

Х Заповедей Хаоса Чирикова

(вступление к специальному выпуску журнала Physica D 131 (1999) ix, “Пионер Хаоса”)

Ж. Беллисар, О. Бохигас, Дж. Казати, Д.Л. Шепелянский.)

(перевод О.В. Жирова, Д.Л. Шепелянского)

Этот специальный выпуск журнала Physica D представляет избранные труды конференции Sputnik Conference of STATPHYS 20 “Классический хаос и его квантовые проявления”, организованной в честь 70-летия Бориса Чирикова (6 июня 1998) в Тулузе (Франция, 16-18 июля 1998).

Sputnik (Спутник) - это имя первого русского спутника, запущенного в 1957. На русском это слово означает “попутчик”, но оно также стало метафорой, означающей выдающееся пионерское достижение. Смысл этого слова прекрасно подходит к описанию портрета Бориса Чирикова. Действительно, в далеком 1959 году он опубликовал фундаментальную статью [1], в которой он предложил первый физический критерий возникновения хаотического движения в детерминированных гамильтоновых системах. Теперь этот критерий известен как *критерий перекрытия резонансов Чирикова*. В той же работе, используя этот критерий, Чириков объяснил загадочные экспериментальные результаты по удержанию плазмы в магнитной ловушке (бутылке). Как в старой восточной сказке, Борис открыл бутылку и выпустил джина хаоса, который разлетелся по всему миру.

Исследования Бориса Чирикова по хаосу начались в лаборатории Института атомной энергии им. Курчатова в Москве. В сентябре 1959 он переехал в Новосибирск, в Институт ядерной физики, основанный Г.И. Будкером, где он и работает и по настоящее время. Он стал член-корреспондентом Российской академии наук в 1983 году, и академиком - в 1992 (биографические данные могут быть найдены в [2]).

Детальное описание научных достижений Чирикова является непростой задачей. Ниже мы приведем лишь десять основных его достижений, которые наиболее близки к тематике этой конференции, осознавая, что много останется за рамками нашего описания. Еще более сложная задача, это описать его человеческие качества, его теплоту и доброту в жизни и в науке, и то влияние, которое он оказал на наше научное сообщество. Уже одно событие в его жизни хорошо отражает черты его характера: молодым исследователем он покинул столицу России с ее погоней за карьерой и влиянием, предпочтя простой образ жизни в далеком сибирском лесу.

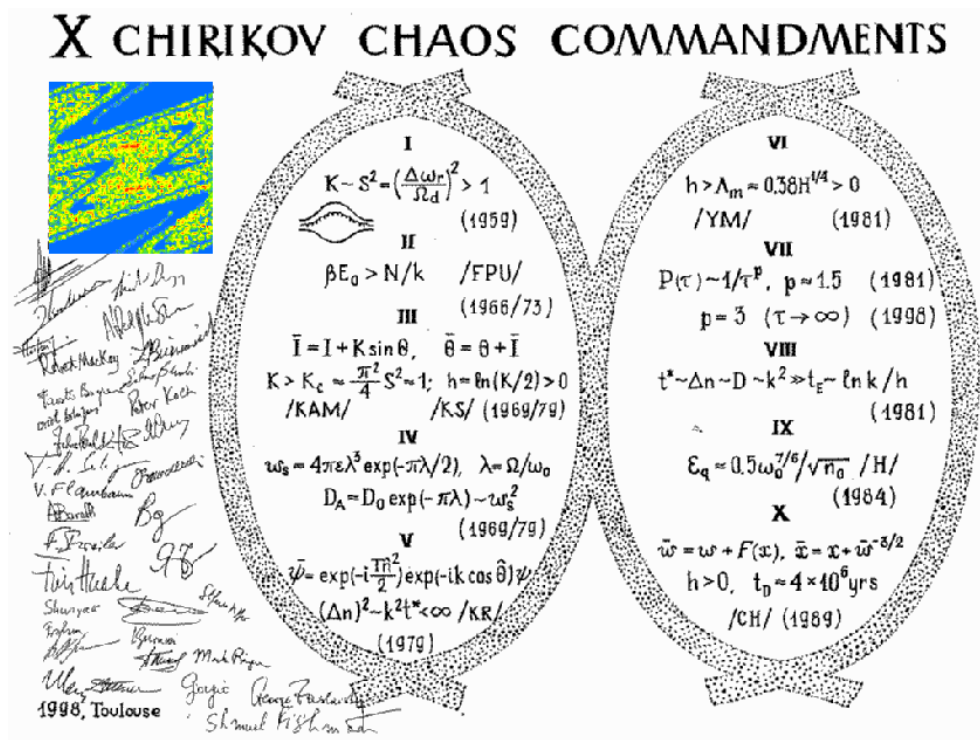


Рис. 1:

1 Чириков и его X Принципов¹ Хаоса

I. Первая заповедь представляет критерий перекрытия резонансов Чирикова, предложенный в [1] и примененный впоследствии для определения границы удержания плазмы в открытых магнитных ловушках в экспериментах Родионова [3] (линии магнитного поля показаны на рис.1). Согласно этому критерию в области параметров $K \sim S^2 > 1$ детерминированная траектория станет двигаться хаотически и непредсказуемо между двумя нелинейными резонансами. Здесь K является параметром возмущения, а $S = \Delta\omega_r / \Omega_d$ — параметром перекрытия резонансов, который дается отношением невозмущенной частотной ширины резонанса $\Delta\omega_r$ к частотному расстоянию между двумя невозмущенными резонансами (обычно $\Delta\omega_r$ вычисляется в приближении маятника и пропорциональна квадратному корню из возмущения). С момента своего появления критерий Чирикова стал важным аналитическим инструментом определения границы хаоса [4]. Точность критерия может быть улучшена с помощью метода

¹Изначальная версия статьи, доступная на ArXiv:cond-mat/9903412, от 29 марта 1999, использовала слово *Заповедей* (*Commandments*), которое было заменено на слово *Принципы* (*Principles*), на основе цензурной правки, осуществленной редактором журнала Physica D C.K.R.T. Jones, с целью не задеть религиозных чувств читателей. Это же изменение было сделано во всем тексте и на рис. 1. Далее мы следуем исходной версии статьи, включая рис.1. (прим. перев.)

ренормализации резонансов на все более и более малых масштабах [5]. Современный статус исследований по удержанию частиц в магнитных ловушках описан в [6-8].

II. Этот результат [9] определяет энергетическую границу развитого хаоса в проблеме Ферми-Паста-Улама (ФПУ) [10], которая стала краеугольным камнем современной статистической механики (см. исторический обзор [11]). Эта система представляет собой цепочку N слабо связанных нелинейных осцилляторов с гамильтонианом $H = \sum_n [p_n^2/2 + (x_{n+1} - x_n)^2/2 + \beta(x_{n+1} - x_n)^4/4]$; изначально возбуждены только несколько длинноволновых мод k с энергией E_0 . Граница хаоса получена на основе критерия перекрытия резонансов Чирикова. Новые результаты по данной проблеме могут быть найдены в [12,13].

III. Здесь первая строка представляет стандартное отображение Чирикова [14,15]. Это отображение сохраняет фазовый объем в переменных действия I и фазы θ . Черта обозначает новые значения переменных, а K является параметром возмущения. Динамика становится неограниченной и диффузионной по I для $K > K_c \approx 1$, когда все инвариантные кривые Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ) разрушены. Это значение получается на основе критерия перекрытия первичных резонансов и резонансов более высокого порядка [14,15]. Для $K > 4$ энтропия h Колмогорова-Синая (КС), возникающая из-за экспоненциальной локальной неустойчивости движения, хорошо описывается приведенной аналитической формулой. Стандартное отображение Чирикова дает локальное описание взаимодействия резонансов, оно находит приложение в различных физических системах, таких как частицы в магнитных ловушках [15], физика ускорителей [16], высоковозбужденные атомы водорода в микроволновом поле [17], мезоскопический резонансный туннельный диод в наклонном магнитном поле [18]. Позднее, более изощренный анализ позволил получить уточненное значение $K_c = 0.9716...$ для разрушения кривой КАМ с золотым числом вращения [19,20]. Для $K > K_c$ инвариантные кривые превращаются в канторы (канторовы множества). Строгие результаты были получены в [21-23] (см. также [24]). Однако, несмотря на значительный прогресс в эргодической теории [25], строгое доказательство существования множества положительной меры для траекторий с положительной энтропией, даже для специальных значений K , до сих пор отсутствует.

IV. Здесь первая строка дает выражение для ширины стохастического слоя w_s , возникающего вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса [14,15]. Это выражение дает ответ на вопрос впервые поставленный Пуакаре [27], который получил оценку для угла расщепления сепаратрис, но не для ширины стохастического слоя. Данное выражение написано для гамильтониана $H(I, \theta, t) = H_0 + \epsilon \omega_0^2 \cos \theta \cos \Omega t$, где невозмущенная система является маятником с $H_0 = I^2/2 - \omega_0^2 \cos \theta$ и где $w = H_0/\omega_0^2 - 1$ является относительным изменением энергии невозмущенного маятника. Вторая строка дает выражение для скорости медленной диффузии Арнольда [26], которая является универсальным явлением, возникающим в хаотических слоях в системах с более чем двумя степенями свободы [14,15,28]. Более новые результаты по хаосу в сепаратрисных слоях и диффузии Арнольда могут быть найдены в [29-31], см. также книгу [32].

V. Здесь первое уравнение описывает квантовый ротатор с толчками, введенный в [33], который является проквантованной версией стандартного отображения Чирикова (см. III). Классический предел соответствует $T \propto \hbar \rightarrow 0$, $k \propto 1/\hbar \rightarrow \infty$ при $K = kT = \text{const}$ и $I = Tn$. Это отображение описывает эволюцию волновой функции на одном периоде возмущения ($\hat{n} = -i\partial/\partial\theta$, $\hbar = 1$). Численные результаты полученные в [33] показали, что в режиме сильного хаоса ($K \gg 1$) энергия ротатора, или квадрат числа возбужденных квантовых уровней $(\Delta n)^2$, растет диффузионно со временем, как и в соответствующей классической системе, но только до времени остановки t^* . После этого времени рост квантовой энергии оказывается сильно

подавленным, в то время как в классической системе диффузия продолжается. Было показано, что t^* растет с k , но объяснение этого явления было найдено позднее (см. VIII).

VI. Этот результат, полученный в [34] показывает, что в общем случае динамика классических полей Янга-Миллса не является полностью интегрируемой и может быть хаотической. Соответствующие исследования были проведены для пространственно-однородных моделей полей Янга-Миллса предложенных в [35], которые могут быть описаны эффективным гамильтонианом с несколькими степенями свободы N . В конкретном случае с $N = 3$ было показано, что динамика цветовых полей с энергией H обладает максимальным показателем Ляпунова $\Lambda_m \approx 0.38H^{1/4} > 0$. В результате энтропия Колмогорова-Синяя h также является положительной, и колебания цветовых полей оказываются хаотическими. Позднее низкоэнергетический хаос был также найден и для массивных полей Янга-Миллса [36].

VII. Результаты работы [37] показали, что в гамильтоновых системах с разделенным фазовым пространством статистика возвратов Пуанкаре $P(\tau)$ затухает во времени степенным образом с показателем степени $p \approx 1.5$. Это затухание связано с длительным застреванием траектории вблизи островков устойчивости и медленной диффузией на малых масштабах вблизи островков. Этот результат приводит также к медленному затуханию корреляционных функций $C(\tau)$, которые связаны со статистикой возвратов соотношением $C(\tau) \sim \tau P(\tau)$ [38-40]. Такой же показатель степени ≈ 1.5 был получен и для других отображений и гамильтоновых потоков (например, в сепаратрисном отображении, отображении Чирикова и др.) вплоть до времен в 10^6 раз больших, чем среднее время возврата [39-41]. На больших временах показатель степени приближается к своему асимптотическому значению $p = 3$ [42], которое определяется скейлинговыми свойствами скорости диффузии вблизи критической инвариантной кривой КАМ [38-41]. Поскольку $p > 2$, скорость диффузии D_c при такой динамике остается конечной: $(D_c \sim \int C(\tau) d\tau < \infty)$.

VIII. В работе [43] показано, что время остановки t^* , при котором происходит квантовое подавление классического хаоса, пропорционально скорости классической диффузии D . Для ротатора с толчками этот временной масштаб также определяет число возбужденных невозмущенных состояний $\Delta n \sim t^* \sim D \sim k^2 \propto 1/\hbar^2$. Временной масштаб t^* намного больше, чем короткое время Эренфеста t_E , на котором минимальный когерентный волновой пакет расплывается на большую часть фазового пространства из-за экспоненциальной локальной неустойчивости, определяемой энтропией Колмогорова-Синяя h [44,43]. Аналогия между квантовым подавлением хаоса и локализацией Андерсона в неупорядоченном одномерном потенциале была установлена в работе [45]. В этом смысле ротатор с толчками представляет собой первый пример динамической локализации хаоса в детерминированной системе, не содержащей никаких случайностей. Длина локализации дается выражением $l \sim \Delta n \sim D$. Недавно динамическая локализация ротатора с толчками была наблюдаена в экспериментах с холодными атомами в лазерном поле [46]. Дополнительное описание ротатора с толчками может быть найдено в [47-48].

IX. На основе результатов, полученных для ротатора с толчками (см. V, VIII) была определена длина динамической локализации для высоковозбужденных атомов водорода в микроволновом поле, это позволило определить квантовую границу делокализации ϵ_q выше которой ($\epsilon_0 > \epsilon_q$) происходит ионизация [49]. Здесь сила микроволнового поля ϵ и его частота ω измеряются в скалированных атомных единицах, где $\epsilon_0 = \epsilon n_0^4$, $\omega_0 = \omega n_0^3$, и n_0 является главным квантовым числом. Для $\omega_0 > 1$ граница ϵ_q может быть больше классической границы хаоса $\epsilon_c = 1/49\omega_0^{1/3}$ [50]. В результате для $\epsilon_q > \epsilon_0 > \epsilon_c$ классический атом полностью ионизован, а квантовый — нет. Более того, если в эксперименте частота $\omega = const$, тогда квантовая гра-

ница *растет* с квантовым числом n_0 . Такое поведение, предсказанное в [49] было наблюдаено в лабораторных экспериментах с атомами водорода и ридберговскими атомами [51-53]. Как показано в [17], динамическая локализация для атомов водорода в микроволновом поле может быть локально описана моделью ротатора с толчками. Дополнительные сведения о квантовом хаосе при микроволновой ионизации атомов могут быть найдены в [17,54,55].

Х. Результаты работы [56] показывают, что динамика кометы Галлея может быть описана простым отображением (см. рис.1): здесь изменение энергии кометы $(\bar{w} - w)/2$ является периодической функцией времени прохождения перигелия x , измеряемого в периодах обращения Юпитера (первое уравнение); последующее время прохождения $\bar{x}$ дается законом Кеплера (второе уравнение); в принципе Сатурн также оказывает влияние на движение кометы [56]. Это отображение является приближенным, но оно описывает динамику кометы с большой точностью [56]. Исследования этого отображения показали, что движение кометы Галлея хаотично (КС энтропия положительна), и что время ее диффузионного ухода из солнечной системы (вперед и назад по времени) оказывается довольно небольшим: $t_D \approx 4 \times 10^6$ лет. Вся эта информация была получена на основе всего 46 чисел — времен прохождения перигелия, полученных путем продолжительного численного моделирования, выполненного другими группами, и на основе исторических хроник астрономических наблюдений.

Эти Заповеди Хаоса Чирикова, также как и другие его результаты (например, [57-59]), непосредственно связаны с современным развитием исследований физики хаоса, представленных на этой конференции.

Эта конференция привлекла более ста участников. Среди них большинство составляли молодые исследователи из разных стран мира, что указывает на значительный научный интерес к этому направлению исследований. Лого конференции иллюстрирует квантовое собственное состояние ротатора с толчками (см. детали [60]), подчеркивая одновременно красоту и сложность хаотических систем. В центре научных обсуждений оказались следующие научные тематики:

Нелинейные системы и классический хаос. Эта тематика обсуждалась в основном в первый день конференции. Проблема взаимодействия нелинейных резонансов и их перекрытие в отображениях с квадратичной нелинейностью обсуждалась в докладах Чирикова и Лихтенберга (см. I, III). Свойства транспорта в квазипериодической среде обсуждались в докладе Синая. Новые математические результаты для дискретных бризеров в нелинейных цепочках были представлены в докладах Обри и Маккая. Проблемы пространственно-временного хаоса, хаотических структур и динамических фазовых переходов в протяженных динамических системах анализировались в докладах Бунимовича, Пиковского и Руффо. (см. II) . Свойства границ хаоса и статистики возвратов Пуанкаре в сохраняющих меру отображениях обсуждались в докладах Ласкара, Артузо и Заславского (см. III,IV,VII). Специфические свойства симметричных периодических орбит и хаотической динамики классических волновых полей были рассмотрены Селигманом и Гварнери. Хаотические свойства бильярдов были проанализированы в докладах Бунимовича и Мантики. Проблема гамильтоновых ошибок округления и дискретизации динамических систем была освещена в докладе Вивальди.

Спектр, свойства квантовых состояний, квантовая эргодичность и локализация. Эта тематика изучалась на примере различных моделей. Мультифрактальные свойства модели квантового хаоса и их связь с расплыванием волновых пакетов обсуждались в докладах Гайзеля и Гварнери. Проблема возникновения квантовой эргодичности в бильярдах обсуждалась

в докладах Боргонови, Казати, Фрамма, Пранге, Прозена и Ри. Фрактальные флуктуации проводимости в бильярдах рассматривались Кетцмериком. Локализация собственных состояний в динамических моделях и случайных полосковых матрицах рассматривались Фишманом и Израйлевым (см. V,VIII). Отклонения от предсказаний теории случайных матриц и промежуточная статистика уровней обсуждались Богомольным. Квантовый хаос в открытых системах, неэрмитовы матрицы и хаотическое рассеяние рассматривались Казати, Масперо, Федоровым. Результаты этих исследований находят применение в экспериментах с мультимодовыми оптическими волокнами, как это обсуждалось участниками Доя, Леграном и Мортесань. Теория хаотических оптических резонаторов была развита и применена к эксперименту по лазерному излучению в каплях, которые были описаны в докладе Стоуна.

Периодические орбиты и квантовый хаос. Новые результаты по теории периодических орбит для диссипативных квантовых систем были представлены Хааке. Периодические орбиты и их проявление в процессах туннелирования, диффузии и в явлении “шрамов” обсуждались участниками Крэгг, Таннер и Борондо. Проявление периодических орбит в квантовании таких мезоскопических систем, как резонансный туннельный диод в наклонном магнитном поле освещались в докладе Стоуна.

Квантовый хаос в атомной физике. Экспериментальное изучение динамической локализации для ротатора с толчками, который был физически реализован в экспериментах с ультрахолодными атомами цезия в лазерном поле, было представлено в докладе Райзена, который также обсуждал эффекты шума (см.V,VIII). Экспериментальные исследования квантовых резонансов в микроволновом поле в атомах водорода и эффектов, выходящих за одномерное приближение были представлены в докладе Коча (см. I,IX). Теория микроволнового возбуждения хаотических ридберговских атомов в магнитном (или статическом электрическом) поле, когда для ионизации одного атома требуется более чем 1000 фотонов, была представлена Бененти (см. IX). Хаотическая динамика бозе-конденсата, удерживаемого в ловушках, изучалась Флейсером и Грахамом. Свойства стабильных двухэлектронных конфигураций в атомах гелия в сильных монохроматических полях обсуждались Бухляйтером. Статистическая теория динамической термализации и квантового хаоса в сложных атомах была представлена Фламбаумом (см.[59]). Теория уширения линий, обнаруженного в недавних экспериментах с газом взаимодействующих холодных ридберговских атомов, была представлена в докладе Акулина.

Квантовый хаос в многочастичных системах. Эта тематика в области квантового хаоса возникла сравнительно недавно. Здесь были представлены новые результаты для различных систем. Статистика флуктуаций энергии для невзаимодействующих фермионов обсуждалась в докладе Бохигаса. Эффекты взаимодействия в конечноразмерных фермионных системах были рассмотрены Фламбаумом. Условия применимости теории случайных матриц для спиновых квантовых кластеров были представлены в работе Жоржо. Проблема двух взаимодействующих частиц, рапространяющихся в случайном потенциале, численно исследовалась в работе Диаза-Саншеза. Переход от интегрируемой к эргодической динамике в многочастичных системах исследовался в работе Прозена. Обзор по квантовому хаосу в КХД вакууме был представлен в докладе Шурыка.

Конференция показала, как разнообразны физические приложения классического и квантового хаоса, которые простираются от КХД [61], холодных [46], ридберговских [51] и сложных [62] атомов к мезоскопической физике и хаотическому свету в каплях и микродисковых лазерах [63]. Достижения физиков дополняет впечатляющий прогресс многих математиков XX-го века, который является частью наследия Анри Пуакаре, открывшего первые проявления того, что сейчас называется детерминированный хаос. Дополнительные математические результаты

в этой области представлены в параллельном специальном выпуске Анналов Института Анри Пуанкаре “Классический и квантовый хаос”, который также посвящен Борису Чирикову по случаю его 70-летия [64].

В заключение мы хотели бы поблагодарить спонсоров, которые помогли организовать эту конференцию: CNRS (Центр национальных научных исследований), Университет Поля Сабатье, Институт университетов Франции, IRSAMC (Институт исследований сложных молекулярных систем), регион Южных Пиреней. Мы выражаем особую благодарность журналу Physica D, с которым Борис Чириков и его друг Дж. Форд сотрудничали многие годы. Мы выражаем теплую благодарность Сильвии Скалдаферро и Роберту Флекенжеру за их ежедневную помощь в организации конференции; мы также благодарим Армеля Барелли, Клауса Фрама и Бертрана Жоржо. Мы также благодарны Ф.М. Израйлеву, В.В. Вечеславу и Ф. Вивальди за их дружеские советы, использованные здесь. Наконец мы выражаем нашу благодарность приглашенным докладчикам и авторам статей в этом томе, которые с энтузиазмом приняли приглашение участвовать в этой конференции.

Ж. Беллисар, О. Бохигас, Дж. Казати и Д.Л. Шепелянский

Тулуза, 21 сентября 1998

Список литературы

- [1] Б. В. Чириков, Атомная энергия, **6** (1959) 630 [Engl. Transl., J. Nucl. Energy Part C: Plasma Phys. **1** (1960) 253].
- [2] В. И. Арнольд, Л. М. Барков, С. Т. Беляев, Г. И. Димов, Б. Б. Кадомцев, Э. П. Кругляков, И. Н. Мешков, Д. Д. Рютов, В. А. Сидоров, А. Н. Скринский, УФН **155** (1988) 543 [Sov. Phys. Usp. **31** (1988) 682]; *ibid.* other article dedicated to B.V.Chirikov (to appear in 1998).
- [3] С. Н. Родионов, Атомная энергия, **6** (1959) 623 [Engl. Transl., J. Nucl. Energy Part C: Plasma Phys. **1** (1960) 247].
- [4] Данный критерий, как и все физические критерии, имеет определенные ограничения. Так, он не может выявить полную интегрируемость в нелинейных системах со специфическими скрытыми симметриями, например, в цепочке Тоды. Однако, он работает успешно для типичных гамильтоновых систем, в которых такие специальные симметрии отсутствуют (см. обсуждение в [11,15,32]).
- [5] D. F. Escande, Phys. Rep. **121** (1985) 165.
- [6] B. V. Chirikov, in *Topics in plasma physics*, Ed. B. B. Kadomtsev, Energoatomizdat, Moskva (1984) 3.
- [7] B. V. Chirikov, Proc. Roy. Soc. Lon. A **413** (1987) 145.
- [8] B. V. Chirikov, Proc. Int. Workshop on Open Systems, World Scientific (1994) 157.

- [9] B. V. Chirikov, and F. M. Izrailev, Sov. Phys. Dokl. **11** (1966) 30; B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and V. A. Tayursky, Comput. Phys. Commun. **5** (1973) 11.
- [10] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, and M. Tsingou, Los Alamos Preprint LA-1940 (1955); E. Fermi, *Collected papers*, Univ. of Chicago Press, Chicago, **2** (1965) 978.
- [11] J. Ford, Phys. Rep. **213** (1992) 271.
- [12] R. Livi, M. Pettini, S. Ruffo, M. Sparpaglione, and A. Vulpiani, Phys. Rev. A **28** (1983) 3544; *ibid.* **31** (1985) 1039.
- [13] J. De Luca, A. J. Lichtenberg, and M. A. Lieberman, Chaos **5** (1995) 283.
- [14] B. V. Chirikov, *Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity*, Preprint N 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1969) [Engl. Trans., CERN Trans. 71-40 (1971)].
- [15] B. V. Chirikov, Phys. Rep., **52** (1979) 263.
- [16] F. M. Izrailev, Physica D, **1** (1980) 243.
- [17] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, IEEE Jour. of Quant. Elect. **24** (1988) 1420.
- [18] D. L. Shepelyansky, and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2098.
- [19] J. M. Greene, J. Math. Phys. **20** (1979) 1183.
- [20] R. S. MacKay, Physica D **7** (1983) 283 (1983).
- [21] S. Aubry, and P. Y. LeDaeron, Physica D, **8** (1983) 381.
- [22] J. N. Mather, Ergod. Th. Dynam. Sys., **4** (1984) 301.
- [23] R. S. MacKay, and I. C. Percival, Comm. Math. Phys., **98** (1985) 469.
- [24] J. N. Mather, and G. Forni, Lect. Notes in Math., Springer, **1589** (1994) 92.
- [25] I. P. Kornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer, 1982.
- [26] V.I. Arnold, Dokl. Acad. Nauk SSSR, **156** (1964) 9.
- [27] H. Poincaré, *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Paris, (1892) sections 226, 397.
- [28] G. V. Gadiyak, F. M. Izrailev, and B. V. Chirikov, Proc. 7th Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Akademie - Verlag, Berlin **II** (1975) 315.
- [29] V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, and N. V. Svanidze, Physica D **71** (1994) 82.
- [30] B. V. Chirikov, J. Ford and F. Vivaldi, in AIP Conf. Proc. (Eds. M. Month and J. C. Herrera) **57** (1979) 323; J. Tennyson, M. Lieberman, and A. Lichtenberg, *ibid.* 272.
- [31] B. V. Chirikov, and V. V. Vecheslavov, J.Stat.Phys. **71** (1993) 243.
- [32] A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and chaotic Dynamics*, Springer (1992).

- [33] G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford, and F. M. Izrailev, Lecture Notes in Physics **93** (1979) 334.
- [34] Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский, Письма в ЖЭТФ, **34**, (1981) 171 [JETP Lett., **34** (1981) 163].
- [35] С. Г. Матинян, Г. К. Саввиди, Н. Г. Тер-Мартirosян-Саввиди, ЖЭТФ, **80** (1981) 830 [Sov. Phys. JETP **53** (1981) 421].
- [36] Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский, ЯФ, **36** (1982) 1563 [Sov. J. Nucl. Fiz. **36** (1982) 908].
- [37] B. V. Chirikov, and D. L. Shepelyansky, Proc. IX Int. Conf. on Nonlinear Oscillations (Kiev 1981), Naukova Dumka **2** (1984) 420; Preprint Inst. Nucl. Phys. 81-69, Novosibirsk 1981 [English trans., Princeton Univ. Rep. No. PPPL-TRANS-133, (1983)].
- [38] B.V. Chirikov, Lecture Notes in Physics **179** (1983) 29.
- [39] C. F. F. Karney, Physica D **8** (1983) 360.
- [40] B. V. Chirikov, and D. L. Shepelyansky, Physica D **13**, (1984) 395.
- [41] B. V. Chirikov, and D. L. Shepelyansky, in *Renormalization Group*, Eds. D.V.Shirkov, D.I.Kazakov and A.A.Vladimirov, World Sci. Publ., Singapore, (1988) 221.
- [42] B. V. Chirikov, and D. L. Shepelyansky, cond-mat/9807365 (presented as a poster at the Conference).
- [43] B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and D. L. Shepelyansky, Sov. Scient. Rev. (Gordon & Bridge) **2C** (1981) 209.
- [44] G. P. Berman, and G. M. Zaslavsky, Physica A **91** (1978) 450.
- [45] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 508.
- [46] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F.Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4598 (see also contribution of M. G. Raizen *et al.* in this Volume).
- [47] B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and D.L.Shepelyansky, Physica D **33** (1988) 77.
- [48] F. M. Izrailev, Phys. Rep. **196** (1990) 299.
- [49] G. Casati, B. V. Chirikov, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 2525.
- [50] Н.Б. Делоне, В.П.Крайнов, Д.Л. Шепелянский УФН **140** (1983) 355-392 [Sov. Phys. Uspekhy **26** (1983) 551].
- [51] E. J. Galvez, B. E. Sauer, L. Moorman, P. M. Koch, and D. Richards, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2011 (see also contribution of P.Koch *et al.* in this Volume).
- [52] J. E. Bayfield, G. Casati, I. Guarneri, and D. W. Sokol, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 364.
- [53] M. Arndt, A. Buchleitner, R. N. Mantegna, and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 2435.
- [54] G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rep. **154** (1987) 77.

- [55] G. Benenti, G. Casati, and D. L. Shepelyansky, cond-mat/9805216 (submitted to Eur. Phys. Jour. D).
- [56] B. V. Chirikov, and V. V. Vecheslavov, Astron. Astroph. **221** (1989) 146.
- [57] Б. В. Чириков, Г. М. Заславский, ДАН СССР, **159** (1964) 306.
- [58] B.V. Chirikov and F.M. Izrailev, Proc. Colloques Intern. du CNRS, Toulouse (1973) 409; Physica D **2** (1981) 30.
- [59] B. V. Chirikov, Phys. Lett. A **108** (1985) 68.
- [60] G. Casati, G. Maspero, and D. L. Shepelyansky, contribution to this Volume.
- [61] T. Schäfer, and E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323.
- [62] V. V. Flambaum, A. A. Gribakina, G. F. Gribakin, and M. G. Kozlov, Phys. Rev. A **50** (1994) 267 (see also contribution of V.Flambaum *et al.* in this Volume).
- [63] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco, and A. Y.Cho, Science **280** (1998) 1556 (see also contribution of A. D. Stone *et al.* in this Volume).
- [64] *Classical and Quantum Chaos*, Eds. J. Bellissard, and D. L. Shepelyansky, Ann. Inst. Henri Poincaré (Phys. Théor.) **68** (1998) 378 - 523.