

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 191

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков

**Стохастичность простейшей динамической
модели с разделенным фазовым
пространством**

Новосибирск
1968

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт ядерной физики

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков

СТОХАСТИЧНОСТЬ ПРОСТЕЙШЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МО-
ДЕЛИ С РАЗДЕЛЕННЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Новосибирск

1968

A B S T R A C T

The results of numerical computations and analytical estimates for a simple model (2) of non-linear oscillations are given. This model is closely related to some applied problems (see, for instance, /9/). On the other hand, investigation of this model leads to a certain understanding of general nature of statistical laws.

The main result of the present work is an experimental confirmation of random-like (stochastic) type of motion for model (2) under condition $K \gg 1$. In particular, the relative area of the "islands" of stability is negligible (less than 1 bin of 524288 which the phase plane of the system (2) is divided in), though quite likely everywhere dense, and is decreasing exponentially with K (Fig.9); the distribution of a single stochastic trajectory over 16384 bins of phase plane was observed to be uniform with statistical accuracy about 4% and with a proper level of fluctuations; calculated and experimental values of Krylov-Kolmogorov' entropy are agreed with reasonable accuracy (Table 4).

Another important consequence which may be drawn from numerical experiments presented is that the position of stochasticity border according to a simple criterion by overlapping of first-order resonances /8,9/ turns out to be the same, in the order of magnitude, as the border of eternal Kolmogorov' stability. This was observed in a single run during 10^{10} steps of transformation (2.11) (see Fig.5).

A very complex structure was observed in the phase plane for the system (2) with a singular "force" (1.1) under $K \ll 1$ (see Fig.11). In particular, a certain incomprehensible limitation in diffusion takes place in spite of overlapping of resonances.

Проблема появления статистических свойств в динамической системе интересна с двух точек зрения. Прежде всего для так называемого обоснования статистической физики, т.е. установления связи между динамическими и статистическими законами или, более конкретно, для вывода последних как частного случая общих динамических закономерностей. Для этого необходимо исследовать принципиальную возможность такого перехода, а также значение тех дополнительных предположений вероятностного характера, которые обычно при этом делаются. Мы не будем касаться этого вопроса в данной работе^{х)}.

х) Заметим все же, что точка зрения Грэда, утверждающего, что "дополнительные (обычно стохастические) гипотезы являются логическим следствием законов движения и потому логически излишни" /14/, далеко не так очевидна. В частности, например, выбор несингулярных решений уравнения Лиувилля означает кардинальное изменение взглядов на природу механического движения, независимо от того насколько мало оно отличается от сингулярного решения классической механики. Ссылка на квантово-механическую неопределенность /14/ не достигает здесь цели, как это было подробно проанализировано Крыловым /15/. Гипотеза, согласно которой статистическая необратимость связана с процессом квантово-механического измерения /16/, также кажется нам маловероятной. При этом получается замкнутый круг, так как процесс измерения связан, в свою очередь, с макроскопическими (в том числе статистическими) свойствами классического прибора. Пожалуй, можно было бы согласиться с вышеприведенной цитатой Грэда в том смысле, что существуют какие-то еще неизвестные и очень тонкие динамические законы движения, неуловимые в обычных опытах, которые могут тем не менее приводить к макроскопическим следствиям на основе локальной неустойчивости стохастической системы и, тем самым, до конца объяснить природу статистических законов, а заодно, быть может, и процесс измерения в квантовой механике.

Не менее важно, по крайней мере с точки зрения приложений, получить практические (конкретные) условия перехода к статистическому описанию, для того, чтобы можно было уверенно применять этот простой и вместе с тем мощный метод теоретического анализа. Особенно это касается сравнительно простых систем, как например, изолированная трехатомная молекула, где вопрос о применимости статистического описания совсем не так очевиден, как в случае макроскопической молекулярной системы. Фактически для упомянутого выше примера трехатомной молекулы существуют две взаимоисключающие теории /1/, одна из которых (теория Ландау /2/ и Касселя /3/) опирается на стохастичность внутримолекулярного движения, в то время как другая (теория Слейтера /4/) предполагает, наоборот, наличие полного набора интегралов движения. В действительности же, как это, по-видимому, подтверждается прямыми экспериментами и численным счетом /5/, имеет место некоторый промежуточный случай.

К сожалению, строгий математический анализ проблемы наталкивается пока на непреодолимые трудности. Единственная более или менее реальная модель, для которой удалось доказать стохастичность^{х)}, — это система твердых сталкивающихся шариков, рассмотренная Синаем /6/. Однако, доказательство основано в этом случае на специфическом свойстве системы, — рассеивающем

х) Этим термином мы будем обозначать квази-случайный характер движения системы или, более конкретно, перемешивание с положительной энтропией Крылова-Колмогорова /15, 7/.

характере взаимодействия (столкновений), что приводит к развитию локальной неустойчивости движения для любых начальных условий. Это эквивалентно отрицательной кривизне соответствующей римановой поверхности при геометрической интерпретации динамической системы как потока геодезических. Если же система является колебательной, как это имеет место для молекулы и во многих других случаях, упомянутая кривизна оказывается, вообще говоря, переменной и доказательство не проходит.

Можно подойти к вопросу совсем с другой стороны и рассмотреть простейшее преобразование

$$\Psi_{n+1} = \{k\Psi_n\} \quad (1)$$

(фигурные скобки обозначают дробную часть аргумента), которое описывает, в определенном смысле, изменение фазы нелинейного осциллятора под действием некоторого возмущения. Относительно этого преобразования доказано, что оно является стохастическим при $k > 1$ /18/. Однако ясно, что модель (1) — слишком грубая и её трудно связать непосредственно с реальной динамической системой.

Следующим шагом в этом направлении может служить модель вида:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \{ \varphi_n + k f(\varphi_n) \} \\ \Psi_{n+1} &= \{ \Psi_n + \varphi_{n+1} \} \end{aligned} \quad (2)$$

где кроме фазы Ψ имеется также вторая динамическая перемен-

ная ψ (импульс), канонически сопряженная с фазой. Оказывается, что эта элементарная, можно сказать примитивная, модель охватывает довольно широкий круг реальных физических задач, а именно - системы слабо связанных нелинейных осцилляторов /8/ (один из примеров применения см. в /9/). Однако даже такая простая система не поддается до сих пор строгому математическому анализу. Исключением является случай специальной функции $f(\psi) = \psi$, для которого стохастичность доказана в самое последнее время Оселедцем и Синаем при обычном условии локальной неустойчивости (см., например, /9/):

$$K f'(\psi) < -4 \quad \text{или} \quad K f'(\psi) > 0 \quad (3)$$

Из-за взятия дробной части рассматриваемый случай соответствует фактически разрывной "пилообразной" функции $f(\psi)$. Для доказательства существенно, что условие (3) выполняется одновременно для всех ψ , что эквивалентно всюду отрицательной кривизне римановой поверхности при геометрической интерпретации динамической системы. Если же функция $f(\psi)$ является гладкой, то всегда имеются участки фаз (по крайней мере два) вблизи $f' = 0$, где условие (3) нарушается. Иными словами, всегда имеются области устойчивого движения. Это - типичный случай для колебательных систем. Такие системы были названы в /10/ системами с разделенным фазовым пространством.

Трудности эргодической теории в этом случае имеют, по-видимому, принципиальный характер, поскольку эргодическая (стохастическая) компонента заполняет лишь часть пространства весь-

ма сложной формы и даже, вероятно, топологии. С другой стороны, нет основания, на наш взгляд, отказываться от применения статистических методов для таких систем, в особенности, если неэргодическая компонента занимает область очень малой, хотя и ненулевой меры. Вероятно, современная эргодическая теория должна быть обобщена в направлении исключения (или отдельного рассмотрения) особых областей конечной, а не только нулевой, меры. Следует, однако подчеркнуть, что подобные системы не являются статистическими в обычном смысле этого слова, так как существуют особые, "плохие", начальные условия, для которых статистические законы не имеют силы.

Возникает вопрос, не испортят ли эти неэргодические области, хотя и малые по мере, но вполне вероятно всюду плотные, не испортят ли они статистические свойства в остальной области фазового пространства, по крайней мере за достаточно большой промежуток времени (гипотеза Синая). Выяснению этого вопроса на примере элементарной модели (2) и посвящена, главным образом, настоящая работа. Наш окончательный вывод является отрицательным, т.е. мы считаем, на основании численных экспериментов и некоторых оценок, приведенных ниже, что влиянием неэргодических областей можно пренебречь даже для такой простой системы, как (2), если только параметр K достаточно велик.

Существенно, что при этом не требуется предельного перехода $K \rightarrow \infty$. В этом отношении обычно принимаемое для обоснования статистической механики условие $N \rightarrow \infty$ ^{х)} является,

х) N - число степеней свободы, пропорциональное числу взаимодействующих частиц.

на наш взгляд, чрезмерно жестким и в то же время само по себе недостаточным. Так например, модель статистической системы, предложенная Пригожиным /11/, дает, по существу лишь имитацию статистических свойств на конечном промежутке времени и при весьма специальных начальных условиях (для конечно - го N); в ней совершенно не используются богатые возможности современной эргодической теории /12/. Более того, в /11/ даже утверждается, что обычные системы статистической физики вообще не являются эргодическими, а обладают полным набором интегралов движения. Последнее, однако, вообще говоря, неверно, как это показывает хотя бы пример Сина $/6^x)$.

Простая модель, исследованная в данной работе, показывает, что "настоящая" стохастичность может возникать на самом деле при весьма скромных требованиях к динамической системе. Существенным здесь является полный учёт нелинейности системы и, в частности, её важнейшей характеристики - переменной частоты, что приводит к конечной ширине резонансов, возможности их перекрытия и возникновения непрерывного спектра. Все эти особенности нелинейной системы не учитываются в теории Пригожина /11/, которая оперирует с постоянными частотами и поэтому является по существу линейной (в смысле динамических уравнений, не путать с линейностью уравнения Лиувилля)^{xx)}.

х) Подробное обсуждение современного состояния вопроса об интегралах движения механической системы дано в обзоре Арнольда /13/.

xx) Учёт указанных нелинейных эффектов в рамках уравнения Лиувилля был произведен в работе /17/.

Это приводит, в частности, к чрезмерно жестким условиям для имитации статистических свойств.

Подчеркнем в заключение еще раз, что все сказанное ничего не меняет в случае обычных задач статистической физики, но может быть существенным для простых механических систем (молекулярных или макроскопических).

Настоящая работа близка по характеру и методике к работе /19, 22/ (см. также /20/) с акцентом на исследование именно стохастической компоненты на предельно большом времени.

§ 1. М о д е л ь

В качестве основной модели нелинейного осциллятора для численных экспериментов мы выбрали преобразование (2) с функцией ("силой"):

$$f(\psi) = \psi^2 - \psi + 1/6 \quad (1.1)$$

Для некоторых контрольных экспериментов использовались также другие функции, о чем будет сказано ниже. Система (2) характеризуется единственным параметром K .

Выбор преобразования вместо дифференциальных уравнений диктуется желанием проследить движение системы путем численного счета на максимально возможном интервале времени. Для этого необходимо предельно упростить схему счета и минимизировать ошибки. Последние в случае преобразования сводятся только к ошибкам округления, их роль будет обсуждаться более под-

робно ниже. С другой стороны, дифференциальные уравнения любой механической системы могут быть сведены, в принципе, к некоторому преобразованию посредством обычного S -оператора, так что это не нарушает, само по себе, общности рассмотрения. Конкретная форма преобразования обсуждалась выше, вид же функции (1.1) определяется опять таки соображениями выбора максимально простого для счета, но нетривиального (т.е. с разделенным фазовым пространством) случая. В частности, выбрано минимально возможное число умножений - два; линейный член $(-\psi)$ уменьшает (на всякий случай!) сингулярность $f(\psi)$ (разрыв только производной); коэффициент $1/6$ устраняет постоянный дрейф φ , оставляя только диффузию. Дробная часть берется по обоим переменным, чтобы ограничить фазовое пространство системы единичным квадратом (тором).

Программирование системы (2) для численного счета на БЭСМ-6 производилось вручную (в коде ЭВМ) для достижения максимальной скорости счета. В частности, весь основной цикл программы удалось разместить в быстрых регистрах машины. Скорость счета составляла около 20 мксек на шаг преобразования (2) с функцией (1.1).

Основной выходной информацией являлась функция распределения траектории на фазовой плоскости, т.е. число попаданий траектории в каждую из ячеек фазового квадрата. Мы не приводим ее в данной работе ввиду крайней громоздкости даже для весьма грубого разбиения фазовой плоскости (32×32 ячейки, 1024 чисел). На основе функции распределения может быть построена го-

раздо более компактная фазовая карта (см., например, рис.1,2), на которой отмечается только факт попадания или непадания траектории в каждую из ячеек.

Наиболее мелкое разделение фазовой плоскости для получения функции распределения составляло $128 \times 128 = 16384$ ячейки. Для получения только фазовой карты нет необходимости занимать целое слово памяти машины под каждую ячейку, достаточно использовать один двоичный разряд /21/. Это позволяет увеличить число ячеек до $512 \times 1024 = 524288$. При таком числе ячеек вывод даже фазовой карты становится невозможным и приходится ограничиться подсчетом пустых и заполненных ячеек и выводом характерных участков карты фазовой плоскости (см., например, рис.8). Отметим, что все размеры масок для функции распределения и фазовой карты выбраны равными некоторой степени 2, что существенно упрощает программирование.

§ 2. Колмогоровская устойчивость

Колмогоровская устойчивость означает, как известно, существование нерезонансных инвариантных торов /13/, которые для системы (2) имеют вид кривых, пересекающих весь фазовый квадрат вдоль оси ψ . В частности, для невозмущенной системы ($k = 0$) это просто прямые $\psi = \text{const}$. Согласно теории КАМ^х эта инвариантность не распространяется, вообще говоря, на резонансные области, расположенные для преобразования (2) в окрестности рациональных значений импульса:

$$\varphi_p = \frac{2}{q}$$

х) Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера /13/.

(2.1)

τ, q - целые. Разлагая $f(\psi)$ в ряд Фурье:

$$f(\psi) = \sum_q f_q e^{2\pi i q \psi} \quad (2.2)$$

и выделяя резонансную гармонику, получим аналогично /9/ следующую оценку для ширины резонансов в первом приближении:

$$(\Delta\psi)_q \sim \sqrt{\kappa f_q / q} \quad (2.3)$$

Если резонансы этой системы перекрываются, то нерезонансные торы, а вместе с ними и колмогоровская устойчивость, исчезают. В простейшем случае, когда амплитуды высших гармоник быстро убывают, достаточно учесть перекрытие основных резонансов ($q = 1, \tau = 0; 1$). Это приводит к оценке:

$$\kappa \sim 1 \quad (2.4)$$

для границы стохастичности /8,9/.

При медленном спадаании f_q перекрытие резонансов определяется суммой:

$$\Sigma = \sum_q q (\Delta\psi)_q \sim \sqrt{\kappa} \sum_q (q f_q)^{1/2} \quad (2.5)$$

где мы учли, что имеется q различных резонансов гармоники q ($\tau = 1, 2, \dots, q$). Положим:

$$f_q \sim q^{-(\ell+2)} \quad (2.6)$$

асимптотически при $q \gg 1$; ℓ - параметр гладкости силы $f(\psi)$, равный в простейшем случае числу первых непрерывных производных. Сумма (2.5) расходится при

$$\ell \leq 1 \quad (2.7)$$

и, следовательно, колмогоровская устойчивость отсутствует в этом случае при любом K . Аналогичная оценка приведена также в работе /17/. Следует, однако, иметь в виду, что выражение (2.7) даёт, вообще говоря, нижнюю границу, так как используется ширина резонансов по первому приближению. Верхняя граница, полученная Мозером /28/, в данном случае равна: $\ell > 6$ (для устойчивости).

В случае силы (1.1) $\ell = 0$ (разрыв первой производной) и поэтому можно ожидать отсутствия колмогоровской устойчивости при любых K . На рис.2 приведена фазовая карта для $K \approx 0.2$. Видно, что стохастическая компонента пересекает всю область по ψ , оставляя лишь изолированные островки устойчивости. Это, действительно, означает отсутствие колмогоровской устойчивости, как она была определена выше.

При меньших значениях K , однако, область, занятая траекторией, оказывается ограниченной по ψ , по крайней мере в течение времени счета $t_0 = 10^8$. Более того, к концу движения ($t \geq 0.7 t_0$) вообще не заметно никакой диффузии с точностью до размера фазовой ячейки ($\Delta\psi = 1/128$).

Для другой силы:

$$f(\psi) = \begin{cases} \psi - 1/4 ; & \psi \leq 1/2 \\ 3/4 - \psi ; & \psi \geq 1/2 \end{cases} \quad (2.8)$$

с тем же параметром гладкости $\ell = 0$ стохастическая компонента оставалась ограниченной по ψ даже для $K \approx 1$ в течение $t = 5 \cdot 10^8$.

В настоящее время не вполне ясно, означает ли это существование некоторой области колмогоровской устойчивости, т.е. неполное перекрытие резонансов, или же очень малый коэффициент диффузии. Можно только утверждать, что резонансные области занимают значительную часть фазовой плоскости, так как из 10 случайно выбранных начальных условий (для силы (1.1), $K \approx 0.01$) 4 оказались лежащими внутри резонансов высоких ($q \sim 100$) гармоник (ограниченное движение по ψ), 6 попали на узкие ($\Delta\psi \sim 10^{-3}$) стохастические полосы (вероятно разрушенные сепаратисы) и не было ни одного случая колмогоровской устойчивости. Сводная фазовая карта приведена на рис.11. Отчетливо видны дополнительные резонансные области внутри стохастических полос. Однако наиболее интересной, на наш взгляд, особенностью движения являются перекрывающиеся стохастические полосы с ограниченной диффузией по ψ . Это особенно ярко демонстрирует необычайно сложную структуру фазовой плоскости рассматриваемой системы, если учесть к тому же, что размер ячейки ($\Delta\psi$, $\Delta\psi$) на рис.11 равен приблизительно $3 \cdot 10^{-5} \times 6 \cdot 10^{-5}$.

Отметим, что подобная ситуация наблюдалась раньше в чис-

ленных экспериментов Курата /31/ и Хэйна /27/. Таким образом, при $K \ll 1$ динамическая система (2) оказывается в некотором смысле даже более устойчивым, чем это можно ожидать по первому приближению (2.8).

Для сравнения на рис. 3 показана фазовая карта системы (2) с аналитической силой^{х)}:

$$f(\psi) = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta) d\theta \quad (2.9)$$

В этом случае амплитуды гармоник убывают экспоненциально, так что можно пренебречь всеми резонансами, кроме основных. Из рис. 3 видно, что остается только небольшая неустойчивая полоска вдоль сепаратрисы резонанса. Согласно работе В.К. Мельникова /24/ неустойчивость вблизи сепаратрисы имеет место практически всегда.

Использование силы (2.9) для численных экспериментов неудобно, так как вычисление синуса занимает слишком много времени. Поэтому мы обращались к (2.9) только для контрольных экспериментов (см. ниже).

Вернемся теперь к изолированным устойчивым областям, которые хорошо видны на рис. 1, 2. Они расположены внутри резонансов разных гармоник. Наибольшая область устойчивости соответствует основному резонансу ($\nu = 1$), хотя на рис. 2 можно различить устойчивые области резонансов по пятую гармонику включительно.

х) Множитель 2π в амплитуде введен для более удобного сопоставления с (1.1).

Причина повышенной устойчивости этих областей связана с тем, что траектории здесь ограничены по Ψ (см., например, рис.1.4) и не пересекают, вообще говоря, особенности силы $f(\Psi)$. С другой стороны, теория КАМ применима, с некоторой модификацией /29/, и к внутренней области резонансов. Она приводит к выводу о существовании при определенных условиях достаточно малой устойчивой области вокруг эллиптической точки (вокруг периодического решения в общем случае). Отсюда видно, что наиболее устойчивой областью внутри резонанса является непосредственная окрестность эллиптической точки. Но в таком случае критерий стохастичности можно сформулировать как условие превращения эллиптической точки в гиперболическую, как это было сделано Гринном /22/. По порядку величины такой критерий совпадает с критерием по возникновению локальной неустойчивости /8/.

Размер устойчивой области вокруг эллиптической точки определяется шириной стохастического слоя вблизи сепаратрисы. Применяя обычный критерий стохастичности /8/, можно показать^{х)}, что ширина стохастического слоя порядка (для аналитической $f(\Psi)$):

$$(\Delta \Psi_s)^2 \sim e^{-\frac{\omega}{2\Omega_\varphi}}, \quad (2.10)$$

Здесь Ω_φ - частота фазовых колебаний резонанса; ω - минимальная частота возмущения. Ширина (2.10) оказывается порядка

х) См., например, /25/, где аналогичная методика применена к несколько иной задаче.

расщепления сепаратрисы, вычисленного В.К.Мельниковым /24/.

В случае нескольких резонансов ω имеет порядок расстояния между соседними резонансами. Оценка (2.10) проливает, таким образом, свет на механизм возникновения стохастичности при перекрытии резонансов.

Возникает фундаментальный вопрос, является ли приближенная граница (2.10) той самой границей вечной устойчивости, существование которой вытекает из теории КАМ?

Частичный ответ на этот вопрос даёт устойчивая траектория, отмеченная на рис.1 кружками и лежащая на самой границе устойчивости. Устойчивость движения в области (2.4) сохраняется, следовательно, по крайней мере в течение времени движения по упомянутой траектории ($t = 5 \cdot 10^6$). Для усиления этого результата необходимо просчитать хотя бы одну устойчивую траекторию типа изображенной на рис.1 на предельно большом времени.

Для проведения этого эксперимента была выбрана модель, задаваемая преобразованием:

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} &= \psi_n - \psi_n^3 \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \psi_{n+1}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Удобной особенностью этой модели является отсутствие параметра K , введение которого эквивалентно здесь преобразованию:

$\psi \rightarrow \psi/\sqrt{K}$; $\psi \rightarrow \psi/\sqrt{K}$. Кроме того, для устойчивой траектории операции взятия дробной части являются из-

лишними. Это позволяет сократить время счета до 7 мксек на один шаг (2.11).

Для экспериментального нахождения приближенной границы стохастичности (на коротком времени) использовалась вспомогательная система:

$$\varphi'_{n+1} = \left\{ \varphi'_n - 8(\varphi'_n - 1/2)^3 \right\} \quad (2.12)$$

$$\psi'_{n+1} = \left\{ \psi'_n + \varphi'_{n+1} \right\}$$

фазовая карта которой представлена на рис.4 для $t = 5 \cdot 10^6$.

Дробные части здесь совершенно необходимы, так как в противном случае траектория в стохастической области очень быстро уходит на бесконечность: $\varphi_n \sim \psi_n \sim c^{(3^n)}$; $c > 1$

При счете на ЭВМ это приводит к АВОСТу. Коэффициент преобразования 8 и сдвиг по ψ на $1/2$ выбраны из соображений удобного размещения устойчивой области в стандартном фазовом квадрате 1×1 .

Из рис.4 следует, что граница устойчивости лежит где-то в интервале: $0.69 < \psi_c < 0.93$ ($\varphi = 0$). Более аккуратные измерения /26/ приводят к значению $\psi_c \approx 0.76$ (для $t = 10^6$).

Заметим, что положение границы устойчивости не может зависеть от особенности силы, связанной со взятием дробной части в (2.12) (разрыв функции $f(\psi)$). Действительно, граница в данном случае четко отделена от месторасположения особенностей ($\psi = 0; 1$); поэтому последние никак не могут влиять на траектории системы, расположенные между границей и особенностями.

В этом - существенное отличие движения на рис.4 от случая рис.1, где граница устойчивости практически совпадает с особенностью.

Устойчивая (для $t = 5 \cdot 10^8$) траектория, отмеченная на рис.4 крестами, лежит на самой границе. Однако она не является сплошной, т.е. расположена внутри резонанса второго порядка (по терминологии /22/), который представляет собой резонанс с колебаниями в устойчивой области (т.е. внутри резонанса первого порядка). Упомянутая траектория может оказаться поэтому лежащей в "островках" устойчивости внутри стохастической области (см. § 3). Так оно и оказывается в действительности согласно /26/.

В связи с этим для длинного счета была выбрана более "нормальная" траектория, отмеченная на рис.4 кружками, для которой $\psi \approx -0.67$ ($\psi = 0$). Это - на 12% меньше критического значения по фазе и на 40% - по энергии.

Счет для этой траектории велся в течение $t = 10^{10}$ шагов (около 20 часов работы БЭСМ-6). Через каждые 100 шагов производилась отметка положения системы на фазовой карте с минимальным размером ячейки ($1/512$ (по φ) на $1/1024$ (по ψ)). Траектория занимала 1876 ячеек, причем это число не менялось для $t > t_1 = 10^8$.

Последнее значение согласуется по порядку величины с ожидаемым, которое может быть оценено как

$$t_1 \sim \frac{L^2}{\gamma} \quad (2.13)$$

где L - длина траектории (число ячеек), а $\nu = 1/100$ - частота вывода на фазовую плоскость. Оценка исходит из предположения "случайного" пересечения ячейки траекторией, так что из L ячеек может встретиться одна, в которой длина траектории будет в $\sim L$ раз меньше средней.

Для усиления полученного результата была произведена следующая дополнительная обработка, предложенная Арнольдом. На нижнем горизонтальном участке траектории с минимальной кривизной (рис.4) был выбран квадрат со стороной $2^{-18} \approx 4 \cdot 10^{-6}$. Были выведены точные значения φ , ψ всех точек (около 100 точек), попадающих в этот квадрат в течение $t = 10^8$ в начале и в конце длинного счета. Полученные значения интерполировались прямой линией по методу наименьших квадратов, отдельно для начала и конца длинного счета. Разности $\Delta\psi$ между координатами точек и интерполяционной прямой ($\Delta\psi = 0$), пропорциональные расстоянию точек до этой прямой, отложены на рис.5 в зависимости от времени (α) и от ψ (ξ). Единицей по оси $\Delta\psi$ служит величина $\Delta_2 = 10^{-12}$, равная приблизительно минимальной ошибке округления.

На рис.5б не заметно каких-либо корреляций между $\Delta\psi$, ψ , например, за счет кривизны траектории или попадания внутрь резонанса высокого порядка. Можно заключить поэтому, что разброс точек вызван некоторой "диффузией". Процесс диффузии особенно наглядно виден на рис.5а. Он может быть вызван либо ошибками округления, либо тем, что мы еще не дошли до области вечной устойчивости теории КАМ. Для проверки по-

следнего предположения эксперимент был повторен для траектории, лежащей значительно ближе к положению равновесия ($\psi = \psi = 0$), чем траектория длинного счета (ψ меньше в 1.7 раза, энергия меньше в 2.9 раза), а также для траектории, лежащей дальше (ψ больше на 11%, энергия больше на 23%). Результаты контрольного эксперимента представлены на рис.5в. Видно, что диффузия существенно не изменялась, так что её следует, по-видимому, отнести к действию ошибок округления.

Среднее смещение траектории на один шаг, определенное из сдвига (Δ_0) интерполяционных прямых на рис.5, не превосходит:

$$\langle \Delta_1 \rangle \leq \frac{\Delta_0}{t} \approx 1.2 \cdot 10^{-19} \quad (2.14)$$

Коэффициент диффузии, определенный из этого же сдвига, равен:

$$D(t) \sim \frac{\Delta_0^2}{t} \sim 10^{-23}, \quad t = 10^{10} \quad (2.15)$$

Это существенно меньше значения, которого можно было бы ожидать при "случайном" накоплении ошибок: $D_2 \sim \Delta_2^2 \sim 10^{-24}$

Отметим, что значения D , оцененные на меньших интервалах времени, оказываются значительно больше: $D(10^6) \sim 10^{-26}$;

$D(10^8) \sim 3 \cdot 10^{-27}$. Создается впечатление, что коэффициент диффузии падает по мере расширения диффузионной области. Это очень напоминает слабую диффузию при $k \ll 1$ для сингулярной силы, описанной в начале этого параграфа.

Наличие диффузии не противоречит теории КАМ, поскольку ошибки округления эквивалентны некоторому негладкому (с большим числом мелких разрывов) возмущению, недопустимому для теории. Важно отметить, что даже в этом случае диффузия оказывается чрезвычайно слабой.

Подводя итоги, представляется весьма вероятным, что траектория длинного счета лежит в области вечной устойчивости теории КАМ. Иными словами, точная граница устойчивости для преобразования (2.11) находится где-то в интервале ($\Psi = 0$):

$$0.67 < \Psi_c < 0.76 \quad (2.16)$$

Как уже неоднократно отмечалось (см., например, /9, 8/) граница устойчивости в общем случае не является просто линией, а имеется целая переходная область из чередующихся устойчивых и неустойчивых слоев все более и более мелкой структуры, соответствующих резонансам высших порядков /22/. При этом некоторые из областей характеризуются сравнительно большим временем развития неустойчивости. Так, например, по данным /26/ при увеличении времени счета от $3 \cdot 10^5$ до 10^6 граница смещается от $\Psi = 0.84$ до $\Psi = 0.76$, т.е. приблизительно на 10%.

Укажем для сравнения, что критерий локальной неустойчивости /9/, который проще всего применить в данном случае для оценки положения границы стохастичности, дает

$$\Psi_s \sim \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} \approx 1.15 \quad (2.17)$$

Хотя рассмотренный пример устойчивой траектории на столь длинное время является (по необходимости!) единственным, он позволяет надеяться, что положение точной границы устойчивости по теории КАМ может быть действительно оценено по сравнительно простому критерию стохастичности /8/. Во всяком случае такое совпадение наблюдалось во всех (около 100) различных случаях счета для времен $t \sim 10^7$. В следующем параграфе приводится еще один пример устойчивой траектории вблизи границы стохастичности (рис.7).

§ 3. Острова устойчивости в стохастической области (квази-резонансы)

Основной задачей наших экспериментов является изучение области стохастичности, когда эргодическая компонента захватывает почти всю фазовую плоскость системы (2). Термин "почти" означает у нас исключение областей конечной, а не нулевой меры, как в эргодической теории. Предположение о том, что при любом $K \rightarrow \infty$ могут оставаться "островки" устойчивости основано на двух фактах.

Во-первых, легко показать (см.ниже), что при некоторых специальных значениях $K \rightarrow \infty$ существуют устойчивые периодические решения преобразования (2) с периодами $T = 1, 2, \dots$ и т.д.

Во-вторых, число периодических решений для стохастической системы возрастает экспоненциально /23/:

$$\nu(T) \sim e^{h(T-1)} \quad (3.1)$$

где h - энтропия динамической системы в области стохастичности; часть этих решений может оказаться устойчивой (см. ниже). Мы несколько изменили здесь оценку (3.1) по сравнению с /23/ для получения правильной асимптотики при $T = 1; h \rightarrow \infty$.

Рассмотрим вначале специальные значения K для силы (1.1). Мы ограничимся случаем $T = 1$ (неподвижная точка), который приводит к наиболее крупным островкам устойчивости.

Для неподвижной точки преобразования (2) имеем:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ K f(\psi_0) &= z\end{aligned}\tag{3.2}$$

где z - любое целое число. Устойчивость неподвижной точки имеет место при условии (см. /9/, а также § 4):

$$-4 < K f'(\psi_0) < 0\tag{3.3}$$

Специальные значения K определяются из совместимости (3.2,3).

Этому условию удовлетворяет интервал

$$\Delta K \approx \frac{8}{K f(\psi_1) \cdot f''(\psi_1)} : f'(\psi_1) = 0\tag{3.4}$$

вокруг значения K , соответствующего центру области устойчивости (3.3) и равного:

$$K_z = \frac{z}{f(\psi_1)} - \frac{2}{z \cdot f''(\psi_1)}\tag{3.5}$$

Фазовая площадь этой области устойчивости составляет:

$$S(k) \sim \Delta\varphi \cdot \Delta\varphi \sim \left(\frac{\gamma}{k f''}\right)^2; \quad \Delta\varphi \sim \Delta\varphi \sim \frac{\gamma}{k f''} \quad (3.6)$$

Существенно, что любой размер этой области становится очень малым при $k \gg 1$.

Пример устойчивой траектории в такой области для $k \approx 60$ приведен на рис. 6; $t = 10^8$; размер ячейки $(1/512 \times \frac{1}{1024})$.

Относительная площадь области устойчивости составляет в этом случае $\sim 10^{-3}$.

Из выражения (3.4) видно, что доля специальных значений k порядка k^{-1} . Если усреднить размер области устойчивости (3.6) по k , получим

$$\overline{S(k)} \sim \left(\frac{\gamma}{k}\right)^3 \quad (3.7)$$

Для значений k вне интервала (3.4) площадь устойчивых областей убывает значительно быстрее, как это видно из данных табл. 1. В таблице приводится число ячеек фазовой плоскости, незаполненных стохастической компонентой.

Фазовая карта для одного такого случая показана на рис. 8 (сила (1.1); $k = 8$; $t = 10^8$). Ясно видны два островка устойчивости. Более детальный анализ показывает (см. ниже), что имеется и третий островок, отмеченный на рис. 8 пунктиром. Он уже ячейки фазовой плоскости и поэтому остался невидимым. Период движения в этой устойчивой области $T = 3$, а цифры на фазовой карте показывают последовательность движения. Два остров-

ка (1,2) лежат в области устойчивых фаз (3.8), причем один из них (1) сильно вытянут вдоль направления растяжения (см. § 4). Третий островок (3) лежит в неустойчивой области по ψ и сильно вытянут вдоль направления сжатия.

На рис.7 показаны три траектории внутри одного из островков (3), с помощью которых и было установлено существование трех областей устойчивости для случая, представленного на рис.8. Точками на рис.7 отмечены значения, полученные в конце счета длительностью $t = 2 \cdot 10^7$ шагов (для средней траектории). Обращает на себя внимание их регулярность, которая становится еще более удивительной, если принять во внимание, что они совпадают с большой степенью точности (лучше 10^{-4}) со значениями, полученными в самом начале счета, которые отмечены на рис.7 крестами. Совпадение имеет место по обеим координатам, что указывает на попадание в окрестность резонанса второго порядка очень высокой гармоники ($Q = 108$).

Рассмотренный случай подтверждает частично гипотезу Синая (см. введение) о том, что область устойчивых фаз может "испортить" стохастичность и вне этой области. Существенно, однако, каковы размеры и общая площадь областей устойчивости. Из данных таблицы 1 видно, что обе величины быстро стремятся к нулю с ростом K в пределах точности эксперимента, когда минимальный различимый размер на фазовой плоскости составляет $\sim 10^{-3}$.

Ничтожная доля устойчивых областей может быть связана с конкретным видом силы (1.1). Именно, имеется только одна об-

ласть устойчивых фаз (3.3) вблизи $\Psi = 1/2$. При этом невозможно периодическое решение, лежащее целиком в области (3.3), что может привести к существенному сокращению числа устойчивых областей. Для проверки этого предположения эксперимент был повторен с силой (2.8). В последнем случае имеются две области устойчивых фаз: $\Psi = 1/4$; $3/4$, так что упомянутое выше ограничение отпадает.

Результаты этого эксперимента приведены в таблице 2 и на рис. 9. За исключением трех последних значений K , лежащих как раз на левом краю интервала (3.3), для всех остальных (неспециальных) K площадь устойчивых областей очень быстро убывает с ростом K .

Для правильного понимания этого результата требуется привести некоторые оценки. Пусть

$$\omega_c = \frac{8}{K f''(\Psi_1)} \quad (3.8)$$

есть вероятность попадания в область устойчивых фаз (3.3); мы предполагаем здесь, что имеются две устойчивые области с одинаковыми значениями f'' . Предположим, далее, что при T ,

$K \gg 1$ периодические траектории расположены на фазовой плоскости "случайно". Это предположение очень существенно, так как в противном случае весьма затруднительно получить какие-либо количественные оценки. Оно оправдывается интуитивно тем, что мы рассматриваем почти стохастическую систему.

Дополнительные соображения в пользу высказанного выше предположения можно получить, рассматривая механизм образо-

вания большого числа (3.1) периодических траекторий. При $K \ll 1$ система резонансов первого порядка образует множество периодических решений $\nu(T) \sim T^2$ (по числу резонансов

$\varphi = z/q$, $q \leq T$). Что же касается периодических решений, связанных с резонансами высших порядков, то они целиком лежат внутри резонансов первого порядка. Поэтому их можно не учитывать вплоть до границы стохастичности. В частности, критерий стохастичности определяется только резонансами первого порядка. Заметим, что резонансы второго порядка определяют ширину стохастического слоя вблизи сепаратрисы резонансов первого порядка. Это может быть существенно для вычисления коэффициента диффузии. Однако, согласно оценке (2.10) ширина стохастического слоя может быть выражена в конечном счете снова через параметры резонансов первого порядка.

Если же $K \gg 1$, то резонансы различных порядков перемешиваются между собой и распределяются более или менее равномерно по фазовой плоскости.

Возможно несколько механизмов образования устойчивых периодических траекторий в стохастической области. Наиболее простой из них соответствует такому случаю, когда все T точек траектории попадают в область устойчивых фаз (3.3)^{х)}. Вероятность этого равна ω_c^T , а число таких траекторий есть (3.1):

$$\nu_s^{(1)}(T) \sim \omega_c^T \cdot \nu(T) \sim \omega_0 (\omega_0 e^h)^{T-1} \quad (3.9)$$

х) Часть этих траекторий может быть неустойчивой из-за параметрического резонанса, связанного с переменной частотой фазовых колебаний. Поэтому нижеследующая оценка даёт верхнюю границу для числа устойчивых периодических решений этого типа.

Эта оценка очень чувствительна к значению параметра $\gamma = \omega_c e^h$.
 Для обоих типов силы, использованных до сих пор (1.1; 2.9)

$\gamma < 1$ (см. § 4). Однако можно легко сконструировать такую $f(\psi)$, чтобы $\gamma > 1$.

Возьмем, например, "пилу":

$$f(\psi) = \begin{cases} \psi - 1/4 & ; \quad \psi \leq 1/2 \\ 3/4 - \psi & ; \quad \psi \geq 1/2 \end{cases} \quad (3.10)$$

и "сгладим" её вершины квадратичной функцией:

$$f(\psi) = \frac{1}{4} - \delta - \mu (\psi - 1/2)^2 \quad (3.11)$$

для $\psi \approx 1/2$ и аналогично для $\psi \approx 0; 1$. Ширина каждого из квадратичных участков (3.11) при $\mu \rightarrow 0$ равна: $\Delta \approx 2\delta$, а вероятность попадания в область устойчивых фаз есть

$$\omega_c = \begin{cases} 2\delta & ; \quad 4 < K \leq 2/\mu\delta \\ 4/\mu K & ; \quad K \geq 2/\mu\delta \end{cases} \quad (3.12)$$

При $\delta, \mu \rightarrow 0$ энтропия равна: $h = \ln K$ (§ 4) и мы получаем:

$$\gamma = \begin{cases} 2\delta K & ; \quad 4 < K \leq 2/\mu\delta \\ 4/\mu & ; \quad K \geq 2/\mu\delta \end{cases} \quad (3.13)$$

Для $\mu < 4$ критическое значение K приходится на первую область:

$$K_c \approx 1/2\delta \quad (3.14)$$

В таблице 3 представлены результаты численных экспериментов с силой (3.10, 11). Совершенно ясно, что ожидаемое значительное увеличение устойчивых областей при $\gamma > 1$ не происходит. Между тем размер каждой из устойчивых областей определяется по-прежнему оценкой (3.6) и существенно превышает размер ячейки фазовой плоскости (см, рис.6).

Возможное объяснение этого результата состоит в следующем. При $\gamma > 1$ суммарная площадь всех устойчивых областей расходится для $T \rightarrow \infty$, что означает их сильное перекрытие. Но в таком случае мы можем применить общий критерий стохастичности [8] по перекрытию резонансов. Действительно, резонансная область нелинейной системы означает, по существу, устойчивую область квази-периодического движения в окрестности периодической траектории. Смысл перекрытия резонансов как критерия стохастичности заключается в следующем. Прежде всего при перекрытии резонансов траектория движения получает возможность переходить из одной резонансной области в другую, т.е. она не локализована больше в окрестности исходного периодического решения. Эта черта сохраняется и в случае перекрытия квази-резонансов, как мы будем называть устойчивые области при $K \gg 1$.

С другой стороны взаимодействие соседних резонансов приводит к образованию стохастического слоя в окрестности резонансной сепаратрисы, ширина которого растет по мере сближения резонансов и захватывает всю резонансную область к моменту перекрытия (2.10). Нечто подобное имеет место, по-видимому, и для квази-резонансов. Частота фазовых колебаний

определяется теперь расположением периодической траектории в области устойчивых фаз (3.3). Существенно, что $\Omega_{qr} \sim 1$ для всех квази-резонансов рассматриваемого типа. Что же касается "расстояния" между квази-резонансами Ω (2.10), то при условии $\gamma > 1$, когда число квази-резонансов неограниченно возрастает с ростом T , ясно, что имеются любые Ω , что и приводит к разрушению всей системы квази-резонансов. Если же $\gamma < 1$, то полное число квази-резонансов $\sim \omega_0 \approx 1$. Это означает, что квази-резонансы существуют лишь для специальных значений K , как это было описано выше.

Другой механизм устойчивости (образования квази-резонансов) связан с попеременным попаданием траектории трансверсального потока (трансверсали), то в конус растяжения, то в конус сжатия. Под трансверсальным потоком понимается относительное движение двух точек фазовой плоскости /12/. В случае близких траекторий трансверсальный поток описывается линеаризованным преобразованием, которое будет рассмотрено подробно в § 4. Напомним только, что устойчивый случай соответствует повороту трансверсального вектора $(\Delta\psi, \Delta\psi)$, а неустойчивый (стохастический) — его растяжению или сжатию.

Как будет показано в § 4 области (сектора) направлений собственных векторов растяжения и сжатия не перекрываются.

При заданных направлениях собственных векторов имеется два взаимодополнительных конуса (сектора) — сжимающий и растягивающий, в зависимости от изменения длины трансверсального вектора. При переходе от точки к точке вдоль траектории движения эти конуса, вообще говоря, перекрываются. Од-

нако, для $K \gg 1$ перекрывание возможно лишь в очень узкой области фаз. Поэтому трансверсальные траектории будут асимптотически приближаться к некоторой особой траектории (асимптоте), составляющей с собственным вектором растяжения угол $\sim 1/K$. (8.4). Отсюда вытекает невозможность попеременного попадания трансверсали то в конус растяжения, то в конус сжатия.

Такая возможность появляется в том случае, когда среди точек периодической траектории имеется хотя бы одна лежащая в области устойчивых фаз (3.3). В этой области трансверсальный вектор поворачивается и поэтому возможен переброс его в область сжатия.

Трансверсальное движение разбивается при этом на три фазы: растяжение, сжатие и поворот. Если период основного движения равен T , то длительность сжатия и растяжения составляют по $(T-1)/2$. За время растяжения угол трансверсали с асимптотой уменьшится до значения

$$\beta \sim \beta_0 e^{-2h(T-1)/2} \sim e^{-h(T-1)} \quad (3.15)$$

где $\beta_0 \sim 1$. Очевидно, что поворот должен быть осуществлен с такой же, по порядку величины, точностью, так как движение вдоль сжимающей асимптоты симметрично. Вероятность такого поворота $\sim \omega_0 \beta T$, откуда число устойчивых периодических решений (квази-резонансов):

$$V_s^{(2)}(T) \sim \omega_0 \beta T \chi(T) \sim \omega_0 T \quad (3.16)$$

Хотя эта оценка является весьма неопределенной на фоне экспоненциальной оценки (3.1) она, по-видимому, не противоречит предположению, что полное число квази-резонансов оказывается бесконечным, а из работы /23/ следует, что они расположены всюду плотно.

Размер квази-резонанса можно оценить как $\Delta S \sim \Delta \Psi (\Delta z)^2$ где Ψ, z - полярные трансверсальные координаты, причем $\Delta \Psi \sim \rho$, а Δz определяется из условия необходимой точности поворота: $\Delta z \sim \beta$. Следовательно, даже самый максимальный размер устойчивой области:

$$\Delta z \sim e^{-h(T-1)} \quad (3.17)$$

убывает экспоненциально. Полная площадь всех T устойчивых областей квази-резонанса равна:

$$(\Delta S)_1 \sim T e^{-3h(T-1)} \quad (3.18)$$

а для всех квази-резонансов рассматриваемого типа:

$$S(k) \sim \sum_{T=T_1}^{\infty} \omega_0 T^2 e^{-3h(T-1)} \quad (3.19)$$

Нижний предел суммирования для произвольного K определяется из условия, чтобы $\gamma_s^{(2)}(T_1) \sim 1$, т.е. чтобы квази-резонансы реально существовали:

$$T_1 \sim \left(2/\omega_0\right)^{1/2} \quad (3.20)$$

Откуда:

$$S(k) \sim \frac{1}{h} e^{-3h(\sqrt{\frac{k}{2}} - 1)} \approx \left(\ln \frac{k}{2}\right)^{-1} e^{-3\left(\ln \frac{k}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{k}{2}} - 1\right)} \quad (3.21)$$

Последняя оценка дана для аналитической силы (2.9); она представлена сплошной линией на рис.9. Оценка (3.21) очень чувствительна к величине $\omega_c(k)$. Поэтому для других сил значения K экспериментальных точек на рис.9 пересчитаны по ω_c : $K_{эф} = 4/h\omega_c$ (3.8). Кроме того, около точек силы (3.10,11) поставлены значения параметра $\gamma = \omega_c e^h$. Видно, что оценка (3.21) весьма хорошо (учитывая её грубость) совпадает с экспериментальными точками силы (2.9). В остальных случаях можно заметить, что точки лежат, как правило, тем ниже от кривой (3.21), чем больше значение γ . Это может быть, по-видимому, объяснено качественно тем, что существуют другие типы квазирезонансов.

Для только что рассмотренных квази-резонансов период фазовых колебаний совпадал с периодом основного движения:

$T_\varphi = T$. Это условие не является обязательным, траектория может попадать в область устойчивых фаз (3.3) несколько раз за период T , скажем, $N = T/T_\varphi$ раз. В общем случае длина каждого периода фазовых колебаний может быть различна: $T_\varphi = \langle T_i \rangle$; $\sum_{i=1}^N T_i = T$. Если T_i не слишком сильно отличаются друг от друга, то можно приближенно считать, что точность каждого поворота будет определяться длиной своего периода (3.15): $\beta_i \sim e^{-h(T_i - 1)}$

Вероятность определенной последовательности устойчивых областей $\sim \prod_{i=1}^N (\omega_c e^h) e^{-h T_i}$, а число устойчивых траекторий этого типа есть:

$$V_s^{(3)}(T) \sim (\omega_c e^h)^N e^{-h} C(T, N) \quad (3.22)$$

где $C(T, N)$ — число различных комбинаций T_i . Поскольку наши оценки справедливы при $T_i \approx T_{\varphi}$, можно положить: $C(T, N) \sim n_0^N$, где $n_0 = 2T_{\varphi} \leq T/N$ ($T \gg 1$; $2 \lesssim 1$). Следовательно ($N \gg 1$):

$$V_s^{(3)}(T) \sim (2T_{\varphi})^N \quad (3.23)$$

Полное число таких траекторий, а также площадь устойчивых областей расходится уже при любых γ . Однако, минимальный период, с которого начинается расходимость, зависит от γ :

$$T_{min} \sim (2\gamma)^{-1} \quad (3.24)$$

По аналогии с обычными резонансами можно предположить, что полное взаимное разрушение квази-резонансов происходит только при близких частотах фазовых колебаний (см. § 2.6). Отсюда следует, что остаются неразрушенными квази-резонансы всех типов с $T < T_{min}$ (3.24); их число уменьшается по мере увеличения γ . Заметим, что квази-резонансы последнего типа менее устойчивы, чем предыдущего из-за параметрического резонанса (см. примечание на стр. 28).

Несмотря на все приведенные выше экспериментальные данные, может еще остаться известное сомнение, не является ли все же система областей устойчивости столь тонкой, что она ускользает от наблюдения (подобно одной из областей устойчивости на рис. 8). Нам кажется, что ответ на этот вопрос даёт следующий глобальный эксперимент. Мы имеем всего около 100 случаев счета при $K \gg 1$. Ни в одном из них мы не попали в область устойчивости, несмотря на самые различные начальные условия.

§ 4. Стохастичность

В предыдущем параграфе мы убедились, что островки устойчивости в стохастической области, которые сами по себе представляют грубое нарушение стохастичности, очень малы по своим размерам (при $K \gg 1$), так что ими можно в первом приближении просто пренебречь. Посмотрим теперь, нет ли каких-нибудь более тонких нарушений стохастичности при $K \gg 1$.

Начнем с энтропии Крылова-Колмогорова [15, 7, 12], наиболее важной характеристики стохастического движения. Согласно работе Сина [12], энтропия может быть вычислена по формуле:

$$h = \lim_{l \rightarrow 0} \ln(l'/l) \quad (4.1)$$

где l, l' - длина трансверсального вектора (§ 3) до и после преобразования, а усреднение производится по эргодической компоненте либо вдоль траектории основного движения. Последний способ употреблялся при экспериментальном определении эн-

тронии преобразования (2). Мы выбрали $\ell = 10^{-7}$, так что при самом большом использованном значении $K = 10^3$ величина

$\ell' \sim 10^{-4}$. Численный счет преобразования (2) производился для двух траекторий, начальные точки которых отстояли на $\vec{\ell}$, причем после каждого шага преобразования длина трансверсального вектора ($\vec{\ell}$) приводилась к начальному значению $\ell = 10^{-7}$ без изменения его направления.

Для аналитической оценки энтропии рассмотрим линейризованное преобразование (2):

$$\begin{aligned}\delta\psi_{n+1} &= \delta\psi_n + K f'(\psi_n) \cdot \delta\psi_n \\ \delta\psi_{n+1} &= \delta\psi_n + \delta\psi_n (1 + K f'(\psi_n))\end{aligned}\quad (4.2)$$

Его собственные значения даются выражением:

$$\lambda = 1 + \frac{K f'}{2} \pm \sqrt{\frac{(K f')^2}{4} + K f'}\quad (4.3)$$

а направление собственных векторов есть:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{K f'(\psi)}{\lambda - 1}\quad (4.4)$$

где θ - угол с осью ψ . Аналогичные выражения были получены в [9, 22].

Для $K f'$ вне области устойчивых фаз (3.3) оба собственных значения действительны и удовлетворяют соотношению

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1. \text{ Большее собственное значение, модуль кото-}$$

рого мы обозначим через λ^+ , соответствует растяжению, а меньшее (λ^-) - сжатию. Согласно [12] выражение для энтропии (4.1) может быть записано в виде:

$$h = \langle \ln \lambda_a \rangle \quad (4.5)$$

где λ_a - проекция λ^+ на направление асимптоты, которое, вообще говоря, не совпадает с направлением собственного вектора растяжения (θ^+), если последний поворачивается (4.4).

Однако при больших $k f'$ направление вектора растяжения почти не изменяется:

$$\operatorname{tg} \theta^+ \approx 1 - 1/k f' \quad (4.6)$$

за исключением узкой области фаз вблизи (3.3). Вероятность попадания в нее $\sim 1/k$. В основной области изменение θ^+ составляет $\sim 1/k$.

Заметим также, что области значений (сектора) θ^+ , θ^- не перекрываются ни при каких $k f'$. Действительно, из (4.4) следует, что полный диапазон изменения θ^+ составляет:

$$0 < \operatorname{tg} \theta^+ < 2 \quad (4.7)$$

а диапазон изменения θ^- является как раз дополнительным к (4.7). В большинстве же случаев вектор сжатия направлен почти по оси ψ :

$$\operatorname{tg}(\pi/2 - \theta^-) \approx -1/k f' \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что асимптота почти все время составляет угол $\sim 1/k$ с направлением вектора растяжения, лишь изредка

(с вероятностью $\sim 1/k$) отклоняясь на угол ~ 1 . В таком случае можно положить приближенно: $\lambda_a \approx \lambda^+$ с точностью $\sim 1/k$. Фактически точность этого равенства может быть даже лучше, так как отношение λ_a/λ^+ изменяется в обе стороны и происходит частичная компенсация отклонений. Поясним в связи с этим, что λ_a является косоугольной проекцией λ^+ вдоль собственных векторов, которые, вообще говоря, неортогональны. На рис.10 представлены образцы спектра растяжений ($K' = e'/ke$) на асимптоте. "Хвост" спектра $K' > 1$ как раз соответствует случаю $\lambda_a > \lambda^+$.

Таким образом, мы можем оценивать энтропию по формуле:

$$h \approx \langle \ln \lambda^+ \rangle \quad (4.9)$$

где усреднение производится по Ψ , причем в устойчивой области (3.3) нужно положить $\lambda^+ = 1$. Заметим, что было бы неправильным просто исключить всю область устойчивых фаз (3.3) из среднего (4.9), так как согласно данным предыдущего параграфа стохастическая траектория заполняет почти всю эту область за исключением очень малой доли островков устойчивости (рис.9).

Для силы (1.1) интеграл (4.9) может быть вычислен до конца и дает:

$$h = [H(\frac{1}{2} + 1) + H(\frac{1}{2} - 1)] / k$$

$$H(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} \quad (4.10)$$

В случае силы (2.9) явная оценка может быть получена, если воспользоваться приближенным выражением:

$$\lambda^+ = \frac{|k f'|}{2} \pm 1 + \sqrt{\frac{|k f'|^2}{4} \pm |k f'|} \approx$$

$$\approx k f' \pm 2 \pm 1/k f' \quad (4.11)$$

где знак совпадает со знаком f' . Если ограничиться теперь только первым членом, то точность оценки энтропии будет быть так несколько лучше, чем $\sim 1/k$, так как вклады от следующих членов почти компенсируются. Для силы (2.9) получаем:

$$h \approx \int_0^1 d\psi \ln |k \cos 2\pi\psi| = \ln k/2 \quad (4.12)$$

Аналогичная оценка для силы (1.1) даёт:

$$h \approx (\ln k) - 1 \quad (4.13)$$

Данные таблицы 4 позволяют сравнить экспериментальные значения энтропии с различными оценками. Как уже отмечалось выше, начальное расстояние между траекториями выбиралось $\ell = 10^{-7}$. Увеличение его до 10^{-3} изменяет экспериментальное значение h от 3.615 до 3.72 ($K = 100.2$; сила (1.1)). Нормальное число шагов при вычислении энтропии по формуле (4.1) составляло $\dot{t} = 10^4$. Уменьшение этого числа до 10^3 приводит к изменению энтропии с 4.234 до 4.242 ($K = 142.0$; сила (2.9)).

Из данных таблицы 4 видно весьма хорошее согласие экспериментальных значений энтропии с аналитическими оценками, даже самыми простыми (4.12, 13), которые мы использовали в предыдущем параграфе. Это косвенно подтверждает основной вывод настоящей работы, что при $K \gg 1$ (фактически при $K \gtrsim 10$, см. таблицу 4) стохастическая компонента заполняет практически всю фазовую плоскость системы (2).

Этот вывод подтверждается также непосредственной экспериментальной проверкой эргодичности преобразования (2). Сама по себе эргодичность является слабым свойством, совершенно недостаточным для стохастичности. Однако при дополнительном условии локальной неустойчивости движения почти всюду, что вытекает для нашей модели (2) из (3.3) при $K \gg 1$, установление эргодичности оказывается решающим для доказательства стохастичности согласно последним результатам Аносова [30] и Синая [12].

Грубая проверка стохастичности производится по фазовой карте с наиболее мелкими ячейками ($512 \times 1024 = 524288$ ячеек). Из данных таблиц 1, 2, 3 видно, что при достаточно больших K траектория действительно проходит через все ячейки фазовой плоскости. Из анализа, проведенного в предыдущем параграфе, следует, что стохастическая компонента может быть и не заполняет все-таки всю фазовую плоскость, однако, площадь устойчивых областей (и их размеры) убывает, вообще говоря, экспоненциально с ростом K , а для специальных значений K пропорционально K^{-2} .

Более тонкая проверка эргодичности состоит в исследовании равномерности ^{заполнения} фазового пространства стохастической траекторией. Для этого использовалось разбиение фазового квадрата на $N_1 = 128 \times 128 = 16384$ ячейки и подсчет числа попаданий (n_i) траектории в каждую из ячеек. Критерием равномерности служит дисперсия: $\Phi = \langle (n_i - \mu)^2 \rangle$, где

$\mu = \langle n_i \rangle = t/N_1$ - среднее значение числа попаданий, t - время движения (число шагов) и усреднение производится по всем ячейкам. Ожидаемое значение Φ равно:

$\Phi/\mu = 1 \pm \sqrt{2/N_1} = 1 \pm 0.011$; последний член даёт среднеквадратичное отклонение. Экспериментальное значение для силы (1.1) при $K = 16$; $t = 10^7$ составляет: $\Phi/\mu = 1.017$. Вероятность такого отклонения равна 12%.

Наконец, была произведена дополнительная проверка на стохастичность по наблюдению за процессом заполнения траекторией ячеек фазовой плоскости. Для случайного движения при не слишком большом времени должно оставаться некоторое количество пустых ячеек (N_0), которое может быть вычислено по обычной формуле распределения Пуассона:

$$N_0 = N_2 e^{-\mu} \pm \sqrt{N_0} \quad (4.14)$$

где $N_2 = 512 \times 1024 = 524288$ - полное число ячеек фазовой плоскости. Результаты этого эксперимента приведены в таблице 5. Следует иметь в виду, что в данном случае $\mu = t/5N_2$ так как вывод данных на фазовую плоскость производился через 5 шагов.

§ 5. Заключительные замечания

Вывод о существовании и свойствах стохастической компоненты, полученный в настоящей работе, существенным образом опирается на численные эксперименты с моделью (2). Поэтому необходимо выяснить, в какой мере эти эксперименты являются "чистыми", т.е. насколько они адекватны исходным уравнениям (2).

Основное отличие связано с конечным числом разрядов ЭВМ, иначе говоря, пространство в эксперименте является "квантованным". Для стохастической компоненты это приводит, в частности, как хорошо известно из теории генераторов псевдослучайных чисел [32], к периодичности движения после некоторого времени T , когда происходит точное повторение любого из предшествующих значений $\psi, \dot{\psi}$. В нашем случае $T \sim \sqrt{M} \approx 10^{12}$ где M — полное число точек экспериментальной фазовой плоскости [32]. Ясно, что этим эффектом можно пренебречь в стохастической области. Тем не менее он может играть некоторую роль в ограничении диффузии в области колмогоровской устойчивости (§ 2). Дело в том, что диффузия происходит в этом случае в очень узкой полосе фазового пространства со сравнительно небольшим числом точек. При этом интервал аперiodичности сокращается до $T \sim 10^8$. Однако из данных § 2 (см. также рис. 5) следует, что диффузия сокращается значительно раньше, так что существуют, по-видимому, и другие причины этого явления. Такое заключение подтверждается также резким замедлением или даже полным прекращением диффузии при $K \ll 1$ (§ 2). В последнем случае число точек фазовой плоскости в об-

ласти диффузии $\sim M$, так что периодичность движения несущественна как и для стохастической области.

Возникает также вопрос, не является ли наблюдаемый в численных экспериментах "случайный" характер движения следствием, в конечном счете, лишь ошибок округления. Мы думаем, что это не так по следующим причинам. Прежде всего "ошибки" округления ни в коем случае не являются случайным возмущением, а определяются точным и неизменным алгоритмом ЭВМ. Их накопление, вообще говоря, не идет по диффузионному закону ($\sim \sqrt{t}$), как это следует из результатов § 2 (см. рис. 5). Поэтому сколько-нибудь существенное влияние этих ошибок возможно лишь при условии локальной неустойчивости, которая сама по себе уже означает стохастичность. Иначе говоря, влияние ошибок округления есть не причина, а следствие стохастичности.

Наконец, следует упомянуть еще об опасении, что движение в "квантованном" пространстве может иметь исключительные свойства, поскольку мера такого пространства по отношению к непрерывному равна нулю, а все теоремы эргодической теории справедливы с точностью до меры нуль. Нам кажется, однако, совершенно невероятным точное совпадение двух множеств нулевой меры и совершенно различной природы.

Несмотря на все вышеприведенные оптимистические замечания по поводу чистоты численного эксперимента дальнейшее изучение (как экспериментальное, так и аналитическое) особенностей "квантованного" пространства безусловно желательно.

Приносим нашу искреннюю благодарность Д.В.Аносову,
В.И.Арнольду, В.К.Мельникову и Я.Г.Синаю за неоднократные
дискуссии и ценные советы, Р.И.Будяновой - за помощь в ра-
боте.

Таблица 1

Устойчивые области (пустые ячейки) для силы (1.1)

k	4	8	16	32
Число пустых ячеек	42038	60	0	0
Для площади $\times 10^5$	8000	11.4	0	0

Полное число ячеек фазовой плоскости = $512 \times 1024 = 524288$

Таблица 2

Устойчивые области для силы (2.9)

k	3.67	4.78	5.98	8.64	10.5	25.1	37.7	50.3
Число пустых ячеек	48958	10292	1681	24	0	45	8	4
Для площади $\times 10^5$	9300	1960	320	4.6	0	8.6	1.5	0.76

Полное число ячеек фазовой плоскости = 524288.

Таблица 3

Устойчивые области для силы (3.10, 11)^{x)}

K	μ	ξ	t	w_0	γ	N_s	$K_{\Sigma P}$
100	1	0.05	10^7	0.04		0	32
8	1	0.108	"	0.25	1.22	9	5.12
8	"	0.05	"	0.106	0.68	0	12
7	"	"	"	"	0.60	0	12
7	"	0.09	"	0.20	0.94	-	6.4
"	"	0.109	"	0.25	1.06	11519	5.12
"	2	"	"	0.285	1.63	2944	4.5
"	0.1	0.31	"	0.64	0.067	12635	2
16	"	"	"	"	0.152	48582	2
7	"	0.157	"	0.32	0.28	6056	4
16	"	"	"	0.32	0.63	25972	"
23.3	"	"	"	"	0.91	6300 ^{xx)}	"
32.2	"	"	"	"	1.26	18053	"
6.3	2	0.125	"	"	1.47	6500 ^{xx)}	"

K	μ	δ	t	w_0	χ	N_s	K _{эв}
6.3	2	0.109	10^7	0.32	1.63	450^{xx}	4
64	0.1	0.157	"	"	2.52	13564	"

х) Значения параметра χ вычислялись по формуле:

$$\chi = \begin{cases} 2 \xi_i \kappa \left(\frac{\mu}{2} \right)^{\chi \xi_i}; & \kappa \leq 2/\mu \xi_i; \\ \frac{\mu}{\kappa} \left(\frac{\mu}{2} \right)^{\chi \xi_i}; & \kappa \geq 2/\mu \xi_i; \end{cases}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2\mu} - \sqrt{\frac{1}{4\mu^2} - \frac{\delta}{\mu}}$$

которая представляет уточнение выражения (3.13).

хх) Полное число ячеек фазовой плоскости в этих трех случаях = 16384; указанные цифры есть число незаполненных ячеек x 32. В остальных случаях полное число ячеек фазовой плоскости = 524288.

Таблица 4

Энтропия Крылова - Колмогорова

K	Сила (1.1)			Сила (2.9)		
	Эксперим. значение	Оценки		Экспе- рим. значен.	Оценки	
		(4.10)	(4.13)		(4.9)	(4.12)
6.21	0.958	0.909	0.826	1.157	1.133	1.133
14.0	1.654	1.655	1.639	1.949	1.949	1.946
25.0	2.241	2.225	2.219	2.537	2.526	2.526
50.0	2.914	2.913	2.912	3.227	3.219	3.219
100.2	3.615	3.608	3.607	3.914	3.914	3.914
142	3.938	3.955	3.956	4.234	4.263	4.263
200	4.308	4.298	4.298	4.603	4.605	4.605
1000	5.928	5.908	5.908	6.206	6.215	6.215

Таблица 5

Заполнение фазовой плоскости стохастической траекторией.

t , шаги	10^7	2×10^7	3×10^7	4×10^7	5×10^7
Число пустых ячеек, эксперимент	11531	258	6	1	0
Ожидаемое число пустых ячеек при случайном заполне- нии	11500 ± 107	251 ± 16	5.8 ± 2.4	0.12 ± 0.35	2.5×10^{-3} ± 0.05

Обработка траектории производилась через 5 шагов; $K = 16$.

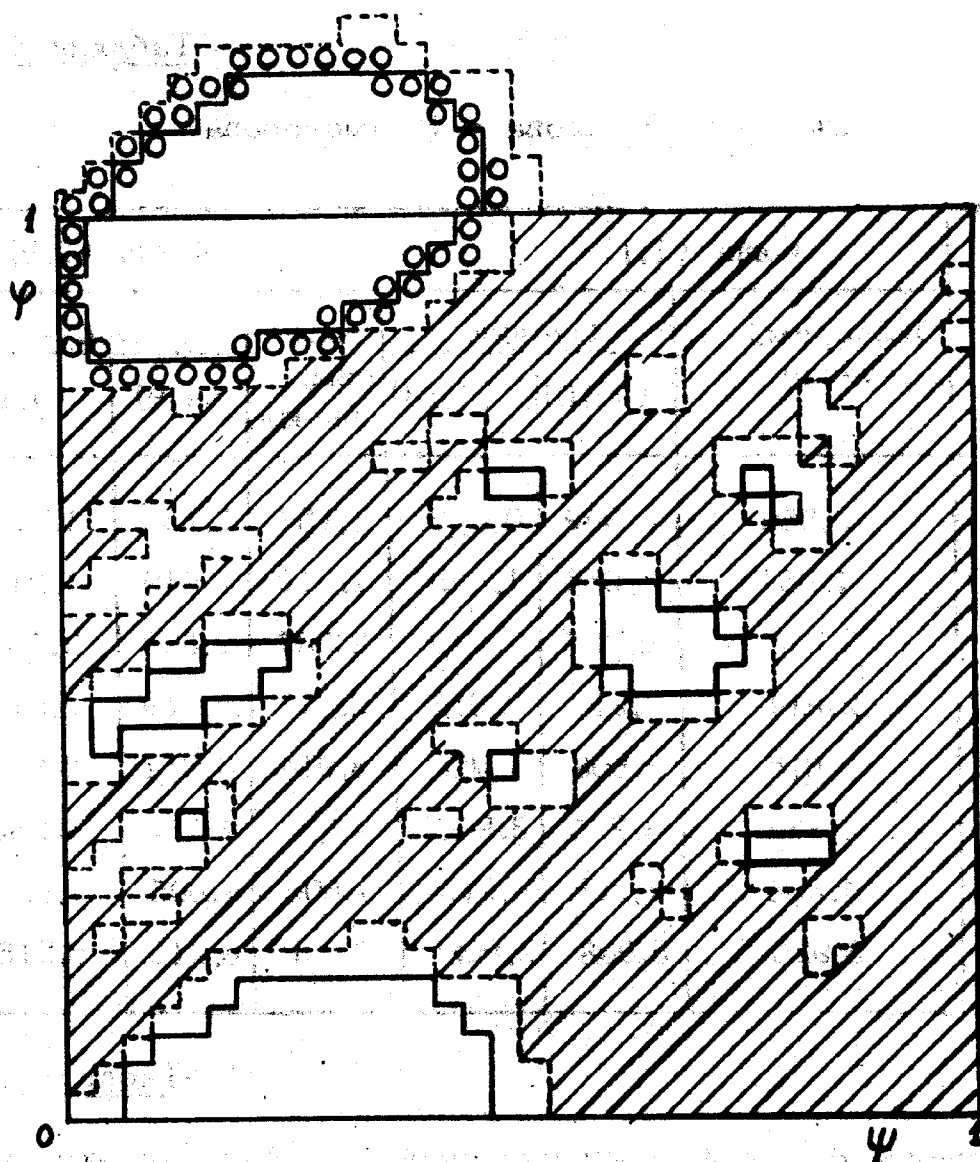


Рис.1. Фазовая карта системы (2) для силы (1.1), разделенная на 32×32 ячейки: $K \approx 1$; $\psi_0 = 0$; $\psi_c \approx 0,765$; $t = 5 \cdot 10^6$ шагов; стохастическая область заштрихована; ячейки, совершенно свободные от траектории, обведены сплошной линией; между сплошной и пунктирной линиями - ячейки с существенно меньшей плотностью траектории (только часть ячейки занята стохастической компонентой); кружками обозначена устойчивая траектория с начальными условиями: $\psi_0 = 0$; $\psi_c \approx 0,460$; $t = 5 \cdot 10^6$.

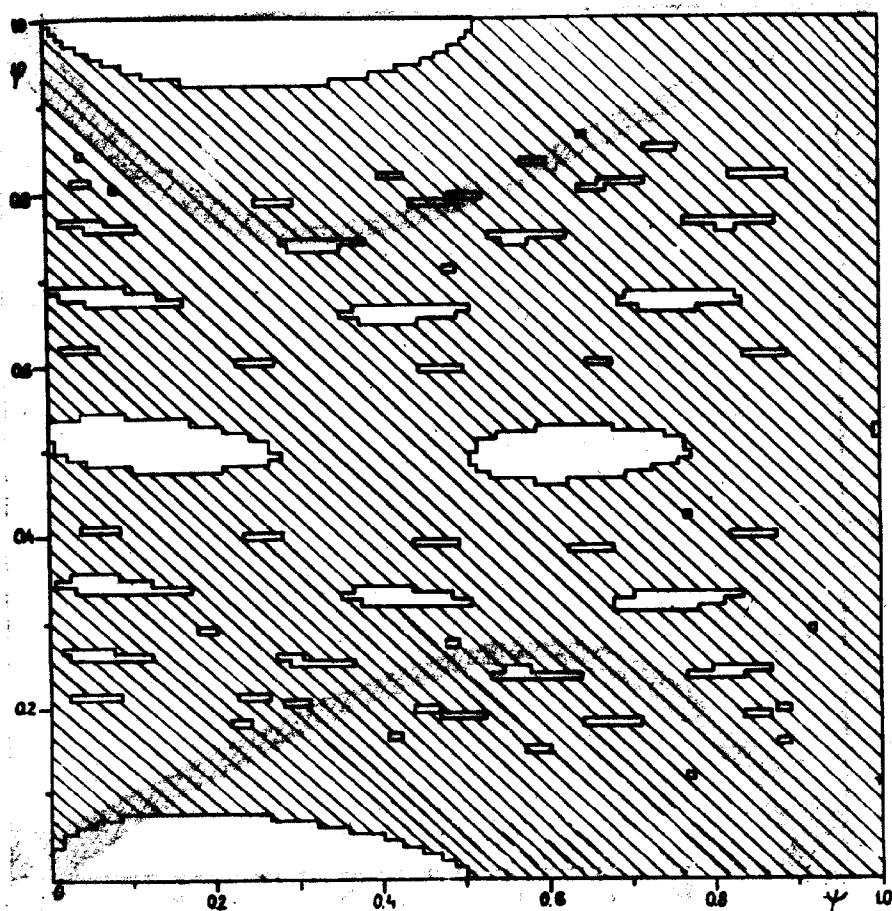


Рис.2. Фазовая карта для силы (1,1): 128 x 128 ячеек;
 $k = 0.2$; $t = 5 \cdot 10^7$; стохастическая компонента
 заштрихована.

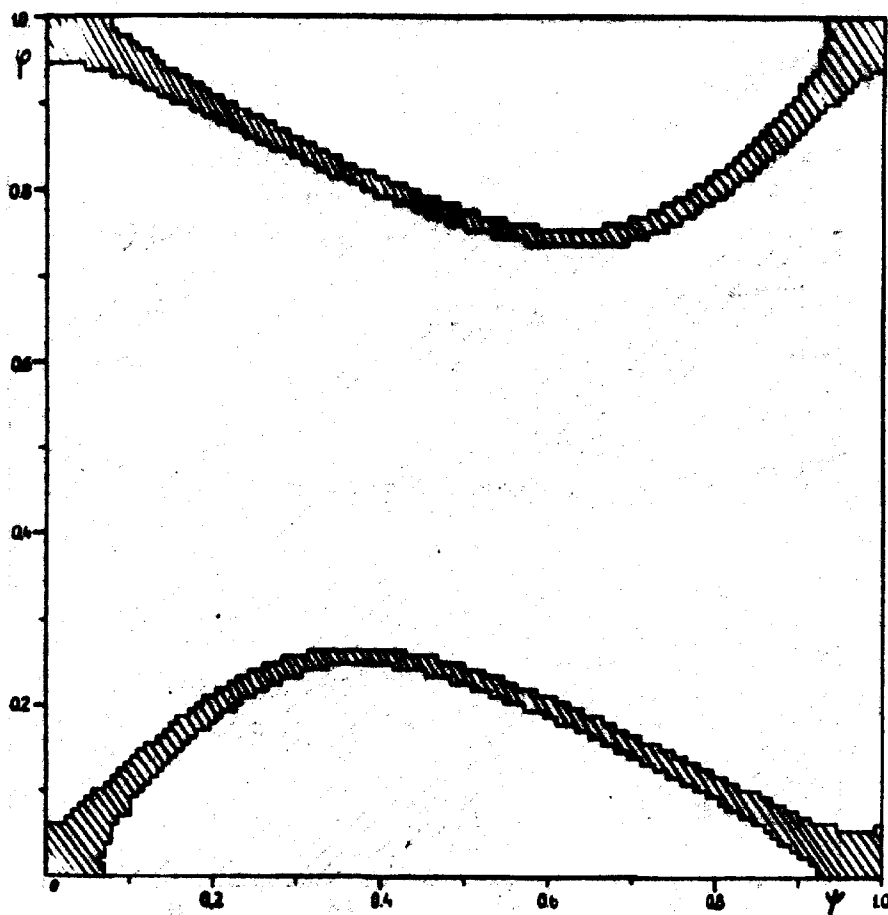


Рис.3. Фазовая карта для аналитической силы (2.9): 128 x 128 ячеек: $k \approx 0.62$: $t = 10^7$. Заштрихованная область представляет стохастический слой в окрестности сепаратрисы основного резонанса.

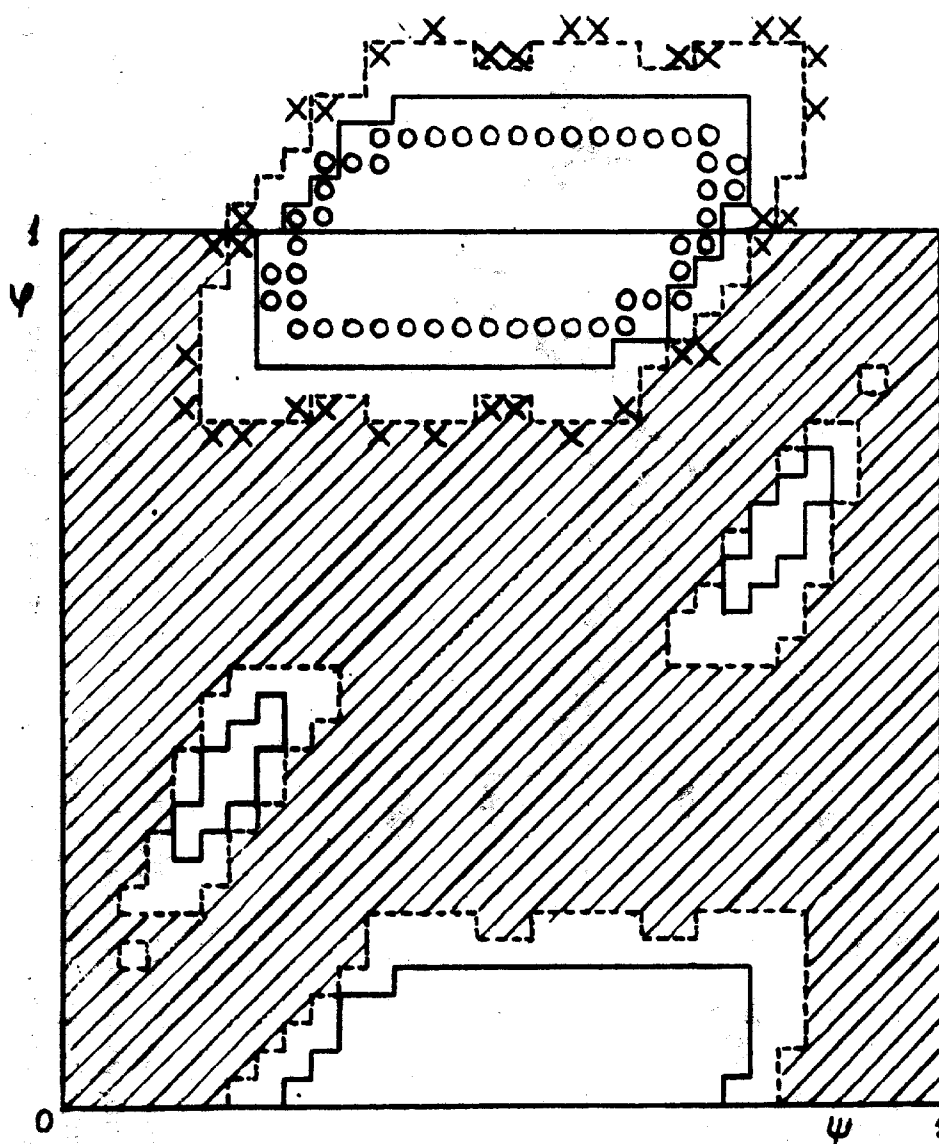


Рис.4. Фазовая плоскость системы (2.11); обозначения те же, что и на рис.1; эргодическая траектория соответствует начальным условиям: $\psi_0' = 0$; $\psi_0' \approx 0.830$; кружками обозначена траектория длинного счета: $\psi_0' = 0$; $\psi_0' = 0.735$; крестами - другая устойчивая траектория вблизи резонанса второго порядка: $\psi_0' = 0$; $\psi_0' = 0.803$; для всех трех траекторий $t = 5 \cdot 10^6$.

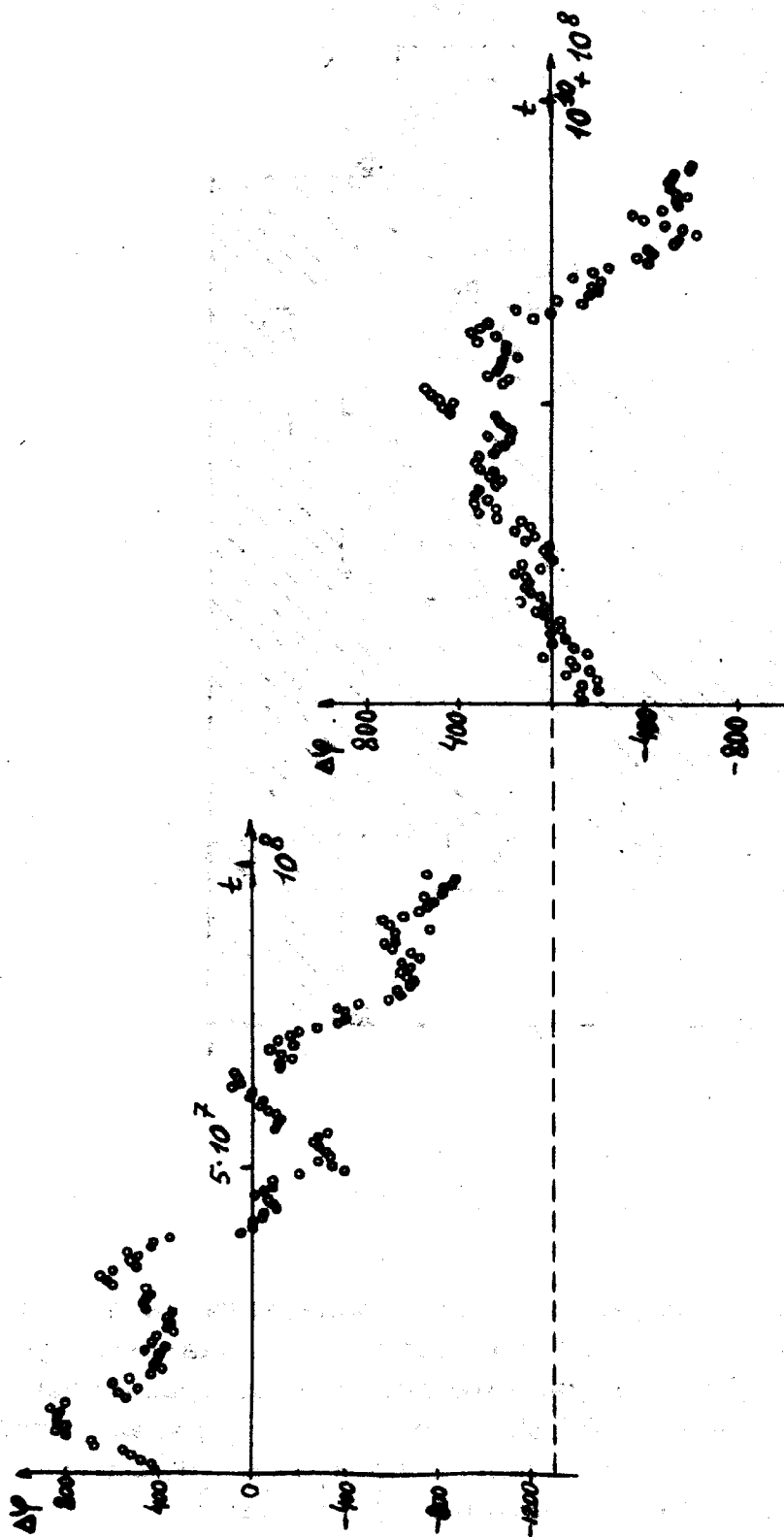


Рис. 5а. Слабая диффузия за счет округления для преобразования (2.11): $\Delta\psi$ — отклонение экспериментальных точек от интерполиционной прямой в единицах минимальной ошибки округления ("квант" пространства) $\Delta\chi = 10^{-12}$; $\psi_0 \approx -0.316$ (длинный счет); точки слева относятся к началу длинного счета, а точки справа — к концу.

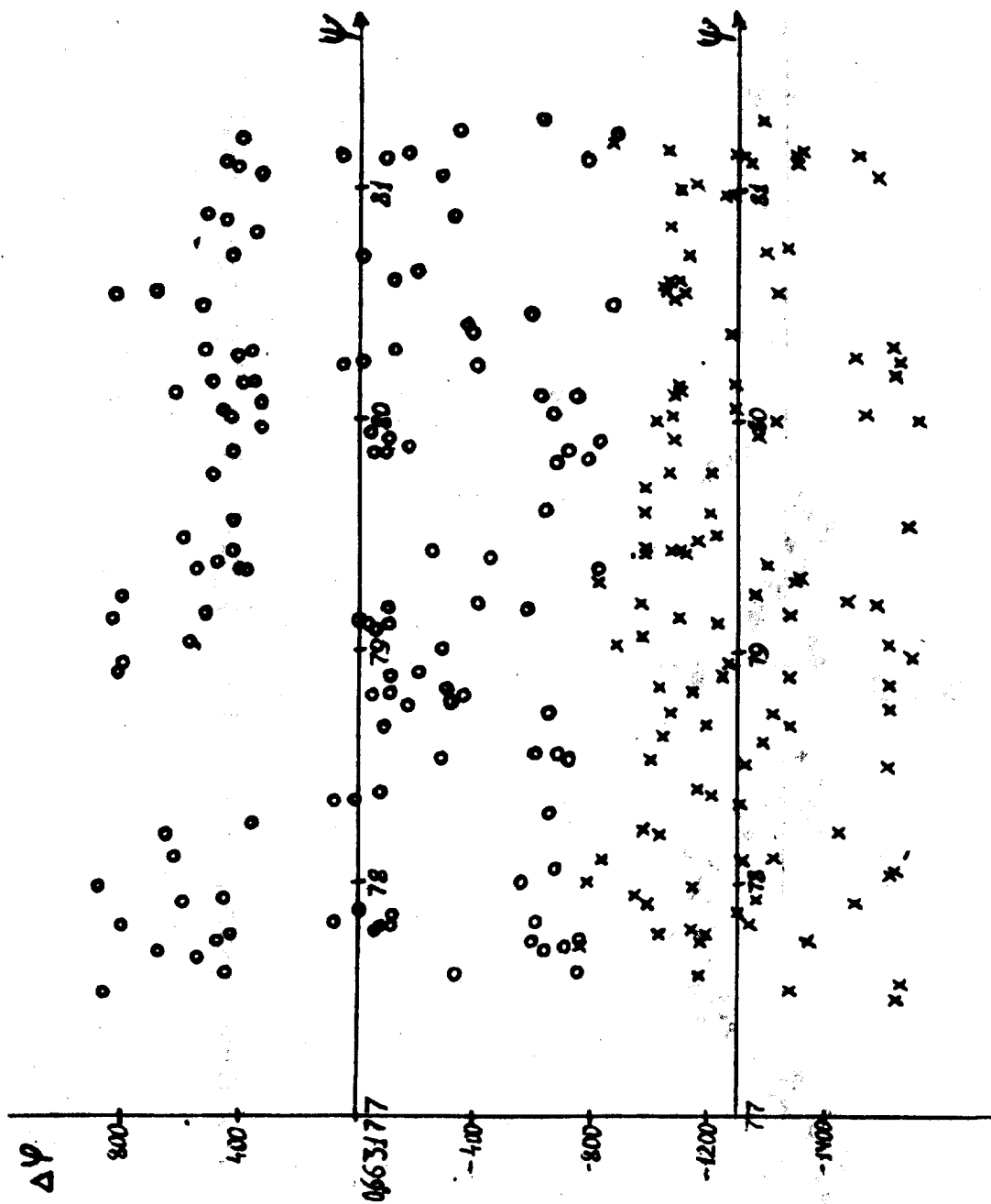


Рис. 56. Поиски корреляции $\Delta\psi, \psi$: ○ - начало длинного счета;
X - конец длинного счета.



Рис. 5а. Контрольный эксперимент: 1 - $\Psi_0 \approx -0.350$; 2 - $\Psi_0 \approx -0.187$.

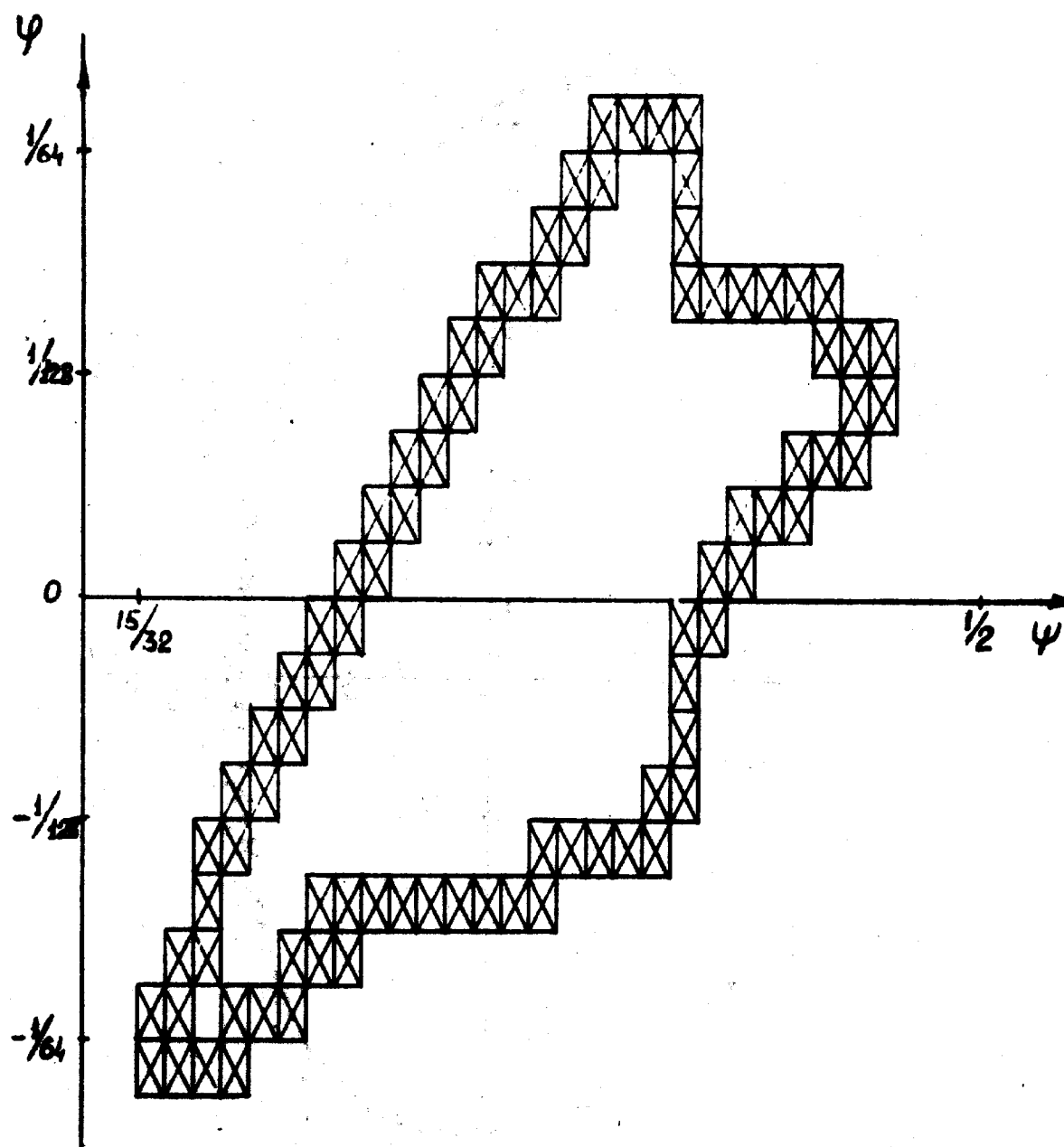


Рис. 6. Островок устойчивости для специального значения $k = 60.1993377$; $\psi_0 = 0.01$; $\psi_c \approx 0.483$; $t = 10^8$; размер ячейки $(1/512) \times (1/1024)$; картина не противоречит идеально тонкой кривой, соответствующей абсолютно устойчивой траектории.

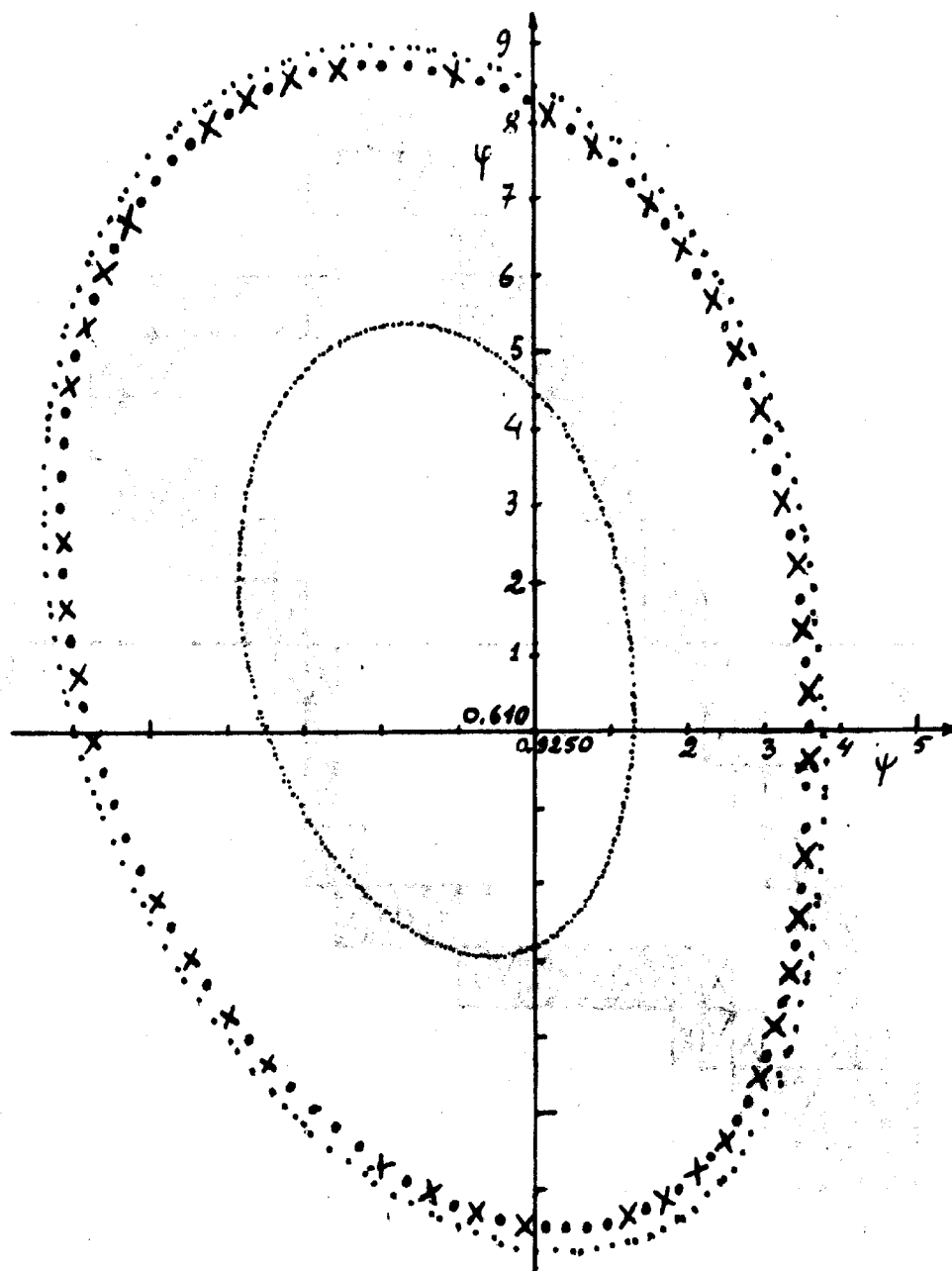


Рис.7. Устойчивые траектории внутри резонанса второго порядка, расположенного в узкой области (3) (рис.8) : $K = 8$; $t = 2 \cdot 10^7$; для средней траектории точки соответствуют концу счета, кресты - началу; масштабы по осям различаются в 10 раз, цифры дают последний десятичный знак чисел в центре графика.

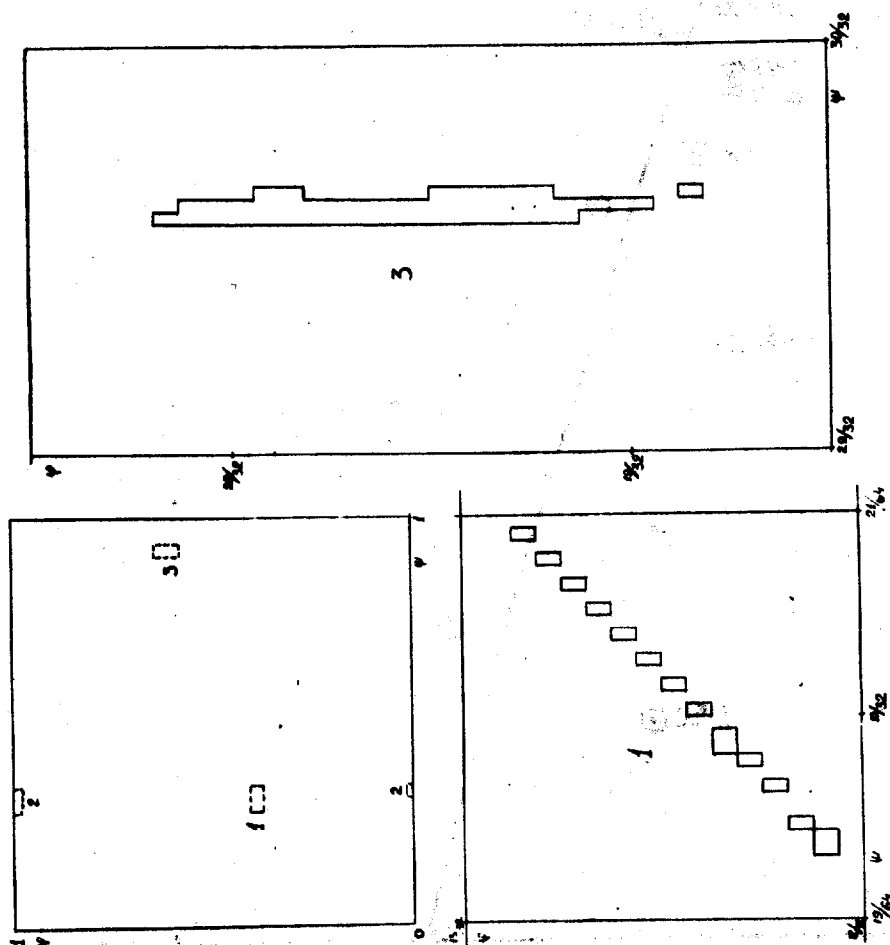


Рис.8. Островки устойчивости в области стохастичности (сила (1.1)): $K = 8$; $t = 10^8$; $T = 3$. Цифры показывают последовательность движения. Островки (1.2) лежат в области устойчивых фаз, причем островок (1) сильно вытянут вдоль направления растаяния (в неустойчивой области). Островок (3) расположен в неустойчивой области и сильно вытянут вдоль направления сжатия.

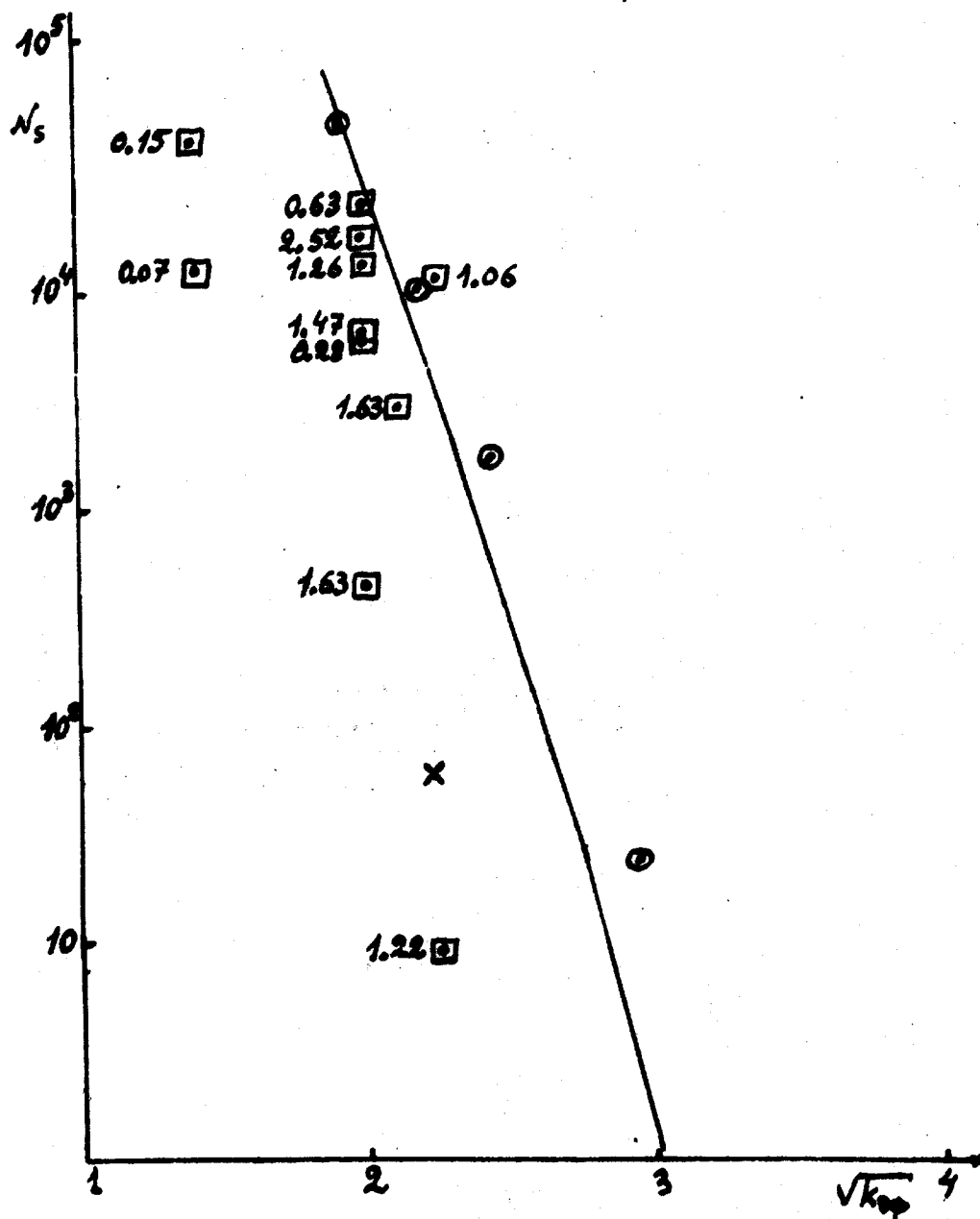


Рис. 8. Зависимость числа устойчивых ячеек фазовой плоскости (N_s) от параметра $k_{\text{эф}}$ для разных случаев: $\odot$ - сила (2.9); $\chi = 0.63$; $\times$ - сила (1.1); $\chi = 0.74$; $\square$ - сила (3.10, 11); значения χ указаны около точек; сплошная кривая - аналитическая оценка по формуле (3.21).

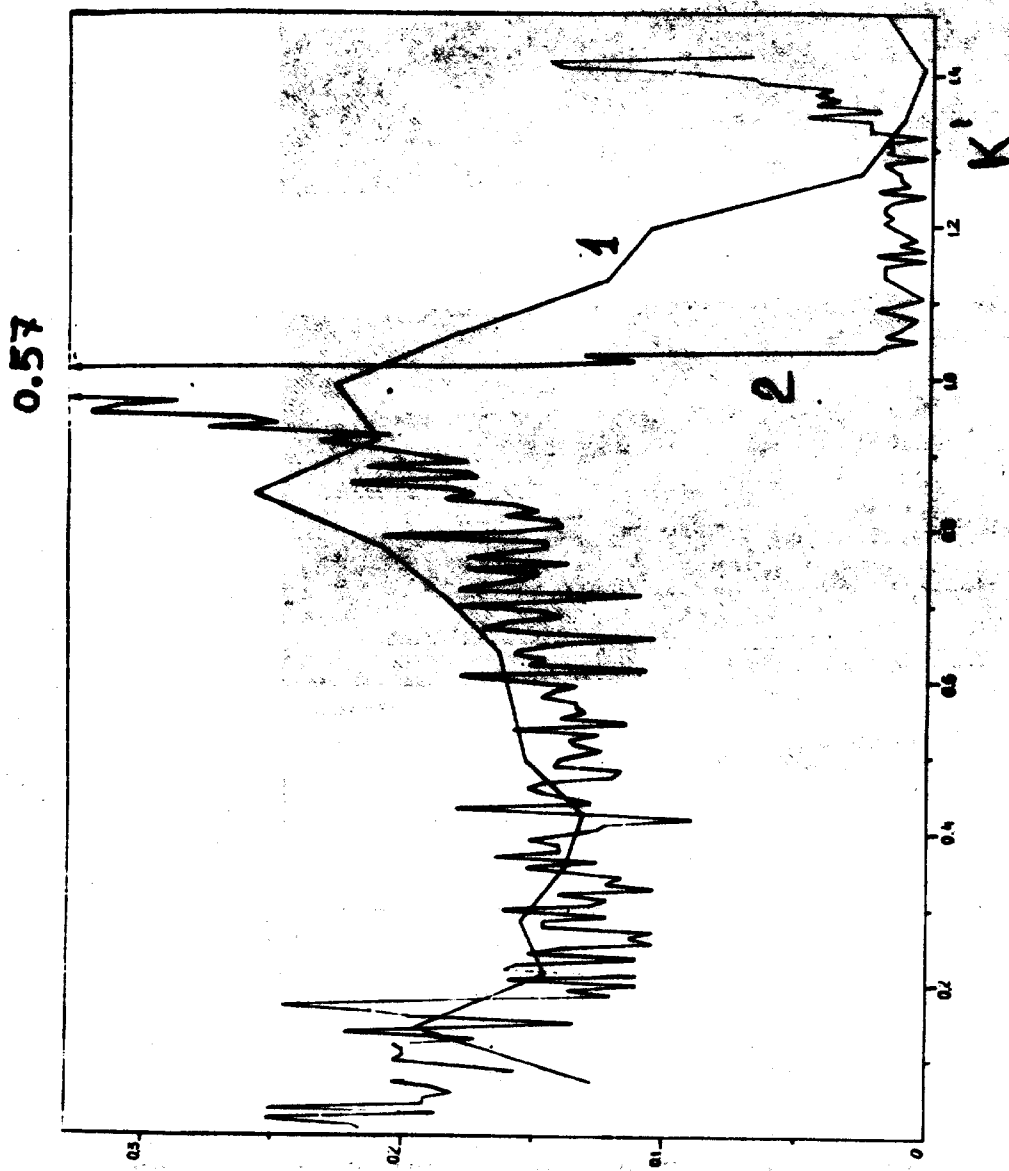


Рис.10. Нормированный спектр растяжения e'/e (4.1) на асимптоте для силы (2.9): 1 - $K = 14.2$; 2 - $K = 142.0$; по горизонтальной оси отложена величина $K' = (e'/K e)$.

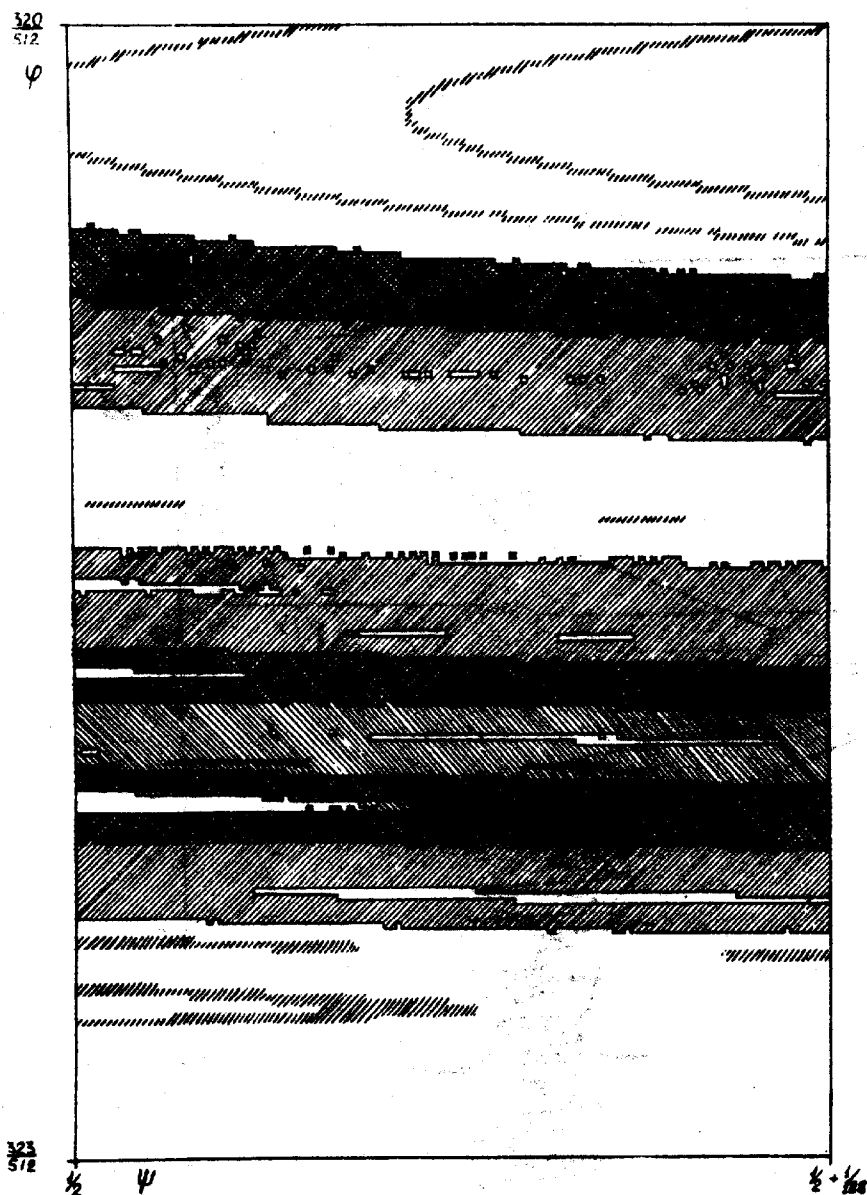


Рис.11. Сводная фазовая карта движения системы (2) с силой (1,1) для различных начальных условий: $k \approx 0.01$; $t = 10^7$; размер изображенного участка фазовой плоскости ($\Delta\varphi$, $\Delta\psi$) равен $3/512 \times 1/128$; он разделен на 374×128 ячеек. Широкие эргодические полосы заштрихованы; тонкие (в одну, две ячейки) области представляют устойчивые траектории внутри резонансов первого порядка.

Л и т е р а т у р а

- I. Е.Е.Никитин. Современные теории термического распада и изомеризации молекул, "Наука", 1964.
2. L.D.Landau, Phys. Zeitschr. Sow., 10, 67 (1936)
3. Л.С.Кассель, Кинетика гомогенных реакций, 1937.
4. N.B.Slater, Theory of Unimolecular Reactions, 1959
5. D.L.Bunker, Journ. Chem. Phys., 40, 1946 (1964)
6. Я.Г.Синай, ДАН СССР, 153, 1261 (1963).
7. А.Н.Колмогоров, ДАН СССР, 119, 861 (1958).
8. Б.В.Чириков. Когда динамическая система становится статистической? Сообщение на Международном съезде математиков, Москва, 1966; Атомная энергия, 6, 630 (1959).
9. Б.В.Чириков. ДАН, 174, 1313 (1967).
10. Ф.М.Израилов, Б.В.Чириков. ДАН, 166, 57 (1966).
11. И.Пригожин. Неравновесная статистическая механика, МИР, 1964.
12. Я.Г.Синай. Вероятностные идеи в эргодической теории, Proc. Intern. Congress of Mathematicians, 1962; Изв. АН, мат., 30, 15 (1966).
13. В.И.Арнольд, УМН, XVIII, в.6 (114), 91, (1963).
14. H.Grad, Levels of Descriptions in Statistical Mechanics and Thermodynamics, Report on Delaware Seminar in the Foundations of physics, 1967
15. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики, изд. АН СССР, 1950.
16. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.

17. M.N.Rothenbluth, R.Z.Sagdeev, J.B.Taylor, G.M.Zaslavsky, On the Destruction of Magnetic Surfaces due to the Irregularities of Magnetic Field, *Nuclear Fusion*, 6, 297 (1966)
18. В.А.Рохлин. Изв.АН, мат., 25, 499 (1961).
19. M.Henon, C.Heiles, *Astronomical Journal*, 69, 73 (1964)
20. Б.В.Чириков. Пример стохастической неустойчивости нелинейных колебаний. Труды Международной конференции по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1963, стр.847.
21. Ю.М.Волошин, А.П.Ершов, Г.И.Кожухин, Входной язык систем автоматизации программирования, Изд. СО АН СССР, 1964.
22. J.M.Greene, Two-Dimensional Measure preserving Mappings, Preprint, Princeton University, 1967
23. Я.Г.Синай, Изв. АН, мат., 30, 1275 (1966).
24. В.К.Мельников, ДАН, 148, 1257 (1963).
25. N.N.Filonenko, R.Z.Sagdeev, G.M.Zaslavsky, *Nuclear Fusion*, 7, 253 (1967)
26. B.Chirikov, E.Keil, A.Sessler, Stochasticity in Many-Dimensional Systems, CERN Report (to be published)
27. M.G.N.Hine, частное сообщение.
28. J.Moser, A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations, II, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III*, v.XX, Fasc. III (1966)
29. В.И.Арнольд, ДАН, 137, 255 (1961).
30. Д.В.Аносов, ДАН, 145, 707 (1962); 151, 1250 (1963).
31. E.Courant, BNL Int. Report - AADD-69, 1965
32. А.И.Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах, 1965.