ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

ПРЕПРИНТ

Б.В.Чириков

ПРИМЕР СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

Сообщение на Международной конференции по ускорителям заряженных частиц, Дубна, август 1963 г.

Новосибирск
1963 г.

А н н о т а ц и я

На примере показано, что вынужденные колебания в нелинейных системах приводят к стохастической неустойчивости. Это явление может быть существенно в новых нелинейных ускорителях.

Цель настоящего сообщения - еще раз обратить внимание на специфический вид неустойчивости нелинейной системы - так называемую стохастическую неустойчивость. Этот тип неустойчивости следует иметь в виду, в частности, при разработке так называемых "нелинейных" ускорителей (см., например, /7/), которым в последнее время уделяется значительное внимание.

В работе приводятся некоторые результаты численного расчета колебаний нелинейного осциллятора без затухания под действием внешнего периодического возмущения. Движение осциллятора описывается точной системой разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n - \varepsilon\,\omega_n \operatorname{sign}(\psi_n - 1/2) \\ \psi_{n+1} &= \left\{ \psi_n + \omega_{n+1} + \frac{\varepsilon}{4} - \varepsilon \left| \psi_n - 1/2 \right| \right\} \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Уравнения получились разностными вследствие того, что внешнее возмущение выбрано в виде очень коротких толчков, относительная величина которых характеризуется параметром ε. Сведение дифференциальных уравнений к разностным дает возможность уменьшить ошибки счета до минимума, определяемого ошибками округления, что оказывается существенным при исследовании поведения осциллятора в течение больших промежутков времени.

В (I) $\omega(W)$ - частота, характеризующая в силу нелинейности энергию осциллятора; ψ - фаза колебаний, имеющая период I; индекс n - номер толчка; скобки $\{\ \}$ означают дробную часть аргумента.

Результаты интегрирования системы (I) приведены на рис.I для двух значений характерного параметра $\varepsilon\omega$. При $\varepsilon\omega \ll 1$ и $\omega_0 - k \ll 1$ ($k \neq 0$, целое) разностные уравнения могут быть приближенно заменены дифференциальными /I/

$$\begin{aligned} \omega' &\approx -\varepsilon\omega\, v(\psi) \\ \psi' &\approx \omega - k \end{aligned} \qquad (2)$$

где $v(\psi)$ - ступенчатая функция с единичной амплитудой, а дифференцирование производится по n. Система (2) преобразуется к фазовому уравнению:

$$\psi'' + \varepsilon\omega\, v(\psi) \approx 0 \qquad (3)$$

из которого видно, что частота (и энергия) осциллятора совершает ограниченные, в рассматриваемом приближении, так называемые фазовые колебания с частотой и амплитудой $\sim \sqrt{\varepsilon\omega}$. Вопрос о строгой (при $t \to \infty$) ограниченности решения точной системы (I) при $\varepsilon\omega \ll 1$ является весьма сложным. Из работ /2,3/ можно сделать такой вывод, однако, это строго не доказано. Результаты настоящего расчета также подтверждают этот вывод. На рис.I отложены значения частоты осциллятора, усредненные по фазовым колебаниям (кривая 4). На протяжении почти миллиона колебаний никакой тенденции к систематическому изменению не наблюдается, а колебания не превосходят I %.

Совсем другой характер носит движение при $\varepsilon\omega \gg 1$ (кривая I). Всего за 5000 колебаний частота изменяется почти в три раза, хотя относительная интенсивность толчков (в пересчете на одно колебание) здесь в I6 раз меньше, чем в предыдущем случае. Согласно соображениям, высказанным в работах /4,5/, движение должно носить в этом случае стохастический характер или, как принято говорить в теории динамических систем, должно быть движением с перемешиванием.

Изменение частоты (и энергии) осциллятора в этом случае естественно описывать с помощью функций распределения $f(\omega, t)$, которая подчиняется при $\varepsilon \ll 1$ кинетическому уравнению типа Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\left(\omega^2 f\right) \tag{4}$$

При начальном и граничных условиях

$$\begin{aligned} f(\omega, 0) &= \delta(\omega - \omega_0) \\ f(\infty, t) &= f(0, t) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

решение (4) имеет вид:

$$f(\omega, t) = (4\pi\tau)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{\omega}{\omega_0} - \tau\right)^2}{4\tau}\right\} \tag{6}$$

$$\tau = \varepsilon^2 t/2$$

Количественная оценка стохастичности движения производилась путем сравнения среднего значения частоты $\overline{\omega}$ и среднеквадратичного разброса $\overline{(\Delta\omega)^2} = \overline{(\omega - \omega_0)^2}$ по результатам расчета со значениями этих величин из распределения (6). Данные сравнения представлены в таблице. Дополнительно представлены характеристики распределения фаз ψ_n, которое для стохастического движения должно быть равномерным.

Из результатов настоящей работы видно, что граница устойчивости соответствует $\varepsilon\omega \sim 1$. Таким образом подтверждается общий критерий стохастичности, полученный в работах /4,5/. Повидимому, впервые критерий неустойчивости такого типа был получен еще в /6/ в результате численных расчетов, однако, насколько нам известно, исследование обнаруженной неустойчивости не производилось и связь ее со стохастичностью не рассматривалась. В наших обозначениях критерий неустойчивости /6/ имеет вид $\varepsilon\omega > \pi$. Следует заметить, что в общем случае резкой границы по параметру $\varepsilon\omega$ не существует. При $\varepsilon\omega \sim 1$ в зависимости от начальных условий могут возникать движения различных типов, в том числе и чисто резонансные /5/.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В.М.Лагунову и В.С.Сынаху за помощь в расчетах.

Литература

1. Б.В.Чириков. ДАН, 125, 1015 (1959).
2. А.Н.Колмогоров. ДАН, 98, 527 (1954).
3. В.И.Арнольд. ДАН, 137, 255 (1961).
4. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630 (1959).
5. Б.В.Чириков. Диссертация, ИЯФ СО АН СССР, 1959 г.
6. М.Хайн. Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону на 20-25 Бэв с сильной фокусировкой, 1953 г.
7. Ю.Ф.Орлов. ЖЭТФ, 43, 1308 (1962).

Таблица

№ варианта	ω_0	ε	$\varepsilon\omega_0$	N	η	$\left(\overline{\eta^2}\right)_T^{\frac{1}{2}}$	ξ	$\left(\overline{\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\overline{\xi^2}\right)_T^{\frac{1}{2}}$	$\overline{\psi}-\frac{1}{2}$	$\left[\overline{(\Delta\psi)^2}\right]_T^{\frac{1}{2}}$	Число случаев
I.	64	I/8	8	500	+0,I7	0,II	+0,4I	5,7	0,63	-	-	II
2.	64	I/8	8	I000	+0,I7	0,23	-0,49	0,67	I,20	-	-	5
3.	7000	0,0I	70	$3{,}5\cdot 10^6$	-0,08	0,04	-0,22	3,4	0,74	0,0I	0,05	40
4.	7000	0,0I	70	$7\cdot 10^6$								

$$\eta = \frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}_T} - 1; \quad \overline{\eta}_T = 0; \quad \xi = \frac{\overline{(\Delta\omega)^2}}{\overline{(\Delta\omega)^2_T}} - 1; \quad \overline{\xi}_T = 0; \quad \Delta\omega = \omega - \overline{\omega}_T; \quad \Delta\psi = \psi - 1/2$$

Индекс указывает на теоретическое значение. Величины без индекса получены в результате численного счета.

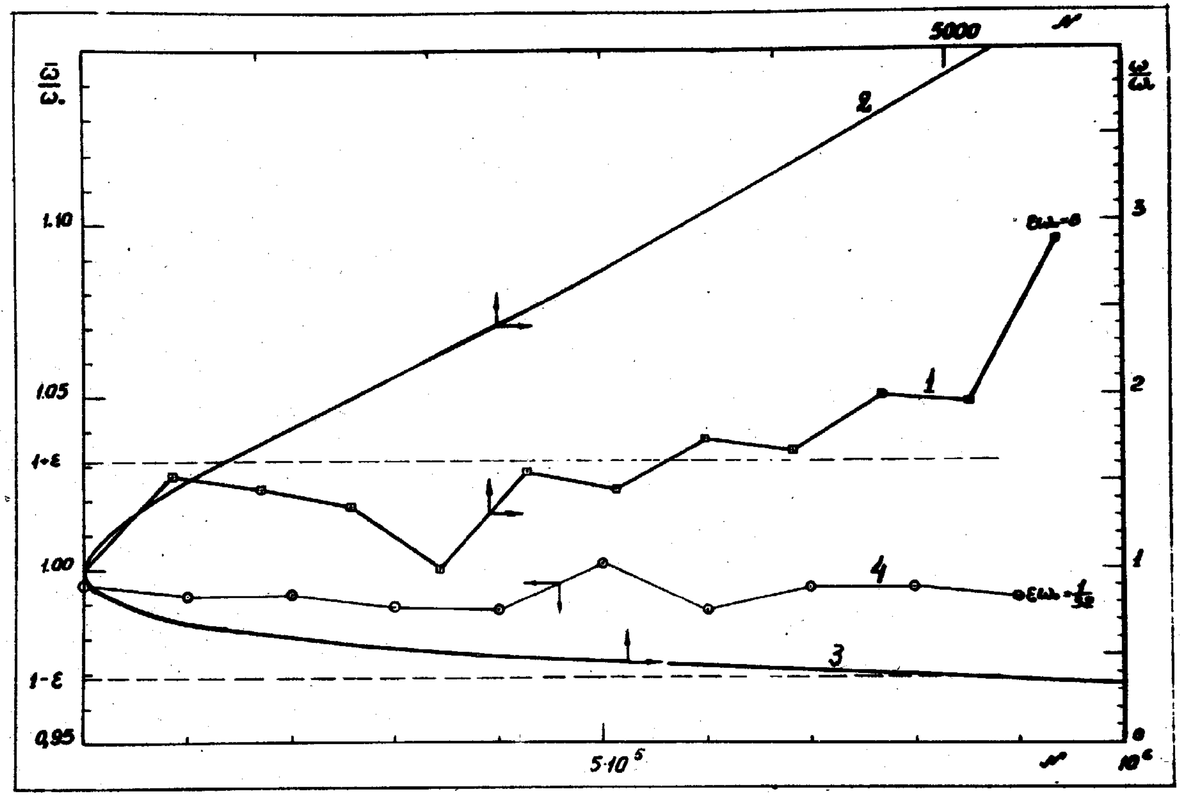

Рис.I. Пример стохастической неустойчивости нелинейных колебаний: $\omega(W)$ - частота нелинейного осциллятора, зависящая от его энергии; N - число колебаний осциллятора; кривая I - движение осциллятора при $\omega_0 = 64$; $\varepsilon = 1/8$; $\psi_0 = 1/4$; 2,3 - среднее изменение частоты при стохастическом движении; 4 - движение осциллятора при $\omega_0 = 1$; $\varepsilon = 1/32$; $\psi_0 = 1/4$. Пунктиром показана величина одиночного толчка в последнем случае.

Ответственный за выпуск Г.Б.Глаголев
Подписано к печати 28/VIII-64 г.,
Формат бумаги 270 х 190, тираж 250 экз.
Заказ № 040 бесплатно.

Отпечатано на ротопринте в Институте
ядерной физики СО АН СССР.