

Институт ядерной физики СО АН СССР

Препринт

Б.В.Чириков

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СЛАБОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ
ВСТРЕЧНЫХ ПРОТОННЫХ ПУЧКОВ

Новосибирск

1968

A B S T R A C T

Three examples of a certain mysterious very slow instability of nonlinear oscillation are presented (Fig. 1,2,3). A conjecture is put forward that the instability arises due to a diffusion along a network of intersecting stochastic layers (so-called Arnold' diffusion /5/). The stochasticity criterion by resonance overlapping /12/ allows to estimate the layer width /4/ as well as the diffusion rate.

The border of strong instability is given by the expression (4) in reasonable agreement with numerical and experimental results /1/. For special initial conditions inside stochastic layers the slow diffusion rate due to high harmonic resonances is determined by estimate (8), and the essential harmonic number itself is according to (9). The threshold (12) above which Arnold' diffusion becomes essential is practically independent of parameters. Above the threshold particle's life time is decreasing by the factor (13) for the majority of initial conditions as a result of combined action of Arnold' diffusion and ordinary diffusion due to gas scattering or some other fluctuations in accelerator.

Arnold' diffusion may be of importance for proton and especially antiproton storage rings.

Я хотел бы обратить внимание на возможность очень слабой неустойчивости при взаимодействии встречных протонных пучков. Предполагаемая неустойчивость носит динамический характер и фактически связана с движением одиночной частицы в поле встречного сгустка (так называемое сильно-слабое взаимодействие /1/). В работах Колмогорова, Арнольда и Мозера /2/ было показано, что в нелинейной колебательной системе большинство инвариантных торов (интегральных поверхностей) сохраняются под действием возмущения, если последнее не слишком велико. Это приводит к вечной устойчивости в случае одномерной неавтономной или двумерной автономной системы^ж), когда несохраняющиеся (резонансные) торы разделены сохраняющимися. Эта устойчивость была продемонстрирована в численных экспериментах Ласлета /3/ с нелинейным преобразованием. Согласно данным работы /4/ экспериментальная граница вечной устойчивости определяется приблизительно перекрытием резонансов.

В многомерной системе инвариантные торы не разделяют фазовое пространство и поэтому неустойчивая траектория не является более ограниченной. Конкретный механизм неустойчивости, открытый Арнольдом /5/, связан с диффузией вдоль пересекающихся в многомерной системе резонансных поверхностей, точнее, вдоль стохастических слоев в окрестности разрушенных сепаратрис нелинейных резонансов. В дальнейшем я буду называть этот процесс диффузией Арнольда.

По-видимому, первое экспериментальное указание на существование этого явления было получено в работе /6/ путем численного счёта траекторий частицы в сильнофокусирующем нелинейном поле ускорителя. На рис.1, взятом из этой работы, показано изменение амплитуды колебаний по обоим осям под действием возмущения. Характерным является весьма продолжительный "скрытый" период развития неустойчивости, соответствующий, по-видимому, медленной диффузии вдоль стохастического слоя (верхние кривые на рис.1). В связи с этим остается совершенно неясным, например, является ли устойчивым движение, представленное нижними кривыми на рис.1.

Другой пример диффузии Арнольда наблюдался в числен -

ж) В дальнейшем будем называть оба случая одномерным.

ных экспериментах с простейшей моделью двумерного нелинейного неавтономного осциллятора /7/. На рис.2 из последней работы показано изменение со временем произведения амплитуд колебаний по обоим степеням свободы. Опять таки неустойчивость развивается сначала очень медленно и только в самом конце быстро нарастает.

Наконец, есть некоторые предварительные данные и "настоящих" экспериментов по движению электронов в магнитной ловушке /8,9/. На рис.3 из работы /9/ изображено семейство кривых, характеризующих зависимость среднего времени жизни электрона в ловушке от величины магнитного поля. Характерной особенностью этих кривых является резкое уменьшение времени жизни примерно на порядок при некотором критическом значении магнитного поля с последующим выходом на нижнее плато. Интерпретация результатов "настоящего" эксперимента - дело значительно более сложное, чем для численного эксперимента, так как в первом случае многие важные параметры и характеристики процесса остаются неизвестными. Тем не менее можно предполагать, что здесь также имеет место случай диффузии Арнольда за счёт слабой азимутальной неоднородности поля ($\sim 10^{-3}$), которая делает систему многомерной в смысле вышеприведенного определения.

Диффузия Арнольда может играть некоторую роль в накопителях, особенно протонных и, еще более, антипротонных, так как в естественных условиях затухание колебаний здесь полностью отсутствует, а необходимое время жизни составляет несколько часов /10/. Будкер предложил ввести искусственное затухание с помощью сопутствующего электронного пучка /11/, в этом случае все будет зависеть от достигнутого времени затухания.

Критерий стохастичности по перекрытию резонансов /12/ даёт возможность оценить ширину стохастического слоя /4/ и скорость диффузии Арнольда.

Рассмотрим взаимодействие одиночной частицы со встречным сгустком в модели, аналогичной /13/. Малым параметром задачи служит относительный сдвиг частоты бетатронных колебаний за счёт встречного сгустка: $\varepsilon = \Delta\nu/\nu$. Согласно /13/ такого же порядка и коэффициент нелинейности $\alpha = \left| \frac{I}{\nu} \cdot \frac{d\nu}{dI} \right| \sim \varepsilon$, где I - импульс.

Условие резонанса имеет вид:

$$n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + \bar{n} \nu_0 = 0 \quad (1)$$

где $n_1, n_2, \bar{n}$ - целые; а ν_0 - частота внешнего возмущения, которое будем считать δ -образным (любые $\bar{n}$). Амплитуду гармоники возмущения примем в виде:

$$\varepsilon_n \sim \varepsilon \cdot e^{-n/n_0} \quad (2)$$

где параметр n_0 зависит от формы пучка и амплитуды колебаний a . В частности для гауссовской формы $n_0 \sim a/\Gamma_0$, где Γ_0 - радиус пучка. Введем еще безразмерный параметр связи между степенями свободы β^2 , который в некоторых случаях может быть очень малым [10].

В этих условиях ширина внешних резонансов: $\Omega_n \sim \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_n} \cdot \nu$, а ширина резонансов связи: $\Omega_n \sim \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_n} \cdot \beta \nu$ [12]. Используя результаты работы [7], легко показать, что среднее расстояние между резонансами по n -ю гармонику включительно дается оценкой:

$$\Delta_n \sim \frac{\nu_0}{(2n)^3} \quad (3)$$

где принято, что $\nu_1 \sim \nu_2$.

Граница стохастичности определяется перекрытием основных резонансов ($n \lesssim n_0$); получаем:

$$\varepsilon_s \sim (\nu_0/\nu) \cdot (2n_0)^{-3} \cdot \beta^{-1} \quad (4)$$

Численные эксперименты [1] дают: $(\varepsilon \nu)_s \approx 1/20$, а эксперименты на электронном накопителе приводят к значению $(\varepsilon \nu)_s \approx 1/40$.

При $\varepsilon < \varepsilon_s$ стохастичность ограничена узкой полосой в окрестности сепаратрисы резонансов, ширина которой $\delta_n \sim e^{-\omega_1/\Omega_n}$ [4], где ω_1 - минимальная частота разрушающего сепаратрису возмущения со стороны ближайшего соседнего резонанса. Используя (1, 3), получаем:

$$\omega_1 \sim \Delta_{n_1} \cdot n_1 \sim \frac{\nu_0}{2(2n_1)^2} \quad (5)$$

Гармоника разрушающего резонанса n_1 может быть больше n . Выберем её из условия: $\omega_1 \sim \Omega_n$. Находим:

$$n_1 \sim e^{\frac{n}{4n_0}} \sqrt{\frac{\nu_0}{8\varepsilon\nu\beta}} \sim e^{\frac{n}{4n_0}} \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}} \quad (6)$$

В последней оценке использовано соотношение (3) и положено $n_0 \sim 1$. В действительности условие $\omega_1 \sim \Omega_n$ не является оптимальным. Оптимальное n_1 оказывается равным

$$n_1 \sim \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}} \cdot e^{\frac{n}{6n_0}} \cdot n_0 \quad (7)$$

Можно показать, что коэффициент диффузии Арнольда пропорционален величине $(\delta_n^2 \beta^2 \varepsilon_{n_1})^2$. Поэтому в качестве грубой оценки можно написать:

$$D \sim D_0 \beta^2 \exp\left(-2\left(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}}\right) e^{\frac{n}{6n_0}}\right) \quad (8)$$

где $D_0 \sim 2\pi I^2 \varepsilon \nu$ - коэффициент диффузии сильной стохастичности, возникающей при перекрытии основных резонансов, т.е. при $\varepsilon > \varepsilon_s$.

При огромном времени жизни протонов в накопителе отношение D_0/D может быть очень большим и, следовательно, существуют довольно высокие гармоники, а именно:

$$n_A \approx 6 n_0 \ln \left(\sqrt[3]{\gamma \beta} \ln \sqrt[3]{\frac{D_0 \beta^3}{D}} \right) \quad (9)$$

где $\gamma = \varepsilon / \varepsilon_s \beta$. Нижняя граница γ , когда диффузия Арнольда заведомо не играет роли, определяется из условия

$$n_A = 0, \text{ или:}$$

$$\beta \gamma_0 = \left(\ln \sqrt[3]{\frac{D_0 \beta^3}{D}} \right)^{-3} \quad (10)$$

На самом деле эта граница несколько выше, так как при малом

n_A расстояние между резонансами велико и их действие неэффективно. Необходимо, чтобы расстояние между резонансами было, по крайней мере, порядка сдвига частоты: $\Delta_A \lesssim \varepsilon \nu$ т.е. должно быть (3): $(n_A / n_0) \gtrsim \gamma^{-1/3}$. В комбинации с (9) получаем уравнение для определения порога γ :

$$6 \gamma^{1/3} \ln \left(\sqrt[3]{\gamma \beta} \ln B \right) \approx 1; \quad B = \sqrt[3]{\frac{D_0 \beta^3}{D}} \quad (11)$$

Полагая в первом приближении $\gamma = 1/6^3$ найдем:

$$\gamma_1 \approx \left[6 \ln \left(\frac{\ln B}{6 \sqrt[3]{6}} \right) \right]^{-3} \quad (12)$$

Диффузия Арнольда имеет место лишь для специальных начальных условий внутри стохастических слоёв. Однако при наличии дополнительной диффузии, например, за счёт рассеяния на остаточном газе или за счёт каких-либо других флуктуаций в ускорителе возможно уменьшение времени жизни в отношении:

$$k \sim (\Delta_A / \varepsilon \nu)^{-2} \sim (\gamma / \gamma_1)^2 \quad (13)$$

По-видимому, именно такой эффект наблюдался в работе /9/

(см.рис.3).

Весьма грубые оценки, приведенные выше, могут быть уточнены для конкретных установок с помощью численного эксперимента. Согласно работе /4/ для этого достаточно исследовать локальную устойчивость движения в сравнительно коротком счёте.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Кайлу, Ласлету, Сеслеру и Скринскому за интересные обсуждения.

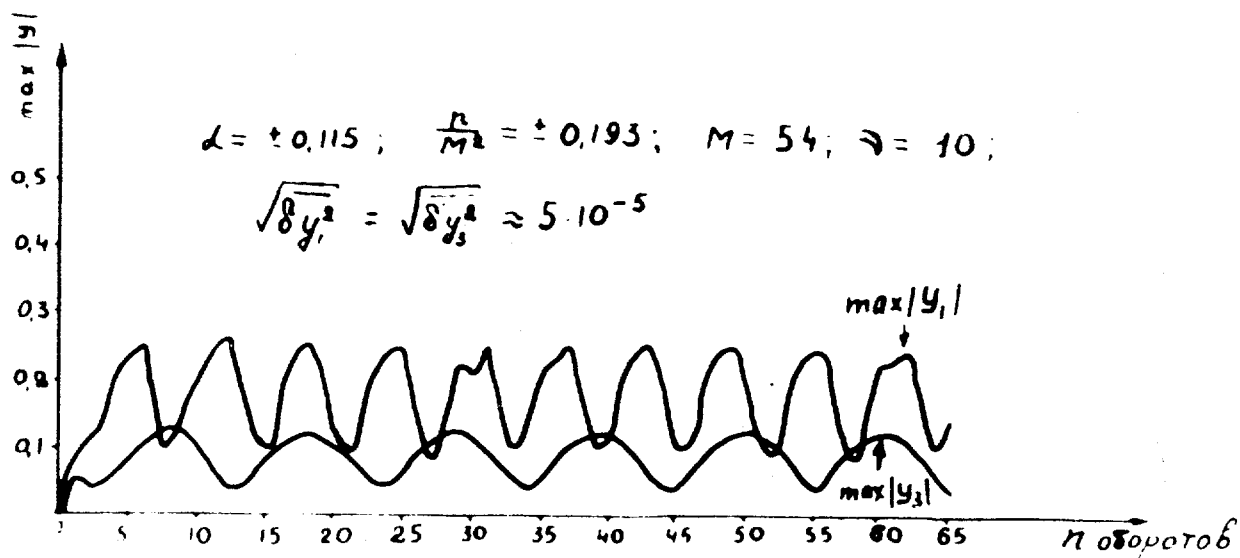
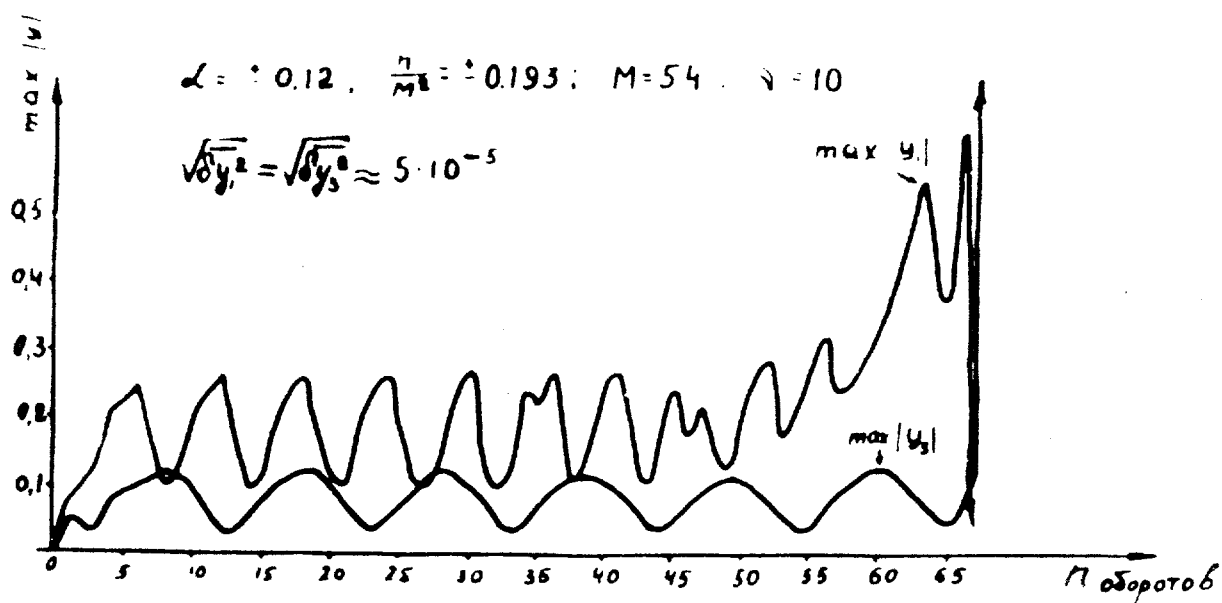


Рис.1. Слабая неустойчивость траектории в нелинейном ускорителе
 /6/: α - параметр нелинейности; ν - число колебаний
 на оборот; $\max |y|$ - амплитуды колебаний.

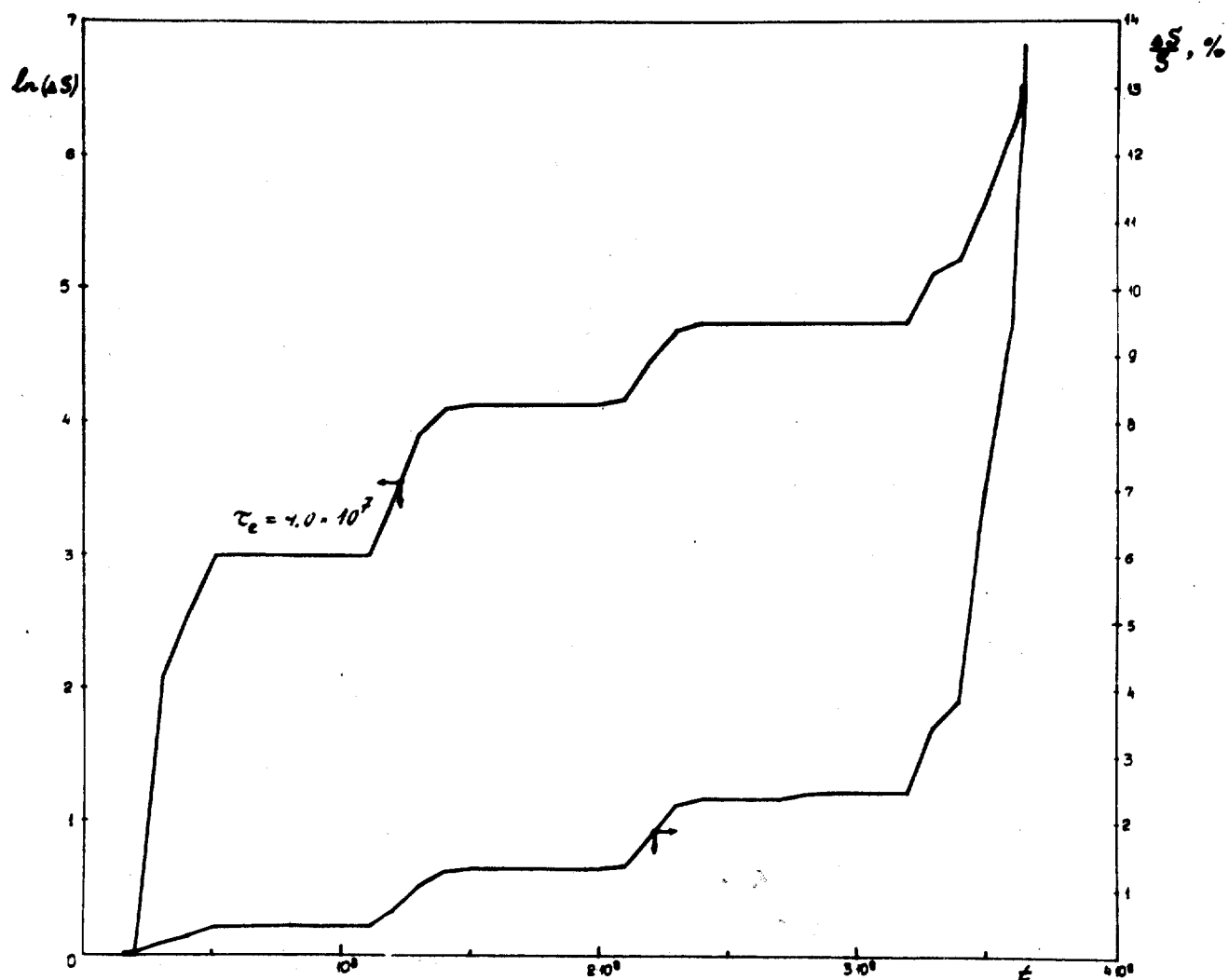


Рис.2. Слабая неустойчивость простейшего нелинейного многомерного преобразования /7/: z - время (число шагов); S - произведение амплитуд колебаний по двум степеням свободы.

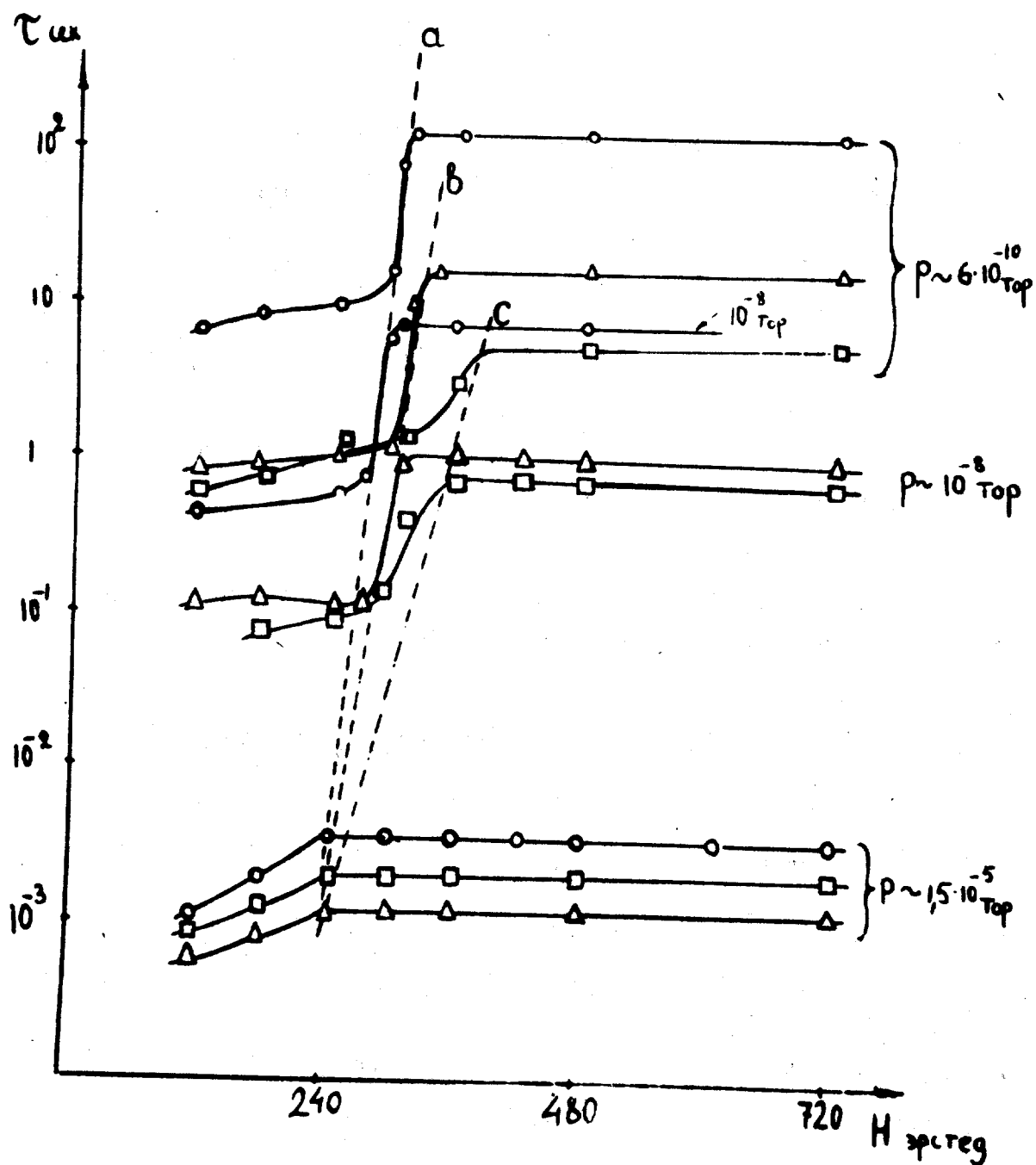


Рис.3. Слабая неустойчивость электронов в магнитной ловушке
 191: H - магнитное поле ловушки; τ - среднее время удержания электрона; p - давление остаточного газа.

Л и т е р а т у р а

1. Proposal for a High Energy Electron-Positron Colliding Beam Storage Ring at the SLAC, 1966.
2. В.И.Арнольд, УМН, ХУШ, 91 (1963).
3. L.J.Laslett, A Computantional Investigation of a Non-Linear Algebraic Transformation, 1967.
4. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством, препринт ИЯФ СО АН СССР, 1968.
5. В.И.Арнольд, ДАН, 156, 9 (1964).
6. И.В.Асташкина, В.В.Вечеславов. Численный расчёт траекторий частиц на предельное время. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1966.
7. B.Chirikov, E.Keil, A.Sessler, The Stochasticity Limit of Many-Dimensional Non-Linear Oscillating Systems, CERN Preprint, to be published.
8. А.Н.Дубинина, Л.С.Красицкая. Письма ЖЭТФ, 5, 230 (1967).
9. В.Г.Пономаренко, Л.Я.Трайнин, В.И.Юрченко, А.Н.Яснецкий, ЖЭТФ, 55, 3 (1968).
10. Report on the Design Study of Intersecting Storage Rings for the CERN PS, CERN, 1964.
11. Г.И.Будкер. Атомная энергия, 22, 348 (1967).
12. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630 (1959); ДАН, 174, 1313 (1967).
13. Я.С.Дербенев, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский. Атомная энергия, 20, 217 (1966).