Рабинт.

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 33

Б.В.Чириков

Стохастическое разрушение магнитных поверхностей стелларатора

НОВОСИБИРСК 1966

B.V. Chirikov

Stochastic Destruction of Stellarator Magnetic Surfaces.

Some estimates about the stability of the lines of force for stellarator magnetic field against static perturbations are given. It is shown that increasing of the derivative $d\omega/dz$ (ω is mean rotation speed of the magnetic line at distance z from stellarator's axis around the axis) results in increasing of line stability against resonance perturbations only up to a certain limit. Above that a new so-called stochastic instability may occur. If so, the magnetic lines are situated in quasi-random manner and run too quickly out of separatriss.

Stochastic instability can be used to realize the so-called Scornyakov's trap which have inside a certain "turbulent" (in respect to"motion" of the magnetic lines) or stochastic region surrounded by "laminar" layer of "proper" magnetic surfaces. Such a structure can be achieved by additional resonance helical winding which period is equal to the revolution period of the magnetic line in the stochastic region. One may expect the suppression of plasma instabilities in stochastic region by means of additional damping due to the "diffusion" of magnetic lines.

Целью настоящей работы являются некоторые расчёты или, лучше сказать, оценки условий устойчивости движения отдельных частиц в магнитных полях стеллараторного типа.

Обычно можно считать, что магнитный момент частицы сохраняется с достаточной степенью точности, так, что речь идет об устойчивости дрейфовых траекторий частицы. Ограничиваясь, далее, областью достаточно удаленной от сепаратрисы, можно пренебречь для подавляющего большинства пролетных частиц отклонением дрейфовых траекторий от силовых линий магнитного поля /I/. Таким образом, необходимо исследовать, как это обычно и делается, устойчивость силовых линий, которые можно рассматривать как некоторую динамическую систему, а именно, осциллятор, поскольку основной особенностью стеллараторных полей является конечная скорость вращения (средний угол прокручивания ω) силовых линий в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Этот осциллятор находится под действием различных возмущений (неточности изготовления, рейстрэки, тороидальность и др.), с периодом, равным периметру стелларатора. При этом основную опасность представляют резонансы. Для борьбы с ними возможны два пути.

Во-первых, можно выбрать частоту ω вдали от всех резонансных значений, как это обычно делается в ускорителях заряженных частиц. Для этого необходимо, однако, чтобы осциллятор был почти линейным, т.е. чтобы частота ω достаточно слабо зависела от радиуса вращения (z), так чтобы вся интересующая нас область стелларатора находилась вне резонансов. Такие стеллараторные поля возможны (например, двухзаходный винт с большим шагом), но, по-видимому, нежелательны хотя бы потому, что при этом значительно уменьшается размер сепаратрисы[I)].

Другой известный способ борьбы с резонансами состоит в том, чтобы сделать осциллятор нелинейным, т.е. чтобы его частота зависила от радиуса вращения (амплитуды): $\omega = \omega(z)$.

Из многочисленных работ по исследованию резонансных возмущений в стеллараторе (см., например /I,2,6/ может создаваться впечатление, что увеличение нелинейности ($d\omega/dz$) всегда ведет к повышению устойчивости. Подобные надежды существовали и на начальной стадии разработки

I) Заметим, впрочем, что двухзаходное поле с малым шагом даёт возможность устранить правильным выбором значения $\omega(0)$ наиболее опасный центральный резонанс /I0/ (см. примечание на стр. 7).

сильнофокусирующих ускорителей. В действительности, однако, дело обстоит иначе. Хотя нелинейность и стабилизирует резонансы (за счёт выхода системы из резонанса при изменении амплитуды), она приводит одновременно к появлению новых неустойчивостей. Наиболее опасной из них является, по-видимому, так называемая стохастическая неустойчивость /3/. При возникновении этой неустойчивости движение становится нерегулярным, как бы происходящим под действием случайных возмущений. Насколько нам известно, применительно к стелларатору такого рода стохастические процессы впервые рассмотрены ~~Сагдеевым и Заславским~~ /4/. В настоящей работе основное внимание уделено критерию стохастичности, т.е. условиям возникновения стохастической неустойчивости, а также использованию этой неустойчивости для создания ловушки Скорнякова.

§ I. Основные уравнения

В качестве невозмущенной системы выберем прямое винтовое n- заходное магнитное поле, создаваемое $2n$ проводниками с током J в каждом, навитыми с шагом $2\pi/\alpha$ на поверхность цилиндра радиуса a. Тороидальность реального стелларатора отнесем к возмущениям. Уравнения "движения" силовых линий примем в виде /5/:

$$\frac{ds}{dz} = 2\varepsilon n s^{\frac{n}{2}} \sin n\theta; \quad \theta = \varphi - \alpha z; \quad s = (r/a)^2$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varepsilon n s^{n/2-1} \cos n\theta; \quad \varepsilon a = \frac{4J}{caH_z} \qquad \text{(I.I)}$$

где H_z- напряженность продольного поля, r, φ, z- цилиндрические координаты. Для справедливости (I.I) необходимо, вообще говоря, чтобы обе величины εa, $s \ll 1$.Однако оценки по порядку величины, которые составляют основное содержание работы, будут справедливы и в более широкой области, фактически везде за исключением непосредственной окрестности сепаратрисы. То же замечание относится и к другим сильным неравенствам. В качестве переменной выбрана величина $s = (r/a)^2$, канонически сопряженная углу φ. В первом приближении уравнения (I.I) дают магнитные поверхности /5/

$$s = s_0\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\alpha} s_0^{n/2-1} \cos n\dot{\theta}\right) \qquad (I.2)$$

а во втором - средний угол прокручивания /5/:

$$\varphi = C - \frac{\varepsilon}{\alpha} s_0^{n/2-1} \sin n\left[\varphi_0 + (1-\omega)\alpha z\right] + \alpha z \omega$$

$$\omega(s_0) = n(n-1)\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2 s_0^{n-2} \qquad (I.3)$$

Здесь s_0 - константа, характеризующая магнитную поверхность, $C = \varphi_0 + \frac{\varepsilon}{\alpha} s_0^{n/2-1} \sin n\varphi_0$, постоянная, зависящая от начальных условий при $z = 0$. Выражение для $\omega(s_0)$ применимо при $n > 2$, чем мы и ограничимся в дальнейшем.

Возникновение среднего угла прокручивания силовых линий, который и является основным фактором устойчивости стеллараторных полей, вполне аналогично возникновению бетатронных колебаний в ускорителе с переменным градиентом или устойчивости маятника Капицы.

Примем, что возмущения (постоянные во времени) описываются такими же уравнениями, что и основное поле (I.I), но со своими параметрами ε_1, n_1, α_1. ~~Следуя,~~ Далее, ~~работе /4/,~~ предположим, что возмущение представляет собой набор коротких, некоррелированных между собой "толчков", т.е. параметры ε_1, n_1, α_1, постоянны на длине ℓ (длина корреляции), удовлетворяющей неравенству:

$$a \ll \ell \ll (n_1 \alpha_1)^{-1} \qquad (I.4)$$

Аналогичная постановка задачи имеет место, например, при расчётах устойчивости в ускорителе с жесткой фокусировкой.

Вследствие замкнутости стелларатора любое возмущение будет периодично с периодом L (периметр стелларатора).

Рассмотрим вначале один единственный "толчок" в точке $z = 0$. Из уравнений (I.I) при условии (I.4) находим:

$$\Delta S_0 = 2\varepsilon_1 n_1 S_0^{\frac{n_1}{2}} \ell \sin n_1 \varphi$$

$$\Delta \varphi = \varepsilon_1 n_1 S_0^{n_1/2 - 1} \ell \cos n_1 \varphi \qquad (I.5)$$

Первое уравнение определяет смещение магнитной поверхности, зависящее от угла φ в месте возмущения. Последний изменяется под действием возмущения (второе уравнение (I.5)), а также в результате вращения с "частотой" ω на величину $\alpha L_0 \omega$ (за период). В результате действие рассматриваемого возмущения можно описать с помощью следующей системы разностных уравнений:

$$S_{N+1} = S_N \left(1 + \frac{2}{n_1} \xi_N \sin \psi_N\right)$$

$$\psi_{N+1} = \psi_N + \alpha L n_1 \omega (S_{N+1}) + \xi_N \cos \psi_N$$

$$\psi_N = n_1 \varphi_N ; \quad \xi_N = \ell \varepsilon_1 n_1^2 S_N^{n_1/2 - 1} \qquad (I.6)$$

Здесь N -номер оборота вокруг стелларатора, новое "время" нашей динамической системы. Существенно, что во второе уравнение входит возмущенное значение частоты (от S_{N+1} , а не S_N). Уравнения (I.6) являются основными в этой работе.

При определенных условиях, которые будут разобраны подробно в следующем параграфе, разностные уравнения (I.6) могут быть заменены дифференциальными:

$$\dot{S} = \frac{2}{n_1} \xi S \sin \psi$$

$$\dot{\psi} = \alpha L_1 (\omega - \omega_p) + \xi \cos \psi \qquad (I.7)$$

Здесь $L_1 = n_1 L$; $\omega_p = 2\pi m / \alpha L_1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ /4/ -резонансное значение частоты ω 2); точка означает дифференцирование по новому "времени" N. Всюду в дальнейшем S означает параметр магнитной поверхности, т.е. мы пренебрегаем малыми отклонениями её от цилиндра (I.2).

---

2) Резонансы высшего порядка $\omega^{(p)} \doteq (2\pi m/\alpha L \pm p n)/(n_1 \pm p n)$; $p = 1, 2 \ldots$ /6/ содержат дополнительно малый множитель вида $[(\varepsilon/\alpha) S^{n/2-1}]^p$ и могут быть существенны лишь вблизи сепаратрисы.

Вместо системы (I.7) иногда удобно рассматривать так называемое фазовое уравнение:

$$\ddot{\psi} + \xi \dot{\psi} \sin\psi - \Omega_\varphi^2 \sin\psi = 0 \qquad (I.8)$$

где введена новая величина Ω_φ – частота фазовых колебаний:

$$\Omega_\varphi^2 = 2\alpha L s \omega' \xi \; ; \quad \omega' \equiv \frac{d\omega(s)}{ds} \qquad (I.9)$$

§ 2. Стохастическая неустойчивость

Напомним кратко основные особенности нелинейного резонанса, описываемого дифференциальными уравнениями (I.7) или (I.8). В линейном случае ($\omega' = \Omega_\varphi = 0$) система (I.7) определяет резонансные (неустойчивые) полосы шириной

$$\alpha L \Delta\omega = 2\xi \qquad (2.I)$$

Простая оценка стабилизации резонанса нелинейностью получается из (I.8), если пренебречь в нем линейным членом ($\xi \dot{\psi} \sin\psi$). Уравнение (I.8) приводит тогда к колебаниям фазы вокруг $\psi = 0$ или π с частотой (малых колебаний) $|\Omega_\varphi|$. Отсюда получаем оценку на нелинейную расстройку (размер сепаратрисы) /I2/: $\alpha L_1 (\omega - \omega_p) \sim \Omega_\varphi$, которая в случае стабилизации должна быть больше ширины резонанса, или (в квадрате)[3]:

$$\xi \lesssim 2\alpha L s \omega' = 2(n-2)\alpha L \omega = 4\pi(n-2) N_\lambda(L) \qquad (2.2)$$

---

[3]Условие стабилизации резонанса в центре стелларатора ($\omega_p = 0$) имеет несколько иной вид: $\xi \lesssim \alpha L_1 \omega = 2\pi n_1 N_\lambda(L)$. Этот резонанс особенно опасен, так как приводит к разрушению области размером $r \sim \varepsilon_1^{1/(2n-3)}$ (при $n_1 =$ I), в то время как для периферических резонансов (2.2) размер разрушенной области $\Delta r \sim \sqrt{\varepsilon_1}$.

где $N_\alpha(L)$ - число оборотов силовой линии при обходе вокруг стелларатора (число вращения).

Рассмотрим теперь более аккуратно условия, при которых справедлива замена разностных уравнений дифференциальными. Прежде всего нужно, чтобы $(S_{\nu+1} - S_\nu)/s_\nu \sim \xi \ll 1$, что необходимо также и для справедливости второго из уравнений (I.7). Кроме того необходимо, чтобы $\alpha L_1(\omega - \omega_p) \sim \Omega_\phi \ll 1$, так как в противном случае $(\psi_{\nu+1} - \psi_\nu)$ не мало.

Нарушение первого условия (большие ξ) не приводит к каким-либо новым эффектам и практически не представляет большого интереса, так что мы будем считать его выполненным. Совершенно иначе обстоит дело со вторым условием. Чтобы выяснить к чему приводит его нарушение, вернемся к разностным уравнениям (I.6) и рассмотрим локальную устойчивость решения этой системы, произведя замену $S_\nu \to S_\nu + \sigma_\nu;\ \psi_\nu \to \psi_\nu + \vartheta_\nu$. В линейном приближении по σ, ϑ получим:

$$\sigma_{\nu+1} = \left[1 + \frac{2}{n_1}(\xi_\nu S_\nu)' \sin\psi_\nu\right]\sigma_\nu + \left[\frac{2}{n_1}\xi_\nu s_\nu \cos\psi_\nu\right]\vartheta_\nu$$

$$\vartheta_{\nu+1} = \left[\alpha L_1 \omega'\left(1 + \frac{2}{n_1}(\xi_\nu S_\nu)' \sin\psi_\nu + \xi'_\nu \cos\psi_\nu\right]\sigma_\nu + \quad (2.3)$$

$$+ \left[1 + 2\alpha L \omega' \xi_\nu s_\nu \cos\psi_\nu - \xi_\nu \sin\psi_\nu\right]\vartheta_\nu$$

Характеристическое уравнение системы получается из условия $\sigma_{\nu+1} = \lambda\sigma_\nu;\ \vartheta_{\nu+1} = \lambda\vartheta_\nu$. Поскольку нас интересует случай $\Omega_\phi^2 \gtrsim \gtrsim 1$, мы отбросим все члены с ξ не содержащие большого множителя αL, а также члены $\sim \xi^2$, так как исходные уравнения (I.6) написаны с точностью $\sim \xi$. В результате получим:

$$\lambda^2 - \lambda(2 + K) + 1 = 0$$

$$K_\nu = 2\alpha L s_\nu \omega' \xi_\nu \cos\psi_\nu = \Omega_\phi^2 \cos\psi_\nu \quad (2.4)$$

и решение

$$\lambda_\nu = 1 + \frac{K_\nu}{2} \pm \sqrt{K_\nu\left(1 + \frac{K_\nu}{4}\right)} \quad (2.5)$$

Поскольку произведение корней равно I, то устойчивость соответствует только комплексно-сопряженным корням, т.е. условию

$$-4 < K_\nu < 0 \tag{2.6}$$

При малых K_ν устойчивая и неустойчивая области фаз примерно одинаковы и соответствуют двум положениям равновесия системы (I.8). При $\Omega_\phi^2 \gg 1$ почти вся область фаз становится неустойчивой, исключение составляют небольшие участки вблизи $\cos\psi = 0$ шириной:

$$(\Delta\psi)_y \sim \Omega_\phi^{-2} \ll 1 \tag{2.7}$$

Если пренебречь ими, то можно воспользоваться результатами работы /7/, согласно которой система локально неустойчивая в каждой точке, имеет все известные атрибуты стохастичности: эргодичность, перемешивание и положительную энтропию по Колмогорову.

В промежуточной области $\Omega_\phi^2 \sim 1$ устойчивые участки фазового пространства расширяются и картина движения становится весьма сложной. Определим границу стохастичности как положение промежуточной области:[4)]

$$\xi \sim \frac{4}{2\alpha L S \omega'} = \frac{1}{\pi(n-2)\,N_1(L)} \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.8) и (2.2) видим, что результирующий допуск на возмущение проходит через максимум в районе

$$N_1(L) \sim \frac{1}{2\pi(n-2)}\,; \qquad \xi_{max} \sim 1 \tag{2.9}$$

[4)]Положение границы выбрано при $\Omega_\phi^2 = 4$ в соответствии с результатами численного счёта аналогичной задачи в /9/. Так как в /9/ значение $K = \Omega_\phi^2$ не зависело от ψ, а в нашем случае это значение является максимальным (2.4), можно ожидать некоторого смещения границы в сторону больших Ω_ϕ^2.

При выполнении критерия стохастичности закон "движения" силовых линий носит обычный диффузионный характер и описывается некоторым кинетическим уравнением /4/. Простая оценка диффузии может быть получена из (I.5,6), если учесть, что фазы распределены в первом приближении равномерно и некоррелированы между собой:*)

$$\overline{(\Delta s)^2} \sim \left(\frac{\xi s}{n_1}\right)^2 N \tag{2.10}$$

Так как скорость диффузии растет с радиусом, то время "жизни" силовой линии можно оценить из условия $\overline{(\Delta s)^2} \sim s^2$, т.е.:

$$N_ж \sim \left(n_1/\xi\right)^2 \tag{2.11}$$

§ 3. Пример оценки допусков

В задачу этой работы не входит получение конкретных оценок действия различных возмущений. Приведем лишь пример оценки допуска на смещение проводников винтового поля. В принятом нами приближении ($s \ll 1$) наиболее существенна первая гармоника возмущения ($n_1 = 1$), которая соответствует независимому смещению одного из $2n$ проводников. Пусть это будет смещение в радиальном направлении на величину $\Delta a = \delta$ [5]. Произведя несложные вычисления, получим параметры возмущения: $\varepsilon_1 = -\varepsilon\delta/2a$; $n_1 = 1$; $\alpha_1 = \alpha$ и из (I.6):

$$\xi = -\frac{\varepsilon l \delta}{2a\sqrt{s}} \tag{3.1}$$

Учтем теперь, что на самом деле имеется не одно локальное возмущение, а непрерывный ряд смещений с длиной корреляции l. Последний термин

---

[5] Допуск на смещение в азимутальном направлении получается таким же.

*) Точное кинетическое уравнение см. в дополнении.

означает, что возмущение можно считать приблизительно постоянным на длине $\lesssim \ell$, как это и делалось выше; в то же время смещения на соседних участках, разделенных расстоянием $\gtrsim \ell$, можно считать независимыми. Отсюда следует среднеквадратичная оценка для полного возмущения, считая смещения каждого из $2n$ проводников также независимыми:

$$\xi \sim \frac{\varepsilon \ell \delta}{2a\sqrt{5}} \sqrt{\frac{2nL}{\ell}} \sim \frac{\varepsilon\delta}{2}\sqrt{\frac{2nL\ell}{r^2}} \tag{3.2}$$

Более подробное изложение методики среднеквадратичных оценок возмущения можно найти в /8/. ~~а применительно к стелларатору в /4/.~~

Подчеркнем, что принятая "случайность" в распределении смещений вдоль стелларатора отнюдь не ведет автоматически к стохастической неустойчивости, поскольку любое возмущение строго повторяется через оборот. Для стохастичности необходимо выполнение критерия (2.8).

Как видно из (3.2), действие возмущения растёт вместе с длиной корреляции ℓ. Однако при $n_1 \alpha_1 \ell \gtrsim 1$ этот рост прекращается из-за осциллирующего множителя $\sin n_1\theta$ (I.I), если только нет прямого резонанса возмущения со средним вращением силовой линии ($\alpha_1 = \alpha\omega$, см.§4). В рассматриваемом примере последнее условие заведомо не выполняется, так как $\alpha_1 = \alpha$ и $\omega \ll 1$. Следовательно, наихудший случай соответствует $\alpha\ell \sim 1$ или:

$$\xi \sim \varepsilon\delta\sqrt{\frac{nL}{2\alpha r^2}} \tag{3.3}$$

Откуда граница стохастичности (2.8):

$$\frac{\delta_1}{r} \sim \frac{\alpha}{\varepsilon\pi\sqrt{\pi n}\,(n-2)N_1(L)\sqrt{N_0(L)}} \tag{3.4}$$

где $N_0(L) = \alpha L/2\pi$ – число оборотов винтовой обмотки.
Время "жизни" силовой линии согласно (2.II) порядка:

$$N_{ж} \sim \frac{2\alpha r^2}{nL(\varepsilon\delta)^2} \sim \left[\pi(n-2)N_1(L)\right]^2 \cdot \frac{\delta_1^2}{\delta^2} \tag{3.5}$$

§ 4. Ловушка Скорнякова

Стохастическая неустойчивость силовых линий может быть использована для создания так называемой ловушки Скорнякова /2/. Особенностью этой ловушки является область "турбулентного движения" силовых линий, в которой близкие вначале линии быстро расходятся друг от друга на значительные расстояния. Именно таким свойством и обладает стохастическая неустойчивость. Смысл введения такой турбулентной области состоит в надежде, что в ней будет затруднено развитие плазменных неустойчивостей. Действительно, возникшие в плазме пространственные неоднородности (флуктуации), двигаясь вдоль быстро расходящихся силовых линий будут растягиваться и перемешиваться, что эквивалентно некоторому затуханию. Трудность создания ловушки Скорнякова состоит в том,что турбулентная область должна быть окружена со всех сторон надежным "ламинарным" слоем регулярных магнитных поверхностей для обеспечения термоизоляции. В частности, стохастическая неустойчивость,рассмотренная в предыдущем параграфе, совершенно непригодна для этой цели, так как турбулентная область простирается до сепаратрисы.

Для осуществления ловушки Скорнякова необходимо подобрать такое возмущение, чтобы стохастичность возникала лишь в ограниченной кольцевой области вокруг оси стелларатора. Иными словами параметр стохастичности $\Omega_\varphi^2 = 2\alpha L s \omega' \xi$ (2.4) должен иметь резкий максимум по s . Поскольку ($s\omega'$) обычно монотонно возрастает с s , то последнее условие переносится на параметр возмущения ξ .

Один из способов создания необходимого возмущения состоит в использовании дополнительной резонансной обмотки, шаг винта которой совпадает с шагом силовой линии при определенном $s = s_1$

$$\alpha_1 = \alpha\,\omega(s_1) \tag{4.1}$$

Так как ω зависит от s , то резонанс будет иметь место лишь в некотором интервале Δs , который зависит от длины резонансной обмотки. Действие возмущения будет теперь описываться уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz} &= \frac{2\xi s}{n_1 \ell}\cdot \sin n_1(\varphi - \alpha_1 z) \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \alpha\,\omega(s) + \frac{\xi}{n_1 \ell}\cdot \cos n_1(\varphi - \alpha_1 z) \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\omega(s)$ определяется основным полем стеллатора, а для ξ сохранено прежнее выражение

$$\xi = \varepsilon_1 n_1^2 s^{\frac{n_1}{2}-1} \ell \tag{4.3}$$

только длина возмущения ℓ может быть теперь любой $(>a)$.

При точном резонансе $(S = S_1)$ и условии $\Delta S \ll S$ система (4.2) даёт

$$\Delta S = \frac{2}{n_1} \xi S \sin\psi$$
$$\Delta\psi = n_1 \alpha \omega(S_1)\ell + n_1 \alpha \omega' \Delta S \cdot \frac{\ell}{2} + \xi \cos\psi \tag{4.4}$$

Значение фазы $\psi = n_1\varphi$ удобно брать в середине интервала возмущения. В последнем выражении первый член представляет основное (резонансное) изменение фазы, второй-нелинейную и третий - линейную поправки. Чтобы не нарушался резонанс, поправки должны быть $\lesssim 1$, что приводит к условиям:

$$\alpha \ell s \omega' \xi \lesssim 1 \tag{4.5}$$

и

$$\xi \lesssim 1 \tag{4.6}$$

Последнее представляет естественное ограничение на величину возмущения, так как в противном случае неясно, какая же обмотка стелларатора является основной.

Если значение S не является резонансным, то ΔS в (4.4) умножается на некоторую функцию от расстройки $f(n_1 \alpha \omega' \ell (S - S_1))$, зависящую от выполнения резонансной обмотки. Приведем два примера. Пусть резонансная обмотка представляет собой простую спираль длины ℓ. Интегрируя (4.2) и пренебрегая поправками в (4.4) ввиду выполнения неравенств (4.5,6), получим:

$$f(\Omega) = \frac{2\sin\Omega/2}{\Omega}; \quad \Omega = n_1 \alpha \ell \omega' (s - s_1) \tag{4.7}$$

Практически такая резонансная обмотка, по-видимому, не годится, т.к. $f(\Omega)$ слишком медленно убывает с расстройкой. Это может вызвать появление "остаточной" стохастичности в "ламинарной" области, что приведет к потерям частиц. Для более резкого спадания $f(\Omega)$ необходимо более плавно изменять параметры резонансной обмотки, например, расстояние проводников от оси $b(z)$. В качестве примера выберем:

$$\frac{b^2(z)}{a^2} = 1 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^2; \quad n_1 = 1 \tag{4.8}$$

Производя интегрирование в (4.2) в прежних предположениях, получим:

$$f(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Omega x}{1+x^2}\, dx = e^{-|\Omega|} \tag{4.9}$$

что уже, по-видимому, достаточно хорошо.

Ширина стохастической области определяется из условия $\Omega \sim 2$ и равна:

$$\left(\frac{\Delta z}{z_1}\right)_{c\tau} \sim \frac{1}{n_1 \alpha \ell s_1 \omega'} = \frac{1}{2\pi n_1 (n-2) N_\lambda(\ell)} \tag{4.10}$$

где $N_\lambda(\ell) = \alpha \ell \omega(s_1)/2\pi$ - число оборотов силовой линии в стохастической области на длине возмущения.

Если мы определим теперь ξ посредством соотношения:

$$\xi = \varepsilon_1 n_1^2 s^{\frac{n_1}{2}-1} \ell f(\Omega) \tag{4.11}$$

то уравнения (4.4), аналогичные (I.5), и вытекающие из них основные уравнения (I.6), останутся без изменения. Единственное отличие состоит в том, что нелинейный сдвиг фазы на длине ℓ (второе слагаемое второго уравнения в (4.4)) входит теперь с дополнительным множителем I/2 по сравнению с (I.6). Однако если $\ell \ll L$ (см.ниже), то это несу -

щественно.

Сравнивая выражение для (2.4) и ограничения (4.5,6) получаем:

$$\Omega_\varphi^2 \lesssim 2L/\ell \tag{4.12}$$

так что для выполнения критерия стохастичности (2.8) требуется большое отношение L/ℓ. С другой стороны ℓ не должно быть слишком малым, так как иначе стохастическая область может оказаться чересчур широкой (4.10). Это определяет требования к стелларатору, который может быть использован в качестве ловушки Скорнякова. Из (4.10,12) видно, что основным требованием является достаточная длина стелларатора L. Минимальную необходимую длину можно оценить, полагая $(\Delta z/z_1)_{c\tilde{m}} \sim 1$; $\Omega_\varphi^2 \approx 4$; h_1 = I (см. примечание на стр. 9):

$$\pi(n-2)\,N_\alpha(L) \gtrsim 1 \tag{4.13}$$

Это условие как раз соответствует области, где стохастическая неустойчивость является определяющей (2.9).

Наконец, несколько слов о регулировке параметров стохастического слоя, его центра z_1 и ширины $(\Delta z)_{c\tilde{m}}$, при заданной конструкции обмоток (α , α_1 , n , n_1 , ℓ). Смещение центра осуществляется изменением параметра ε в $\omega(\varepsilon, s)$ (4.I) за счёт изменения основного винтового поля стелларатора. При этом надо, однако, иметь в виду, что одновременно в ту же сторону смещается и сепаратриса. Поскольку в центре стохастической области частота в силу (4.I) остаётся неизменной, то в приближении (4.10) ширина области не изменяется. Фактически однако ширину можно изменить в 2÷3 раза за счёт изменение Ω_φ^2 так что граница стохастичности будет соответствовать разным Ω . Это можно сделать, изменяя ток резонансной обмотки.

§ 5. Оценка скорости перемешивания силовых линий в стохастической области

Приведем некоторые оценки структуры магнитного поля стелларатора, необходимые при исследовании устойчивости плазмы в нем. Рассмотрение самих плазменных неустойчивостей и их стабилизации выходит за рамки настоящей работы.

Обычно в качестве стабилизирующего параметра рассматривается "скрещенность" силовых линий, или локальный шир /II/, который можно записать в виде тензора:

$$\text{Ш}_{ik} = \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k}; \qquad \theta_1 = \frac{dr}{dz}; \quad \theta_2 = \frac{r\,d\varphi}{dz} \qquad x_1 = r; \quad x_2 = r\varphi \tag{5.I}$$

здесь θ_i - углы, характеризующие направление силовой линии.

Стабилизация с помощью локального шира возможна, по-видимому, лишь для достаточно коротковолновых возмущений:

$$k\,\text{Ш}_{ik} \gtrsim \alpha \tag{5.2}$$

Для больших длин волн может играть роль средний шир $\overline{\text{Ш}_{ik}}$, где усреднение производится по периоду винтового поля.

Для невозмущенного стеллараторного поля (I.I):

$$\text{Ш}^{(0)}_{ik} \sim \varepsilon a \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sim \alpha r \sqrt{\omega}; \quad \overline{\text{Ш}^{(0)}_{21}} = \alpha \frac{d(r\omega)}{dr} \sim \alpha r \omega \tag{5.3}$$

Возмущения создают свой шир

$$\text{Ш}^{(1)}_{ik} \sim \frac{\xi r}{\sqrt{lL}}; \qquad \overline{\text{Ш}^{(1)}_{ik}(z)} \sim \frac{\xi r}{\sqrt{zL}} \tag{5.4}$$

где $z\,(< L)$ - длина усреднения. Уменьшение $\overline{\text{Ш}^{(1)}_{ik}(z)}$ понятно, так как величина локального шина $\text{Ш}^{(1)}_{ik}$ на соседних участках некоррелирована. Выбирая минимальное $l \sim a$ (I.4), максимальное $\xi \sim 1$ (2.9) и учитывая, что последнее условие означает $\alpha L \omega \sim 1$ (2.9), получим верхнюю оценку

$$\underline{\omega}_{ik}^{(1)} \sim \frac{\underline{\omega}_{ik}^{(0)}}{\sqrt{\alpha a}}\ ; \qquad \overline{\underline{\omega}_{ik}^{(1)}} \sim \overline{\underline{\omega}_{21}^{(0)}} \sqrt{\frac{L}{z}} \qquad (5.5)$$

Локальный шир, таким образом, практически не может быть увеличен;средний шир несколько возрастает, но, вероятно, более важно, что теперь он имеет все компоненты, в то время как в невозмущенном поле отлична от нуля только $\overline{\underline{\omega}_{21}^{(0)}}$.

В стохастической области оценки (5.4,5) остаются, но появляются новые возможности для стабилизации.

Во-первых, близкие силовые линии расходятся экспоненциально вдоль собственного вектора линеаризованного преобразования (2.3) с $\lambda > 1$. Угол наклона направления расходимости к азимуту φ равен:

$$\theta_p \approx \xi / \Omega_\varphi^2 \qquad (5.6)$$

и слабо[6] зависит от ψ ($\Delta\theta_p \sim \theta_p / K$, (2.3)). Средняя расходимость в расчёте на один оборот вокруг стелларатора даётся оценкой:

$$h = \overline{\left|\frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}\right|} \approx \overline{\Omega_\varphi^2 |\cos\psi|} \sim \Omega_\varphi^2 \qquad (5.7)$$

где Δ_N - расстояние между линиями. В пересчете на непрерывную длину

$$\Delta(z) \sim \exp\left(hz/L\right) \qquad (5.8)$$

Во-вторых, линии не только расходятся, но и "перемешиваются", когда расстояния между ними достаточно возрастают ($\Delta \gtrsim r$). Это приводит к экспоненциальной релаксации всякой неоднородности по φ и достаточно малой неоднородности по r $\left(\Delta r / r \lesssim \xi\right)$. Характерное "время" (длина) релаксации

$$l_p \sim L / h \qquad (5.9)$$

На бо́льших расстояниях (по r) идет диффузия с коэффициентом $D \sim (\xi r)^2 / L h_1^2$ (2.10), что эквивалентно затуханию с

6) За исключением границы стохастичности $\Omega_\varphi^2 \sim 1$.

$$l_p \sim 4\left(\frac{n_1}{\xi k_\perp r}\right)^2 \qquad (5.10)$$

где $k_\perp$ – радиальная проекция волнового вектора плазменного возмущения.

В-третьих, в результате релаксации и диффузии по r могут существенно уменьшиться градиенты температуры и плотности невозмущенной плазмы, что также затрудняет развитие неустойчивостей. Правда, при этом вопрос переносится на границу стохастичности ($\Omega_\varphi^2 \sim 1$) , где градиенты, вообще говоря, возрастают так же как и трудности исследования.

Приношу искреннюю благодарность М.С.Рабиновичу и Р.З.Сагдееву, которые привлекли внимание автора к рассматриваемой проблеме;В.И.Волосову, Г.М.Заславскому, С.С.Моисееву и Ф.А.Цельнику за многочисленные полезные дискуссии и советы, а также В.К.Мельникову – за критику.

Дополнения:

1. Кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f(s,N)}{\partial N} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(D(s)\frac{\partial f}{\partial s}\right); \quad D(s)=2\left(\frac{\xi s}{n_1}\right)^2$$

Литература

I. А.П.Попрядухин, Атомная энергия, I8 , 96 (I965).

2. Г.В.Скорняков, ЖТФ, 32, 26I, 777 (I962).

3. M. Hine, Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону (октябрь I953); Б.В.Чириков,Атомная энергия, 6, 630(I959).

~~4. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. Стохастическая неустойчивость магнитных силовых линий в системах замкнутого типа (в печати).~~

5. А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. Геометрия магнитного поля. Вопросы теории плазмы, вып.2, Госатомиздат. I963.

6. Л.М.Коврижных, ЖТФ, 32, 526 (I962).

7. Д.В.Аносов, ДАН, I5I, I250 (I963); Я.Г.Синай. Изв.АН СССР,мат. 30, I5 (I966).

8. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей, Физматгиз, I962.

9. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, ДАН I59, 306 (I964).

I0. М.С.Бережецкий, С.Е.Гребенщиков, Н.М.Зверев, И.С.Шпигель. Тороидальная магнитная ловушка стеллараторного типа с внешней инжекцией плазмы (в печати).

II. А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. Атомная энергия, I5,45I(I963).

I2. Б.В.Чириков, ДАН, I25, I0I5 (I959).

4. M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, J. B. Taylor, G. M. Zaslavski, On the Destruction of Magnetic Surfaces due to the Irregularities of Magnetic Field, Int. Rep. N 6/1966, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1966.