

препринт

Б.В.Чириков

**Влияние внешних цепей на когерентную
неустойчивость**

НОВОСИБИРСК 1965

B.V.Chirikov

External circuit influence upon coherent instability

An influence of external circuit connecting different walls of accelerator chamber upon coherent instability of the beam is considered. In general the influence is very strong if the walls isn't short-circuited. The main result of present calculation is given by the expression for betatron oscillations frequency (2.9) where terms with C_I - external capacitance per unit length of the chamber, and with R_I - external resistance per unit length, represent an additional effect from external circuit. The last may explain a big discrepancy between Mills' experimental results and previous theory. On the other hand external circuit may be used to improve suppression of the instability by Landau damping. To get it an external capacitance must have such a value to cancel the real part of frequency shift (2.9). For realization this method one should attain very low inductance of the circuit (3.3). For the same reason short enough wave-length perturbation can't be stabilised in such a way.

Когерентная неустойчивость пучка в ускорителе /I/ возникает вследствие сдвига фаз наведенных в стенках токов из-за конечной проводимости материала стенок. Обычно учитывается сдвиг фаз только наведенных токов, но не зарядов. Как будет видно из дальнейшего это оправдано для достаточно длинноволновых возмущений и при условии, что камера ускорителя замкнута накоротко по периметру, перпендикулярно пучку. В некоторых случаях, однако, последнее условие может не выполняться. В качестве примера можно указать на эксперименты Миллса /2,6/, в которых электронный пучок находился вблизи плоского электрода для удаления ионов. На рис. I изображена упрощенная геометрия опыта. Электрод находится сверху и связан с камерой (нижняя стенка) через некоторое, вообще говоря, комплексное сопротивление Z_c (на единицу длины).

Настоящая заметка посвящена выяснению влияния на когерентную неустойчивость внешних цепей, соединяющих стенки камеры и характеризующихся величиной Z_c . Мы выбираем для расчетов геометрию опытов Миллса для того, чтобы, в частности, попытаться объяснить расхождение его результатов с существующей теорией /I/.

§ I. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НАВЕДЕННЫХ ЗАРЯДОВ С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ ЦЕПЕЙ

Предполагая, что принятая геометрия характеризуется неравенствами

$$L \gg l \gg a \quad (I.I)$$

можем считать поле вне пучка однородным. Обозначая невозмущенное поле вверху E_1^0 , внизу E_2^0 , а изменение полей в результате когерентного смещения пучка $\langle z \rangle$ посредством E_1 , E_2 , соответственно, можем написать в линейном приближении по $\langle z \rangle$

$$(E_1 \ell - E_1 \langle z \rangle) - [E_2 (\ell - \ell) + E_2 \langle z \rangle] = J_1 Z_1, \quad (I.2)$$

где ток во внешней цепи на единицу длины равен

$$J_1 = - \frac{4}{4\pi} \dot{E}_1 \quad (I.3)$$

Учитывая, что

$$E_1^0 + E_2^0 = \frac{4\pi e N_1}{L} = \text{const} \quad (I.4)$$

где N_1 - число частиц на единицу длины пучка, найдем

$$E_1 = \frac{4\pi e N_1}{L} \cdot \frac{\langle z \rangle}{\ell} - \frac{4}{4\pi \ell} Z_1 \dot{E}_1, \quad (I.5)$$

Ввиду условия (I.4), $E_2 = -E_1$, и среднее поле, действующее на пучок ($(E_1 - E_2)/2$), совпадает с E_1 . Первое слагаемое в правой части (I.5) характеризует обычное поле отраженных зарядов; второе слагаемое есть дополнительное поле $V_{\text{вн}}/\ell$ за счет протекания тока по внешней цепи с падением напряжения $V_{\text{вн}} = J_1 Z_1$.

Для Фурье - компоненты (ω, k) возмущения находим:

$$E_1 = \frac{4\pi e N_1}{L} \cdot \frac{\langle z \rangle}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{i\omega}{4\pi} \cdot \frac{4}{\ell} \cdot Z_1\right)^{-1} \quad (I.6)$$

Интересно отметить, что изменение поля при смещении пучка зависит от полного расстояния между стенками ℓ , а не от расстояния до ближайшей стенки ℓ . В частности, при $\ell \rightarrow \infty$ поле вообще не зависит от смещения пучка (в приближении (I.1)).

Аналогичные вычисления для другой геометрии были проделаны в работе /3/.

§ 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОТРАЖЕННЫХ ТОКОВ

Вектор-потенциал запишем в виде:

$$A = -\frac{2\pi J}{Lc} |z - \langle z \rangle| + H(z - z_0) \quad (2.1)$$

где $J = en_p v$ - полный ток пучка, H - искомое поле отраженных токов, которое оказывается однородным; z_0 - некоторая постоянная. Используя граничные условия Леонтовича на обеих стенках в виде:

$$E_x^i = \pm H \cdot \sqrt{\frac{\omega \mu_i}{8\pi \sigma_i}} \quad (2.2)$$

где μ_i - магнитная проницаемость, σ_i - проводимость соответствующей стенки ($i = 1, 2$), получим обычным образом

$$H = -\frac{4\pi en_p \beta \cdot \langle z \rangle}{L} \cdot \frac{1 + \frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell} - i \frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell}}{\left(1 + \frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell}\right)^2} \quad (2.3)$$

где $\beta = v/c$, а черта означает среднее арифметическое по обоим стенкам:

$$\frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell} = \frac{1}{2\ell} (\mu_1 \Delta_1 + \mu_2 \Delta_2) \quad (2.4)$$

Таким образом при любом β обе стенки влияют одинаково (разумеется, если выполнены неравенства (I.I)).

Результирующая средняя сила, действующая на пучок за счет отраженных токов и зарядов в расчете на одну частицу, есть:

$$F_z^0 = \frac{4\pi e^2 n_p \cdot \langle z \rangle}{L} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} + \frac{L}{4\pi \ell c} + \frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell} \beta^2 + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + i \left(\frac{\omega L R_1}{4\pi \ell} + \frac{\bar{\mu} \Delta}{\ell} \beta^2 \right) \right\}$$

Здесь внешняя цепь Z_1 , представлена в виде

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \quad (2.6)$$

R_1 - омическое сопротивление на единицу длины, а C_1 - емкость на единицу длины; в случае индуктивной нагрузки Z_1 , надо положить

$$C_1 = -\frac{C^2}{\omega^2 Z_1} \quad (2.7)$$

Кроме того, предполагаются выполненными неравенства:

$$\frac{\bar{\mu}d}{\ell} \ll 1; \quad \frac{\omega L}{4\pi\ell} |Z_1| \ll 1 \quad (2.8)$$

Собственное поле пучка равно:

$$F_z^c = \frac{2\pi e^2 N_1}{\gamma^2 a L} (z - \langle z \rangle)$$

Совместное действие полей (2.5.8) удобно характеризовать эквивалентным сдвигом бетатронной частоты /4/:

$$\delta_k = \Omega_c \left\{ 1 - \frac{2a}{\ell} - \frac{2a\gamma^2}{\ell} \left[\left(\frac{L}{4\pi\ell C_1} + \frac{\bar{\mu}d}{\ell} \beta^2 \right) + \right. \right. \quad (2.9) \\ \left. \left. + i \left(\frac{\omega L R_1}{4\pi\ell} + \frac{\bar{\mu}d}{\ell} \beta^2 \right) \right] \right\}$$

где величина

$$\Omega_c = \frac{\pi \nu}{\gamma^3} \cdot \frac{C^2}{La\omega_0} \quad (2.10)$$

представляет собой сдвиг частоты за счет собственного поля пучка;

$\nu = \frac{e^2 N_1}{mc^2}$ - безразмерная линейная плотность

пучка; ω_0 - частота бетатронных колебаний в ведущем поле ускорителя.

Обычно /1,4,5/ при расчете когерентной неустойчивости принимается, что внешняя цепь замкнута накоротко:

$$Z_1 = R_1 = \frac{1}{C_1} = 0 \quad (2.11)$$

На самом деле даже в замкнутой по периметру камере имеется некоторое сопротивление за счет конечной проводимости стенок:

$$R_1 \sim \frac{U}{\sigma \Delta} \quad (2.12)$$

где U - периметр камеры. В этом случае дополнительный член в мнимой части δ_k всегда мал по сравнению с основным

$$\frac{\omega L R_1}{4\pi l} / \frac{\sqrt{\epsilon} \beta^2}{l} \sim \frac{U L}{\beta^2 \lambda^2} \ll 1 \quad (2.13)$$

Так как все расчеты полей в этой работе проведены в квазистационарном приближении, т.е. при условии достаточно большой длины волны ($\lambda = c/\omega$)*:

$$L \ll \lambda \quad (2.14)$$

Только в нерелятивистском случае условие (2.13) оказывается более жестким.

§ 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ ЦЕПЕЙ

Первый способ стабилизации состоит в подборе такого сопротивления, чтобы мнимая часть сдвига частоты обратилась в нуль. Этот способ не является эффективным по следующим причинам:

1. Как видно из выражения (2.9) сопротивление должно быть отрицательным, что сложно с технической точки зрения.

2. Сопротивление должно определенным образом зависеть от частоты, в противном случае можно стабилизировать лишь одну гармонику.

*) Строго говоря, необходимо еще, чтобы сопротивление стенки вдоль пучка на длине волны было бы много больше L/λ . Чтобы напрасно не усложнять задачу, мы предположим, что стенки камеры разделены на короткие участки, изолированные друг от друга.

3. Ошибка в сопротивлении, а также независящее от частоты сопротивление может привести к усилению неустойчивости (в том числе на "быстрой" волне).

Гораздо удобнее использовать затухание Ландау. В обычных условиях, т.е. при короткозамкнутой камере, требуется довольно большой разброс скоростей электронов или частот бетатронных колебаний; он определяется действительной частью сдвига частоты:

$$\operatorname{Re} \delta_k = \Omega_c \left(1 - \frac{\mathcal{L} a \gamma^2}{2\pi \ell^2 C_1} \right) \quad (3.1)$$

где мы пренебрегли для простоты малыми членами $2a/\ell$ и $\frac{\sqrt{a}}{\ell} \beta^2$. Из выражения (3.1) напрашивается естественный метод стабилизации, состоящий в подборе такой внешней цепи емкостного характера, чтобы требуемый разброс частот обратился в нуль:

$$C_1 \approx \frac{\gamma^2}{2\pi} \cdot \frac{\mathcal{L} a}{\ell^2} \quad (3.2)$$

Существенно, что это условие не зависит от частоты возмущения. Ввиду принятого приближения (2.8) условие (3.2) справедливо только в ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$, однако, не представляет труда освободиться от этого ограничения.

Существенной технической трудностью рассматриваемого метода стабилизации является очень малая допустимая индуктивность цепи:

$$L_1 \leq 2\pi \left(\frac{\lambda}{\gamma} \right)^2 \frac{\ell^2}{\mathcal{L} a} \quad (3.3)$$

Считая, что минимальная индуктивность, связанная с подводами $\sim \ell^2$, получаем условие

$$\left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 \frac{\mathcal{L} a}{2\pi} \leq 1 \quad (3.4)$$

Эти условия ограничивают стабилизацию очень коротковолновых возмущений. Их можно сделать менее жесткими, если включать внешнюю цепь только на коротком участке камеры (с относительной

длиной α) в то время, как в остальной части $(1 - \alpha)$ стенки камеры замкнуты накоротко. В первом приближении можно считать, отвлекаясь, в частности, от влияния этого нового азимутального возмущения, что необходимая для стабилизации емкость уменьшится: $C_I \rightarrow \alpha C_I$, а допустимая индуктивность во столько же раз возрастет: $Z_I \rightarrow Z_I / \alpha$.

По-видимому, наиболее разумной является как раз конструкция типа Миллса (рис. I), в которой емкость формируется между специальным электродом (верхний на рисунке) и камерой (над этим электродом). Необходимый зазор составляет в этом случае

$$d = \frac{B l^2}{2 L \gamma^2 a \alpha} \quad (3.5)$$

где B - ширина электрода. Весьма малое значение d может быть несколько увеличено за счет разветвления поверхности и применения диэлектрика.

Чтобы внешние цепи не увеличивали инкримента неустойчивости, необходимо, чтобы действительная составляющая Z_I была достаточно мала:

$$R_I \ll \frac{4\pi\beta^2}{\omega} \cdot \frac{\mu A}{L} \quad (3.6)$$

§ 4. ЭКСПЕРИМЕНТЫ МИЛЛСА

Насколько нам известно опыты Миллса /2/ - единственные с однородным по азимуту пучком, к которому непосредственно применима обычная теория /1/. Примем следующие значения основных величин /6/ $B \approx 11$; $L \approx l \approx 3$; $b \approx 1.5$; $a \approx 0.4$; $\lambda \approx R \approx 200$; $\gamma \approx 70$; $\omega_0 \approx 5 \cdot 10^8$; $A \approx 10^{-3}$.

Согласно наблюдениям Миллса инкримент неустойчивости и разброс частот, необходимый для стабилизации, примерно на порядок превышает расчетные значения /1/.

Для объяснения увеличения инкримента достаточно, чтобы

8.

омическая составляющая внешней цепи была порядка (см. (2.9)):

$$\frac{R_1}{A} \sim 10 \cdot \frac{4\pi}{\omega A} \cdot \frac{\bar{A}}{l} \sim 1 \text{ см} \quad (4.1)$$

полагая, что присоединение внешней цепи происходит на длине $\sim A \sim R$ (радиус орбиты). Отметим, что уже сопротивление такого участка стенки камеры (R_{ca}) может внести заметную поправку в (2.9):

$$\frac{R_{ca}}{\bar{A}/l\omega} \sim \left(\frac{\lambda}{A}\right)^2 \quad (4.2)$$

Далее заметим, что слагаемое с $\sqrt{\mu\bar{A}}$ в действительной части (2.9), обычно неучитываемое, также может оказаться существенным при большом γ . В опытах Миллса

$$\frac{2a\sqrt{\mu\bar{A}}}{\rho^2} (\gamma\beta)^2 \approx 0.5 \quad (4.3)$$

Для объяснения увеличения действительной части сдвига частоты достаточно допустить индуктивную составляющую порядка

$$Z \sim 10 \cdot \frac{2\pi l^2 t^2}{A L \gamma^2 a} \sim 20 \text{ см} \quad (4.4)$$

В данном случае с избытком хватает индуктивности стенок $Z_A \sim A \sim 200$ см, которая может частично компенсироваться емкостной нагрузкой во внешней цепи.

Мне приятно поблагодарить А.Н.СКРИНСКОГО за полезные обсуждения и советы.

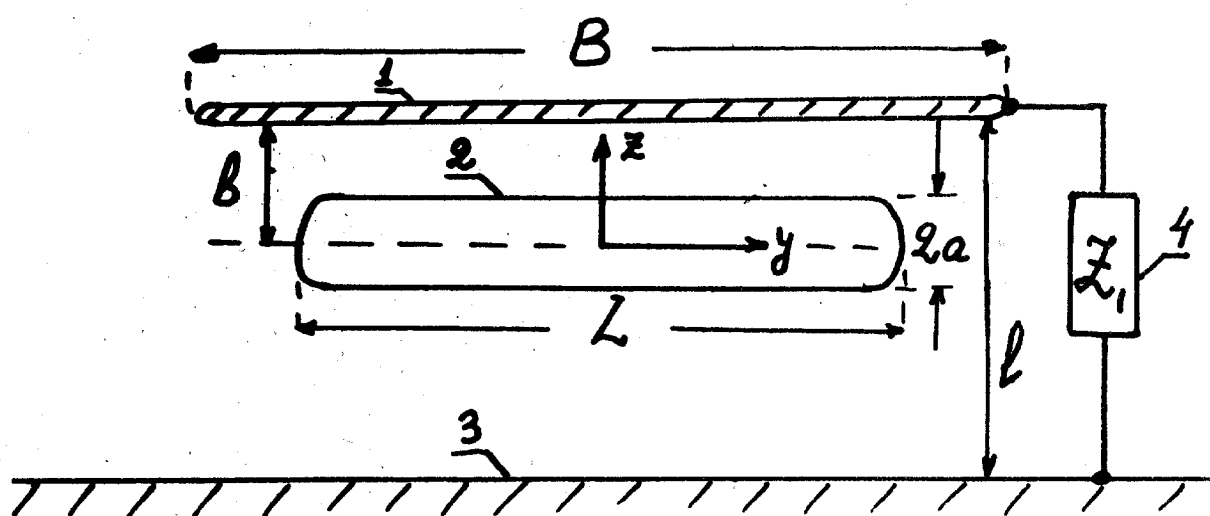


Рис. I Схематический разрез камеры ускорителя /2,6/:

- 1 - электрод для удаления ионов из пучка;
- 2 - пучок;
- 3 - одна из стенок камеры;
- 4 - внешняя цепь.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.J.Laslett, V.K.Neil, A.M.Sessler, "Transverse resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators, UCRL - II090 Report, Lawrence Radiation Lab, University of California, 1963.
2. F.E.Mills, частное сообщение
3. D.C. de Paekh, Journ. Electron. & Control, XV, 521, 1963.
4. В.В.Мазепус, Б.В.Чириков "Когерентная неустойчивость пучка в камере с непроводящими стенками". Атомная энергия, в печати.
5. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский "Когерентная неустойчивость бетатронных колебаний циркулирующего пучка частиц. Атомная энергия (в печати).
6. F.E.Mills, Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна (1963).