

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

Ф.М.ИЗРАЙЛЕВ, Б.В.ЧИРИКОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

Г.Новосибирск - 1965

B.V.Chirikov, F.M.Israelev.

### Statistical Properties of Nonlinear String

The qualitative behavior of motion of nonlinear string with fixed ends obeing equation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \left( 1 + 3\beta \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 \right) \quad (I)$$

is investigated;  $X$  being longitudinal displacement of string at the point with co-ordinate  $z$ ;  $\beta$  stands for a parameter of nonlinearity. The model of  $(N-1)$  masses connected with nonlinear springs is used following the original work by Fermi, Pasta, Ulam /1/. An estimation is obtained for critical value of the nonlinearity's parameter ( $\beta_{kp}$ ) as follows

$$3\beta_{kp} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 \sim \begin{cases} \frac{3}{K} ; & K \ll N \text{ (continious string)} \\ \frac{3N^2}{N^2} \cdot \left( \frac{K}{N} \right)^2 ; & K \approx N \text{ (highest modes of the model)} \end{cases} \quad (II)$$

This critical value separates the region of so-called Kolmogorov's stability (quasi-periodical motion just observed in /1/ ) from the region of stochasticity (ergodicity, mixing and positive Kolmogorov's entropy /7/ ). It is important for stochasticity to have high enough modes initially excited (large  $K$  in (II)). An only case satisfies this condition in /1/ ( $K=7$ ,  $N=32$ ) and it appears to show some features of imperfect stochasticity (see Fig.5 in this paper reproduced from /1/ as well as Fig.4; the latter demonstrates the Kolmogorov's stability).

It is found that stochasticity initially arised in some modes of the string is spreading all the time to higher modes, and in such a way that the lowest mode ( $K_{min}$ ) still stochastic is connected with the highest mode ( $K_{max}$ ) stochastic at the time as follows;  $K_{min} \sim K \sqrt{K_{max}}$  where  $K$  stands for the mode's number on the boundary of stochasticity (II).

A brief discussion of general properties of similar systems with so-called separated phase space is given in connection with theorems of Poincare /21/ and Fermi /22/, and probable generalization of routine theory of dynamical systems.

В работе исследуется качественное поведение продольных колебаний нелинейной струны с закрепленными концами (рис.1), подчиняющейся уравнению

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left[ 1 + 3\beta \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Эта задача была рассмотрена впервые в работе Ферми, Паста и Улама /1/ методом численного интегрирования для цепочки нелинейных осцилляторов (рис.1) приближенно представляющих струну и подчиняющихся следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_e = (x_{e+1} + x_{e-1} - 2x_e) \left\{ 1 + \beta \left[ (x_{e+1} - x_e)^2 + (x_e - x_{e-1})^2 + (x_{e+1} - x_e)(x_e - x_{e-1}) \right] \right\}^{(2)}$$

$$e = 1, 2, \dots, N-1; \quad a = 1; \quad L = N$$

Целью работы /1/ было проследить появление статистических свойств на таком, сравнительно простом примере механической системы с большим числом степеней свободы. В линейном случае ( $\beta = 0$ ) цепочка осцилляторов может быть представлена в виде набора  $N-1$  полностью независимых мод (нормальных колебаний), и, следовательно, не имеет никаких статистических свойств. До недавнего времени предполагалось (см. например /2/), что для появления статистических свойств достаточно любой, сколь угодно малой, нелинейности. Поэтому авторы /1/ ожидали, что начальная энергия системы (2), сосредоточенная только в первой (наинизшей) моде, распределится с течением времени приблизительно равномерно между всеми

модами. Однако, численное решение (2) привело к прямо противоположной картине: во-первых, обмен энергией происходил только между несколькими первыми модами, во-вторых, что еще более существенно, обмен энергией носил квазипериодический характер, так что через определенный относительно короткий промежуток времени, вся энергия вновь собиралась в первой моде с точностью до нескольких процентов. Дальнейшие вычисления, сделанные Таком показали, что для значительно более длинных промежутков времени квазипериодический характер движения становится еще более определенным, в частности, возвращение всей энергии в первую моду происходит со значительно большей точностью.<sup>х)</sup>

Эти результаты заставили авторов /1/ высказать предположение о существовании своего рода новых нормальных координат ( квазимод) для нелинейных систем ( см. также /3/).

Приблизительно в это же время в работах Колмогорова и Арнольда ( см., например, /4,5/) было аналитически доказано сохранение квазипериодического характера движения механической системы при достаточно малом, но конечном возмущении. Правда, теория Колмогорова-Арнольда неприменима непосредственно к системе (2), так как эта система является линейной в нулевом приближении ( $\beta=0$ ), однако можно сделать соответствующее обобщение. Таким образом, с современной точки зрения результат /1/ является естественным.

С другой стороны при достаточно большом нелинейном возмущении и для достаточно большого  $N$  у системы (2) должны, по-видимому, появиться рано или поздно статистические свойства, как это следует из хорошо известного факта применимости статистической механики к любой системе с большим числом степеней свободы ( см. также /6/). Следовательно, должно существовать некоторое критическое значение возмущения ( $\beta_{кр}$ ), соответствующее границе между областью квазипериодического движения и областью стохастичности. Последним термином мы будем обозначать наиболее существенные статистические свойства — эргодичность, сильное перемешивание и, самое главное, поло —

<sup>х)</sup> Авторы признательны профессору Уламу за сообщение этих интересных подробностей.

жительную энтропию по Колмогорову /7/, что означает физически экспоненциальное убывание временных корреляций в системе. Область квазипериодического движения будем называть в дальнейшем областью колмогоровской устойчивости, поскольку с точки зрения механической системы движение в этой области максимально устойчиво. — имеется полный набор  $N-1$  интегралов движения. Между тем в области стохастичности имеется всего один интеграл движения — энергия, так что это есть область максимальной неустойчивости. Таким образом критическое значение возмущения  $\beta_{кр}$  определяет границу так называемой стохастической неустойчивости, наиболее существенной для нелинейной системы /6,10/.

Целью настоящей работы является оценка границы стохастической неустойчивости для системы осцилляторов (2).

## § I. Основные соотношения

Прежде всего в уравнениях (2) перейдем к нормальным ( для линейного случая) координатам по формулам:

$$x_e = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin \frac{\pi k e}{N} \quad (I.1)$$

В результате громоздких выкладок получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = & -\frac{\beta}{8N} \left\{ \sum_{i+j=2}^{k-1} A_{ij}^+ Q_{k-i-j} \omega_{k-i-j}^2 + \sum_{i+j=N-k+1}^{2N-k-1} A_{ij}^+ Q_{2N-i-j-k} \omega_{2N-i-j-k}^2 + \right. \\ & + \sum_{i+j=2}^{N-k+1} A_{ij}^+ Q_{i+j+k} \omega_{i+j+k}^2 - \sum_{i+j=N+k+1}^{2N+2} A_{ij}^+ Q_{2N+k-i-j} \omega_{2N+k-i-j}^2 - \left. \sum_{i+j=k+1}^{k+N-1} A_{ij}^+ Q_{i+j-k} \omega_{i+j-k}^2 \right\} \end{aligned} \quad (I.2)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i+j=2N-k+1}^{2N-2} A_{ij}^{+} Q_{i+j+k-2N} \omega_{i+j+k-2N}^2 + 2 \sum_{i-j=k-1}^{k-N+1} A_{ij}^{-} Q_{k-i+j} \omega_{k-i+j}^2 + \\
& + 2 \sum_{i-j=N-k+1}^{N-2} A_{ij}^{-} Q_{2N-k-i+j} \omega_{2N-k-i+j}^2 - 2 \sum_{j-i=k+1}^{N-2} A_{ij}^{-} Q_{j-i-k} \omega_{j-i-k}^2 \}
\end{aligned}$$

где  $i, j, k = 1, 2, \dots, N-1$  (I.3)

а величины  $A_{ij}^{\pm}$  даются выражениями:

$$\omega_k = 2 \sin \frac{\pi k}{2N}$$

$$A_{ij}^{\pm} = Q_i Q_j \omega_i \omega_j \left[ 3 \sqrt{(4 - \omega_i^2)(4 - \omega_j^2)} \pm \omega_i \omega_j \right] \quad (I.4)$$

Уравнения (I.2) могут быть представлены в форме:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = - \frac{\beta}{8N} \sum_{p,q,s=1}^{N-1} B_{pqs} Q_p Q_q Q_s \quad (I.5)$$

Выделим теперь из этой суммы члены  $\sim Q_k Q_i^2$  и перенесем их в левую часть:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left( 1 + \frac{\beta}{8N \omega_k^2} \sum_{i=1}^{N-1} D_{ki} Q_i^2 \right) = - \frac{\beta}{8N} \sum_{(pqs)} B_{pqs} Q_p Q_q Q_s \quad (I.6)$$

где  $D_{ki}$  некоторые новые коэффициенты (см. ниже), а  $(pqs)$  означает сумму оставшихся членов. Смысл разделения суммы в (I.5) состоит в разном эффекте обеих частей. Члены в левой части (I.6) приводят к зависимости частоты нормальных осцилляторов как от своей амплитуды, так и от амплитуды других осцилляторов. Между тем оставшиеся члены в правой части (I.6) носят характер внешних сил с

разными частотами. Таким образом задача сведена к изучению движения нелинейного осциллятора вблизи многих резонансов.

Решение ищем в виде:

$$Q_n = C_n(t) \cos \theta_n(t); \quad \dot{\theta}_n = \omega'_n(t) \quad (I.7)$$

где  $C$ ,  $\omega'_n$  - медленноменяющиеся (при условии (2.12)) амплитуды и частоты нормальных колебаний; штрих указывает, что частота не равна своему значению в линейном приближении (I.3), а включает в себя все поправки, связанные с возмущением.

Используя (I.7) можно представить правую часть (I.6) в виде:

$$\sum_{(pqs)} B_{pqs} Q_p Q_q Q_s = \sum_m F_{km} \cos \theta_{km} \quad (I.8)$$

$$\dot{\theta}_{km} = \omega'_{km}$$

где  $\omega'_{km}$  - частоты внешних сил, действующие на осциллятор  $k$ .

Сумма в правой части равна:

$$\frac{1}{\omega_k^2} \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_{ki} Q_i^2 = 12 \sum_{i=1}^{N-1} Q_i^2 \omega_i^2 (2 - \omega_i^2) - 6 Q_k^2 \omega_k^2 (2 - \omega_k^2) +$$

$$+ 12 Q_{N-k}^2 \omega_{N-k}^2 + 6 Q_{N-k}^2 \frac{\omega_{N-k}^3}{\omega_k} \sqrt{(4 - \omega_k^2)(4 - \omega_{N-k}^2)} \quad (I.9)$$

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать, главным образом, граница стохастичности, когда возбуждено небольшое число мод, можно пренебречь в последнем выражении вкладом далеких мод ( $Q_{N-k} \approx 0$ ). Заметим далее, что сумма в (I.9) одинакова для всех осцилляторов (не зависит от  $k$ ), следовательно, она приводит к одинаковому сдвигу всех частот и в первом приближении не влияет на резонансы.

Это, видимо, возможно, если следовать заведением системы в некотором временном интервале.

$L_1 \psi = f$   
 $L_2 \psi + L_2 \psi = f$   
 $L_1 \psi + L_2 \psi = f$   
 ? почему в 1-ом приближении?

В итоге уравнение (I.6) преобразуется к следующему виду:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left\{ 1 - \frac{3\beta}{4N} \omega_k^2 (2 - \omega_k^2) Q_k^2 \right\} =$$

$$= \frac{\beta}{8N} \sum_m F_{km} \cos \theta_{km} \quad (I.10)$$

Рассмотрим вначале влияние одной резонансной гармоники в правой части (I.10). Применяя метод усреднения /8/, получим следующие уравнения в медленных переменных:

$$\dot{C}_k = \frac{\beta F_{km}}{16 \omega'_k N} \sin \Psi_{km}; \quad \Psi_{km} = \theta_{km} - \theta_k$$

$$\dot{\Psi}_{km} = \omega'_{km} - \omega'_k + \frac{\beta F_{km}}{16 C_k \omega'_k N} \cos \Psi_{km} \quad (I.11)$$

Предположим сначала, что можно пренебречь членом с  $F_{km}$  во втором уравнении (критерий этого будет дан ниже); дифференцируя его по времени и используя первое уравнение, получим так называемое фазовое уравнение:

$$\ddot{\Psi}_{km} = \frac{d\Omega_{km}}{dC_k} \cdot \frac{\beta F_{km}}{16 \omega'_k N} \sin \Psi_{km}, \quad \Omega_{km} = \omega'_{km} - \omega'_k \quad (I.12) \quad \neq \Psi_{km}$$

Из этого уравнения находим амплитуду колебаний  $\Psi_{km}$  определяющую размер сепаратрисы на фазовой плоскости ( $\Psi_{km}, \dot{\Psi}_{km}$ ) (см., например, /9/):

$$|\dot{\Psi}_{km}|_{\max} = \sqrt{\frac{\beta F_{km}}{4N \omega'_k} \cdot \frac{d\Omega_{km}}{dC_k}} \quad (I.13)$$

Отброшенный в (I.II) член характеризует ширину резонансной области, поэтому приближенное уравнение (I.I2) соответствует такому случаю, когда размер сепаратрисы много больше ширины резонанса, т.е.:

$$\xi \equiv \frac{\beta F_{km}}{8N\omega'_k C_k^2 d\Omega_{km}/dC_k} \ll 1 \quad (I.I4)$$

В действительности имеется много резонансов (I.I0)? Движение осциллятора в этом случае существенно зависит от соотношения между размером сепаратрисы и средним расстоянием между резонансами

$$\Delta\omega = \omega'_{km} - \omega'_{k,m+1} \quad (I.I5)$$

Если

$$\chi \equiv \frac{|\dot{\psi}_{km}|_{\max}^2}{(\Delta\omega)^2} \ll 1 \quad (I.I6)$$

можно пренебречь в первом приближении влиянием всех резонансов, кроме ближайшего. Тогда, как это видно из фазового уравнения (I.I2), движение носит характер устойчивых колебаний и обмен энергией между модами пренебрежимо мал

$$\left( \frac{\Delta C_k}{C_k} \right) \sim \left( \frac{\beta F_{km}}{8N\omega'_k C_k^2 d\Omega_{km}/dC_k} \right)^{1/2} = \xi^{1/2} \ll 1 \quad (I.I7)$$

в силу (I.I4). Это и есть колмогоровская устойчивость.

В обратном предельном случае ( $\chi \gg 1$ ), движение является стохастическим /I0,II/. Этот вывод нельзя считать строго

доказанным, скорее он является своеобразной эвристической гипотезой, основанной на качественных физических соображениях и подтвержденной на частных примерах /10,11/. Интересующая нас граница стохастичности определяется оценкой:

$$\chi = \frac{\beta F_{km}}{4N\omega'_k(\Delta\omega)^2} \cdot \frac{d\Omega_{km}}{dC_k} \sim 1 \quad (1.18)$$

Подчеркнем, что в действительности не существует резкой границы между обеими областями, которые скорее следует рассматривать как предельные случаи. В действительности, имеется целая переходная область ( $\chi \sim 1$ ), движение в которой имеет очень сложный характер и существенно зависит от начальных условий /10,11/.

Если условие (1.14) не выполняется ( $\xi \geq 1$ ), простое фазовое уравнение (1.12) перестает быть справедливым. Тем не менее можно показать /10,11/, что граница стохастичности по-прежнему определяется оценкой (1.18). Это связано с тем, что большой член  $(\beta F_{km}/16C_k\omega'_kN) \cos\psi_{km}$  выражает линейные свойства системы и потому не может сам по себе привести к стохастичности. Стохастичность может быть связана только с нелинейностью ( $d\Omega_{km}/dC_k \neq 0$ ). Вследствии этой нелинейности происходит изменение частоты  $\sim (d\Omega_{km}/dC_k)\dot{C}_k t$ , где  $t$  - характерное время взаимодействия. Сдвиг частоты приводит к дополнительному сдвигу фазы на величину  $\Delta\psi_{km} \sim (d\Omega_{km}/dC_k)\dot{C}_k t^2$  зависящую от начальной фазы. При  $\Delta\psi_{km} \geq 1$  временная корреляция между фазами нарушается, что и приводит к стохастичности. Полагая  $t \sim (\Delta\omega)^{-1}$  (1.15), т.е. порядка квазипериода возмущения, получим оценку (1.18). Заметим, что в случае  $\xi \geq 1$  обмен энергией между модами уже не является малым (1.17). Тем не менее, если нелинейность достаточно мала ( $\chi \ll 1$ ) движение будет носить и в этом случае квазипериодический характер. Сильный обмен энергией между модами означает, что "истинные" нормальные колебания существенно отличаются от невозмущенных. Именно такая ситуация и имела место в работе /1/.

## § 2. Н и з ш и е м о д ы ( $K \ll N$ )

В этом предельном случае, заменяя в (I.2) суммирование интегрированием, можно получить для  $F_{km}$  оценку:

$$F_{km} \sim 16\pi^4 (\Delta K) \left(\frac{K}{N}\right)^4 \langle C^3 \rangle \quad (2.1)$$

где величина  $\langle C^3 \rangle$  означает некоторую кубическую комбинацию амплитуд тех мод, которые участвуют в образовании частоты  $\omega_{km}$ ;  $\Delta K$  - интервал возбужденных мод.

Поправка к частоте  $K$ -й моды за счёт нелинейности получается применением к уравнению (I.10) стандартной техники усреднения /8/ и равна:

$$\omega_K \rightarrow \omega_K - \frac{9}{32} \frac{\beta}{N} \omega_K^3 (2 - \omega_K^2) C_K^2 \quad (2.2)$$

Отсюда получаем для  $\Omega_{km}$  оценку <sup>x)</sup>:

$$\Omega_{km} \sim \frac{9}{16} \frac{\beta}{N} \left(\frac{K}{N}\right)^3 \langle C^2 \rangle; \quad \frac{d\Omega_{km}}{dC_K} \sim \pi^3 \frac{\beta}{N} \left(\frac{K}{N}\right)^3 \langle C \rangle \quad (2.3)$$

Резонансные частоты равны

$$\omega_{km} = 2 \sin \frac{\pi(k+2m)}{2N} \quad (2.4)$$

$$\pm m = 0, 1, 2, \dots$$

<sup>x)</sup> Обращение  $d\Omega_{km}/dC_K$  в нуль при  $\omega_K = 2$  ( $K = N/2$ ) является следствием пренебрежения в (I.9) членами с  $Q_{N-K}$ , что недопустимо при  $K \approx N/2$ ; при учёте этих членов оценка для  $d\Omega_{km}/dC_K$  не изменяется по порядку величины.

Множитель 2 перед  $m$  связан с тем, что в случае кубической нелинейности (2), сохраняющей симметрию взаимодействия относительно знака смещения, взаимодействуют только моды одинаковой чётности (через одну). Среднее расстояние между соседними резонансами из (2.4) равно

$$\Delta \omega \sim \frac{2\pi}{N} \quad (2.5)$$

Подчеркнем, что это именно среднее расстояние, так как частоты (2.4) существенно смещаются за счёт нелинейных эффектов; поэтому в зависимости от начальных условий локальные расстояния между резонансами могут изменяться. Подставляя все эти выражения в (I.18), получим

$$\sqrt{\chi} \sim 20 \beta \langle c^2 \rangle \sqrt{\Delta k} \left( \frac{k}{N} \right)^3 \sim 1 \quad (2.6)$$

Выразим последнее условие через безразмерную характеристику нелинейного возмущения (2):

$$\beta \left[ (x_{e+1} - x_e)^2 + (x_e - x_{e-1})^2 + (x_{e+1} - x_e)(x_e - x_{e-1}) \right] \approx 3 \beta \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \quad (2.7)$$

поскольку  $z = \ell a = \ell$  (2). Последнее выражение перестаёт быть справедливым для самых высоких мод, однако, равенство по порядку величины сохраняется. Нам остаётся теперь выразить амплитуду возбужденных мод через смещение струны (I. I,7):

$$x_e = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_k C_k \cos \theta_k \sin \frac{\pi k \ell}{N} \quad (2.8)$$

Возводя в квадрат и усредняя по  $\theta_k(t)$  и  $\ell$ , получим:

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_k C_k^2}{2(N-1)} \quad (2.9)$$

Максимальное значение  $x_m$  можем оценить по формуле<sup>x)</sup>:

$$x_m^2 \approx 4 \overline{x^2} \approx \frac{2 \langle C^2 \rangle \Delta k}{N-1} \quad (2.10)$$

Используя (2.6, 10) и вычисляя  $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_m = x_m \frac{\overline{C_k}}{N}$ , получим окончательную оценку для границы стохастичности:

$$3\beta_{кр} \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_m^2 \sim 3 \frac{\sqrt{\Delta k}}{k} \quad (2.11)$$

В таком виде эта оценка применима и для однородной струны (не зависит от  $N$ ).

Все рассмотрение резонансов в нелинейной системе справедливо при условии малости возмущения (I.II)

$$\xi \equiv \frac{\beta F_{km}}{16 N C_k \omega_k'^2} \sim \beta \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_m^2 \ll 1 \quad (2.12)$$

### § 3. В ы с ш и е м о д ы ( $k \approx N$ )

Аналогично предыдущему случаю получаем следующие оценки для резонансных возмущений:

$$F_{km} \sim 80 \langle C^3 \rangle \quad (3.1)$$

нелинейности (2.2):

---

<sup>x)</sup> Предполагается, что все  $C_k$  одного порядка, см. §4.

$$\frac{d\Omega_{km}}{dC_k} \sim \frac{9\beta \langle C \rangle}{N} \quad (3.2)$$

резонансных частот:

$$\omega_{km} = 2 \cos \frac{\pi}{2N} \sqrt{(k-N)^2 + 2m} \quad (3.3)$$

$$\pm m = 0, 1, 2, \dots$$

и среднего расстояния между резонансами:

$$\Delta \omega \sim \frac{\pi^2}{2N^2} \quad (3.4)$$

Соотношение (2.10) не изменяется, поэтому для границы стохастичности получаем оценку:

$$3\beta_{cr} \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_m^2 \sim \frac{3\epsilon^2 \Delta k}{N^2} \left( \frac{k}{N} \right)^2 \quad (3.5)$$

Пусть в начальный момент возбуждена лишь одна мода с номером  $k$ . Рассмотрим самое начало возникновения стохастичности, когда обмен энергией происходит лишь между несколькими соседними модами. Тогда можно положить  $\Delta k \sim 1$  и мы получим картину, представленную на рис.2. Сплошные прямые изображают границу стохастичности (в двойном логарифмическом масштабе), а пунктирная кривая представляет попытку грубой интерполяции между ними; кружки — результаты численного счёта для двух случаев кубической нелинейности согласно /1/. Интересно отметить, что первый случай лежит далеко в области колмогоровской устойчивости, несмотря на большое значение  $\beta = 8$ , так как вначале возбуждена наинизшая мода ( $k = 1$ ). Результаты численного счёта показывают в этом случае явно выраженную квазипериодичность (рис.4)<sup>х)</sup>. Второй случай лежит вблизи границы стохастичности,

х) рисунок 4 взят из работы /1/.

хотя значение  $\beta = 1/16$  очень мало, но зато возбуждена седьмая мода (единственный раз!). Картина колебаний в этом случае очень мало похожа на квазипериодическое движение и скорее напоминает недоразвитую стохастичность (рис. 5)<sup>х)</sup>. Квазипериод должен был бы составлять в этом случае  $\sim 8000$  циклов (5.1).

#### § 4. Распространение стохастичности

Как было отмечено выше, оценки (2.11) и (3.5) указывают границу возникновения стохастичности. Рассмотрим теперь распространение её на соседние моды. Ограничимся случаем  $K \ll N$  (непрерывная струна). Воспользуемся для оценки соотношением (2.6). Если интервал стохастических мод  $\Delta K$  достаточно большой, то амплитуды нормальных колебаний  $C_K$  уже нельзя считать одинаковыми. В силу стохастичности одинаковыми должны быть энергии мод ( в среднем):

$$W_K = \frac{C_K^2 \omega_K^2}{2} \sim \frac{W_0}{\Delta K} \quad (4.1)$$

где  $W_0$  — полная энергия колебаний. Критерий (2.6) переписется в виде:

$$\frac{40\beta}{\omega^2} \cdot \frac{W_0}{N} \cdot \frac{K}{\sqrt{\Delta K}} \sim 1 \quad (4.2)$$

Так как  $K/\sqrt{\Delta K}$  растёт с увеличением  $K$ , то правый край  $K_{\max}$  интервала  $\Delta K$  всегда будет находиться в области стохастичности и, следовательно, стохастичность будет все время распространяться на еще более высокие моды. Между тем левый край ( $K_{\min}$ ) в конце концов окажется на границе стохастичности и затем перейдет в область колмогоровской устойчивости. Как будет происходить после этого обмен энергией между модами вблизи  $K_{\min}$ ? По-видимому,

---

х) рисунок 5 взят из работы /1/.

энергия будет, в среднем, переходить в более высокие моды. Механизм такого процесса может быть следующим: в результате обмена энергией моды  $\sim K_{\min}$  могут передать свою энергию высшим модам, обратная же передача будет затруднена, так как граница стохастичности ( $K_{\min}$ ) является для диффузии энергии по модам своеобразной отражающей стенкой /II/.

Оценку (4.2) можно переписать для левого края интервала в виде:

$$\frac{K_{\min}}{\sqrt{K_{\max} - K_{\min}}} \sim K_0. \quad (4.3)$$

где  $K_0$  - номер возбужденной моды, соответствующей границе возникновения стохастичности ( $\Delta K \sim 1$ ).

Если стохастичность только что возникла, то  $K_{\min} \sim K_0$  и интервал  $\Delta K \sim 1$  остаётся узким пока  $K_{\min}$  не увеличится существенно, т.е. пока интервал  $\Delta K$  не сдвинется далеко в сторону высших мод. Из (4.3) имеем:

$$\Delta K \sim \left( \frac{K_{\min}}{K_0} \right)^2 \quad (4.4)$$

Когда  $K_{\min} \gg K_0$  интервал существенно расширяется, причём его правый край движется значительно быстрее левого (4.3):

$$K_{\min} \sim K_0 \sqrt{K_{\max}} \quad (4.5)$$

## § 5. Заключительные замечания

Проделанные выше оценки (§§ 2,3) могут служить, по нашему мнению, основой для объяснения результата работы /I/. Желательна численная проверка положения границы стохастичности. В особенности интересно было бы посмотреть ожидаемое смещение стохастичности в

сторону высоких мод (§4). Альтернативное объяснение результатов /1/, выдвинутое Фордом /12/ и основанное на арифметических свойствах невозмущенных частот (1.3) (на их несоизмеримости, т.е. невозможности равенства  $\sum_k \omega_k n_k = 0$  для целых  $n_k$  не равных одновременно нулю), на наш взгляд неправильно. На недостаточность такого объяснения было указано также в /19/<sup>х</sup>). Тем более нельзя согласиться с далеко идущим предложением Форда вообще отказаться от требования эргодичности в статистической механике, заменив его определенным (и очень специальным) выбором начальных условий. В частности, в /12/ получено "равнораспределение" по энергии в системе линейных осцилляторов. Нетрудно видеть, что это "равнораспределение" полностью содержалось в специально подобранных начальных условиях, так как в линейном случае моды полностью независимы. Вообще все статистические свойства такой системы могут быть заданы только в виде начальных условий, само же движение системы не имеет никаких статистических свойств.

Обратим теперь внимание, что стохастичность, о которой шла речь в этой работе, является не совсем обычной с точки зрения теории динамических систем. Дело в том, что граница стохастичности зависит не только от параметров возмущения, но и от положения системы в фазовом пространстве, на поверхности постоянной энергии. Согласно оценкам этой работы только часть фазового пространства (область II, рис.2) является стохастической, тогда как остальная часть является областью колмогоровской устойчивости (I, рис.2). С точки зрения теории динамических систем (см., например, /13/) такое движение не является даже эргодическим (траектория не охватывает всю энергетическую поверхность). Тем не менее с физической точки зрения нам представляется вполне оправданным говорить о статистических свойствах системы в некоторой части фазового пространства. По-видимому, требуется обобщение обычных понятий теории динамических систем и статистической механики на подобные системы с разделенным фазовым пространством. Одним из возможных путей является ограничение времени движения таким обра-

<sup>х</sup>) Отметим, однако, что арифметические свойства частот могут играть известную роль в области колмогоровской устойчивости /4, 5/ (см. также ниже).

зом, чтобы траектория системы не успела дойти до границы стохастичности /I4/. При таком ограничении система обладает обычными статистическими свойствами. Другой путь, более удобный с практической точки зрения, состоит в том, чтобы рассматривать границу стохастичности как отражающую стенку в фазовом пространстве для функции распределения, характеризующей статистическое поведение системы /II/. Результаты /II/ показывают, что это возможно с некоторой степенью точности. Не исключено, однако, что не удастся сформулировать точные граничные условия хотя бы потому, что вместо резкой границы стохастичности существует целая переходная область с очень сложным характером движения.

Возможно, впрочем, что системы с разделенным фазовым пространством являются своеобразным исключением. Так, например, увеличивая нелинейность, можно, по-видимому, добиться такого положения, чтобы стохастичность распространялась на все моды (2.II), по крайней мере для конечного числа степеней свободы. Такого же результата можно достигнуть, если ввести жесткие столкновения между массами в цепочке (рис.I), как это было показано в работе /I5/ с помощью численного интегрирования уравнений движения. Такие столкновения играют роль кратковременной, но очень сильной нелинейности.

В работе /II/ исследован другой пример динамической системы с разделенным фазовым пространством — движение легкой частицы между колеблющимися тяжелыми стенками. Разделение фазового пространства существенно связано в данном случае с одномерностью движения. При переходе к большому числу измерений в аналогичных системах стохастичность распространяется на всю энергетическую поверхность /I6/.

Наконец, несколько слов о колмогоровской устойчивости. Сохранение квазипериодического характера движения, обнаруженное в /4,5/, означает сохранение полного набора однозначных интегралов движения, несмотря на возмущение. Эти интегралы, однако, не являются аналитическими. Отсюда следует, в частности, что теорема Пуанкаре /2I/ об отсутствии при некоторых (достаточно широких) условиях в нелинейной системе однозначных аналитических интегра-

лов движения, кроме энергии, не обязательно означает эргодичность такой системы. Следует, однако, иметь в виду, что абсолютная, или вечная ( для любого  $t$  ) устойчивость доказана в /4,5/ только для систем с двумя степенями свободы. При бóльшем числе степеней свободы существование однозначных интегралов движения возмущенной системы зависит от арифметических свойств невозмущенных частот. Поскольку с физической точки зрения арифметические свойства частот являются неопределенными ( например, различие между рациональными и иррациональными частотами не имеет смысла), то вопрос об абсолютной устойчивости систем с большим числом степеней свободы остаётся открытым. Имеется пример неустойчивости подобной системы /17/. В работах /18/ указан возможный механизм такой неустойчивости и дана оценка времени её развития. Для задачи, рассмотренной в настоящей работе, это время может быть очень грубо оценено как

$$\tau \sim T e^{\frac{1}{\varepsilon}} \sim 10^{11} T \quad (5.1)$$

$$T \sim \frac{4\pi}{\varepsilon \omega_k} \sim 9000 \text{ циклов}$$

Здесь  $T$  – квазипериод движения (рис.4), а  $\varepsilon$  – параметр малости возмущения согласно (2.12); численные значения  $\tau$ ,  $T$  даны для случая на рис.4. Таким образом, если такая неустойчивость и существует, она является чрезвычайно слабой и может играть роль лишь в исключительных случаях. В частности, вытекающая отсюда стохастичность приведет к столкновительному члену в кинетическом уравнении существенно иного типа ( и гораздо меньшей величины), чем обычный. Последний связан с "грубой" стохастичностью, типа рассмотренной в этой работе. Наличие слабой неустойчивости возможно означает справедливость теоремы Ферми /22/ об эргодичности, поскольку она относится к системам с числом степеней свободы больше двух<sup>х)</sup>.

х) Обсуждение значения теорем Пуанкаре, Ферми и Балеску /23/ в связи с эргодичностью имеется также в /20/.

Пользуемся случаем выразить глубокую благодарность профессору С.М.Уламу за любезное предоставление отчёта /I/ и Я.Г.Синаю за многочисленные полезные дискуссии.

# Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam, Studies of Nonlinear Problems I, Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955.
2. М.А.Леонтович, Статистическая физика, Гостехтеоретиздат, 1944.
3. S.m.Ulam, A Collection of mathematical Problems (Есть перевод: С.Улам. Нерешенные математические задачи, изд."Наука", 1964).
4. А.Н.Колмогоров, ДАН, 98, 527, 1954.
5. В.И.Арнольд, УМН, XIII, 91, 1963.
6. Н.С.Крылов. Работы по обосновании статистической физики, Изд. АН СССР, 1950.
7. А.Н.Колмогоров, ДАН, 119, 861 1958. — энтропия
8. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
9. Б.В.Чириков, ДАН, 125, 1015, 1959.
10. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630, 1959.  
Б.В.Чириков. Диссертация, 1959.
11. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, ДАН, 159, 306, 1964.
12. J.Ford, Journ. mathem. Phys., 2, 387 (1961),  
ibid, 4, 1293 (1963).

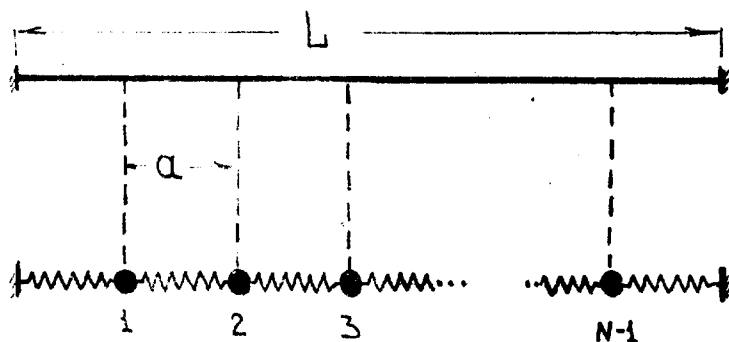


Рис.1. Струна с закрепленными концами;  $L$  - полная длина струны;  $a$  - размер участка, моделируемого одним осциллятором цепочки.

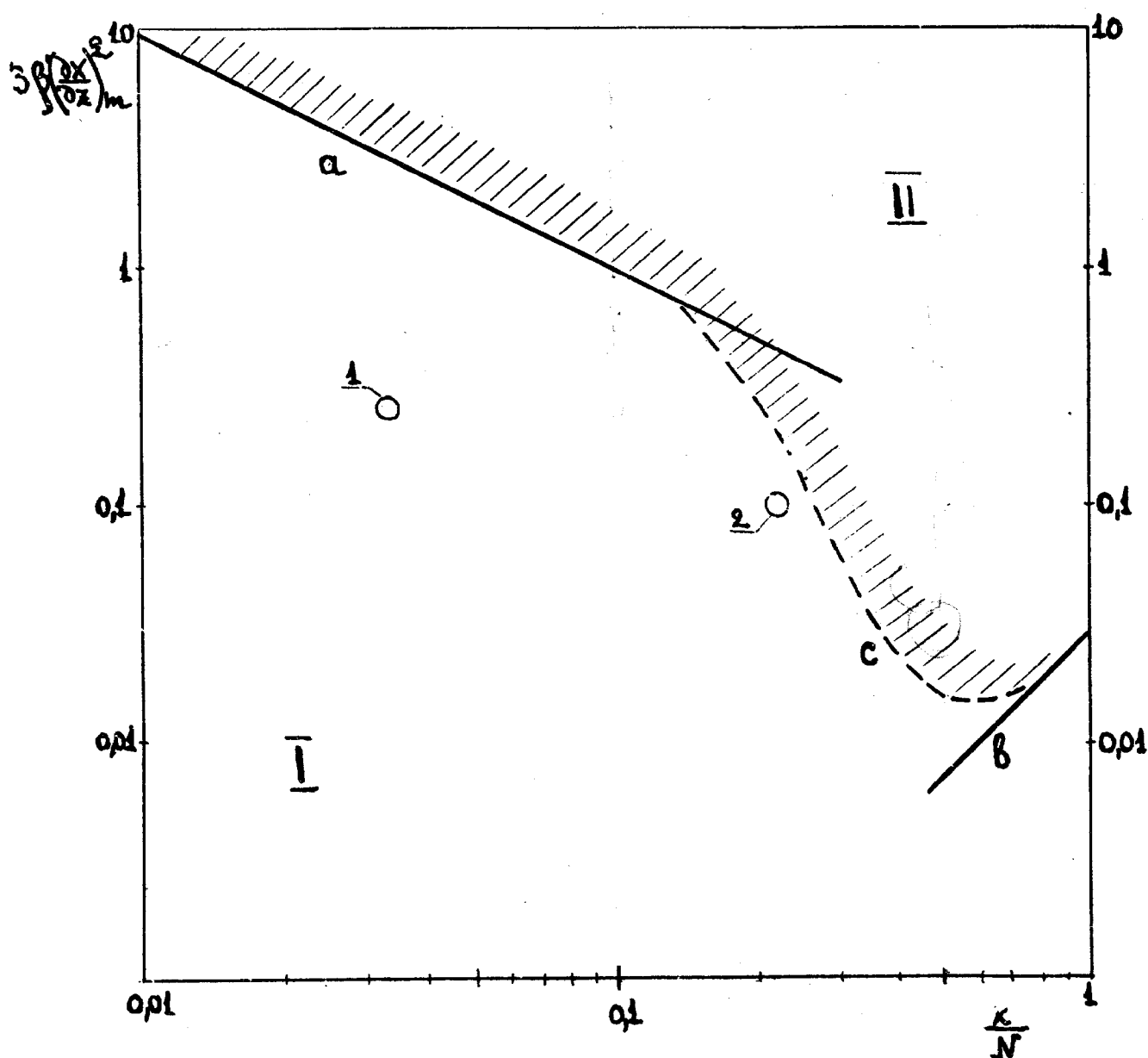


Рис.2. I - область колмогоровской устойчивости; II - область стохастичности  
 $a$  - граница стохастичности для  $\kappa \ll N$  (2.11)  $b$  - граница для  $\kappa \approx N$  (3.5);  $c$  - качественная интерполяция; численные значения при-  
 мых  $a, b$  даны для  $N = 32$ ; 1 - результат численного счёта для  $N = 32$ ;  $x_m = 1$ ;  $\kappa = 1$ ;  $\beta = 8/11$ ; 2 - тоже самое для  $\kappa = 7$  ;  
 $\beta = (1/16)/11$ .

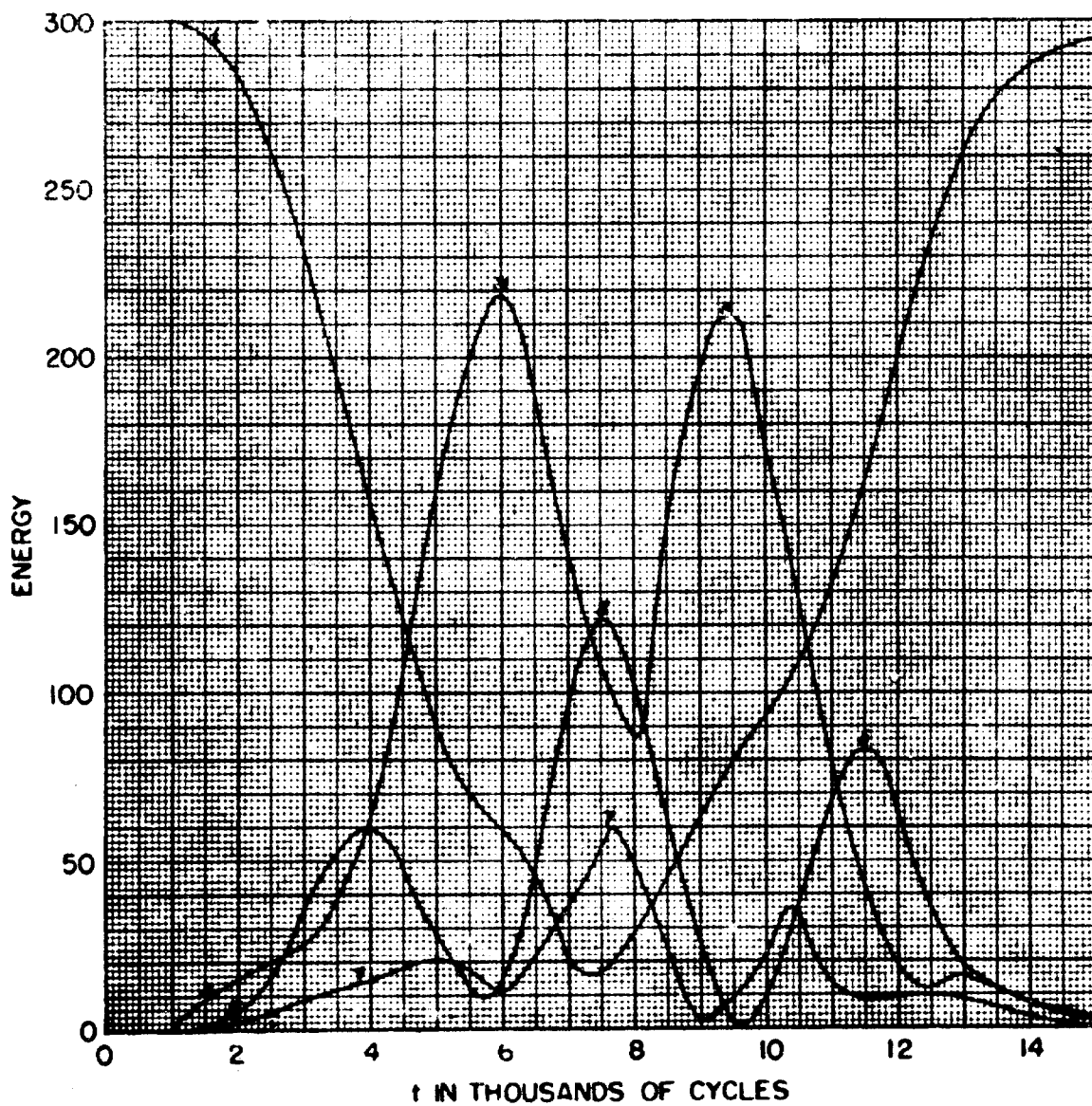


Fig. 4. The initial configuration assumed was a single sine wave; the force had a cubic term with  $\beta = 0$  and  $\delta t^2 = 1/8$ . Since a cubic force acts symmetrically (in contrast to a quadratic force), the string will forever keep its symmetry and the effective number of particles for the computation  $N = 16$ . The even modes will have energy 0.

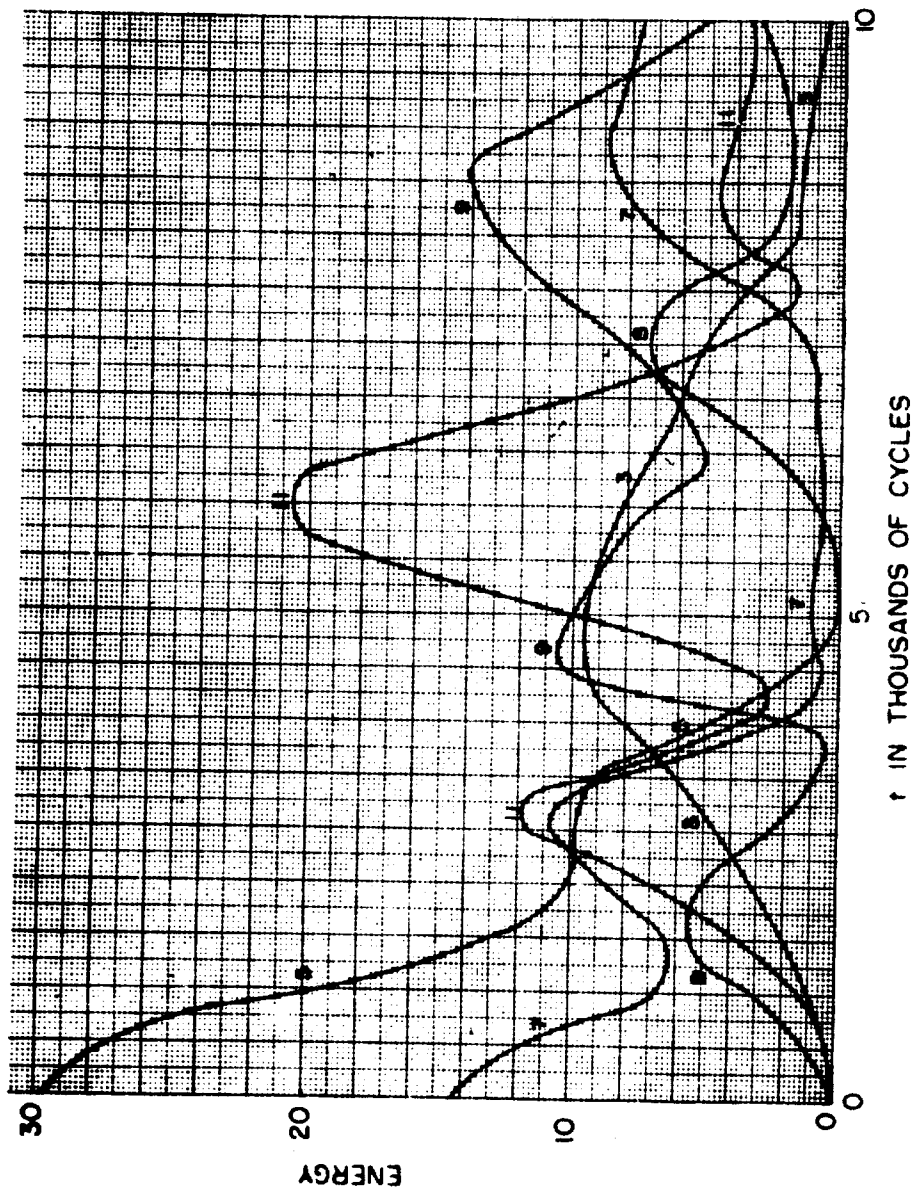


Fig. 5.  $N = 32$ ;  $\delta t^2 = 1/64$ ;  $\beta = 1/16$ . The initial configuration was a combination of 2 modes. The initial energy was chosen to be  $2/3$  in mode 5 and  $1/3$  in mode 7.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Струна с закрепленными концами;

$L$  - полная длина струны;

$a$  - размер участка, моделируемого одним осциллятором цепочки.

Рис. 2. I - область колмогоровской устойчивости;

II - область стохастичности;

$a$  - граница стохастичности для  $K \ll N$  (2.II);

$b$  - граница для  $K \approx N$  (3.5);

с - качественная интерполяция; численные значения прямых  $a$ ,  $b$  даны для  $N = 32$ ;

1 - результат численного счёта для

$N = 32$ ;  $\chi_m = 1$ ;  $K = 1$ ;  $\beta = 8/1$ ;

2 - то же самое для  $K = 7$ ;  $\beta = 1/16/1$ .