

Les ordinateurs quantiques affrontent le chaos

Le parallélisme autorisé par la mécanique quantique permet d'effectuer des calculs d'une manière radicalement nouvelle. Un ordinateur quantique fondé sur ces principes pourrait résoudre certains problèmes exponentiellement plus vite qu'un ordinateur classique. Nous discutons comment un ordinateur quantique réaliste peut simuler une dynamique complexe, en particulier les systèmes chaotiques où les fautes de l'ordinateur classique croissent exponentiellement vite.

L*l se servit un verre de vin blanc, tira les rideaux et s'allongea pour réfléchir. Les équations de la théorie du chaos ne faisaient aucune référence au milieu physique dans lequel se déployaient leurs manifestations ; cette ubiquité leur permettait de trouver des applications en hydrodynamique comme en génétique des populations, en météorologie comme en sociologie des groupes. Leur pouvoir de modélisation morphologique était bon, mais leurs capacités prédictives quasi nulles. A l'opposé, les équations de la mécanique quantique permettaient de prévoir le comportement des systèmes microphysiques avec une précision excellente, et même avec une précision totale si l'on renonçait à tout espoir de retour vers une ontologie matérielle. Il était au moins prématuré, et peut-être impossible, d'établir une jonction mathématique entre ces deux théories.* (M. Houellebecq, *Les particules élémentaires*, Flammarion, 1998).

INTRODUCTION

Le problème soulevé ci-dessus devient encore plus frappant si l'on imagine que la dynamique chaotique est simulée par un ordinateur quan-

tique. En effet, depuis une quinzaine d'années, la possibilité d'utiliser la mécanique quantique pour effectuer des calculs est de plus en plus discutée dans la communauté scientifique. Dans les années 1980, Richard Feynman a proposé d'utiliser des éléments quantiques pour simuler de manière efficace le comportement de systèmes quantiques. En effet, un système quantique à n corps évolue dans un espace de Hilbert dont la dimension croît exponentiellement avec n . Par exemple, un système de n spins pouvant prendre deux valeurs évolue dans un espace de dimension 2^n . Cela oblige un ordinateur classique à effectuer un nombre énorme d'opérations pour simuler le comportement de ces systèmes même pour des n modérés. En revanche, si les opérations sont physiquement effectuées par des éléments quantiques, il est possible de faire le même calcul avec des ressources bien plus petites. La question se posait donc de construire une théorie de l'information et une algorithmique en tenant compte de ces effets quantiques. Cela a été résolu ces dernières années et l'on sait maintenant décrire un modèle théorique d'information quantique, fondée sur la notion de « qubits » (c'est-à-dire des systèmes quantiques à deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$) sur lesquels on agit par des transformations unitaires conservant la probabilité. Le qubit est l'équivalent quantique du bit et décrit l'unité d'information quantique de la même manière que le bit en information classique.

Néanmoins, il représente un objet essentiellement différent, pouvant varier sur des ensembles continus de valeurs, mais n'en fournissant qu'une en cas de mesure. De plus, plusieurs qubits peuvent être intriqués, c'est-à-dire présenter des corrélations entre eux absentes en information classique. Un exemple bien connu d'effets de l'intrication apparaît dans le paradoxe Einstein-Podolsky-Rosen. En effet, pour deux qubits dans l'état intriqué $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, la mesure d'un qubit influera l'état de l'autre quelle que soit la distance entre eux.

Un ordinateur quantique est généralement vu comme un ensemble de qubits sur lesquels on agit par des transformations unitaires. Ces transformations s'écrivent comme produits de matrices unitaires élémentaires appelées portes quantiques et agissant sur un ou deux qubits (encadré). Le principe de superposition permet alors de créer un état quantique regroupant un nombre exponentiel d'états computationnels et d'agir sur eux tous en une seule opération. Par exemple, pour n qubits initialement dans l'état $|00\dots 0\rangle$, l'application de n portes d'Hadamard (encadré) permet de créer

l'état $2^{-n/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$ qui regroupe

tous les états computationnels de $|00\dots 0\rangle$ à $|11\dots 1\rangle$. Des travaux ont permis d'établir que cette « parallélisation » massive due au nombre exponentiel d'états multi-qubits

dans l'espace de Hilbert pouvait permettre d'accélérer de manière spectaculaire la vitesse de résolution de certains problèmes, d'abord dans la simulation de la mécanique quantique, mais aussi dans d'autres cas comme la décomposition en facteurs premiers d'un grand nombre, ce qui a des applications fondamentales en cryptographie. Une très grande activité se développe donc dans le monde en ce moment pour essayer de construire un tel ordinateur, un problème technologiquement très ardu où plusieurs voies sont exploitées pour la réalisation physique de qubits. A présent, des algorithmes simples ont été implémentés dans des systèmes comportant jusqu'à sept qubits en utilisant les spins nucléaires de molécules par résonance magnétique nucléaire (RMN) ou des ions piégés.

L'algorithme le plus célèbre est celui développé par Peter Shor, qui permet de factoriser un grand nombre en facteurs premiers exponentiellement plus rapidement que n'importe quel algorithme classique connu à ce jour. En effet, le meilleur algorithme classique nécessite un nombre d'opérations qui croît comme $O(\exp[(\log M)^{1/3}(\log \log M)^{2/3}])$ où M est le nombre à factoriser, alors que l'algorithme de Shor requiert $O(n^3)$ opérations quantiques élémentaires où n est le nombre de bits de M ($n \approx \log_2 M$). Cet algorithme a en fait une grande importance pratique car, bien que la factorisation soit difficile, l'opération inverse demande seulement $O(n^2)$ opérations pour reconstruire le nombre une fois les facteurs connus. Cette propriété d'asymétrie en fait la base du protocole cryptographique RSA utilisé partout dans le monde. En effet, l'opération facile permet de crypter aisément et l'opération inverse difficile protège le secret du message. Un ordinateur quantique permettrait donc de briser la plupart des codes de ce type. Néanmoins, les nombres utilisés par ces codes sont déjà très grands et un ordinateur quantique

d'au moins 1 000 qubits serait nécessaire pour les factoriser suivant la méthode de Shor. Étant donné la taille des processeurs quantiques en construction, il est donc important de trouver des algorithmes quantiques dont l'utilité se manifesterait pour des nombres de qubits moins importants, par exemple quelques dizaines.

Un exemple de ce type d'algorithme est représenté par la simulation de systèmes chaotiques, classiques ou quantiques. En effet, les systèmes classiques chaotiques présentent des propriétés d'instabilité exponentielle locale. Cela implique que deux trajectoires initialement voisines s'éloignent exponentiellement vite l'une de l'autre, ce qui rend les simulations de tels systèmes très difficiles. Pour cette raison, de tels systèmes sont de bons candidats de problèmes pour lesquels un ordinateur quantique pourrait être utile. Il est donc important d'étudier la simulation de tels systèmes sur des ordinateurs quantiques. Un point crucial est également de comprendre comment les erreurs dues aux imprécisions et imperfections expérimentales affectent la précision du calcul quantique, dans le régime d'extrême instabilité représenté par le chaos classique.

ALGORITHMES QUANTIQUES

Un algorithme classique est une suite d'instructions que l'on donne à l'ordinateur et qu'il doit effectuer successivement en manipulant les bits de sa mémoire (qui valent 0 ou 1). Un algorithme quantique agit de manière similaire sur des qubits, i.e. des systèmes quantiques à deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Si n tels qubits sont mis ensemble, le système total à tout instant sera décrit par une fonction d'onde, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert de dimension 2^n . L'évolution de ce système correspond à des transformations unitaires dans cet espace. Toute transformation unitaire est licite, mais pour

écrire un algorithme quantique, on requiert d'écrire les transformations du système en fonction de transformations élémentaires appelées aussi portes (encadré). Un algorithme quantique spécifie donc un état initial facile à préparer, puis une suite de transformations élémentaires (portes) à appliquer à cet état, et précise ensuite quelle information retirer de la mesure effectuée sur l'état final du système.

L'algorithme de Shor précédemment évoqué suit cette structure générale. Il utilise le fait que le problème de factorisation peut se ramener à la détermination de la période d'une certaine fonction f . Les qubits de l'ordinateur quantique sont regroupés en registres, l'un d'entre eux contenant toutes les valeurs de x de 0 à $N - 1$. Si ce registre contient n qubits, $N = 2^n$ et x peut ainsi varier de 0 à $2^n - 1$. N est choisi entre M^2 et $2M^2$, où M est le nombre à factoriser. Shor a alors montré qu'il était possible de calculer en parallèle toutes les valeurs de $f(x)$ de manière efficace sur un deuxième registre, permettant de passer de l'état $N^{-1/2} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle|0\rangle$ à

$$N^{-1/2} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle|f(x)\rangle.$$

Si l'on mesure les qubits du deuxième registre, on fixe la valeur de $f(x) = u$, et la nouvelle fonction d'onde est une somme sur toutes les valeurs de x ayant pour image u par f . Mesurer le premier registre à ce stade ne donnerait pas d'information utile. On applique donc une transformée de Fourier quantique (QFT) (encadré) à cet état, obtenant une fonction d'onde finale concentrée autour des multiples de N/T , où T est la période. La détermination de l'un de ces nombres par la mesure des qubits permet de calculer T . Un élément très important de cet algorithme est l'utilisation de la QFT, qui peut être effectuée en $O(n^2)$ opérations sur un vecteur de taille 2^n . La complexité algorithmique

Encadré

PORTES QUANTIQUES

Un ordinateur quantique est un ensemble de n qubits sur lesquels on agit par des transformations unitaires bien choisies. Toute transformation unitaire de l'espace de Hilbert de dimension 2^n peut s'écrire comme des combinaisons de transformations locales agissant sur seulement quelques qubits, appelées portes quantiques. Un ordinateur quantique réel devra permettre l'implémentation répétée de quelques-unes de ces transformations élémentaires ; un algorithme quantique doit fournir la suite de portes nécessaires pour parvenir à l'état final. Quelques exemples usuels :

– **porte d'Hadamard** s'appliquant à un qubit

$$|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} ; |1\rangle \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} ;$$

– **porte de phase** s'appliquant à un qubit $|0\rangle \rightarrow |0\rangle ;$

$$|1\rangle \rightarrow i|1\rangle ;$$

– **controlled not** ou **CNOT** s'appliquant à deux qubits :

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle ; |01\rangle \rightarrow |01\rangle ; |10\rangle \rightarrow |11\rangle ; |11\rangle \rightarrow |10\rangle ; \text{ le deuxième qubit est inversé si le premier est dans l'état } |1\rangle ;$$

– **controlled controlled not** ou **porte de Toffoli** s'appliquant à trois qubits : le troisième qubit est inversé si les deux premiers sont dans l'état $|1\rangle$.

Certains ensembles de portes sont suffisants à eux seuls pour construire toutes les transformations unitaires, comme par exemple CNOT combiné aux transformations à un qubit. On parle alors de portes universelles.

Une partie d'un algorithme quantique s'écrit donc comme une suite de portes, dont le nombre quantifie la complexité quantique du processus. Cette notion ne dépend pas du choix

des portes élémentaires, puisqu'elles s'écrivent toutes les unes en fonction des autres. Un processus est polynômial si le nombre d'opérations nécessaires est une puissance du nombre de bits/qubits manipulés et exponentiel s'il en est une exponentielle. On peut vérifier que les opérations arithmétiques apprises à l'école primaire sont toutes des algorithmes polynômiaux. L'ordinateur quantique peut de plus additionner ou multiplier plusieurs nombres en parallèle. Une transformation unitaire générale est donnée par une matrice $N \times N$ et nécessite $O(N)$ portes élémentaires. Cependant, certaines transformations importantes se décomposent en un nombre polynômial de portes. Un exemple d'une telle transformation, utilisée dans beaucoup d'algorithmes quantiques, est la transformée de Fourier quantique (QFT). Elle utilise n qubits pour transformer un vecteur de taille 2^n par :

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k |k\rangle \longrightarrow \sum_{l=0}^{2^n-1} \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} \exp(2\pi i kl / 2^n) a_k \right] |l\rangle .$$

Elle peut s'écrire au moyen des transformations élémentaires H_j (porte d'Hadamard appliquée au qubit j) et B_{jk} (porte à deux qubits appliquée aux qubits j et k et caractérisée par $|00\rangle \rightarrow |00\rangle ; |01\rangle \rightarrow |01\rangle ; |10\rangle \rightarrow |10\rangle ; |11\rangle \rightarrow \exp(i\pi/2^{k-j})|11\rangle$). On peut vérifier que la séquence $\Pi_{j=1}^n [(\Pi_{k=j+1}^n B_{jk}) H_j]$ effectue bien la transformation de Fourier d'un vecteur de taille 2^n en $n(n+1)/2$ opérations. En pratique, le choix des portes universelles dépend de l'implémentation expérimentale.

mique de l'algorithme de Shor, mesurée par le nombre de portes nécessaires pour factoriser un nombre M comportant n bits ($n \approx \log_2 M$), est de l'ordre de n^3 . Ce résultat est obtenu grâce à l'utilisation de plusieurs propriétés spécifiquement quantiques : la possibilité d'agir sur tous les états computationnels en même temps (principe de superpositions) puis (par l'action de la QFT) de les faire interférer de manière constructive (interférences quantiques). Cela est impossible sur un ordinateur classique et cela explique pourquoi l'algorithme de Shor est plus efficace que n'importe quel algorithme classique connu. Il est possible d'implémenter l'algorithme de Shor sur un ordinateur classique mais, dans ce cas, le nombre d'opérations classiques est

exponentiellement grand et l'efficacité quantique disparaît.

D'autres algorithmes ont été développés ; celui de Grover en particulier permet de faire une recherche dans une base de données non ordonnée de taille N , avec un gain quadratique ($O(\sqrt{N})$ opérations au lieu de $O(N)$ classiquement). Des algorithmes ont également été construits permettant de simuler efficacement certains systèmes quantiques, en accord avec la suggestion originale de Feynman.

Simulation quantique du chaos classique

Il peut paraître naturel de pouvoir simuler la mécanique quantique efficacement sur un ordinateur quantique, bien qu'en fait une telle tâche

ne soit pas évidente à concrétiser sous forme d'un algorithme pratique. Il est plus surprenant d'imaginer qu'un ordinateur quantique puisse simuler efficacement la mécanique classique. Pourtant, les problèmes présentant du chaos classique sont très difficiles à simuler sur un ordinateur classique. En effet, l'instabilité exponentielle conduit à une croissance exponentielle au cours du temps de la moindre imprécision sur la distribution classique initiale. Un exemple d'application chaotique très connu est l'application du chat d'Arnold : $\bar{y} = y + x \pmod{L}$; $\bar{x} = x + \bar{y} \pmod{1}$, où \bar{y} , \bar{x} désignent les variables après une itération. Le mouvement a lieu dans l'espace de phase (x, y) sur un tore de taille L (entier) dans la direction y et 1 dans la direction x . Des résultats mathématiques ont permis de prou-

ver que la dynamique de ce système possède les caractéristiques du chaos très développé, avec par exemple un exposant de Lyapounov positif $h \approx 1$. Cela caractérise une divergence rapide d'orbites voisines dans tout l'espace de phase, la distance entre elles augmentant avec le temps comme $\exp(ht)$. En raison de cette instabilité, les erreurs d'arrondi dues à la précision finie d'un ordinateur classique vont se propager très vite dans le système. Par exemple, pour un Pentium III en double précision, l'orbite sera complètement modifiée après un nombre d'itérations $t = 40$. Même si la dynamique exacte est réversible, l'existence de ces fautes couplée à l'instabilité du chaos détruit la réversibilité de l'évolution du système dans le temps.

Grâce au parallélisme quantique, un ordinateur quantique peut simuler l'évolution d'un nombre exponentiel de trajectoires classiques en un temps polynômial. Cela permet de calculer de manière fiable des quantités globales du système en dépit de l'instabilité exponentielle qui amplifie très vite toute imprécision. Trois registres sont nécessaires, deux spécifiant les valeurs de x et y et un servant d'espace mémoire temporaire. En effet, on peut construire un état initial proportionnel à $\sum a_{i,j} |x_i\rangle |y_j\rangle |0\rangle$ où les $a_{i,j}$ valent 0 ou 1, $1 \leq i, j \leq 2^n$. Il est possible d'effectuer les deux additions conduisant à l'état $\sum a_{i,j} |2x_i + y_j\rangle |x_i + y_j\rangle |0\rangle$ de manière parallèle en seulement $O(n)$ opérations, en utilisant uniquement $n - 1$ qubits dans le troisième registre pour les retenues. De cette façon, $O(2^{2n})$ trajectoires classiques sont simulées en même temps par un ordinateur quantique comportant $3n - 1$ qubits au total. D'autres applications chaotiques peuvent être simulées de manière similaire en un nombre polynômial de portes quantiques. Même une dynamique dissipative menant à un attracteur étrange peut être simulée de manière efficace. Après t itérations, l'état quantique du système contient les positions des

itérés des $O(2^{2n})$ points initiaux. Une mesure de tous les qubits à ce stade donnerait seulement un point de cette distribution et ferait perdre l'efficacité quantique. Pour éviter cela, il est possible d'appliquer une QFT et de mesurer par ce biais des propriétés globales d'un nombre exponentiel d'orbites, obtenant ainsi une information nouvelle qui n'est pas accessible efficacement classiquement.

Un ordinateur quantique réaliste comportera nécessairement des imprécisions dues au couplage avec le monde extérieur qui feront que les portes idéales seront remplacées par des portes approximées qui vont introduire des fluctuations d'amplitude ϵ dans les transformations unitaires associées. Il est important de comprendre si la dynamique chaotique va entraîner une augmentation exponentielle de ces fautes quantiques comme c'était le cas pour les fautes d'arrondi dans l'ordinateur classique. La figure 1 montre un exemple de la dynamique donnée par l'application du chat d'Arnold simulée par l'ordinateur classique et par l'ordinateur quantique.

Dans le cas de l'ordinateur classique, 10 itérations sont suffisantes pour que la faute minimale sur le dernier bit détruise la réversibilité. En revanche, dans le cas de l'ordinateur quantique, la réversibilité est préservée avec une bonne précision en présence de fautes quantiques avec une amplitude comparable. La précision du calcul quantique reste raisonnable pendant un nombre d'itérations $t_f \propto 1/(n\epsilon^2)$. La raison physique de ce résultat réside dans le fait que chaque porte imparfaite transfère une probabilité ϵ^2 de l'état exact vers d'autres états. Ce résultat souligne la nature très différente du comportement des fautes dans le calcul classique et le calcul quantique. La théorie des perturbations quantiques explique la stabilité par rapport aux erreurs quantiques. En revanche, les fautes classiques ne rentrent pas dans ce cadre car même

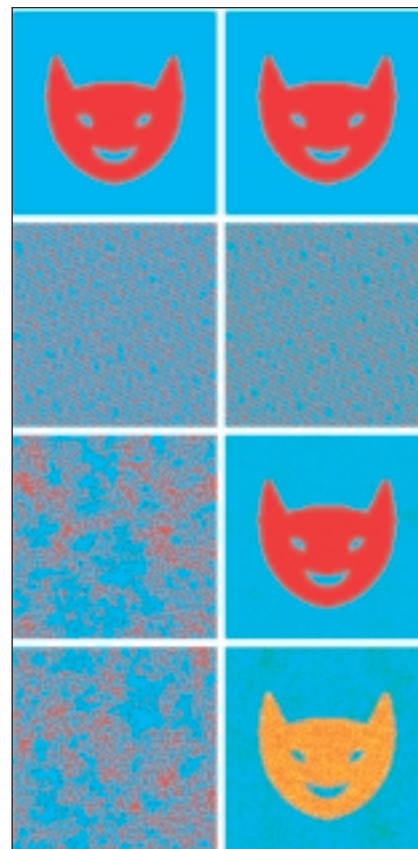


Figure 1 - Dynamique de l'application du chat d'Arnold simulée sur un ordinateur classique (à gauche) et quantique (à droite), sur un réseau de $2^7 \times 2^7$ points avec une seule cellule ($L = 1$ dans l'application du chat d'Arnold). Première ligne : distribution initiale ; deuxième ligne : distributions après $t = 10$ itérations ; troisième ligne : distributions à $t = 20$, avec renversement du temps effectué à $t = 10$; dernière ligne : distributions à $t = 400$, avec renversement du temps effectué à $t = 200$. A gauche : une erreur classique de la taille d'une cellule ($\epsilon = 1/128$) est effectuée au moment du renversement du temps uniquement ; à droite : toutes les portes quantiques opèrent avec des erreurs quantiques d'amplitude $\epsilon = 0.01$; la couleur représente la probabilité $|a_{ij}|^2$, de bleu (zéro) à rouge (maximale) ; $n = 7$ ce qui fait 20 qubits au total.

une très petite faute classique est très grande du point de vue quantique (renversement d'un qubit) et se propage exponentiellement rapidement dans le calcul classique comme dans le calcul quantique. Chaque ordinateur a donc son type naturel de fautes qui se comportent très différemment dans le cadre de la dynamique chaotique.

Cela permet d'apporter un nouvel éclairage sur le vieux problème de l'irréversibilité en mécanique statistique, objet de nombreuses controverses depuis celle qui a opposé Loschmidt et Boltzmann au XIX^e siècle. En effet, cette irréversibilité se manifeste malgré le fait que les équations de Newton décrivant le mouvement microscopique soient réversibles. Une légende veut que Loschmidt ait souligné ce fait à Boltzmann en lui demandant ce qui arriverait à sa théorie statistique si l'on inversait les vitesses de toutes les particules, pour de cette manière retourner depuis un état d'équilibre à un état initial hors d'équilibre. La réponse de Boltzmann aurait été : « alors essaye de le faire ». Ce serait possible sur un ordinateur quantique pour un nombre macroscopique de particules. En effet, on peut par exemple utiliser l'algorithme ci-dessus pour $L \gg 1$. Dans ce cas, le système est étendu dans la direction y et il a été démontré que le chaos induit une diffusion dans cette direction. L'évolution statistique de la distribution initiale de particules est alors donnée par l'équation de Fokker-Planck. Un exemple de l'évolution du deuxième moment $\langle y^2 \rangle$ de la distribution est montré dans la figure 2. Même si la dynamique exacte est réversible, en présence de fautes classiques, même très petites, la diffusion statistique reprend rapidement après le renversement du temps, comme affirmé par Boltzmann. En revanche, sur l'ordinateur quantique même imparfait l'évolution statistique revient vers l'état initial hors d'équilibre. Cela permettrait donc à l'ordinateur quantique d'inverser la flèche du temps pour des systèmes macroscopiques avec un nombre de particules pouvant atteindre le nombre d'Avogadro ($6,022 \times 10^{23}$) avec seulement 125 qubits ($L = 8$).

Simulation quantique du chaos quantique

Les résultats exposés ci-dessus concernent la simulation du chaos clas-

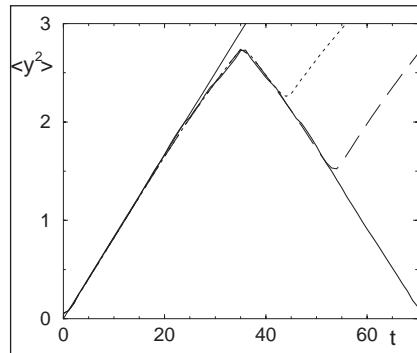


Figure 2 - Croissance diffusive du second moment $\langle y^2 \rangle$ pour l'application du chat d'Arnold avec $L = 8$, simulée sur des ordinateurs classique (Pentium III) et quantique (« Quantum I »). Le fonctionnement de Quantum I est bien sûr lui-même simulé au moyen d'un ordinateur classique. A $t = 35$ toutes les vitesses sont inversées. Pour le Pentium III l'inversion est faite avec une précision $\epsilon = 10^{-4}$ (ligne pointillée) et $\epsilon = 10^{-8}$ (ligne en tirets); 10^6 orbites sont simulées. Pour Quantum I, la simulation est effectuée avec 26 qubits ($n = 7$) (ligne pleine épaisse); chaque porte quantique opère avec du bruit d'amplitude $\epsilon = 0.01$. La ligne droite montre la diffusion macroscopique théorique.

sique. Il est aussi important d'étudier la simulation de dynamiques quantiques complexes sur des ordinateurs quantiques. Une classe de systèmes particulièrement intéressante correspond aux applications quantiques. Leur dynamique s'écrit de manière générale $\bar{\psi} = U\psi$ où ψ est la fonction d'onde et $\bar{\psi}$ sa nouvelle valeur après action de l'opérateur d'évolution $U = e^{-i\hbar\hat{\ell}^2/2} e^{-KV(\theta)/\hbar}$. La variable θ représente une phase et $\hat{\ell} = -i\partial/\partial\theta$ correspond au moment angulaire. Le paramètre \hbar est la constante de Planck sans dimension. Pour de nombreux choix de potentiel V , la dynamique du système classique correspondant devient chaotique quand K augmente. Le cas $V(\theta) = \cos \theta$ correspond à l'application standard de Chirikov $\bar{I} = I + K \sin \theta$; $\bar{\theta} = \theta + \bar{I}$, où les barres correspondent aux nouvelles valeurs de (I, θ) après une itération (l'action classique est $I = \hbar\ell$). Cette application apparaît dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques comme le confinement d'un plasma, les trajectoires des comètes ou

le mouvement de particules chargées dans des accélérateurs. Pour $K > 0$, ce système intégrable à $K = 0$ montre une transition vers le chaos qui suit le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser. Pour $K > 1$, la dynamique classique devient chaotique avec instabilité exponentielle des orbites et apparition d'une diffusion dans la direction du moment ℓ (similaire à la diffusion montrée dans la figure 2). Le système quantique associé, appelé rotateur pulsé, représente un modèle très important dans l'étude du chaos quantique. Il modélise aussi la physique des atomes de Rydberg dans un champ micro-onde, permettant des comparaisons avec les résultats expérimentaux. De plus, il présente un phénomène de localisation dû aux interférences quantiques, par lequel un paquet d'onde quantique initialement localisé dans l'espace des moments verra son étalement stoppé alors qu'une distribution classique de particules diffuserait dans tout le système. Ce phénomène est similaire à la localisation d'Anderson dans les solides, si bien que son étude permet de comprendre également la physique des électrons dans un système désordonné. Ce modèle a été réalisé expérimentalement par l'équipe de Mark Raizen à Austin (États-Unis) avec des atomes froids. Le cas $V(\theta) = (\theta^2 - a^2)^2$ correspond à un potentiel de double puits chaotique et permet d'étudier le phénomène d'effet tunnel quantique assisté par le chaos. En effet, la mécanique quantique permet à un paquet d'onde localisé initialement dans un puits ($\theta = -a$ ou $\theta = a$) de passer d'un puits à l'autre périodiquement. Ce phénomène est similaire aux oscillations du chat de Schrödinger. La présence de chaos quantique renforce cet effet tunnel de manière importante, comme on l'a constaté expérimentalement avec des atomes froids.

Sur un ordinateur quantique, la dynamique de ces systèmes peut être simulée avec un nombre polynomial de portes pour un vecteur de dimension exponentiellement grande

$N = 2^n$. Une itération nécessite $O(n^3)$ opérations pour le rotateur pulsé et $O(n^4)$ pour le potentiel de double puits, contre $O(N \log N)$ opérations sur un ordinateur classique. L'élément essentiel de l'algorithme quantique est l'utilisation de la QFT qui permet de passer efficacement de la représentation θ à celle en ℓ .

La figure 3 montre un exemple d'une oscillation d'un « chat de Schrödinger » simulée par l'ordinateur quantique en présence de bruit dans les portes. Ce bruit induit une décroissance des oscillations suivant une loi en $e^{-\Gamma t}$ avec $\Gamma \sim \varepsilon^2 n^4$ où ε

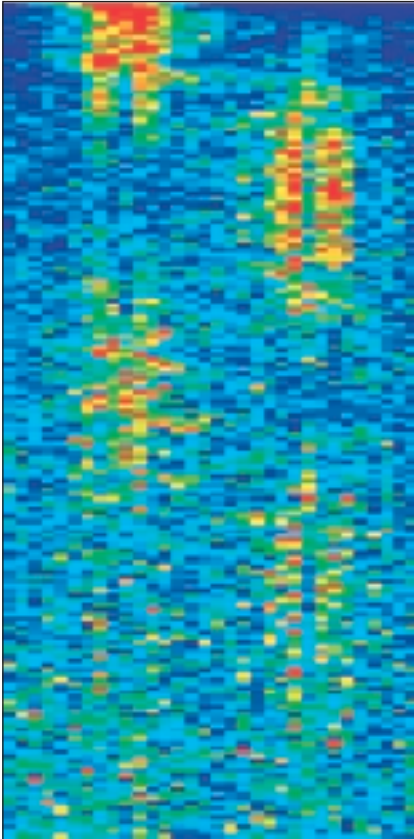


Figure 3 - Évolution du chat de Schrödinger (paquet d'onde) animé par l'ordinateur quantique pour l'application quantique avec un potentiel de double puits. La probabilité de présence en θ (axe horizontal $-\pi < \theta < \pi$) est représentée en fonction du temps t (axe vertical), de $t = 0$ (en haut) à $t = 180$ (en bas). Les paramètres sont ici $K = 0.04$, $a = 1.6$, $\hbar = 4\pi/N$ avec $N = 2^{(n-1)}$. Le calcul quantique est effectué avec $n = 6$ qubits, les portes sont imparfaites avec une amplitude de bruit $\varepsilon = 0.02$. La couleur représente la densité de probabilité, de bleu (minimale) à rouge (maximale).

est l'amplitude du bruit. La décroissance à taux Γ peut être considérée comme une manifestation de la décohérence, c'est-à-dire une perte de la cohérence quantique due au couplage avec l'extérieur du système. La dépendance polynômiale de Γ dans le nombre de qubits montre qu'il est possible d'effectuer des simulations de systèmes quantiques de très grande taille sur des ordinateurs quantiques réalistes.

IMPERFECTIONS DE L'ORDINATEUR ISOLÉ

Le bruit dans les portes considéré ci-dessus correspond à une décohérence due à un couplage avec le monde extérieur. Cependant, même en l'absence d'un tel couplage, un ordinateur quantique isolé contient des imperfections statiques. En effet, la distance en énergie entre les deux niveaux peut varier d'un qubit à l'autre, dans un intervalle δ . De plus, un couplage résiduel d'amplitude J entre les qubits est toujours présent. En effet, une interaction entre qubits est nécessaire pour réaliser les portes quantiques. A première vue, il peut sembler que J est toujours plus grand que la distance Δ_n entre les niveaux voisins de l'ordinateur quantique isolé. En effet, la densité de niveaux augmente exponentiellement avec n dans un tel système quantique à n corps, donnant la loi $\Delta_n \sim \delta \times 2^{-n}$ où n est le nombre de qubits dans l'ordinateur. On pourrait penser que pour $J > \Delta_n$ les niveaux sont mélangés par l'interaction entre les qubits et que les états propres de l'ordinateur sont fortement modifiés par rapport à ceux de l'ordinateur parfait. Il est clair qu'il serait impossible de limiter les interactions résiduelles à de telles valeurs, même pour quelques dizaines de qubits. Heureusement, le mélange de niveaux n'apparaît en fait que pour des valeurs de J beaucoup plus grandes, qui dépassent le « seuil de chaos quantique » $J > \delta/n$. Cette valeur est beaucoup plus grande que Δ_n (exponentiellement) et est liée au fait que l'interaction est à deux corps

et couple un niveau à n^2 autres niveaux au plus. Au-dessus de ce seuil, les caractéristiques du chaos quantique apparaissent, un nombre exponentiel d'états sont mélangés, les fonctions propres de l'ordinateur isolé deviennent ergodiques et les niveaux d'énergie obéissent à une statistique de matrices aléatoires.

Un exemple de « fusion » de l'ordinateur induite par les couplages résiduels est montré sur la figure 4. Ce processus commence au centre de la bande d'énergie où la densité d'états est maximale et touche peu à peu tout l'ordinateur quand le couplage J augmente. Il est clair qu'il est préférable d'opérer l'ordinateur en-dessous du seuil de chaos. Au-dessus du seuil, le chaos se développe sur une échelle de temps $\tau \sim n\delta/J^2$. Au-delà de τ , l'usage de codes correcteurs d'erreurs quantiques sera nécessaire pour continuer le calcul. De tels codes ont été développés, permettant d'effectuer des calculs très longs en corrigeant au fur et à mesure les erreurs, pourvu que le bruit et les imprécisions quantiques restent suffisamment petits.

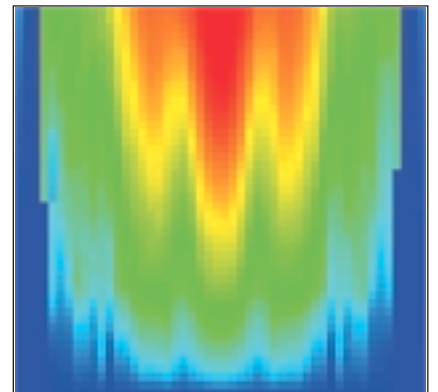


Figure 4 - Fusion de l'ordinateur quantique induite par le couplage entre les qubits. La couleur reflète l'entropie des états propres qui caractérise le mélange des états parfaits, du bleu (entropie nulle) au rouge (entropie maximale). Sur l'axe horizontal est représentée l'énergie des états propres de l'ordinateur comptée depuis l'état de plus basse énergie. L'axe vertical correspond de bas en haut à des valeurs croissantes du couplage résiduel J/δ , de 0 à 0.5. L'ordinateur quantique contient ici 12 qubits. Le seuil de chaos correspond à $J/\delta \approx 0.3$.

CONCLUSION

Les résultats présentés montrent que des systèmes aussi complexes que ceux présentant du chaos peuvent être simulés avec une bonne précision sur des ordinateurs quantiques réalistes, même avec un nombre modéré de qubits et ce, de manière beaucoup plus efficace que sur un ordinateur classique. A présent, il est possible de réaliser des ordinateurs quantiques allant jusqu'à 7 qubits avec la technique de RMN. En principe, cela permettrait de simuler l'évolution du chat de

Schrödinger présentée sur la figure 3, mais le temps de décohérence doit encore être amélioré pour permettre d'appliquer un plus grand nombre de portes élémentaires.

POUR EN SAVOIR PLUS

Ekert (A.), Jozsa (R.), *Rev. Mod. Phys.* **68**, 733, (1996).

Steane (A.), *Rep. Prog. Phys.* **61**, 117, (1998).

Nielsen (M.-A.), Chuang (I.-L.), *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, (2000).

Georgeot (B.), Shepelyansky (D.-L.), *Phys. Rev. E* **62**, 3504, (2000) ; *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2890, (2001) ; *ibid.* **86**, 5393, (2001).

Shepelyansky (D.-L.), *Nobel Symposium on Quantum Chaos Y2K, Physica Scripta* **T90**, 112, (2001).

Chepelianskii (A.-D.), Shepelyansky (D.-L.), *Phys. Rev. A*, **66**, 054301(2002).

Article proposé par :

Bertrand Georgeot, tél. : 05 61 55 65 63, georgeot@irsamc.ups-tlse.fr
Dima L. Shepelyansky, tél. : 05 61 55 60 68, dima@irsamc.ups-tlse.fr
<http://www.quantware.ups-tlse.fr/>