

# Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями

**Е.А. Кузнецов**

ФИАН, Москва

**ИЯФ им. Г.И.Будкера СО РАН**  
**International Seminar dedicated**  
**to the memory of B.V. Chirikov, May 23, 2008**

## ЛИТЕРАТУРА

- ▶ **Е.А.Кузнецов**, *Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями*, **Письма в ЖЭТФ**, 80, 92-98 (2004).
- ▶ **Е.А.Kuznetsov, V. Naulin, A.H. Nielsen, and J.J. Rasmussen**, *Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence*, **Phys Fluids** 19, 105110 (2007).
- ▶ **Е.А.Kuznetsov, V.V. Krasnosel'skikh**, *Anisotropic Kadomtsev-Petvishvili spectra*, **AGU meeting, December 2007; Physics of Plasmas (submitted) (2008)**.

## ПЛАН

- ▶ Введение: коллапсы и турбулентные спектры
- ▶ Турбулентность волн на воде
- ▶ Двумерная гидродинамическая турбулентность  $Re \gg 1$
- ▶ Численный эксперимент
- ▶ Акустическая турбулентность

## Введение: коллапсы и турбулентные спектры

Как известно, сингулярности дают степенное поведение Фурье-амплитуд, что обеспечивает появление степенных хвостов для спектров турбулентности. Поэтому этот вопрос очень важен с точки зрения теории колмогоровских спектров.

- ▶ (1941) Спектр Колмогорова-Обухова, т.е. распределение энергии пульсаций скорости в инерционном интервале при  $(Re \gg 1)$

$$E_k \sim P^{2/3} k^{-5/3}$$

Здесь  $P$  - поток энергии от больших (энергосодержащих) масштабов к малым. Этот спектр может быть получен из соображений размерности.

## Введение: коллапсы и турбулентные спектры

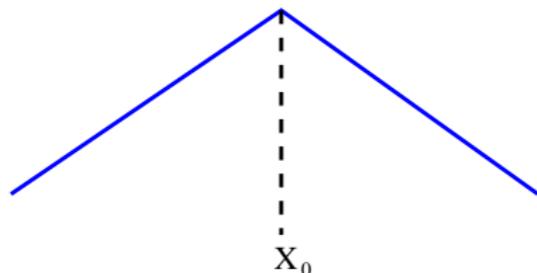
- ▶ Отсюда можно получить, что время перекачки  $T$  от больших (энергосодержащих) масштабов  $L$  до диссипативной области конечно и определяется только  $L$  и  $P$  :  $T \sim L^{2/3} P^{-1/3}$ .
- ▶ Распределение флуктуаций скорости в инерционном интервале  $v \sim P^{1/3} r^{1/3}$ .

Соответственно, для завихренности  $\Omega = \text{curl } v$  мы имеем:  
 $\Omega \sim P^{1/3} r^{-2/3}$ .

Вопрос: Есть ли это в действительности особенность?  
Если - да, то возможно ли говорить, что причина появления колмогоровского спектра может быть связана с такого рода сингулярностями?

## Введение: коллапсы и турбулентные спектры

- ▶ (1958) Спектр Филлипса для гравитационных волн на поверхности жидкости. Сингулярности на поверхности - **кассы** (в виде угла):



$$\Leftrightarrow z = \eta(x, t) \Rightarrow$$
$$\eta_{xx} \sim \delta(x - x_0)$$

или  $\eta_k \sim k^{-2}$ .

Отсюда, согласно Филлипсу,  $E_k = 2\pi k \cdot g \langle |\eta_k|^2 \rangle \sim k^{-3}$  или  $E_\omega \sim \omega^{-5}$ , где предполагается, что  $\omega = \sqrt{gk}$ .

- ▶ (1967) Слабо-турбулентный (СТ) спектр Захарова-Филоненко:  $E_\omega \sim P^{1/3} \omega^{-4}$ ,  $P$  - поток энергии.

## Введение: коллапсы и турбулентные спектры

- ▶ (1967) спектр Крейчнана для 2D гидродинамической турбулентности при  $Re \gg 1$ :  $E_k \sim \eta^{2/3} k^{-3}$ , где  $\eta$  - поток энстрофии в область больших  $k$ .

ЗАМЕТИМ: Поток энергии направлен в малые  $k$ , где реализуется колмогоровский спектр:  $E_k \sim P^{2/3} k^{-5/3}$ .

- ▶ (1971) Спектр Саффмана:  $E_k \sim k^{-4}$ . Этот спектр обязан разрывам (скачкам) завихренности, которые наблюдаются практически во всех численных экспериментах (начиная с 1969 г.).

- ▶ (1973) Спектр Кадомцева- Петвиашвили. Согласно КП акустическая турбулентность - это набор ударных волн, положение и направление распространения которых считаются случайными:



$$\rho_x \sim \delta(x - x_0),$$
$$\rho_k \sim k^{-1} \Rightarrow E_\omega \sim \omega^{-2}.$$

- ▶ (1951, не опубликовано) Бюргерс нашел этот спектр для 1D.
- ▶ (1971) СТ спектр Захарова-Сагдеева:  
 $E_\omega \sim P^{1/2} \omega^{-3/2}.$
- ▶ **Замечание:** Появление особенностей есть чисто когерентный процесс, соответственно сингулярные объекты (например, каспы) являются когерентными структурами. Таким образом, мы приходим к очень важной проблеме сосуществования турбулентности (хаотической части) и когерентных структур.

## Турбулентность волн на воде

Филлипс предполагал *неявно* сингулярности точечными, хотя они сосредоточены на целых линиях.

**0D:** Зная временную автокорреляционную функцию (в некоторой точке)  $K(\tau) = \langle \eta(t + \tau)\eta(t) \rangle$ , спектр турбулентности дается ее преобразованием Фурье:  $E_\omega = g \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau$ .  
Предположим, что

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sum_i \Gamma_i \delta(t - t_i) + \text{regular terms},$$

где  $\Gamma_i$  и  $t_i$  являются случайными.

Фурье-образ от сингулярной части дается суммой

$$\eta_\omega = -\frac{1}{2\pi\omega^2} \sum_i \Gamma_i e^{-i\omega t_i}.$$

## Турбулентность волн на воде

Отсюда после усреднения легко получить:

$$E_\omega = \frac{g}{2\pi T} \langle |\eta_\omega|^2 \rangle = \frac{g\nu}{2\pi\omega^4} \overline{\Gamma^2}$$

где  $\nu = N/T$  - частота появления каспов,  $N$  - число разрывов за время усреднения  $T$ .

Полученный спектр имеет ту же степенную зависимость, что и СТ спектр Захарова-Филоненко  $E_\omega \sim P^{2/3}\omega^{-4}$ .

## Турбулентность волн на воде

В теории СТ поведение  $n_k$  (чисел заполнения) определяется из кинетического уравнения :

$$\frac{dn_k}{dt} = St(n_k) + \gamma_k n_k - \nu_k n_k,$$

где

$$St(n_k) = \int W(k1|23) n_k n_1 n_2 n_3 (n_k^{-1} + n_1^{-1} - n_2^{-1} - n_3^{-1}) dk_1 dk_2 dk_3$$

- столкновительный член.

$$W(k1|23) = 2\pi |T(k1|23)|^2 \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$$

вероятность рассеяния волн  $2 \rightarrow 2$ .

## Турбулентность волн на воде

Для гравитационных волн на глубокой воде  $\omega_k$  и матричный элемент  $T(k_1|23)$  являются однородными функциями своих аргументов. При преобразованиях  $k_j \rightarrow \lambda k_j$ ,

$$\omega_k \rightarrow \lambda^\alpha \omega_k, \quad T(k_1|23) \rightarrow \lambda^\beta T(k_1|23).$$

Для волн на глубокой воде  $\alpha = 1/2$  и  $\beta = 3$ .  
В инерционном интервале стационарное кинетическое уравнение сводится к

$$St(n_k) = 0.$$

Решение этого уравнения с постоянным потоком энергии есть как раз спектр Захарова-Филоненко:  $E_\omega \sim P^{1/3} \omega^{-4}$ .

## Турбулентность волн на воде

Отметим, что в режиме слабой турбулентности  $\omega$ - и  $k$ -спектры связаны между собой. Это следует из

$$E_{k\omega} = \varepsilon(k) \delta(\omega - \omega_k),$$

так что

$$E_\omega = 2\pi k \frac{dk}{d\omega} \varepsilon(k(\omega)).$$

В сильно нелинейном режиме это не так.

## Турбулентность волн на воде

Рассмотрим сингулярность в виде каспа, параллельного оси  $y$ , длины  $l = x_1 - x_2$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$  :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \Gamma(x) \delta(y - y_0) + \text{regular terms}$$

Здесь  $\Gamma(x) = 0$  вне интервала  $[x_1, x_2]$  и на границе  $\Gamma(x_{1,2}) = 0$ .  
Отсюда

$$\eta_k = -\frac{1}{k_y^2} e^{-ik_y y_0} \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x) e^{-ik_x x} dx,$$

с  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ .

## Турбулентность волн на воде

Суммирование по всем гребням дает

$$\eta_k = - \sum_{\alpha} \frac{e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{n}_{\alpha})y_{\alpha}}}{(\mathbf{k}\mathbf{n}_{\alpha})^2} \int_{x_{1\alpha}}^{x_{2\alpha}} \Gamma_{\alpha}(x) e^{-i(\mathbf{k}\tau_{\alpha})x} dx.$$

Здесь нормаль  $\mathbf{n}_{\alpha}$  и единичный касательный вектор  $\tau_{\alpha}$  задают ориентацию каждого гребня  $\alpha$ .

Спектр определяется после усреднения  $|\eta_k|^2$  по всем случайным переменным.

Усреднение относительно  $(x_{\alpha}, y_{\alpha})$ , однородно распределенных, дает

$$\overline{|\eta_k|^2} = N \left\langle \left| \frac{1}{(\mathbf{k}\mathbf{n})^4} \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x) e^{-i(\mathbf{k}\tau)x} dx \right|^2 \right\rangle.$$

Здесь  $N$  - среднее значение гребней (с каспами) внутри области  $S$ .

## Турбулентность волн на воде

Нас интересует коротковолновая асимптотика, когда  $kL \gg 1$ , где  $L$  характерная длина разрыва. Тогда для всех углов, исключая  $\theta_k \leq \theta_0 = (kL)^{-1}$ , спектр  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})$  (до усреднения по углам!) записывается в виде

$$\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{k}) \approx \frac{gn}{2\pi^2} \frac{\langle (\Gamma')^2 \rangle}{(\mathbf{k}n)^4 (\mathbf{k}\tau)^4},$$

где  $\Gamma' \equiv \Gamma'(x_{1,2})$ . Для узкого конуса углов  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})$

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{k}) \approx \frac{gn}{4\pi^2 k^4} \langle (\bar{\Gamma}l)^2 \rangle, \quad \theta_k \leq (kL)^{-1}.$$

где  $n$  - плотность разрывов,

$$\bar{\Gamma}l = \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x) dx, \quad l = x_1 - x_2, \quad L = \langle l \rangle.$$

## Турбулентность волн на воде

Отсюда окончательное выражения для спектра получается после усреднения по углам:  $E(\mathbf{k}) = k\overline{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})}$ .

Изотропный случай:

$$E(k) = \frac{gn}{\pi^2 k^4 L} \left[ \langle (\bar{\Gamma}l)^2 \rangle + \frac{2}{3} \langle (\Gamma')^2 \rangle (L^3 + a^3) \right],$$

что отличает на одну степень от спектра Филлипса. Здесь  $a$  - средний изгиб гребней.

Этот спектр полностью соответствует  $\omega$ -спектру  $E_\omega \sim \omega^{-4}$  поскольку в изотропном случае преобразование Фурье от корреляционной функции  $K(|\mathbf{r}|) = \langle \eta(\mathbf{r} + \mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t) \rangle$  будет иметь ту же степень, т.е.  $\sim k^{-4}$ .

Заметим, что если  $\omega = \sqrt{gk}$ , то  $E_\omega \sim \omega^{-7}$  вместо  $\omega^{-4}$ !

## Турбулентность волн на воде

### Сильная анизотропия:

Если характерная ширина  $\Delta\theta$  функции распределения по углам достаточно узкая,  $\Delta\theta < \theta_0 = 1/(kL)$ , то в этом конусе углов спектр будет спадать как  $\sim k^{-3}$ , т.е. аналогично спектру Филлипса.

При  $k > k^* = (L\Delta\theta)^{-1}$  спектр имеет другую степенную зависимость:  $k^{-4}$  и соответственно с увеличением  $k$  ширина спектра по углам становится более узким, уменьшаясь как  $(kL)^{-1}$ . Это означает, что в  $k$ -пространстве распределение имеет вид **ДЖЕТА**.

## Турбулентность волн на воде

Недавно экспериментально две группы:

Faloon, Laroche and Fauve (March 2007) [ртуть, бассейн:  
 $20 \times 20 \times 1.8 \text{ cm}^3$ ]

Denisenko, Lukashchuk and Nazarenko (November 2007) [вода,  
бассейн:  $12 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$ ]

получили спектры, близкие к  $E \sim \omega^{-4}$ .

Колмогоровская константа **не масштабировалась**  $\sim P^{1/3}$ , где  $P$   
- поток энергии (Faloon, Laroche and Fauve).

**Основная причина - конечный размер бассейна и  
соответственно дискретность спектра линейных волн!**

## Двумерная гидродинамическая турбулентность

Ситуация с двумерной ГД турбулентностью аналогична случаю волн на воде, если, следуя Саффману, предположить, что у завихренности  $\Omega$  возникают скачки (шоки) с длинами  $L$  порядка характерного масштаба турбулентности и ширинами  $\delta \ll L$ .

Для 2D турбулентности резкие градиенты завихренности наблюдаются во многих численных экспериментах (Lilly, 1971; McWilliams, 1984; Kida, 1985; Brachet, Meneguzzi, & Sulem, 1986; Okhitani, 1991).

Тенденция к появлению такого рода скачков может быть понята, если в рамках уравнения Эйлера рассмотреть бездивергентный вектор  $\mathbf{B}$  (di-vorticity),

$$B_x = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

где  $\mathbf{B}$  подчиняется уравнению

## Двумерная гидродинамическая турбулентность

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Это векторное поле оказывается замороженным, оно изменяется благодаря компоненте скорости  $\mathbf{v}_n$ , нормальной к  $\mathbf{B}$ . Вводя новые траектории,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a},$$

$\mathbf{B}$  выражается через отображение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$  и его якобиан  $J$  (аналог представления вихревых линий):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_{\mathbf{a}}) \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}$$

$J$  не фиксировано, т.е. отображение является сжимаемым, что и является причиной появления резких градиентов в 2Д Эйлере.

## Двумерная гидродинамическая турбулентность

**Замечание:** Как было показано Волибнером (Wolibner), Като (Kato) и Юдовичем, коллапс, как процесс возникновения особенности за конечное время, запрещен для двумерной гидродинамики идеальной жидкости: расстояние  $\rho(t)$  между двумя частицами оказывается ограниченным снизу:

$$\rho(t) \geq L \exp[-\log(L/\rho_0)\exp(C|\omega|_{L^\infty} t)],$$

где  $|\omega|_{L^\infty}$  - супремум завихренности.

Для градиента завихренности это дает ограничение вида :

$$|\nabla\omega(t)|_{L^\infty} \leq |\nabla\omega_0|_{L^\infty} \exp\left[\frac{C|\omega_0|_\alpha}{C_1|\omega_0|_{L^\infty}}\{\exp(C_1 t|\omega_0|_{L^\infty}) - 1\}\right].$$

Здесь  $|\omega_0|_\alpha$  - гельдеровская норма начальной завихренности.

## Двумерная гидродинамическая турбулентность

Спектр в этом случае находится по аналогичной схеме.

Предположим, что  $L^{-1} \ll k \ll \delta^{-1}$ , где  $\delta$  - характерная ширина скачка.

Рассмотривая один скачок,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = G(x) \delta(y - y_0) + \text{регулярные члены}$$

с  $G(x)$ , равной нулю вне интервала  $[x_1, x_2]$ , а также в точках  $x = x_{1,2}$ , вначале мы находим  $\Omega_k$  от одного скачка, а затем суммируем по всем скачкам

$$\Omega_k = -i \sum_{\alpha} \frac{e^{-i(kn_{\alpha})y_{\alpha}}}{(kn_{\alpha})} \int_{x_{1\alpha}}^{x_{2\alpha}} G_{\alpha}(x) e^{-i(kT_{\alpha})x} dx.$$

## Двумерная гидродинамическая турбулентность

Спектр  $\epsilon(k)$  тогда задается как

$$\begin{aligned}\epsilon_1(k) &= \frac{n}{8\pi^2 k^4} \langle (\bar{G}l)^2 \rangle, & \theta_k \leq \theta_0; \\ \epsilon_2(k) &= \frac{n}{4\pi^2 k^2} \frac{\langle (G')^2 \rangle}{(\mathbf{kn})^2 (\mathbf{k}_T)^4}, & \theta_k > \theta_0,\end{aligned}$$

где  $n$  - плотность скачков.

Отсюда после усреднения по углам в изотропном случае мы имеем спектр Саффмана

$$E(k) = \frac{n}{2\pi^2 k^4 L} \left[ \langle (\bar{G}l)^2 \rangle + \frac{2L^4}{3} \langle (G')^2 \rangle \right],$$

## Двумерная гидродинамическая турбулентность

В случае сильной анизотропии - комбинация спектров Крейчнана и Саффмана

$$\max_{\theta} E(k) \sim k^{-3} \text{ if } \Delta\theta < \theta_0 = (kL)^{-1} \text{ (Kraichnan);}$$

$$\max_{\theta} E(k) \sim k^{-4} \text{ if } \Delta\theta > \theta_0 = (kL)^{-1} \text{ (Saffman)}$$

Отсюда следует, что с ростом  $k$  угловое распределение становится более узким:  $\theta_0 = (kL)^{-1}$ , т.е. при больших  $k$  происходит формирование джетов.

## Численный эксперимент

Для того чтобы установить связь между хвостами спектра и резкими градиентами завихренности в численных экспериментах рассматривалась задача об эволюции 2D турбулентности без накачки.

Численно мы решали уравнение Эйлера с гипервязкостью :

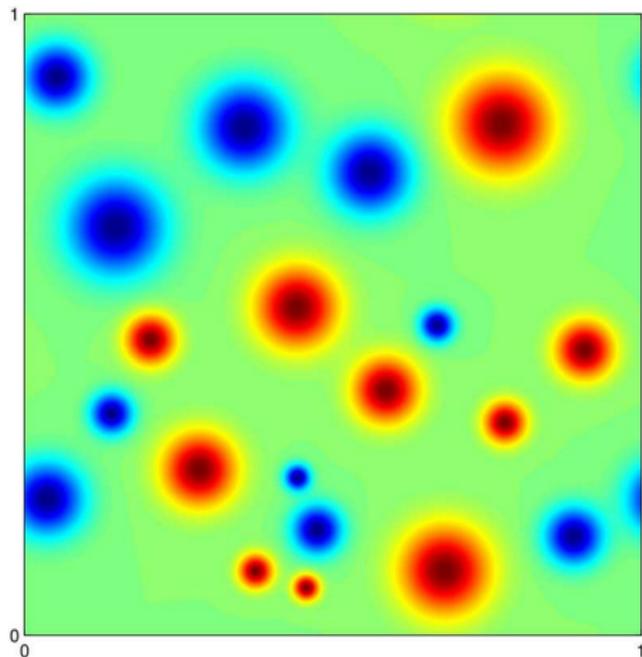
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{\omega, \psi\} = \mu_{2n} \nabla^{2n} \omega,$$

с периодическими граничными условиями на сетке  $2048 \times 2048$  где  $\psi$  - функция тока,  $n = 3$  и  $\mu_6 = 10^{-20}$ . В нашем случае энергия уменьшалась меньше **0.002%** .

## Численный эксперимент

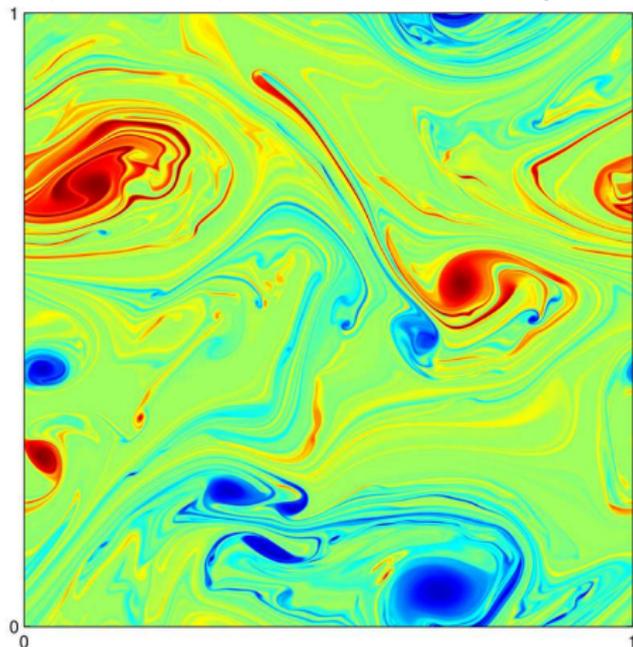
Временной масштаб =  $\omega_0^{-1}$  - величина, обратная максимальному значению завихренности.

Рис.1. Начальное распределение



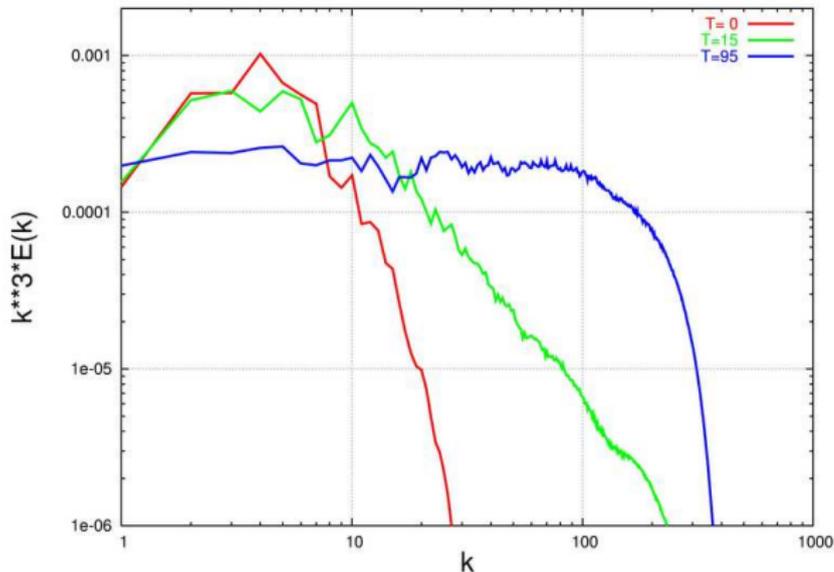
## Численный эксперимент

Рис.2. Завихренность при  $n = 95$ , соответствующим 10 периодам вращения. Максимум  $\omega_0 = 1$  и минимум  $\omega_0 = -1$ .



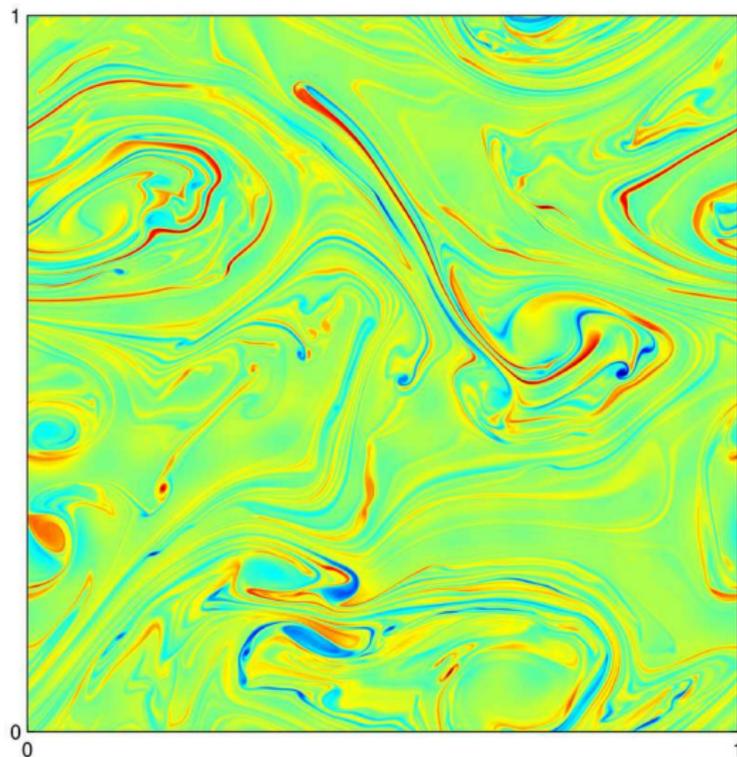
## Численный эксперимент

Рис.3. Скомпенсированный спектр  $k^3 E(k)$  в разные моменты времени.



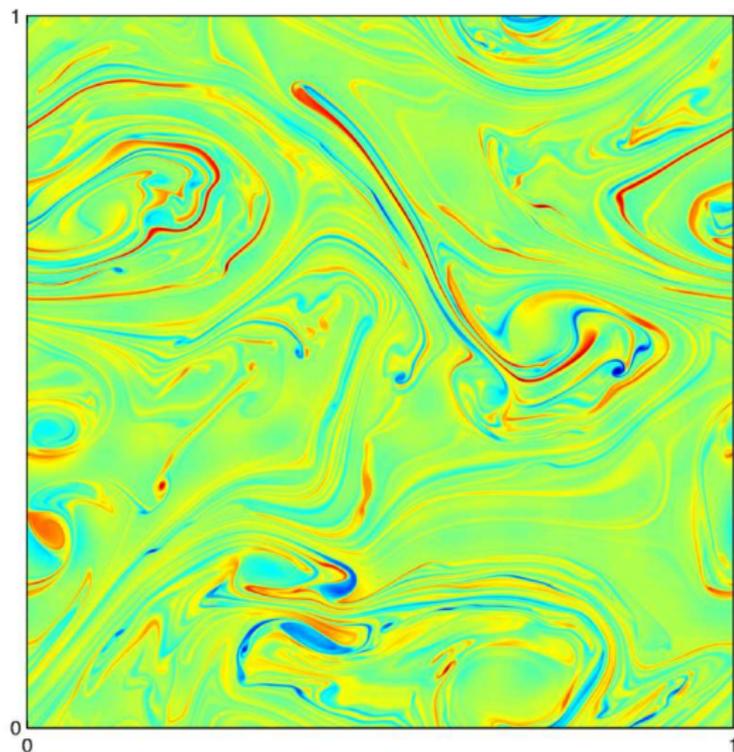
## Численный эксперимент

Рис.4.  $|V|$  при  $T = 95$ . Максимум (красный) соответствует 673.



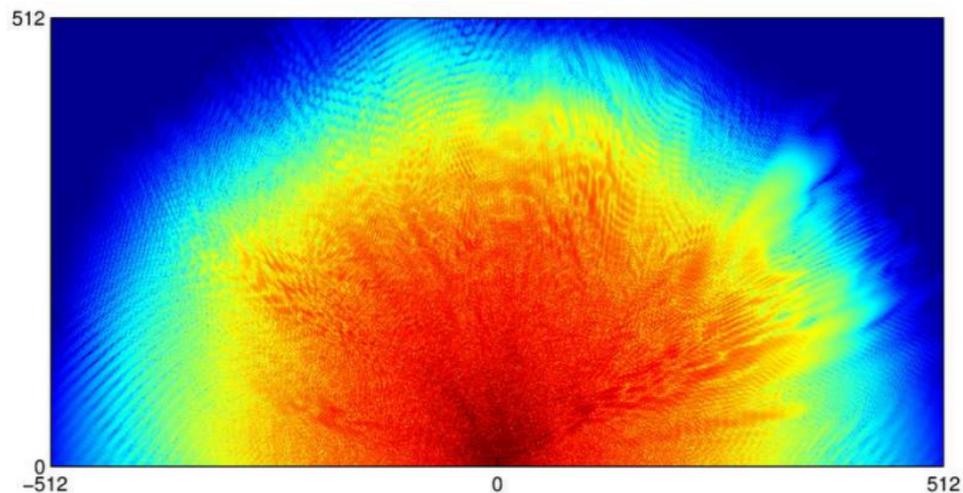
## Численный эксперимент

Рис.5. Отфильтрованное значение  $|B|$  для рис. 2,  $k > 10$ .



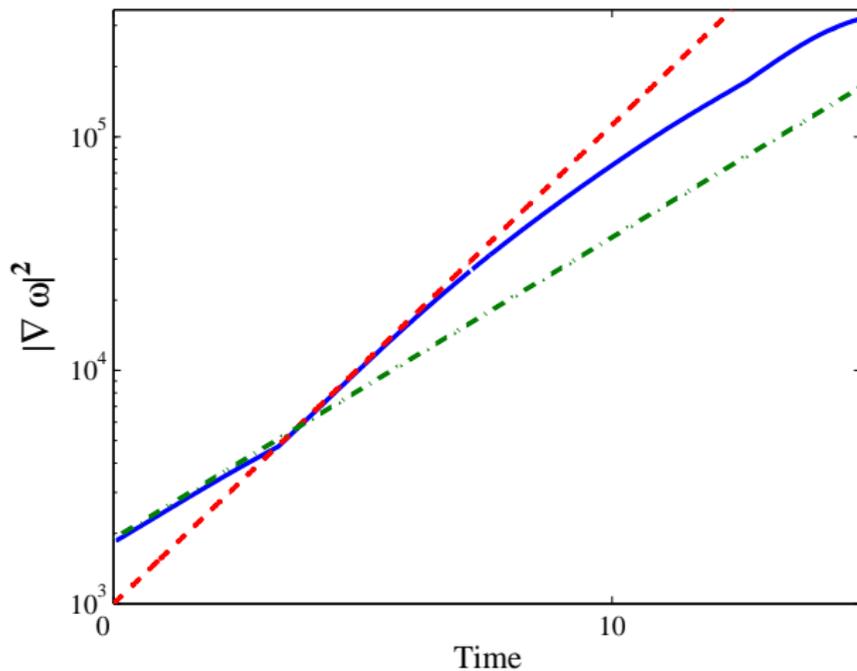
## Численный эксперимент

Рис.6. 2D спектр  $\epsilon(k_x, k_y)$ , логарифмическая шкала.



## Численный эксперимент

Рис.7. Временная зависимость максимума квадрата градиента завихренности.



## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

Рассмотрим расширяющуюся каустику, возникающую в результате опрокидывания (формирования ударной волны). Для расширяющейся каустики (см., например, Арнольд, "Теория катастроф")  $R_{\perp} \sim (t - t_0)^{1/2}$  и  $R_{\parallel} \sim (t - t_0)^{3/2}$ , так что

$$\frac{R_{\parallel}}{R_{\perp}} \sim (t - t_0) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow t_0.$$

На этой стадии каустики могут быть рассмотрены как плоские объекты в виде дисков со скачком плотности, зависящим только от  $r_{\perp}$ . При этом  $\Delta\rho$  плавно обращается в нуль при  $r_{\perp} = R_{\perp}$ .

## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

Для одной каустики, перпендикулярной оси  $x$  с центром в точке  $\mathbf{r}_0 = (x_0, \mathbf{r}_{\perp 0})$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \Delta \rho(|\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp 0}|) \delta(x - x_0) + \text{regular terms.}$$

Фурье от этой (сингулярной) части дается интегралом

$$\begin{aligned} \rho_k &= -\frac{i}{k_x} e^{-ikr_0} \int_{r_{\perp} \leq R} \Delta \rho(r_{\perp}) e^{-ik_{\perp} r_{\perp}} dr_{\perp} \\ &= -\frac{2\pi i}{k_x} e^{-ikr_0} \int_0^R r_{\perp} \Delta \rho(r_{\perp}) J_0(k_{\perp} r_{\perp}) dr_{\perp}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{k} = (k_x, \mathbf{k}_{\perp})$  и  $J_0(k_{\perp} r_{\perp})$  - функция Бесселя.

## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

Полный вклад от всех каустик дается суммой:

$$\rho_k = -2\pi i \sum_{\alpha} \frac{e^{-ikr_{\alpha}}}{\mathbf{k} \mathbf{n}_{\alpha}} \int_0^{R_{\alpha}} \Delta\rho(r_{\perp}) r_{\perp} J_0(k_{\perp\alpha} r_{\perp}) dr_{\perp}.$$

Здесь  $\mathbf{n}_{\alpha}$  - нормальный единичный вектор к разрыву  $\alpha$ ,  $\mathbf{r}_{\alpha}$  - координаты центра диска и  $k_{\perp\alpha}$  - поперечная проекция волнового вектора  $\mathbf{k}$  к плоскости диска ( $k_{\perp\alpha}^2 = k^2 - (\mathbf{k} \mathbf{n}_{\alpha})^2$ ).

## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

Чтобы найти спектр турбулентности нужно усреднить  $|\rho_k|^2$  по всем случайным переменным. Предполагая  $\mathbf{r}_\alpha$  распределенными однородно, усреднение по этим переменным дает

$$\overline{|\rho_k|^2} = 4\pi^2 n \left\langle \left| \frac{1}{k_{\parallel}} \int_0^R \Delta\rho(r_{\perp}) r_{\perp} J_0(k_{\perp} r_{\perp}) dr_{\perp} \right|^2 \right\rangle.$$

Здесь  $n$  - плотность разрывов,  $k_{\parallel} \equiv \mathbf{k}\mathbf{n}$ , угловые скобки означают усреднение по  $\Delta\rho$ ,  $R$  и углам.

## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

В коротковолновом пределе  $k_{\perp} \bar{R} \gg 1$  интеграл может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы, что дает (до усреднения по углам !)

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{k}) = \frac{4\pi n c_s^2}{\rho_0} \frac{\langle \Psi \rangle}{k_{\perp}^5 k_{\parallel}^2} \text{ if } \theta \geq \vartheta_0 = (k \bar{R})^{-1},$$

где  $\theta$  - угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$ ,

$$\Psi = R \left( \frac{d}{dr_{\perp}} \Delta \rho(r_{\perp}) \Big|_{r_{\perp}=R} \right)^2$$

## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

При малых  $\theta$  ( $\leq \vartheta_0$ ) спектр  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})$

$$\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{k}) \approx \frac{4\pi n c_s^2}{\rho_0} \frac{\langle \Gamma^2 \rangle}{k_{\parallel}^2},$$

где  $\Gamma = \int_0^R \Delta\rho(r_{\perp}) r_{\perp} dr_{\perp}$ .

Это выражение для спектра не справедливо вблизи  $\pi/2$ , где необходимо учитывать изгибы каустики.

Для углов, близких к конусу  $\theta \approx \vartheta_0$  and  $\pi - \theta \approx \vartheta_0$ , оба спектра сшиваются:  $\tilde{\epsilon}_1 \sim \tilde{\epsilon}_2$ .

В изотропной ситуации после усреднения по углам мы приходим к спектру КП:  $E(k) \sim k^{-2}$

## Анизотропные спектры Кадомцева-Петвиашвили

В анизотропной ситуации спектр будет иметь различное поведение в зависимости от соотношения между шириной  $\Delta\theta$  угловой функции распределения и  $\vartheta_0$ . Если  $\Delta\theta > \vartheta_0$ , то усреднение  $\tilde{\epsilon}(k)$  дает при больших  $k$  для спектра такое же поведение, что и для изотропного спектра КП:  $\sim k^{-2}$ . Для достаточно узких угловых распределений, т.е. если все фронты шоков выстроены вдоль одного направления, то спектр будет иметь резкий пик в данном направлении. Если ширина  $\Delta\theta$  углового распределения уже  $\vartheta_0$ , то спектр  $E(k, \theta)$ , с точностью до множителя  $k^2$ , будет повторять распределение  $\tilde{\epsilon}$ , т.е., распределение в  $k$ -пространстве будет иметь форму джетов. Внутри конуса  $\theta < \vartheta_0$  спектр имеет максимум, спадающий степенным образом при больших  $k$  как спектр КП  $\sim k_{\parallel}^{-2}$ . При больших углах,  $\theta > \vartheta_0$ , спектр  $E(k, \theta)$  будет быстро спадать в поперечном к джету направлении пропорционально  $k_{\perp}^{-5}$ .

## Заключение

- ▶ Для волн на воде спектр по частотам ( $\sim \omega^{-4}$ ) за счет каспов имеет такую же зависимость, что и СТ спектр Захарова-Филоненко, и может рассматриваться как его продолжение.
- ▶ Для двумерных (2D) спектров волн на воде:
  - i) в изотропном случае  $E(k) \sim k^{-4}$ , что сильно отличается от спектра Филлипса,
  - ii) спектр Филлипса может быть получен для сильно анизотропных распределений.

## Заключение

- ▶ Для 2D гидродинамической турбулентности в изотропном случае воспроизведен спектр Саффмана. Спектр типа Крейчнана получен в сильно анизотропном случае как промежуточная асимптотика при  $k < k^* = (L\Delta\theta)$  ; при  $k > k^*$  получены джеты с сужающейся угловой шириной.
- ▶ Численный эксперимент для 2D турбулентности (без накачки) показал, что степенное поведение спектра обязано резким градиентам завихренности.

## Заключение

- ▶ Для турбулентности акустического типа спектр при слабой анизотропии совпадает со спектром Кадомцева-Петвиашвили.
- ▶ В случае сильной анизотропии ( $\Delta\theta < \vartheta_0$ ) спектр имеет вид джетов со степенным убыванием внутри джета при больших  $k_{\parallel}$ , как для изотропного спектра КП, и в поперечном направлении как  $k_{\perp}^{-5}$ .