)$$

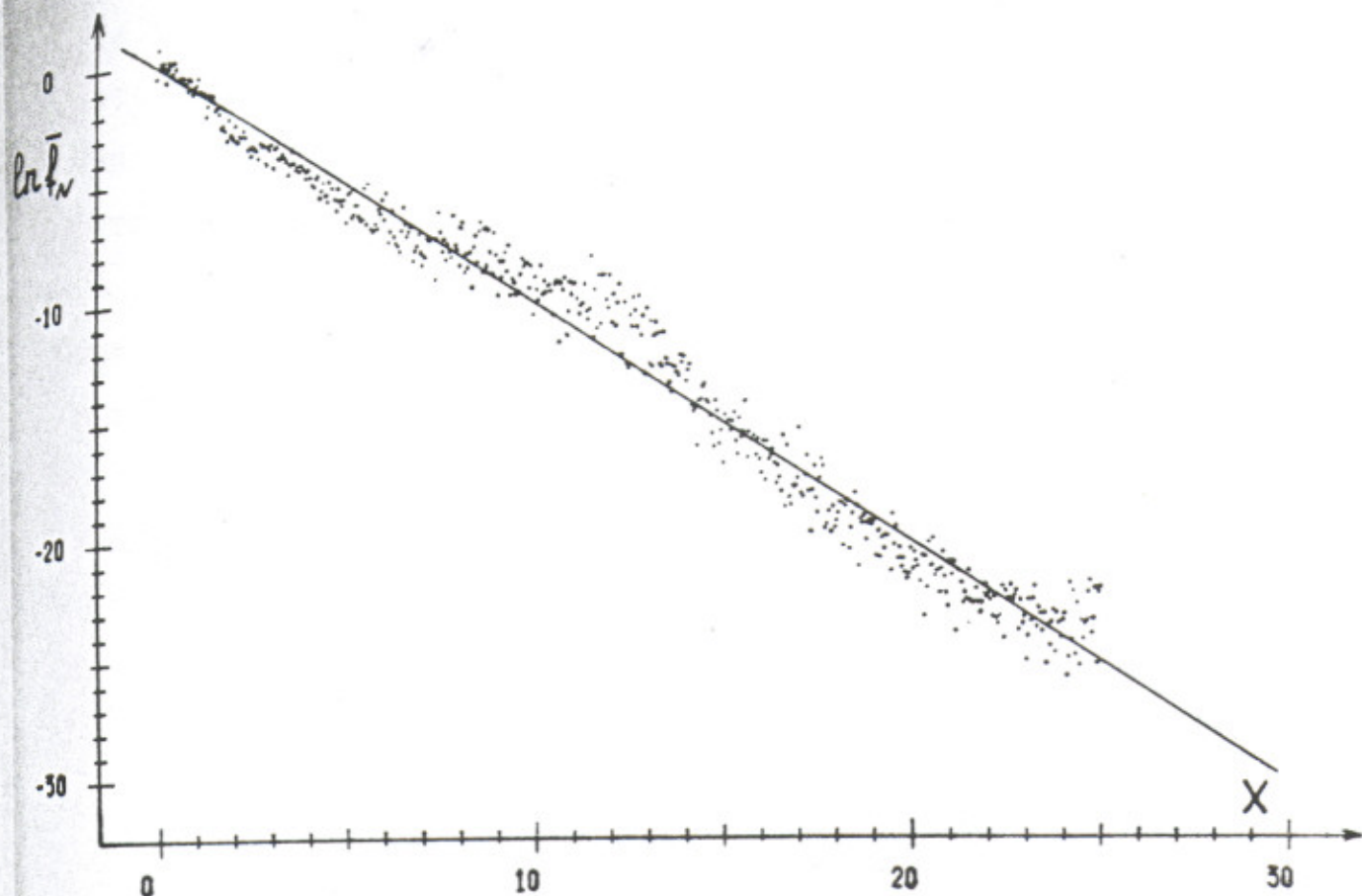


Рис. 16. Пример однородного стационарного распределения для $k = 10$, $T = 0.5$, $K = 5$; $x = 2n/l$, $f_N = f(n) 2l/(1+x)$. Прямая $\bar{f}_N = e^{-x}$.

Видно, что в диапазоне, охватывающем почти 4 порядка выполняется зависимость (7.7), причем среднее значение $\langle \alpha_s \rangle = 1.04^{\pm 0.03}$ отличается от значения $\alpha = 1/2$ для СФКЭ. Квантовый параметр возмущения k изменялся в интервале 5 ± 120 , $T \leq 1$, $l = 9 \pm 180$. Численные данные для средней энергии стационарных колебаний $E_s = \langle n^2/2 \rangle$ дают $\langle 2E_s/D^2 \rangle = 0.92^{\pm 0.04}$, что находится в удовлетворительном согласии с (7.4). Таким образом, можно считать, что полу-эмпирическое стационарное распределение (7.4) с $\alpha_s \approx 1$ удовлетворительно описывает численные данные.

Для того, чтобы понять причину отличия l_s от l , методом ПИ были исследованы свойства флуктуирующей величины ξ_{nm} . Для этого полный интервал уровней Π_m разбивался на $\Delta \Pi_1$ кусков,

на каждом из которых находилось $(\Delta \xi_{nm})^2$, которое потом усреднялось по $\Delta \Pi_1$. Значение $\gamma = 1/\ell$ вычислялось на полном интервале Π_m . Результаты численных экспериментов показали, что второй момент флуктуаций растет диффузионно с $\Delta \Pi$: $\langle (\Delta \xi_{nm})^2 \rangle = D_\xi \Delta \Pi$ и позволили определить скорость диффузии D_ξ в динамической модели Ллойда и в модели квантового ротатора (I.4). В первой модели полный интервал $\Pi_m \approx 5 \cdot 10^6$ разбивался на $\Delta \Pi_1 = 500, 1000$ отрезков. Параметр K менялся в интервале $2+100$, зависимости от T не наблюдалось. Полученные результаты (рис. I7)

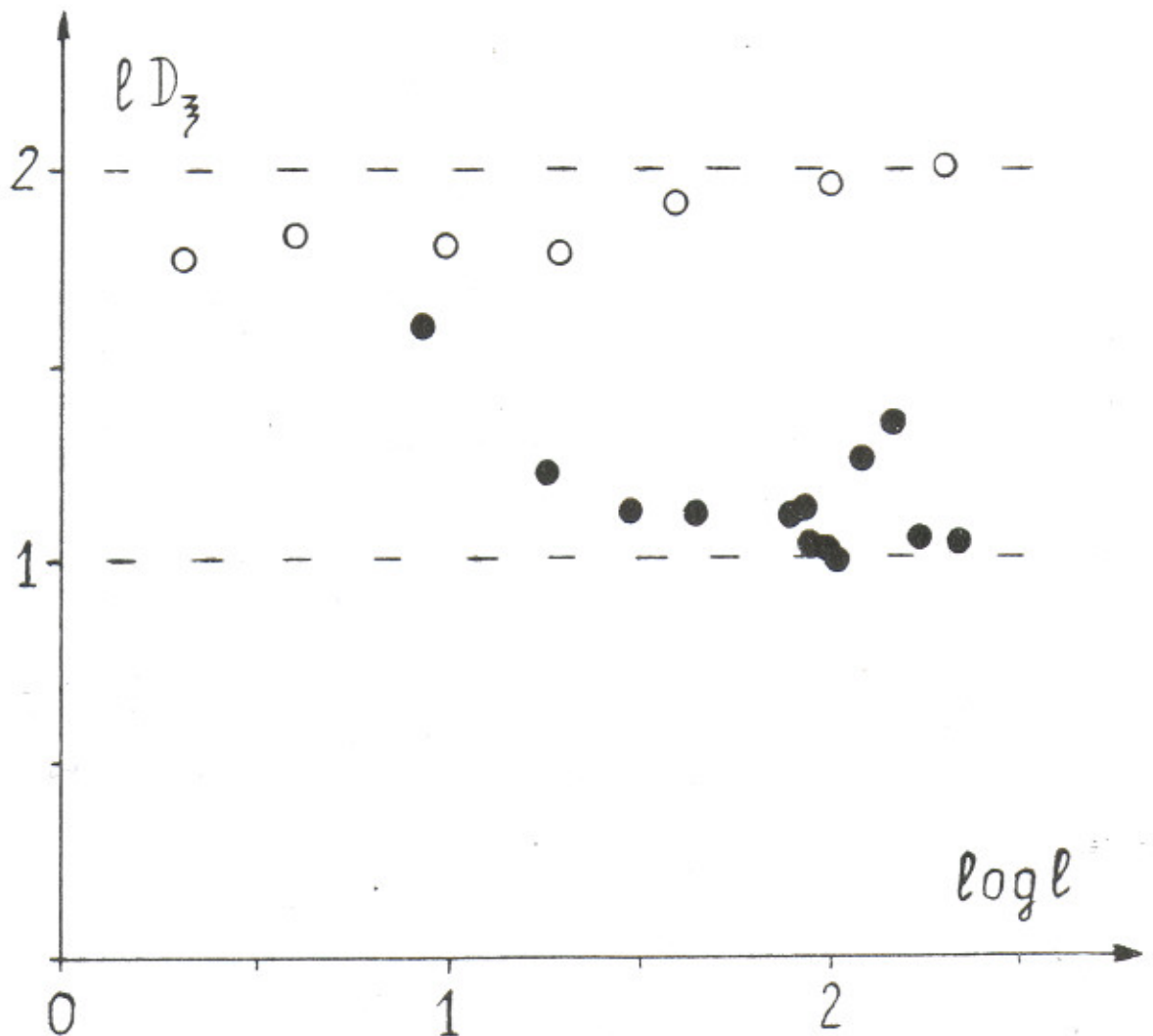


Рис. I7. Произведение скорости диффузии D_ξ в СРКЭ на длину локализации для разных ℓ . Кружки - динамическая модель Ллойда ($T = 1$), точки - модель (I.4). Логарифмы десятичные.

показывают, что $\ell D_{\xi} = 2$ при $\ell \gg 1$. Для модели (I.4) полный интервал достигал значения $n_m \approx 10^6$, $\Delta n_1 = 200 + 1000$. Зависимость ℓD_{ξ} от ℓ , получаемая из $\|u_n^{(1)}\|$, представлена на рис. I7 для области развитого хаоса ($5 \leq K \leq 10$, $5 \leq k \leq 20$, $T \leq 1$). Из него видно, что для $\ell \gg 1$ величина ℓD_{ξ} близка к единице ($\langle \ell D_{\xi} \rangle = 1.14$). Причина того, что в модели Ллойда и модели (I.4) значения ℓD_{ξ} оказываются различными, связана, по-видимому, с тем, что в первой имеется всего два соседа, а в последней число соседей $2N - k \gg 1$. Специальная проверка показала, что в (I.4) со случайными значениями χ_n по-прежнему $\ell D_{\xi} \approx 1$. По мере перехода из хаотической области $K \gg 1$ в интегрируемую величина ℓD_{ξ} уменьшается и при $K \ll 1$ и $k \gg 1$ достигает значения $\ell D_{\xi} \approx 1/4$.

Так как второй момент флуктуаций $(\Delta \xi)^2$ растет диффузионным образом, то можно ожидать, что распределение ξ будет гауссовым:

$$W(\xi, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\xi} n}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2D_{\xi} n}\right), \quad n > 0. \quad (7.8)$$

Численные эксперименты действительно показали, что (7.8) удовлетворительно описывает распределение ξ . В пользу этого говорит то, что отношение четвертого момента ко второму было близко к гауссовскому значению. Пример распределений ξ в динамической модели Ллойда для двух разных значений n показан на рис. I8. Видно, что они удовлетворительно согласуются с (7.8) вплоть до $\xi \sim n/\ell$, где собственная функция имеет максимум и вероятность $W(\xi, n)$ начинает убывать быстрее чем (7.8).

Из распределения (7.8) можно найти асимптотику среднего стационарного распределения (под средним понимается усреднение $\bar{f}(n)$, например, по разным начальным данным):

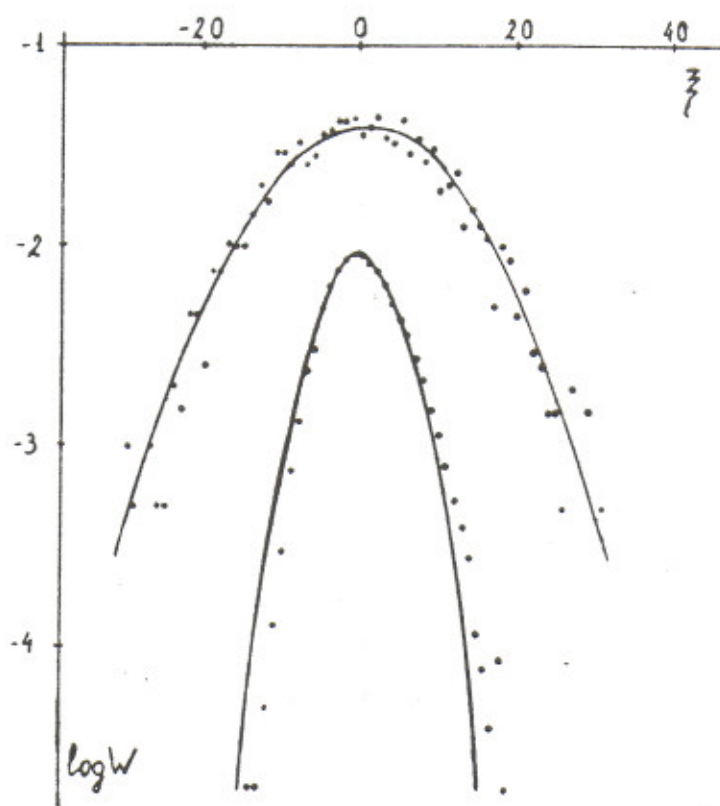


Рис.18. Статистика флуктуаций СРКЭ в динамической модели Ллойда с $K = 10$, $T = 1$. Верхняя группа точек - $N = 1000$, $\Delta N_1 = 2000$; нижняя - $N = 200$, $\Delta N_1 = 10000$ (смещена вниз на один порядок). Кривые - гауссовское распределение (7.8) с $D_z = 2\gamma$, $\gamma = 0.05$

$$\langle \bar{f}_n \rangle \sim \int_0^\infty e^{-2\eta} e^{\frac{-(\eta-\gamma n)^2}{2D_3 n}} d\eta \sim e^{-2\eta/\ell_s}, \quad \eta = \gamma n - \xi. \quad (7.9)$$

После вычисления интеграла получаем

$$\frac{1}{\ell_s} = \frac{1}{\ell} - D_3, \quad D_3 \ell \leq 1/2; \quad \frac{1}{\ell_s} = \frac{1}{4D_3 \ell}, \quad D_3 \ell \geq 1/2; \quad (7.10)$$

откуда следует, что $\ell_s \neq \ell$. Аналогичное явление хорошо известно в твердом теле [80]. При этом для обеих моделей $D_3 \ell > 1/2$ и поэтому $\ell_s/\ell = 4$ для (I.4) и $\ell_s/\ell = 8$ для динамической модели Ллойда. Отметим, что отношение ℓ_s/ℓ для (I.4) оказывается таким же, как и для локализации в случайном потенциале, когда длина свободного пробега много больше чем расстояние между рассеивателями. Это отношение, однако, отличается от численных данных [29] (рис. I.2), согласно которым $\ell_s/\ell \approx 2$ (отметим, что в [29, 30] в (7.9) проводилось усреднение $e^{-\eta}$ в результате чего это различие было пропущено).

Объяснение этого различия состоит в следующем. При $D_3 \ell > 1/2$ весь интеграл в (7.9) определяется нижним пределом интегрирования. Эта область соответствует экспоненциально маловероятным флуктуациям ξ . Поэтому предел интегрирования фактически определяется той статистикой по которой проводится усреднение $\langle \bar{f}_n \rangle$. Если эта статистика экспоненциально велика, то нижний предел достигает значения 0 и для ℓ_s получается выражение (7.10). Однако, в численных экспериментах [29] (см. рис. I.2) значение ℓ_s находилось по стационарному распределению для одного начального состояния. Поэтому, для данного $\bar{f}(n)$ статистика определялась эффективным числом слагаемых в (7.1), которое было порядка Π . Для типичных значений рис. I.6 $\Pi = 512$ получаем, что интегрирование в (7.9) распространяется до $\eta/\gamma n \approx (1 - |\frac{\ln(2\pi\gamma/n)}{\gamma n}|^{1/2}) \approx$

$\approx 0.4 (W(\xi, n) \sim \frac{1}{n})$ и в результате отношение $l/l_s \approx 0.5$.

В принципе, для асимптотически больших $n \gg l$ отношение l_s/l должно приближаться к 1. Однако, ошибки округления в компьютере фактически фиксируют диапазон возможных изменений $f(n)$ в 20-30 порядков. В результате получается некоторое среднее значение $l_s/l \approx 2$, лежащее между двумя предельными случаями:

$l_s/l = 1$ (малая статистика) и $l_s/l = 4$ (большая статистика).

Для того, чтобы проверить, что отношение l_s/l зависит от размера интервала по Π , на котором делается подгонка на экспоненту $f(n) \sim e^{-2 \ln l / l_s}$, были выполнены следующие численные эксперименты. В модели (1.4) с невозмущенным гамильтонианом

$H_0 = \frac{Tn^2}{2} + \beta n$ и параметрами $k = 10$, $T = 0.5$ определялись значения l_s на двух интервалах $\Pi = 200$ и $\Pi = 1000$. Это делалось для разных значений β (величина l , согласно (5.6), от β не зависит). В результате усреднения было получено, что в первом случае отношение $\langle l_s/2l \rangle = 1.003 \pm 0.035$ оказывается больше чем во втором $\langle l_s/2l \rangle = 0.808 \pm 0.013$, что согласуется с приведенным выше объяснением.

Таким образом, значение α_s в (7.7) не является постоянным, в отличие от $\alpha = 1/2$ в (5.6), а зависит от интервала интерполяции и вида усреднения. Однако, поскольку $0.5 \leq l_s/2l \leq 2$, то при усреднении по разным интервалам наиболее вероятным оказывается $\alpha_s \approx 1$, которое и будет использоваться в дальнейшем.