

**Ф.М.Израйлев, А.И.Хисамутдинов,
Б.В.Чириков**

**ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКОЙ**

**Новосибирск
1968**

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО
ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

Ф.М.Израйлев, А.И.Хисамутдинов, Б.В.Чириков

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ
ЦЕПОЧКОЙ

Новосибирск

1968

A B S T R A C T

Results of numerical experiments with a chain of nonlinear coupled oscillators (1.1), similar to /1/, are presented. The main purpose of the experiments was to check the existence and the position of stochasticity border predicted analytically in /13/. Several methods to detect stochasticity were used including energy spectrum, various correlation and local instability (§2). The results obtained so far seem to be in a reasonable agreement with analytical estimates of /13/. They demonstrate also a very complex structure of the intermediate zone separating the region of stochasticity from that of Kolmogorov's stability (Fig. 14). In particular the local instability begins at a considerably smaller β -value than one at which time correlations vanish. Even under the strongest excitation used so far ($\beta=1$, $E \approx 96$, Fig. 9,10) the lowest modes haven't been yet completely stochastic. In the computations presented the fluctuations of the system's full energy, due to computational errors were relatively big - up to 3%. Although the main parameters of the motion, such as local instability rate, haven't been affected by these errors, as was checked by special runs with the half step of integration, the trajectories itself has to. Therefore further computation with higher accuracy and with a larger number of oscillators in the chain is desirable.

Настоящая работа является продолжением численных экспериментов, начатых Ферми, Паста и Уламом /1/ с целью изучения статистических свойств цепочки связанных нелинейных осцилляторов. Выбранная в /1/ модель оказалось очень удобной, поскольку она допускает, в принципе, любое число степеней свободы и в то же время сравнительно проста для численного счета (разумеется, с ограниченным числом степеней свободы) и аналитических оценок^{х)}. Рассматриваемая проблема интересна прежде всего с принципиальной точки зрения, как попытка пролить свет на физическую природу и механизм появления статистических законов в динамической системе. Как было показано Крыловым /2/, этот вопрос остается до сих пор открытым. Может быть еще более важно решение этой проблемы с точки зрения практических приложений. Дело в том, что возникновение статистических законов, или стохастичности, как мы будем говорить дальше для краткости, означает развитие наиболее опасной неустойчивости нелинейных колебаний. С одной стороны эта неустойчивость развивается достаточно быстро, $\sim \sqrt{t}$ как всякий диффузионный процесс, с другой стороны она захватывает очень широкую область значений параметров и начальных условий.

Еще во времена работы /1/ считалось, что любая нелинейность приводит к стохастичности, во всяком случае для системы с достаточно большим числом степеней свободы. В частности, это вытекало и из старой работы Ферми /3/. Доказательство в этой работе неубедительно с современной точки зрения, по-видимому, и сам Ферми сомневался в нем и поэтому решил произвести проверочный численный эксперимент /1/. Как известно, эксперимент дал отрицательный результат и показал наличие широкой области устойчивости с почти-периодическим движением.

Существуют еще две группы экспериментальных данных, указывающих на наличие такой устойчивой области. Это, во-первых, движение частиц в ускорителях, где всегда имеются небольшие нелинейные возмущения. Наиболее показательны в этом отношении данные работы /4/, где установлена устойчивость колебаний протонов около равновесной орбиты в течение, по крайней мере, 10^8 периодов колебаний, причём специально вводилось дополнительное

х) Более того, наш опыт показывает, что эта модель гораздо удобнее для численных экспериментов (особенно на длинное время), чем даже уравнение первого порядка в частных производных типа Кортевега-де Вриза /14/. В последнем случае явно не хватает скорости счета и оперативной памяти даже у лучших из современных ЭВМ, таких как СДС-6600 или БЭСМ-6. Конечно, положение может существенно измениться с вводом в действие уникальной ЭВМ "Illiak-4" на 10^8 операций в секунду /15/.

нелинейное возмущение. С другой стороны численные эксперименты, предпринятые в ЦЕРН^е в период проектирования синхротрона, показали, что при нелинейном возмущении больше некоторого критического возможно возникновение какой-то неустойчивости нерегулярного типа /5/. По-видимому, это было первое указание на существование границы стохастичности, разделяющей устойчивую и стохастическую области нелинейных колебаний.

Другая группа экспериментальных данных связана с удивительной устойчивостью Солнечной системы. На интервале времени $\sim 10^9$ периодов колебаний нет никаких признаков развития неустойчивости или хотя бы сколько-нибудь существенных нарушений компланарности и круговой формы орбит. Разумеется все эти эксперименты, как "настоящие", так и численные, могут доказать устойчивость только для конечного интервала времени. Устойчивость для любого времени, или вечная /8/ устойчивость, доказана аналитически только для двух степеней свободы /7,8/. Однако открытая в этих работах инвариантность всюду плотной системы торов показывает, что если даже при большем числе степеней свободы и имеется неустойчивость /9/, приводящая в конечном счете к стохастичности (в формальном соответствии с теоремой Ферми /3/), то скорость развития этой неустойчивости должна быть очень малой, по крайней мере для большинства начальных условий. Поэтому и в случае многих степеней свободы естественно ожидать наличие некоторой границы стохастичности, за которой начинается быстрое развитие неустойчивости.

В свое время результат /1/ казался очень неожиданным и вызвал целый ряд теоретических работ /10-13/, в которых делались попытки как-то объяснить возникший парадокс. В частности, в работе /13/ была выдвинута гипотеза о существовании границы стохастичности и была дана оценка положения этой границы. Основной задачей настоящей работы является численное определение границы стохастичности для более простого случая кубической нелинейности, рассмотренного в /13/.

§ 1. Схема счета

Рассматривается цепочка $N-1$ осцилляторов ($N=32$), взаимодействующих по определенному нелинейному закону. Уравнения движения каждого осциллятора имеют вид:

$$\ddot{x}_e = (x_{e+1} - 2x_e + x_{e-1}) + \beta [(x_{e+1} - x_e)^3 - (x_e - x_{e-1})^3] \quad (1.1)$$

Концы цепочки жестко закреплены: $x_0 = x_N = 0$. Коэффициент β характеризует величину нелинейного возмущения, x_e - смещение e -го осциллятора от положения равновесия.

Система (1.1) относится к уравнениям типа $y'' = f(x, y)$ для которых при численном счете выгодно использовать метод, предложенный в работе [6]. Преимущество этого метода по сравнению, например, с методом Рунге-Кутты состоит в том, что при той же точности число операций значительно сокращено. Приведем формулы этого алгоритма в применении к системе (1.1). Запишем (1.1) в виде:

$$\ddot{x}_e = f(x_{e+1}, x_e, x_{e-1}) \quad (1.2)$$

и введем $F_e^{\xi} = h^2 f(x_{e+1}^{\xi}, x_e^{\xi}, x_{e-1}^{\xi})$, где h - шаг по времени, а индекс ξ означает момент времени t , в который берутся значения x . Разделим отрезок h на три части в следующих пропорциях (если h принять за единицу):

$$\begin{array}{c} 0 \quad a \quad 1-a \\ \hline \end{array}, \text{ где } a \text{ выбирается равным } a = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0,27639320.$$

Будем опускать в дальнейшем индекс e и покажем, как получить значения $x^{n+1}, \dot{x}^{n+1}$ в момент времени $n+1$, зная $x^n, \dot{x}^n$. Временную ось можно представить в виде

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_{n-1} & \xi_{-2} & \xi_{-1} & \xi_n & \xi_1 & \xi_2 & \xi_{n+1} \\ n-1 & & & n & & & n+1 \end{array}, \text{ где } \xi_1 = n + ha; \\ \xi_2 = n + h(1-a); \xi_{-1} = n - ha; \xi_{-2} = n - h(1-a); \text{ и, соответственно, } \xi_n = n, \xi_{n-1} = n-1, \xi_{n+1} = n+1. \text{ Тогда}$$

$$x^{n+1} = x^n + h\dot{x}^n + \frac{1}{12}F^{\xi_n} + 0,30150283F^{\xi_1} + 0,11516383F^{\xi_2} + O(h^7) \quad (1.2)$$

$$h\dot{x}^{n+1} = h\dot{x}^n + \frac{1}{12}(F^{\xi_n} + 5F^{\xi_1} + 5F^{\xi_2} + F^{\xi_{n+1}}) + O(h^8)$$

Причем значения F^{ξ_1}, F^{ξ_2} можно найти, используя следующие выражения:

$$x^{\xi_1} = x^n + 0,27639320h\dot{x}^n + 0,06457768F^{\xi_n} - 0,03874353F^{\xi_{-1}} + 0,01871643F^{\xi_{-2}} - 0,00635398F^{\xi_{n-1}} + O(h^6); \quad (1.3)$$

$$x^{\xi_2} = x^n + 0,72360680h\dot{x}^n + 0,29711983F^{\xi_1} - 0,12944272F^{\xi_n} + 0,10987164F^{\xi_{-1}} - 0,01574536F^{\xi_{-2}} + O(h^6)$$

Кроме того, для первого шага необходимо знание F^{-a}, F^{a-1}, F^{-1} ; соответствующие им x^{-a}, x^{a-1}, x^{-1} получаем следующим образом:

$$x^{-1/2} = x^0 - \frac{1}{2} h \dot{x}^0 + \frac{1}{8} F^0 + O(h^3)$$

$$x^{-1} = x^0 - h \dot{x}^0 + \frac{1}{6} (F^0 + 2F^{-1/2}) + O(h^5)$$

$$x^{-a} = x^0 - h x^0 - 0,27639320 h \dot{x}^0 + 0,02861197 F^0 + 0,01213107 F^{-1/2} - 0,00254644 F^{-1} + O(h^5)$$

(1.4)

$$x^{a-1} = x^0 - 0,72360680 h \dot{x}^0 + 0,11805469 F^0 + 0,16120227 F^{-1/2} - 0,01745356 F^{-1} + O(h^5)$$

где $x^0, \dot{x}^0$ - начальные значения.

Выбор шага h диктовался с одной стороны условием малости колебаний полной энергии, которая должна быть для системы (1.1) константой движения:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-1} \left\{ \dot{x}_e^2 + (x_{e+1} - x_e)^2 \right\} + \frac{\beta}{4} \sum_{l=1}^{N-1} (x_{e+1} - x_e)^4 = \text{const} \quad (1.5)$$

а с другой стороны - возможностью проследить поведение системы на больших временах. В каждом отдельном случае указывается E и $\Delta E/E$. Чтобы быть более уверенным в том, что погрешность вычислительной схемы не сказывается на окончательном результате счета, проводились отдельные контрольные опыты с уменьшенными h . Поскольку аналитические оценки для поведения системы (1.1) даются в терминах нормальных (для линейного случая $\beta=0$) координат (мод) Q_k , через определенное число шагов проводится преобразование от x_e к Q_k по формулам:

$$Q_k(t) = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{l=1}^{N-1} x_e(t) \sin \frac{\pi k l}{N} \quad (1.6)$$

и вычисляется энергия мод:

$$E_k = \frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 Q_k^2}{2} \quad (1.7)$$

где ω_k - линейная частота k -ой моды:

$$\omega_k = 2 \sin \frac{\pi k}{2N} \quad (1.8)$$

В качестве начальных условий задавались равные амплитуды мод: $Q_k^0 = C$, которые определялись по формуле

$$x_{\max} = \frac{2 \langle C^2 \rangle m}{N-1} \quad (1.9)$$

где m - означает число возбужденных мод, а $x_{\max}$ (максимальное смещение осциллятора) полагалось равным единице. Начальные скорости $\dot{Q}_k$ всегда выбирались нулевыми: $\dot{Q}_k^0 = 0$.

Затем Q_k , $\dot{Q}_k$ по преобразованию, обратному к (1.6) переводились в x_e^0 , $\dot{x}_e^0$. Все интересующие нас величины периодически выводились на печать и обрабатывались.

§ 2. Методы исследования стохастичности

Основной проблемой обработки результатов численного счета является выбор четкого и удобного критерия того, что движение действительно является стохастическим. В различных случаях мы использовали следующие методы.

1. Визуальная оценка по кривым зависимости энергий нескольких мод от времени, а также по виду спектра в разные моменты времени ($E_k(t)$). Этот метод дает достаточно четкий результат, если вначале возбуждена всего одна мода, как это имело место в большинстве случаев в работе / 1 /. Пример такого случая для наших вычислений приведен на рис.1. Нижняя кривая (б) демонстрирует четкие почти-периодические колебания энергии первой моды. К сожалению, такие начальные условия возможны лишь для самых низших мод. Дело в том, что мода $k \ll N$ может непосредственно обмениваться энергией только с модами $3k$, $5k$, $7k$ и т.д. В случае возбуждения одной достаточно высокой

моды её энергия практически остается неизменной. На рис. 2 дан пример возбуждения одной моды $K=15$. Небольшие колебания энергии связаны с взаимодействием через высшие моды. Причины интенсивного обмена энергией после $t \approx 5000$ будут обсуждаться ниже. Поэтому мы были вынуждены возбуждать вначале несколько мод. На рис. 3 приведен пример зависимости от времени энергии трех мод ($K=16, 18, 19$) при начальном возбуждении пяти мод ($K_0=14, 15, 16, 17, 18$). Видно, что обмен энергией имеет довольно запутанный характер, так что "на глаз" трудно сказать является ли данное движение стохастическим или нет.

2. Изменение спектра колебаний со временем. Вместо того, чтобы наблюдать за энергией какой-нибудь моды в течение времени t , можно определить среднее значение энергии за это же время для каждой моды и выяснить, как распределилась энергия, сосредоточенная в начальный момент $t=0$ в каких-то определенных модах. Пример такого перераспределения энергии приведен на рис. 4, который соответствует случаю первоначально-го возбуждения трех мод ($K_0=28, 29, 30$) (кривая I). Две другие кривые (II и III) дают средние (за времена t_1 и t_2) значения E_K . Усреднение начиналось с $t_0 = 5900$ в расчете, что к этому моменту наступит стационарный обмен энергией между модами; значения $E_K(t)$ брались через Δt . Видно, что энергия как-то перераспределилась, но только между соседними модами, причем в сторону высших мод ($N-K \ll N$) переход энергии облегчен, нежели в сторону низших мод ($K \ll N$). Кроме того, мы очевидно наблюдаем равновесное состояние, так как обе кривые (II и III) практически совпадают.

3. Временные корреляции вычислялись для смещения определенного осциллятора x_j и для энергии определенной моды колебаний E_K по следующим формулам:

$$\rho(x_j, T) = \frac{\overline{x_j(t) \cdot x_j(t-T)}}{\overline{x_j^2(t)}} \quad (2.1)$$

$$\rho(E_K, T) = \frac{\overline{E_K(t) E_K(t-T)} - \overline{E_K(t)}^2}{\overline{E_K^2(t)} - \overline{E_K(t)}^2} \quad (2.2)$$

Здесь черта означает усреднение по t через равные промежутки Δt ; T - сдвиг по времени. Во всех случаях в (2.1) $j=16$, что при выбранном $N=32$ соответствует среднему осцилля-

Тору цепочки.

Ожидаемый вид корреляционной функции можно представить себе, взяв для примера гауссовский спектр колебаний:

$$f(\omega) = \frac{e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\epsilon^2}}}{\sqrt{2\pi} \epsilon} \quad (2.3)$$

где ϵ - ширина спектра. Коэффициент корреляции вычисляется непосредственно и имеет вид:

$$\rho(T) = \frac{e^{-\frac{\omega_0^2}{\epsilon^2}} + \cos \omega_0 T}{1 + e^{-\omega_0^2/\epsilon^2}} \cdot e^{-\left(\frac{\epsilon T}{2}\right)^2} \quad (2.4)$$

Для быстрых колебаний, когда $\omega_0 \gg \epsilon$, корреляционная функция представляет собой затухающие колебания:

$$\rho(T) = e^{-\left(\frac{\epsilon T}{2}\right)^2} \cos \omega_0 T \quad (2.5)$$

В обратном предельном случае $\omega_0 \ll \epsilon$ получаем монотонную зависимость, (пренебрегая небольшими колебаниями на "хвосте"):

$$\rho(T) \approx e^{-\left(\frac{\epsilon T}{2}\right)^2} \quad (2.6)$$

которая является амплитудной кривой для (2.5).

На рис.5 представлен пример зависимости модуля коэффициента корреляции от времени. Нерегулярный характер верхней кривой ($\omega_0 \gg \epsilon$) объясняется отчасти большим интервалом ΔT ($> \omega_0^{-1}$), через который вычислялись значения функции $\rho(x_{16}, T)$. Нижняя кривая (корреляция моды $K=15$) соответствует, как легко видеть, случаю $\omega_0 \sim \epsilon$. Ясно видна не-симметрия колебаний $\rho(x_{15}, T)$ относительно нуля. Остаточные колебания $\rho(T)$ при больших T , особенно отчетливые на рис.5а вполне могут быть объяснены статистическими ошибками вычисления $\Delta \rho$. Эти ошибки не определяются, конечно, числом слагаемых при усреднении в (2.1, 2.2), так как соседние слагаемые не являются независимыми. Однако для грубой оценки можно сделать простое предположение, что сумма в (1.11) разбивается

на несколько независимых частей, каждая из которых включает слагаемые внутри интервала корреляции τ . Последним термином мы обозначаем промежуток времени, в течение которого корреляции еще существенны. Величина τ находится из самой корреляционной функции. Для примера на рис.3 $\tau \sim 100$. Поскольку дисперсия каждой из таких частей ~ 1 , то по обычной формуле

$$\Delta p \sim \sqrt{\tau/(t-T)} \quad (2.7)$$

где t — полное время процесса, $t-T$ определяет время, в течение которого накапливались слагаемые при вычислении ρ . Для рис.6 $\Delta p \sim 0,1$. Быстрое затухание корреляционной функции (2,5,6) характерно для выбранного нами (2,3) непрерывного спектра, соответствующего стохастическому движению. В случае почти — периодического движения корреляционная функция может иметь вид, похожий на (2,5, 6), но только до определенного значения T , обратно пропорционального расстоянию между линиями спектра, после чего она будет повторяться; иначе говоря, у неё появится квази-период T_q . С помощью численного счета мы можем найти лишь нижнюю границу T_q . Согласно данным рис.5, $T_q > 490$.

Чтобы повысить эту границу мы производили вычисление $\rho(E_k, T)$ и $\rho(x_{16}, T)$ для значений T вплоть до $T_0 = 4900$. Например, для данных рис.4, корреляции имеют вид, приведенный на рис. 6. Корреляции существенно превышают статистические флуктуации Δp и имеют квази-период. Это вполне естественно, так как распределение энергии на рис.4 показывает, что в рассматриваемом случае даже высшие моды лежат на границе стохастичности. В других случаях, как например, на рис.10,13, которые мы будем обсуждать ниже, корреляции отсутствуют в пределах статистических ошибок до $T = 4900$. Между тем характерное время обмена энергией между модами ~ 1000 .

4. Корреляции между модами вычислялись по формуле:

$$\rho(E_k, E_{k'}) = \frac{\overline{E_k \cdot E_{k'}} - \bar{E}_k \cdot \bar{E}_{k'}}{\{(\bar{E}_k^2 - \bar{E}_k^2)(\bar{E}_{k'}^2 - \bar{E}_{k'}^2)\}^{1/2}} \quad (2.8)$$

где значения E_k и $E_{k'}$ берутся в один и тот же момент времени через Δt , а черта, так же, как и в (2.1,2), означает усреднение по t . Вследствие закона сохранения полной энергии системы коэффициент корреляции (2.8) отличен от нуля даже для стохастического движения. Нетрудно показать, что в последнем случае он равен:

$$\rho(E_k, E_{k'}) = -\frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad (2.9)$$

Таким образом, знание этого коэффициента даёт возможность определить эффективное (среднее) число взаимодействующих мод. Например, для случая на рис.5 $\rho(E_{15}, E_{17}) \approx -0.24 \pm 0.1$, откуда $\sqrt{2} \approx 5 \pm 2$. Для спектра энергий мод представленного на рис.4, $\rho(E_{27}, E_{29})$ даёт $\sqrt{2} \sim 8$, что в общем соответствует числу мод, между которыми распределилась вся энергия. Грубая оценка статистической ошибки $\rho(E_k, E_{k'})$ дается величиной $\Delta \rho$ (2.7), так же как и для $\rho(E_k, T)$.

Б. Локальная неустойчивость колебаний, которая означает,

что почти любые близкие вначале траектории расходятся экспоненциально быстро в процессе движения. Для исследования локальной неустойчивости мы использовали свойство пространственной симметрии нашей системы, согласно которому четные моды не могут появиться в процессе движения, если они не были возбуждены вначале [1]. Поэтому имеется точное решение $E_{2k}(t) = 0$ и нам достаточно проследить за энергией мод, если вначале сообщить им очень небольшую энергию. Мы обнаружили эту своеобразную неустойчивость четных мод случайно. Когда исследовалось возбуждение одной единственной моды, в процессе счета оказалось, что энергия четных мод ("запрещенных") увеличивается от машинного нуля ($\sim 10^{-18}$) до значительной величины и даже становится сравнимой с энергиями нечетных мод. То-есть, с самого начала существовала несимметрия в χ_e^0 относительно середины цепочки. "Винновником" оказалась процедура вычисления синуса, входящего в формулы преобразования, обратного к (1,6). (Напомним, что в качестве начальных условий задавались $\dot{S}_k^0, \dot{S}_k^0$ а не $\chi_e^0, \dot{\chi}_e^0$). Обнаружилось, что синус вычислялся с некоторой погрешностью, зависящей от номера моды, в результате чего и возникала слабая несимметрия, соответствующая некоторому малому возбуждению четных мод. Впоследствии, когда это было необходимо, проводилась специальная симметризация

сразу же после перехода от Q_k^0 , $\dot{Q}_k^0$ к x_e^0 , $\dot{x}_e^0$.

Этот эффект и был положен в основу так называемого метода локальной неустойчивости, который является, вообще говоря, наиболее эффективным методом определения того, что система находится в области стохастичности, ибо известно, что стохастичность включает в себя, как наиболее характерное свойство, локальную неустойчивость движения. В то же время в устойчивой области фазового пространства, соответствующей квазипериодическому движению, малые возмущения колеблются около некоторого среднего значения.

На рис.2б как раз и представлен случай, когда в результате быстро развивающейся неустойчивости энергия, ранее сосредоточенная в одной моде ($K_0 = 15$), через некоторое время резко переходит в соседние моды. На рис.2а представлена логарифмическая зависимость энергии отдельных мод от времени, по которой можно оценить скорость развития неустойчивости. Этот метод для возможности обнаружить слабую неустойчивость и для случая $K_0 = 1$. Параметры взяты из работы / 1 /, авторы которой рассматривали движение в этом случае как квазипериодическое. Действительно, рис.1 не даёт никакого повода усомниться в этом. Тем не менее, рис.1а показывает, что существует, хотя и слабая, неустойчивость, которая может сказаться на общем поведении (например, первой моды) через достаточно большое время. На рис.7 еще раз продемонстрирован рост четных мод ($K_0 = 15, 17$), причем заметно, что далекие ($K = 2, 30$) моды "вырастают" позднее, чем более близкие ($K = 14, 18$), хотя скорость роста у всех примерно одинакова. Заметим также, что переход энергии к высшим модам ($K = 30$) происходит быстрее, чем к низшим ($K = 2$). Этот эффект был отмечен еще в /1/.

С помощью этого метода, задавая в некоторый момент времени ($t_0 = 75$) начальное возмущение четных мод ($\sim 10^{-14}$ Е), было проведено исследование границы стохастичности. При этом возбуждались по три нечетных моды и определялась скорость роста энергии близлежащих четных мод. На рис.8 приведены характерные зависимости энергии четных мод от времени, по которым можно, хотя и с некоторой погрешностью, определить зависимость скорости развития неустойчивости от параметра нелинейности β .

Описанный метод является чрезвычайно удобным, во-первых, из-за своей наглядности, а во-вторых, в этом случае не требуются большие времена счета. Кроме того, один счет дает сразу расстояние между двумя близкими траекториями. Тем не менее, чтобы убедиться, что такой выбор траекторий не является особенным, было проведено два эксперимента. Первый состоял в том, что возбуждались вначале три нечетные моды ($K_0=27,29,31$), но проводилась симметризация, т.е. энергии четных мод все время строго были равны нулю, и просчитывались два варианта с немного отличающимися Q_k^0 ($\delta Q_k^0 \approx 10^{-8}$). Затем определялась скорость разбегания этих двух траекторий. Во втором случае возбуждались как четные, так и нечетные моды (также, $m=3$, $K_0=28,29,30$) и аналогичным образом сравнивались две близкие траектории. Оказалось, что во всех случаях (для достаточно больших β), наблюдается экспоненциальное разбегание траекторий, свидетельствующее о локальной неустойчивости движения.

§ 3. Основные результаты

Как уже говорилось выше основной задачей настоящей работы было экспериментальное определение границы стохастичности для цепочки нелинейных осцилляторов. Аналитическая оценка для этой границы, полученная в /13/, имеет вид:

$$3\beta_{кр} \frac{E}{N-1} \sim \begin{cases} \frac{\sqrt{m}}{K}; & K \ll N \\ 10 \frac{m}{N^2} \left(\frac{K}{N}\right)^2; & N-K \ll N \end{cases} \quad (3.1)$$

где E — полная энергия системы (1.1), а m — число возбужденных мод. Вид границы изображен на рис.14 (прямые линии, $m \sim 1$).

Экспериментальное определение границы стохастичности производилось методом локальной неустойчивости (§2). Сводные данные приведены на рис.15 в виде вертикальных отрезков, дающих интервал значений скорости роста $1/\tau$ (сравни рис.8). Группы данных I, II, III, IV получены по росту четных мод при начальном возбуждении трех соседних нечетных мод в различных участках спектра. Группы V, VI получены по разбеганию близких траекторий, причем в первом случае (V) были возбуждены те же моды, что и для (I), но с симметризацией, т.е. с полным устра-

нением четных мод, а во втором случае (V1) возбуждались как четные, так и нечетные моды ($K_0=28,29,30$).

На рис.15 использован полулогарифмический масштаб в соответствии с ожидавшейся зависимостью /16/:

$$\frac{1}{\tau} = \Omega \ln \beta / \beta_{кр} \quad (3.2)$$

где $\beta_{кр}$ лежит на границе стохастичности (3.1), а Ω — порядка расстояния между резонансами /13/. Действительно, при больших β экспериментальные данные ложатся на прямые в пределах ошибок. Однако при малых β имеются существенные отклонения. В настоящий момент мы не знаем определенно, с чем связаны эти отклонения. Мы можем только выдвинуть две различные гипотезы для их объяснения.

Первая из них связывает отклонения, всегда в сторону больших $1/\tau$, с другими более плотными системами резонансов. Это приводит одновременно и к уменьшению $\beta_{кр}$, которое определяется по пересечению интерполяционной прямой на рис.15 с осью абсцисс, и к уменьшению наклона прямой. Качественно именно это и наблюдается на рис.15. Этот эффект особенно отчетливо виден при возбуждении низших ^{мод} мод, где кроме "основной" прямой (I) можно столь же уверенно провести и вторую прямую (IV). В других случаях эффект менее явный.

Количественное сравнение можно провести путем измерения наклона интерполяционных прямых на рис.15. Среднее значение этого наклона для всех групп кроме (IV) дает: $\langle \Omega \rangle \approx 2.6 \cdot 10^{-2}$, что более или менее согласуется с ожидаемой оценкой $\Omega \sim \sqrt{N} \approx 0.1$. Для прямой IV: $\Omega \approx 10^{-3}$. Это может быть сопоставлено с предсказываемой теорией плотной системой резонансов с $\Omega \sim (\sqrt{N})^3 \approx 10^{-3}$. Теория предсказывает также, что в этом случае $\beta_{кр} (\sim \Omega)$ должно уменьшиться во столько же раз. Это действительно подтверждается по порядку величины: $\Omega(III) / \Omega(IV) \approx 25$; $\beta_{кр}(III) / \beta_{кр}(IV) \approx 37$.

Возникает вопрос, чем же отличаются в таком случае обе границы стохастичности с точки зрения поведения системы в целом? Ответ состоит в том, что более плотная система резонансов может быть, и в данном случае действительно оказывается, недостаточно широкой. Поэтому перекрытие резонансов такой системы

не приводит, вообще говоря, к полной стохастичности; вместо этого образуется более или менее узкая стохастическая полоса с ограниченным изменением энергии взаимодействующих мод.

По-видимому, именно этим эффектом объясняется странное на первый взгляд поведение системы для случая, представленного на рис. 2. Так, верхняя кривая на этом рисунке явно указывает на локальную неустойчивость движения. Однако эта неустойчивость не развивается, по-видимому, до сколько-нибудь заметной величины, так как она совершенно не проявляется на нижней кривой. В частности, последовательные максимумы на рис. 2б различаются между собой на несколько процентов, однако, эта разница не растет экспоненциально, как на рис. 2а.

Возникает еще более важный вопрос, может ли такой стохастический слой привести к значительному перераспределению энергии между модами за достаточно длительное время? Хотя у нас нет сейчас никаких экспериментальных данных по этому поводу, мы знаем, что, вообще говоря, это возможно. Это возможно благодаря так называемой диффузии Арнольда, механизм которой связан с пересечением различных стохастических слоев многомерной системы /9/. Однако эта неустойчивость развивается чрезвычайно медленно /9,17/, и поэтому ее имеет смысл рассматривать отдельно от сильной неустойчивости, вызванной перекрытием широкой (и менее плотной) системы резонансов. Термин "сильная" означает в данном случае, что все возмущение, пропорциональное β (1.1), ведет себя как "случайное" без какого бы то ни было дополнительного малого множителя. Именно такая граница стохастичности представлена на рис. 14.

Сравнение ее с тремя экспериментальными точками показывает, что зависимость $\beta_{кр}$ от K соответствует ожидаемой, однако, абсолютное значение меньше в ~ 3 раза. Такое различие не может считаться очень серьезным ввиду грубости оценки (3.1) /14/. Эта грубость связана не только с неопределенным численным множителем в (3.1), но и с малым числом возбужденных мод. Последний эффект демонстрируется прямыми V, VI на рис. 15. Так, для прямой V $\beta_{кр}$ приблизительно в 2 раза больше, чем для прямой I, причем единственное различие между ними состоит в полном отсутствии четных мод случая (V). Еще более существенное различие имеет место в случае возбуждения мод смешанной четности (VI), где $\beta_{кр}$ превышает значение для

сравнимого случая ($\bar{I}$) почти на порядок. Трудно сказать сейчас, с чем это связано, может быть, например, с уменьшением числа мод одинаковой четности. Во всяком случае это еще раз демонстрирует очень сложную структуру переходной зоны, но, в то же время, показывает совпадение по порядку величины ожидаемого и экспериментального положения границы стохастичности.

Вернемся теперь к отклонению экспериментальных данных от прямых на рис.15. Возможно совершенно другое объяснение этого явления, состоящее в том, что зависимость $1/\tau$ от $\beta_{кр}$ не является логарифмической (3.2). Можно, например, попытаться аппроксимировать эту зависимость степенной функцией. Для этого мы отложим те же самые экспериментальные данные в двойном логарифмическом масштабе (рис.16). К сожалению, они также укладываются в пределах ошибок на прямые линии. Таким образом, в настоящее время экспериментальные ошибки слишком велики, чтобы различить между двумя гипотезами, необходимы дальнейшие численные эксперименты с большей точностью.

Аналитические оценки показывают^{х)}, что в зависимости от фазовых соотношений между резонансами действительно возможна и другая зависимость $\tau^{-1}(\beta_{кр})$, а именно:

$$\tau^{-1} \sim \Omega \left(\frac{\beta}{\beta_{кр}} \right)^{4/3} \quad (3.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что наклон интерполяционных прямых в двойном логарифмическом масштабе должен быть равен:

$n = 4/3 \approx 1.33$. Экспериментальные значения наклона приведены в подписи к рис.16; среднее значение (кроме III) равно: $\langle n \rangle = 1.28$, причем все значения, кроме III, совпадают с ожидаемой величиной (4/3) в пределах экспериментальных ошибок. В случае (III) как наклон интерполяционной прямой, так и общее расположение экспериментальных точек существенно отличаются от оценки (3.3). Это указывает, по-видимому, что по крайней мере в этом случае имеет место зависимость (3.2).

Граница стохастичности на рис.16 соответствует вертикальной асимптоте зависимости $\tau^{-1}(\beta)$. Хотя экспериментальные

х) Эти оценки будут опубликованы в отдельной работе.

данные на рис.16 и не исключают такой возможности, количественное определение $\beta_{кр}$ не представляется возможным из-за больших ошибок. Поэтому мы вынуждены были, может быть и не совсем оправдано, воспользоваться для этой цели данными рис.15.

Мы уже видели, что локальная неустойчивость не обязательно означает сильную стохастичность (хотя, по-видимому, обязательно приводит к реальной неустойчивости). Поэтому желательно использовать другие методы, для того, чтобы убедиться, что при достаточно больших β , E наша система (1.1) действительно является стохастической. Были проделаны три контрольных счета на предельно возможное в наших условиях время $t_{max} \sim 10^4$.

В первом случае были возбуждены три нечетные моды ($K_0=15,17,19$), как и для случая (II) на рис.15, но с симметризацией. Значение $\beta \approx 0.0314$ было выбрано приблизительно в 2 раза больше $\beta_{кр}$ по рис.15. Измерялись корреляции 15-й моды и смещения центрального осциллятора, а также корреляции между модами 15 и 17. Результаты приведены на рис.11. Видно, что корреляции носят почти-периодический характер, а число взаимодействующих мод практически остается без изменений: $N_{\epsilon_3} = 4 \pm 1$.

Этот результат не обязательно противоречит данным по положению границы стохастичности на рис.15. Во-первых, если система находится вблизи границы стохастичности, энергия не может распространиться на большое число мод, так как при этом растет η и стохастичность прекращается (3.1). Во-вторых, условия возникновения стохастичности определяются на самом деле энергией взаимодействующих мод /13/, а не только полной энергией, как это принято для простоты в оценке (3.1). Но в таком случае энергия каждой моды не может значительно уменьшиться вблизи границы стохастичности, так как опять-таки нарушаются условия стохастичности. Это значит, что возможен только частичный обмен энергией между модами, что, в свою очередь, приводит к остаточным корреляциям. Однако, если взять $\beta \gg \beta_{кр}$, то мы должны уже получить "настоящую" стохастичность.

Второй контрольный счет как раз и соответствует

$\beta/\beta_{кр} \approx 28$ (рис. 13). Здесь энергия действительно распределяется почти между всеми модами, исключая лишь самые низ-

шие, для которых выполнение критерия стохастичности затруднено (3.1). Легко оценить критическое значение K , до которого еще доходит стохастичность:

$K_{кр} \sim K_0 \sqrt{\frac{m}{m_0}} \cdot \frac{\beta_{кр}}{\beta} \sim$
 ~ 2 , где мы положили: $K_0=17$; $m_0=3$; $m \approx N=32$. Этот результат подтверждается также значением $\rho(E_{15}, E_{17})$

(рис.13). В силу больших экспериментальных ошибок можно оценить лишь нижнюю границу для числа взаимодействующих мод:

$N_{вз} \gtrsim 8$. Из данных рис.13 видно также, что в пределах статистических ошибок ($\pm 0,1$) корреляции 15-й моды отсутствуют. Что же касается корреляций по $\mathcal{X}$, то они связаны главным образом с тем, что стохастичность не доходит до 1-й моды. Интересно отметить, что корреляции медленно затухают. Не исключено, что это связано как-то с влиянием ошибок счета (см. ниже), но в таком случае почему нет никакого затухания на рис. 11? Другое возможное объяснение связано с тем, что движение первой моды, ответственной за корреляции по $\mathcal{X}$, все же является стохастическим, но за значительно большие времена, так как эта мода лежит в переходной зоне (рис.12).

Наконец, в последнем контрольном счете были возбуждены все моды с равной амплитудой и, следовательно, существенно разной энергией (рис.9, кривая 1). Если распространить оценку (3.1) и на этот случай, то критическое значение K будет равно: $K_{кр} \sim N \sqrt{m} / 3\beta E \sim 1/2$, где

мы использовали данные рис.9: $\beta=1$; $E=96$; $m \approx N=32$.

Полученный результат показывает, что низшие моды лежат практически на границе стохастичности, и поэтому могут показывать некоторые аномалии. Это действительно имеет место согласно картине распределения энергии (рис. 9, кривая III) и корреляциям по $\mathcal{X}$ (рис.10а). В то же время корреляции 13-й моды опять таки отсутствуют в пределах статистических ошибок, а корреляции между модами приводят к значению $N_{вз} \gtrsim 7$.

Подводя итоги, мы можем констатировать, что совокупность экспериментальных данных подтверждает гипотезу работы /13/ о наличии границы стохастичности для системы (1.1) и, более того, подтверждает по порядку величины оценку (3.1) положения этой границы. Наиболее слабым пунктом настоящей работы являются значительные ошибки счета, которые контролировались по изменению полной энергии системы (см. подписи к рисункам); в отсутствие ошибок $\Delta \bar{E} \equiv 0$. Особенно это касается трех только что упомянутых контрольных экспериментов (рис.9 : 13), где $\Delta \bar{E}/E$ достигает 3%. Могут ли эти ошибки сами по себе

вызвать стохастичность? Мы думаем, что нет. Подтверждением этому служат значительные остаточные корреляции (рис. 11) и отсутствие обмена энергией (рис. 12) для малых β . Другой контроль влияния ошибок был проведен для эксперимента с логарифмической неустойчивостью. При уменьшении шага вдвое $\Delta \varepsilon / \varepsilon$ уменьшилось с 3% до 0,03%, при этом кривые экспоненциального роста типа приведенных на рис. 8 несколько изменилось, однако, значение интересующего нас параметра χ осталось прежним в пределах экспериментальных ошибок.

Тем не менее нам представляется полезным продолжение численных экспериментов с нелинейной цепочкой с большей точностью и с большим числом осцилляторов.

Пользуемся случаем выразить нашу искреннюю благодарность А. Чистякову за помощь в проведении вычислений и Е. Крушкаль за полезные критические замечания.

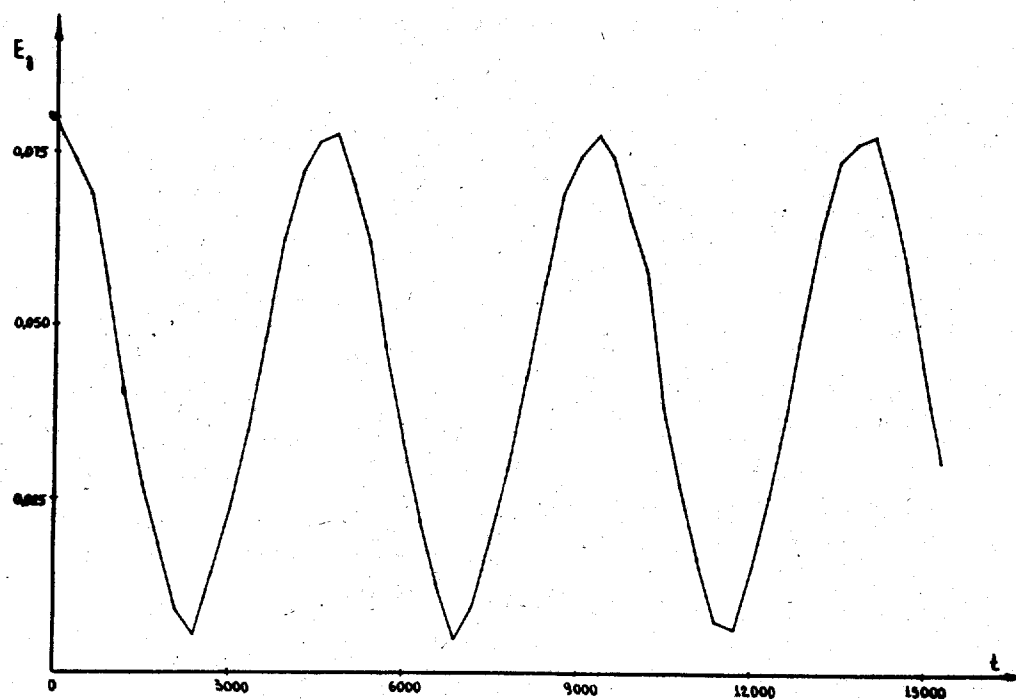
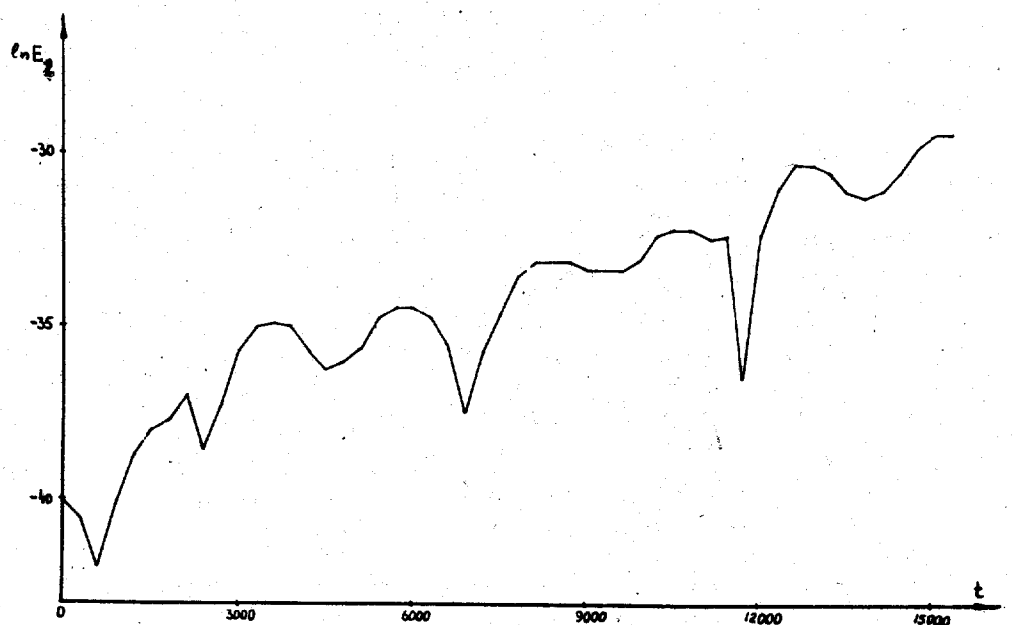


Рис.1. Возбуждена вначале 1-ая мода и малая 2-ая ($E_1^0 \approx 0.0788$; $E_2^0 \approx 5.3 \cdot 10^{18}$). Вверху - логарифмическая зависимость энергии 2-ой моды, внизу - энергия 1-ой моды; $\hbar = 1/2$; $\beta = 8$; $t_{\max} \approx 15300$; $\Delta E/E \approx 0.15\%$.

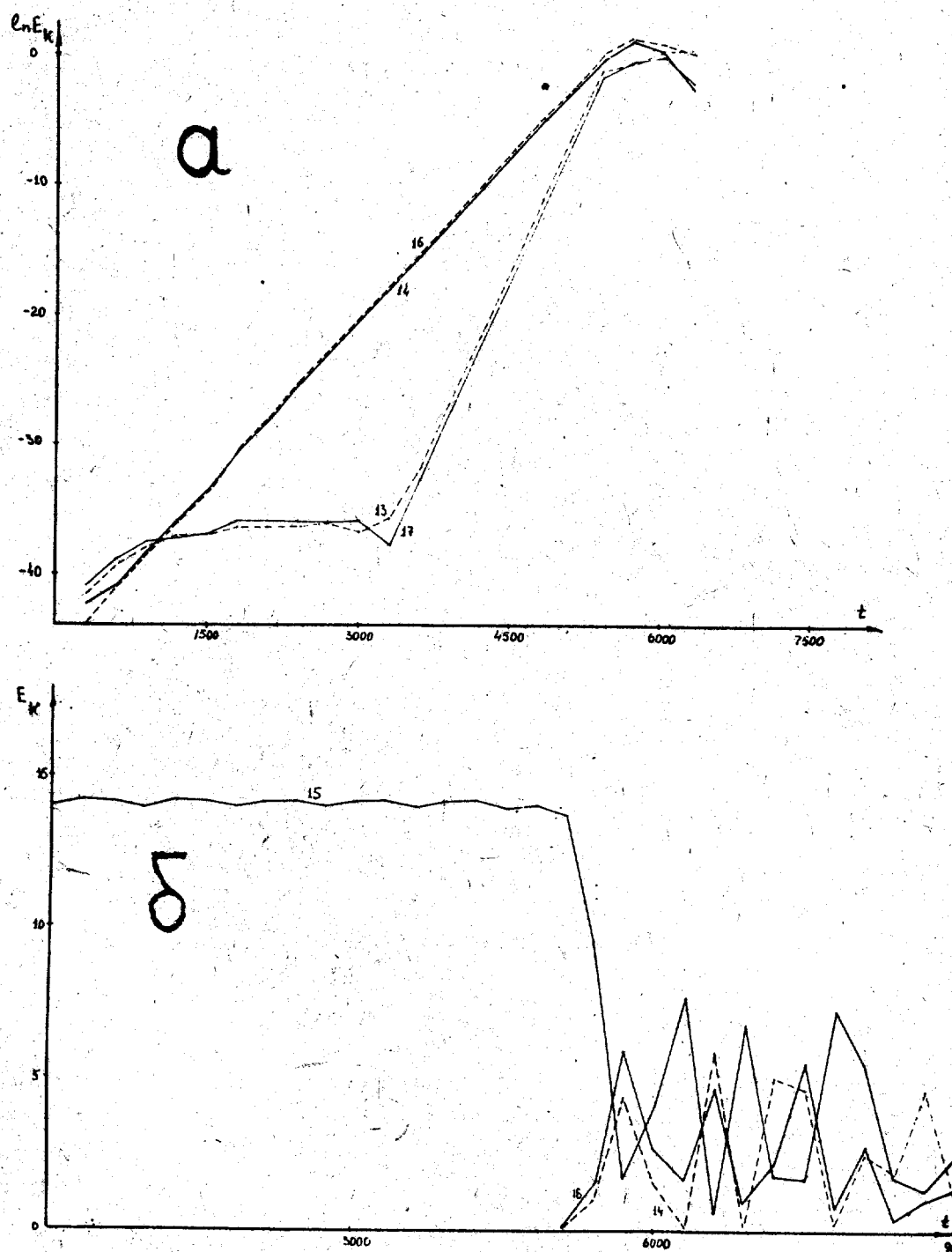


Рис.2. Начальное возбуждение единственной 15-ой моды;
 а - логарифмический рост энергии некоторых мод,
 б - зависимость энергий мод ($K=14,15,16$) от времени;
 цифры указывают номера мод; $h \approx 1/6$; $\beta \approx 0.0314$;
 $t_{\max} \approx 8000$; $E \approx 14.1$; $\Delta E/E \approx 1.5\%$.

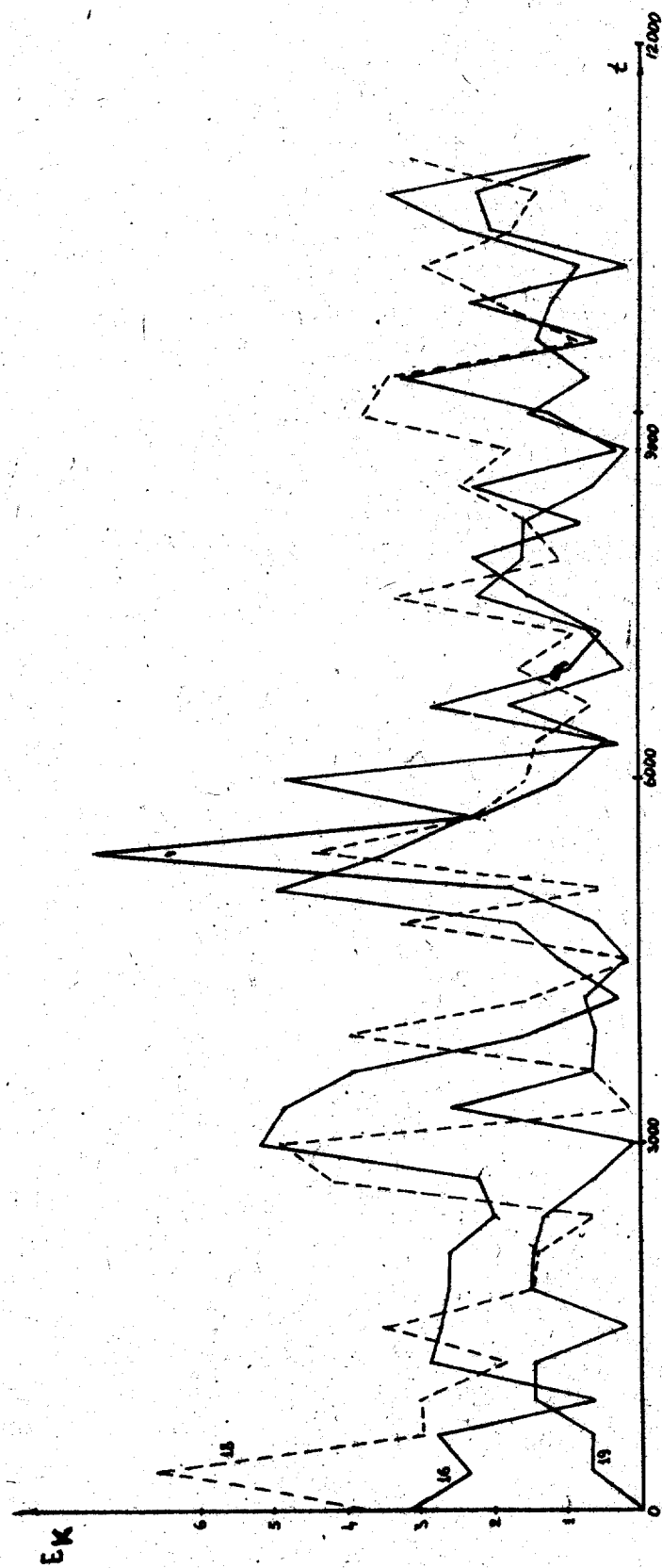


Рис. 3. Возбуждена группа из 5 мод ($K_0=14, 15, 16, 17, 18; m=5$).

Дана зависимость энергий мод с номерами $K=16, 18, 19$ от времени; $\eta \approx 1/3$; $\beta \approx 0.0314$; $t_{max} \approx 11100$; $E_K 16, 1; \Delta \bar{E}/E \approx 1.5\%$.

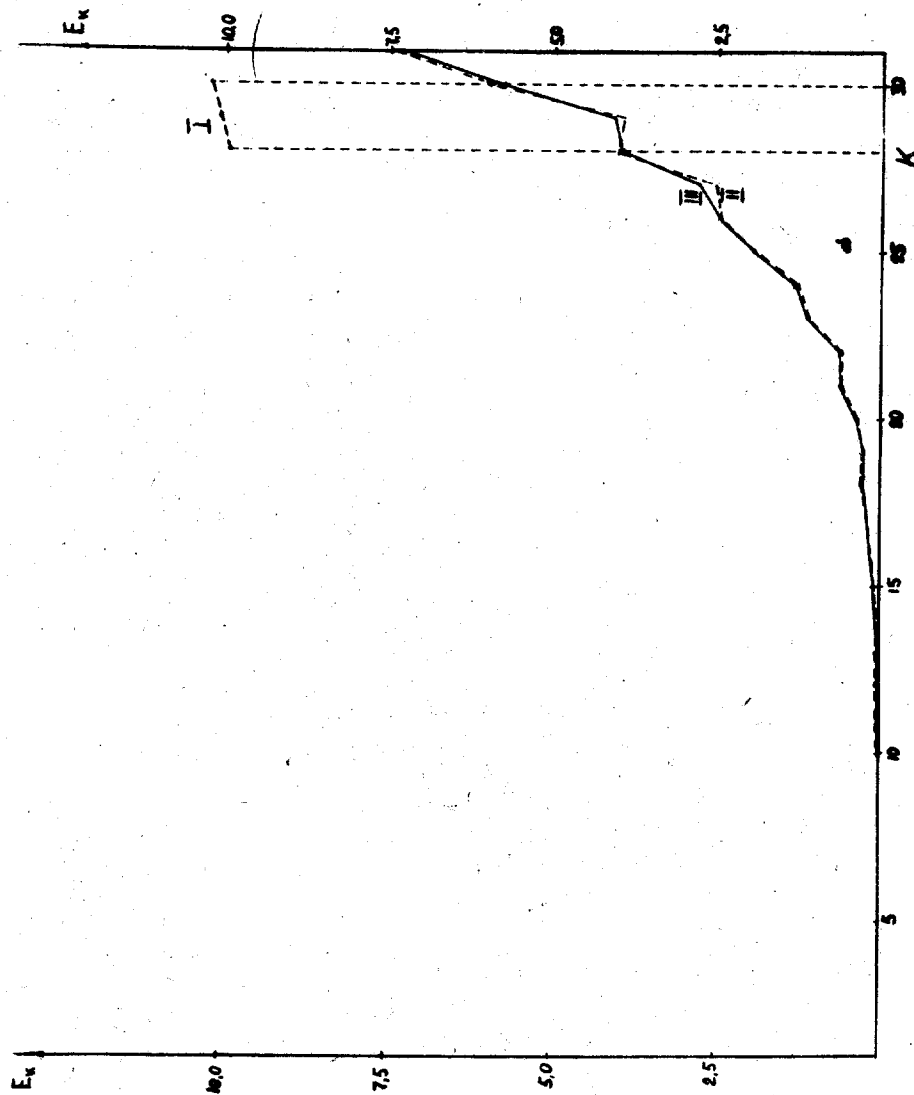


Рис.4. Спектр энергий для начального возбуждения 3х высших мод ($K_0=28, 29, 30; m=3$, кривая I); Кривая II дает средние энергии каждой моды к моменту $t_1 \approx 9300$; III - к моменту $t_2 \approx 10500$; $k \approx 1/6$; $\beta \approx 0.06$; $\Delta t = 1$; $E \approx 35.2$; $\Delta E/E \approx 4.3\%$.

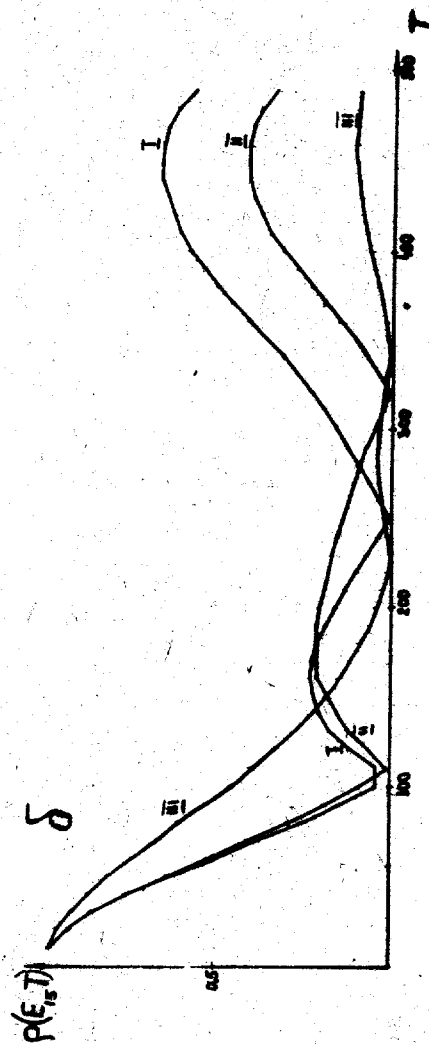
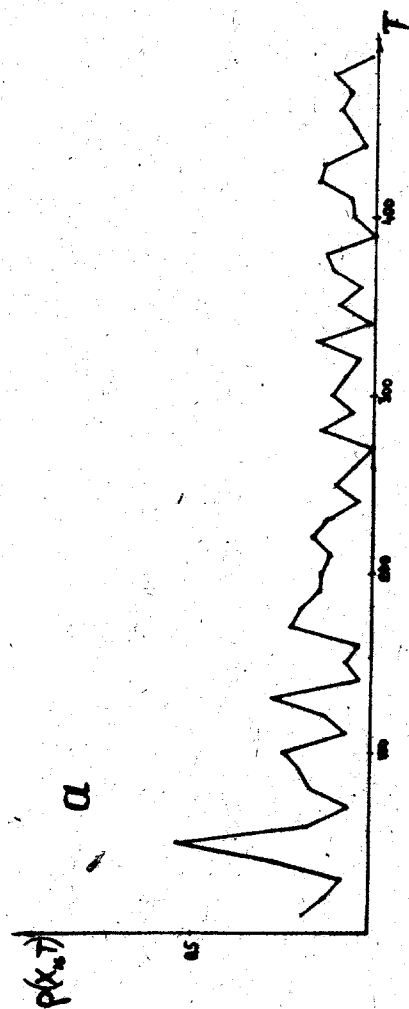


Рис.5. Корреляции смещения осциллятора (а) и корреляции энергии 15-ой моды (б) для случая рис. 4;
 Кривая I соответствует времени счета $t_1 \approx 3150$; кривая II - $t_2 \approx 4500$; кривая III - $t_3 \approx 11100$; $\Delta T = 10$; $\Delta t = 1$; $\rho(E_{15}, E_{15}) \approx -(0,24 \pm 0,10)$ (для t_3).

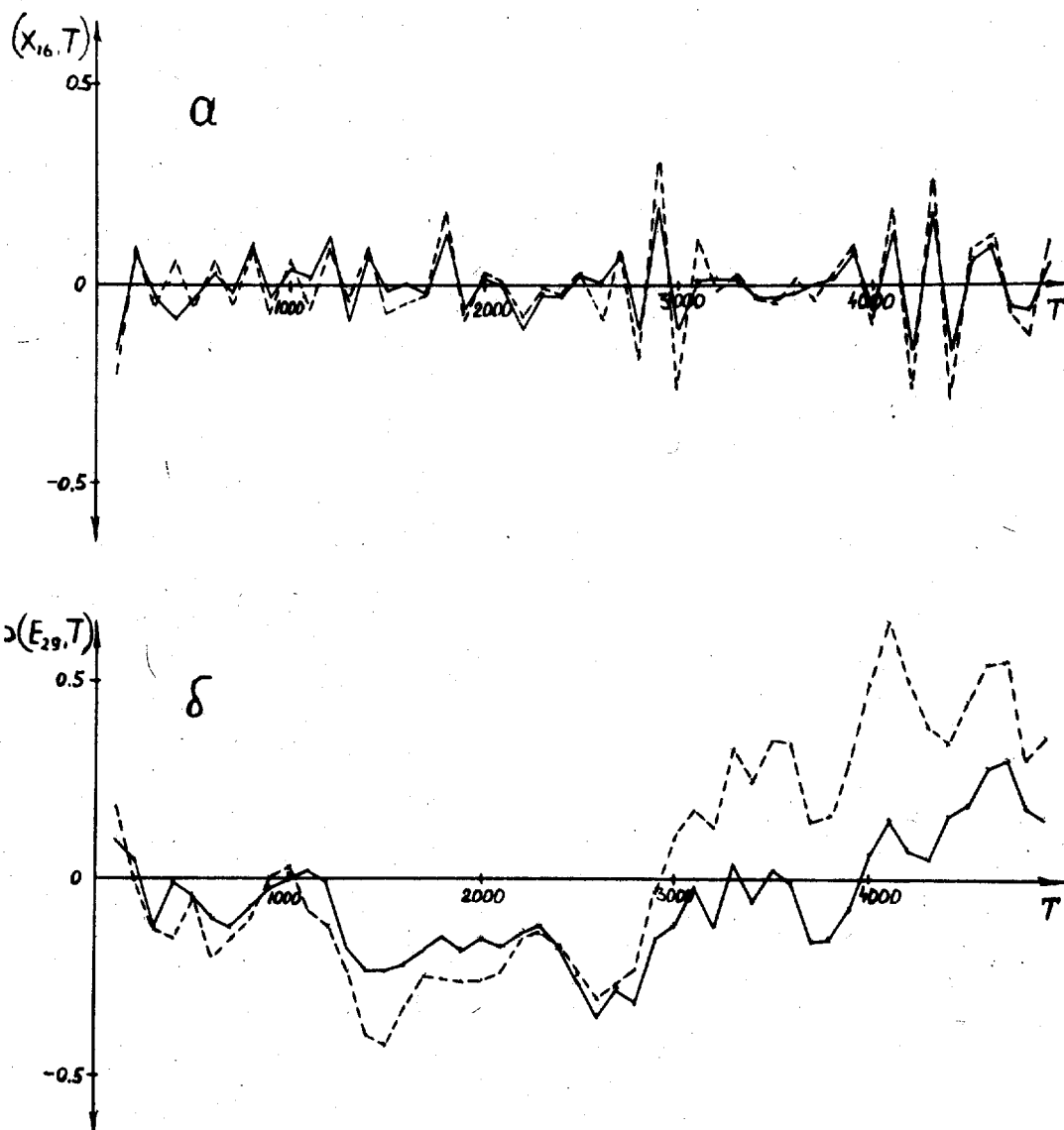


Рис.6. Корреляции смещения осциллятора (а) и корреляции энергии 29-ой моды (б) для случая рис. 4.

Пунктирные кривые соответствуют времени счета $t_1 \approx 9300$; сплошные - $t_2 \approx 10500$; $\Delta T = 100$; $\Delta t = 1$;

$$\rho(E_{27}, E_{29}) \approx -(0,15 \pm 0,10) \text{ (для } t_2).$$

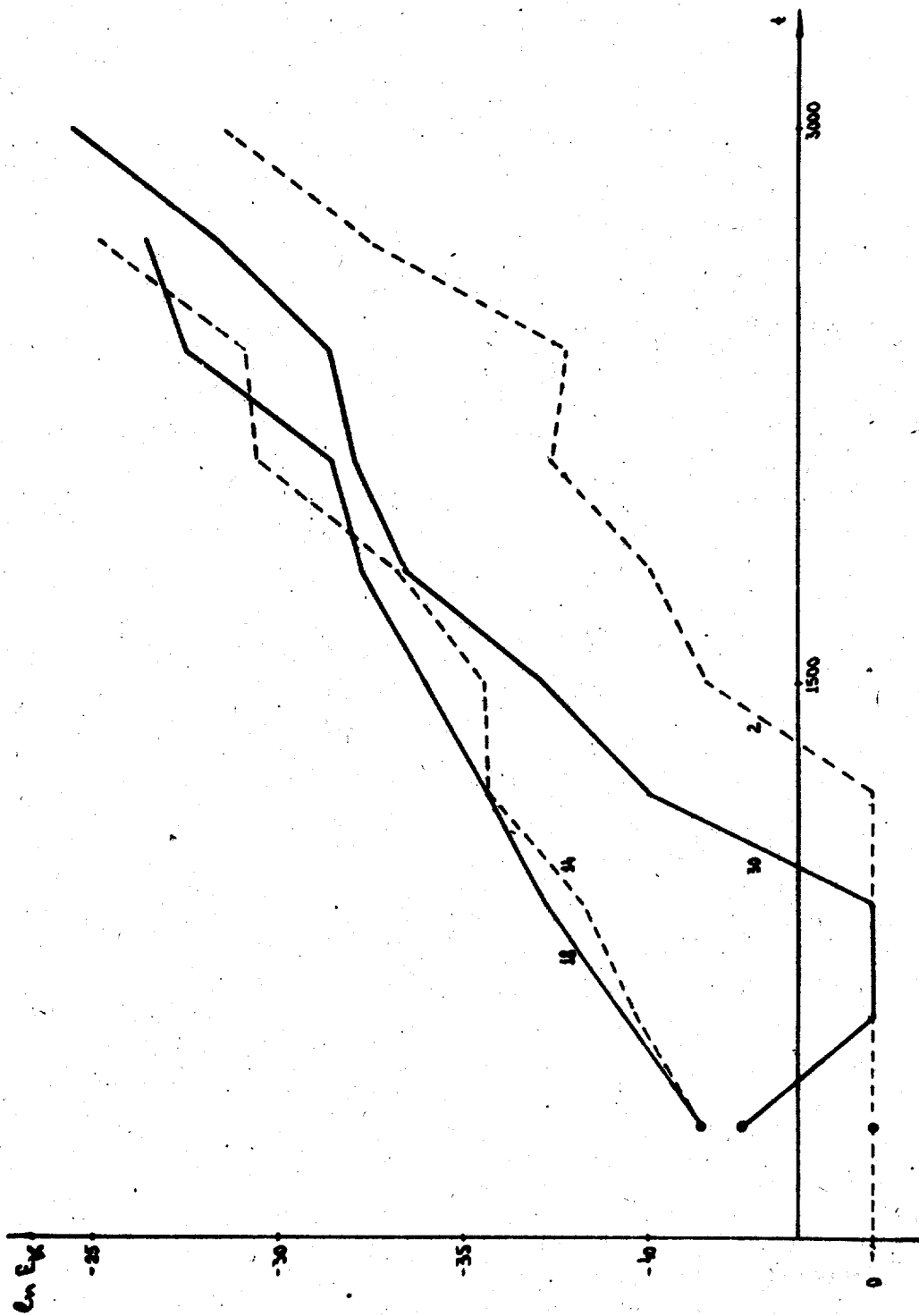


Рис.7. Логарифмический рост четных мод при начальном возбуждении нечетных мод ($K_0=15, 17; m=2$).
 Цифры указывают номера мод; нуль на графике - машинный нуль, соответствующий $E_k \sim 10^{-20}$;
 $\lambda \approx 1/6$; $\beta \approx 0.0314$; $t_{max} \approx 3000$; $E_k \approx 20$; $\Delta E/E \approx 3.5\%$.

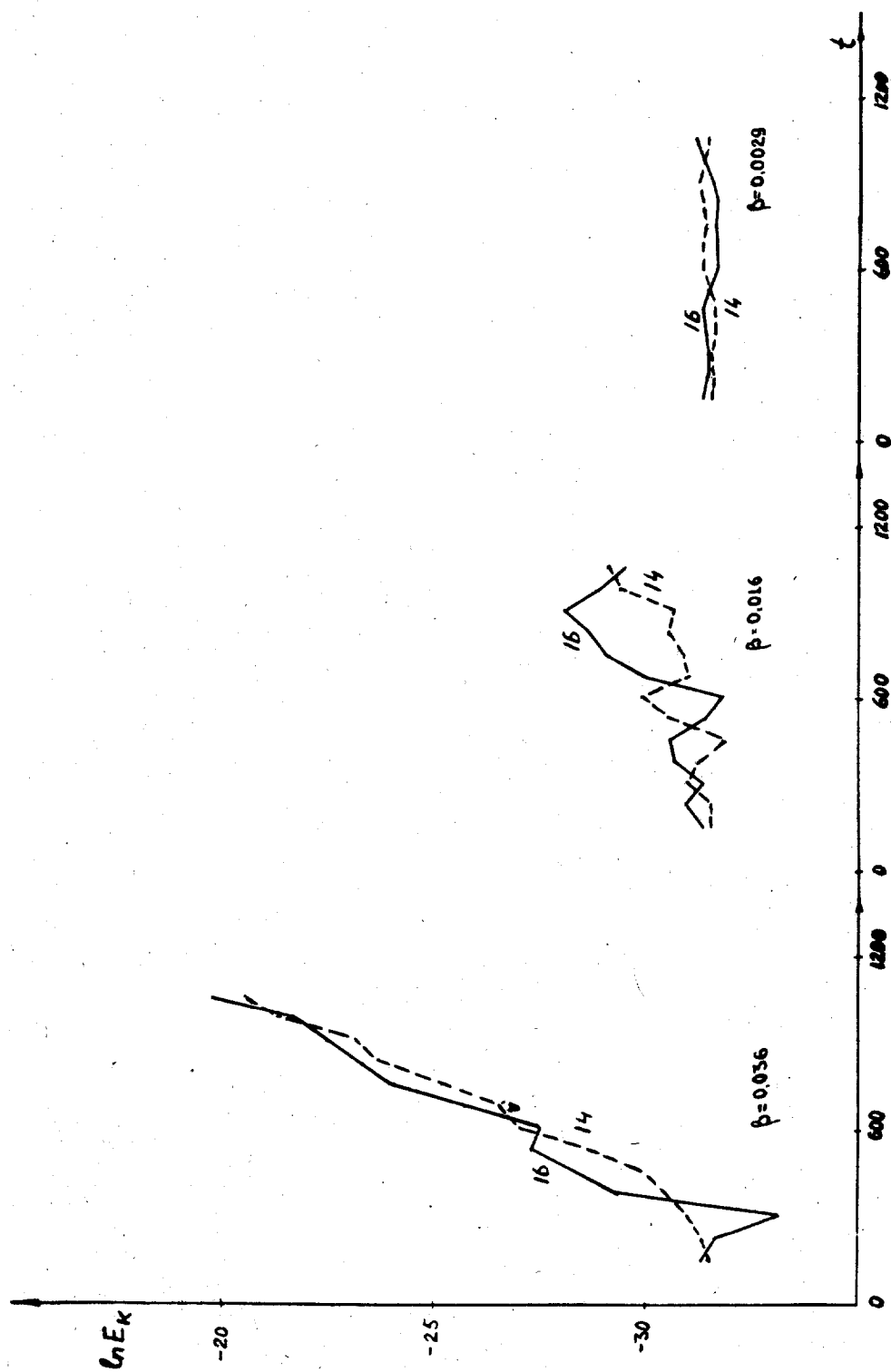


Рис.8. Характерное поведение четных мод ($K = 14, 16$) для различных значений параметра β ; $K_0=15, 17, 19; m=3$; $\eta \approx 1/3$; $t_{max} \approx 1050$; $E \approx 17$; $(\Delta E/E)_{max} \approx 0,2\%$.

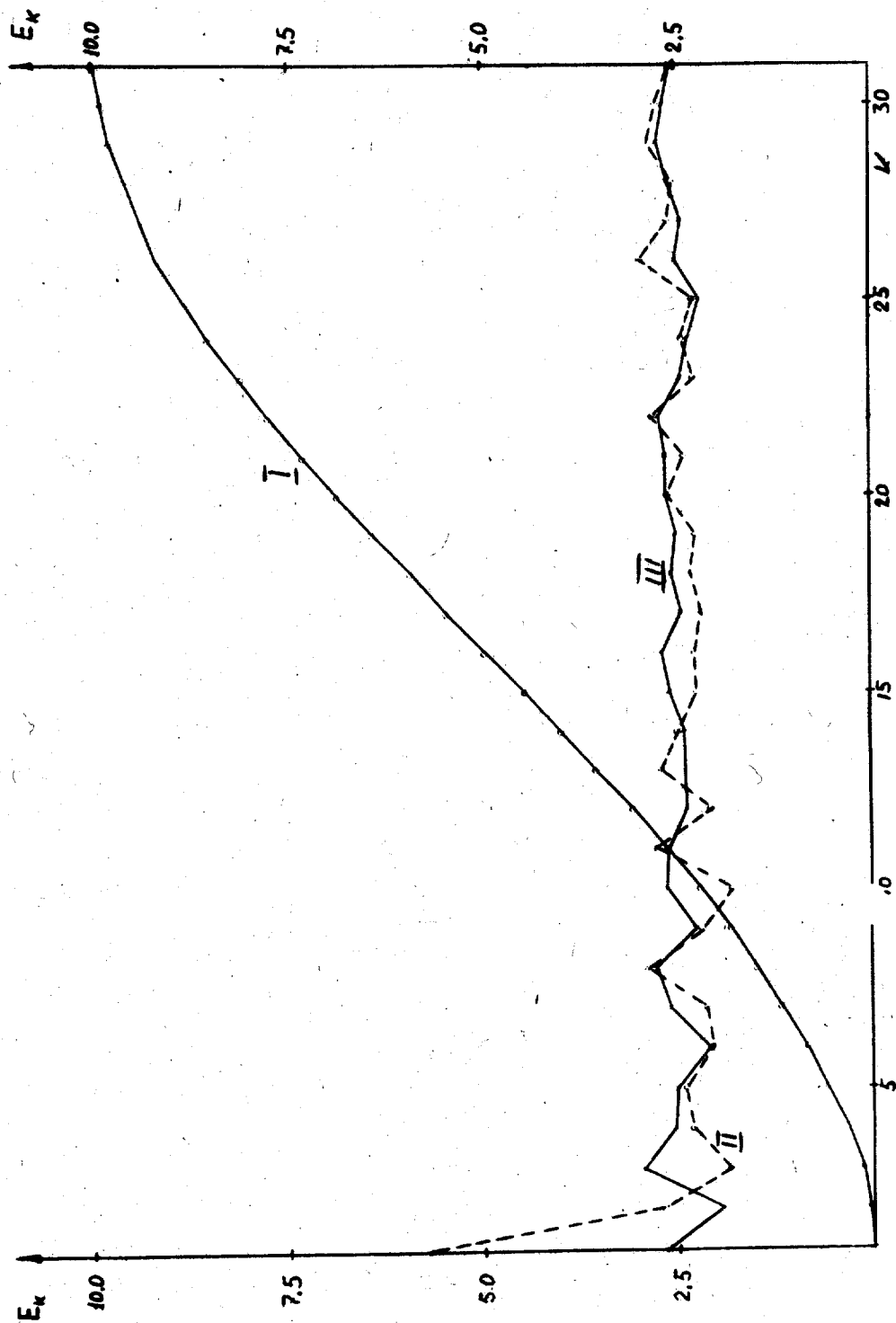


Рис. 9. Спектр энергий для начального возбуждения всех мод (кривая I);
 кривая II - спектр энергий мод для времени счета $t_1 \approx 6750$;
 кривая III - для $t_2 \approx 11025$; $h \approx 1/12$; $\beta = 1.0$; $\Delta t = 1$; $E \approx 96$;
 $\Delta E/E \approx 2.4\%$.

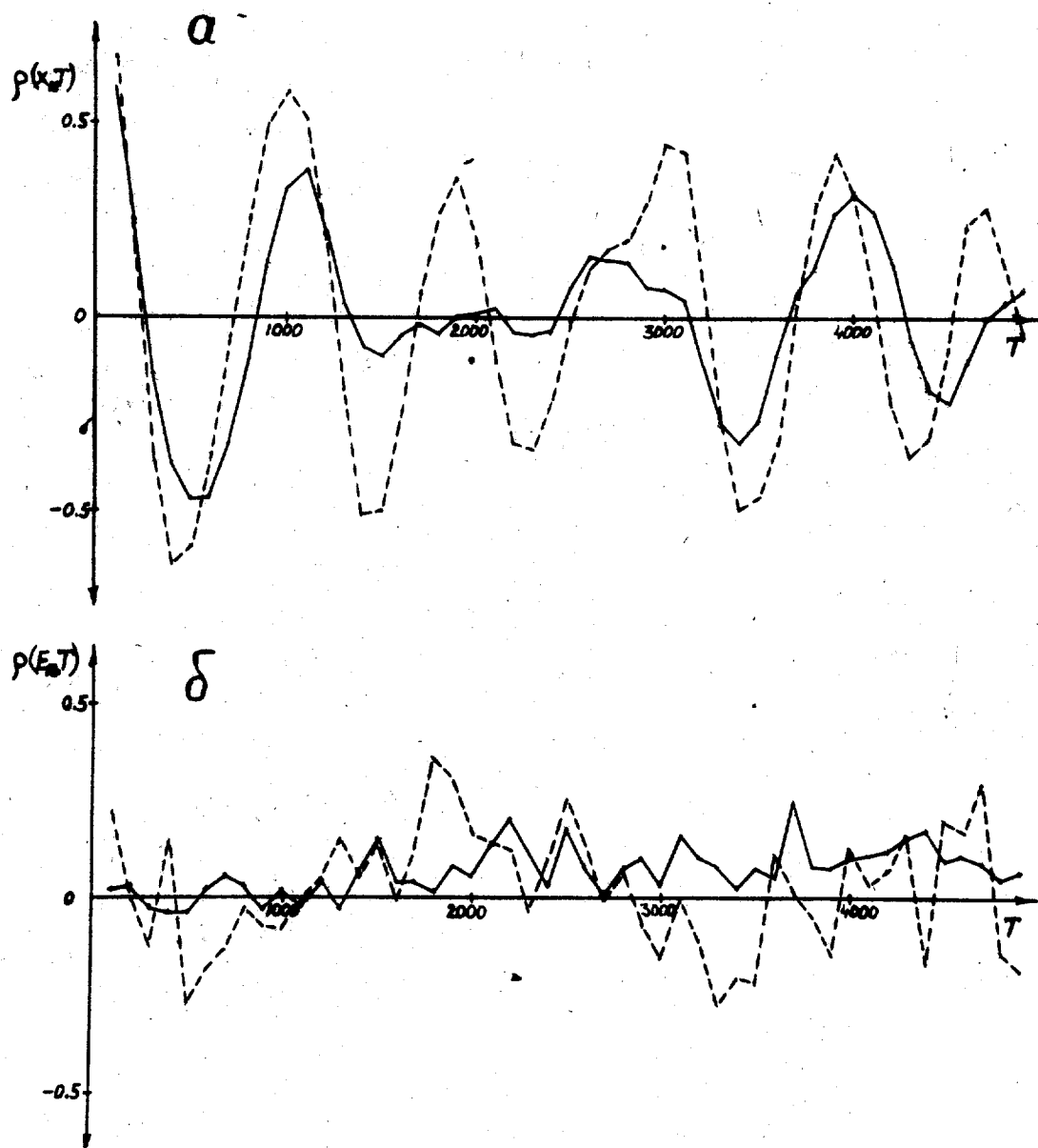


Рис.10. Корреляции для данных рис.9; пунктирные кривые соответствуют времени счета t_1 , сплошные — времени t_2 ; $\Delta t = 100$; $\Delta t = 1$; $\rho(E_{13}, E_{15}) \approx -(0 \div 0,14)$ (для t_2).

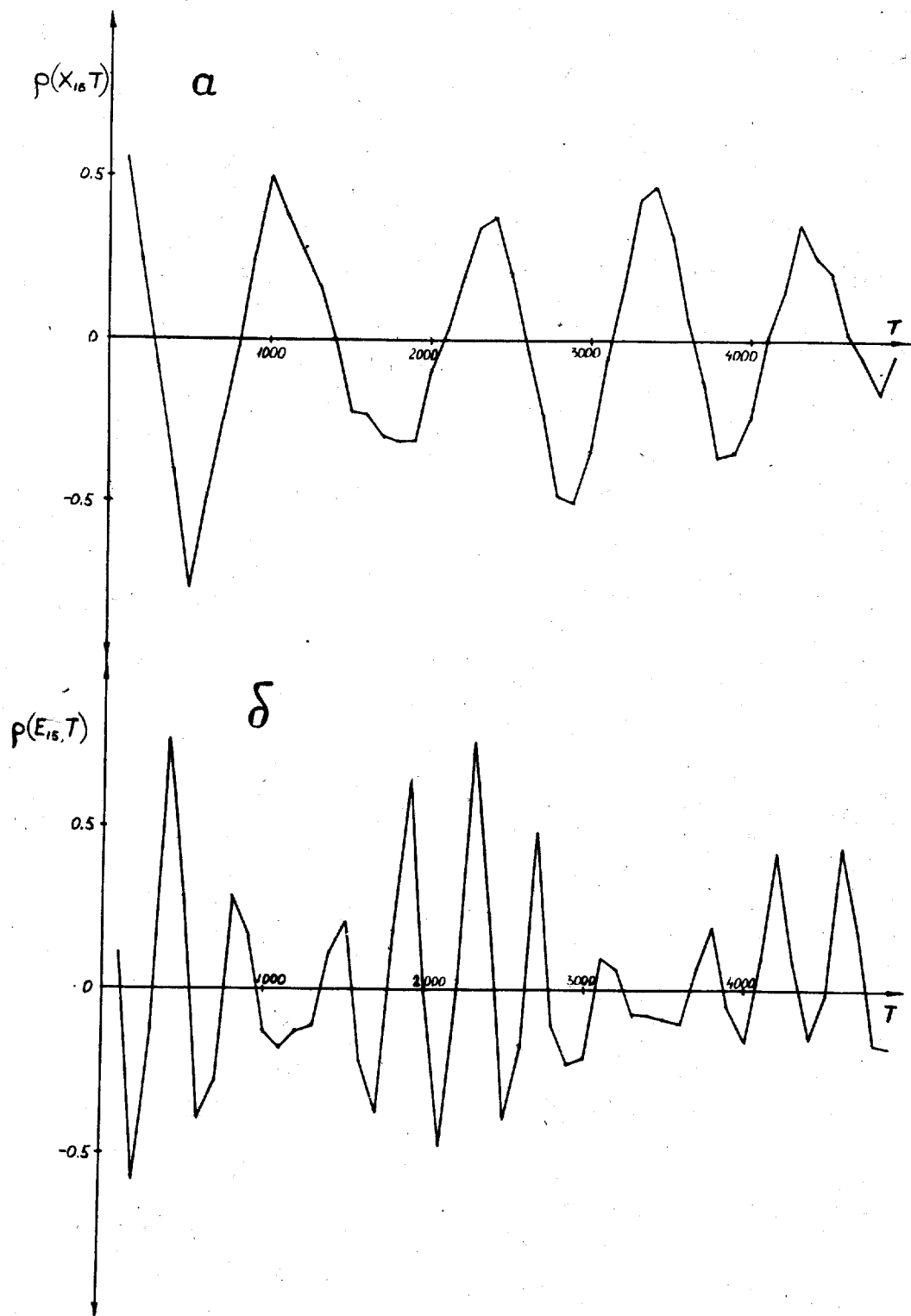


Рис.11. Корреляции для начального возбуждения трех нечетных мод ($K_0 = 15, 17, 19; m = 3$) с симметризацией; $h \approx 1/3$; $\beta \approx 0.0314$; $t_{max} \approx 18300$; $\Delta T = 100$; $\Delta t = 1$; $E \approx 17$; $\Delta E/E \approx 3\%$; $\rho(E_{15}, E_{17}) \approx -(0.30 \pm 0.07)$.

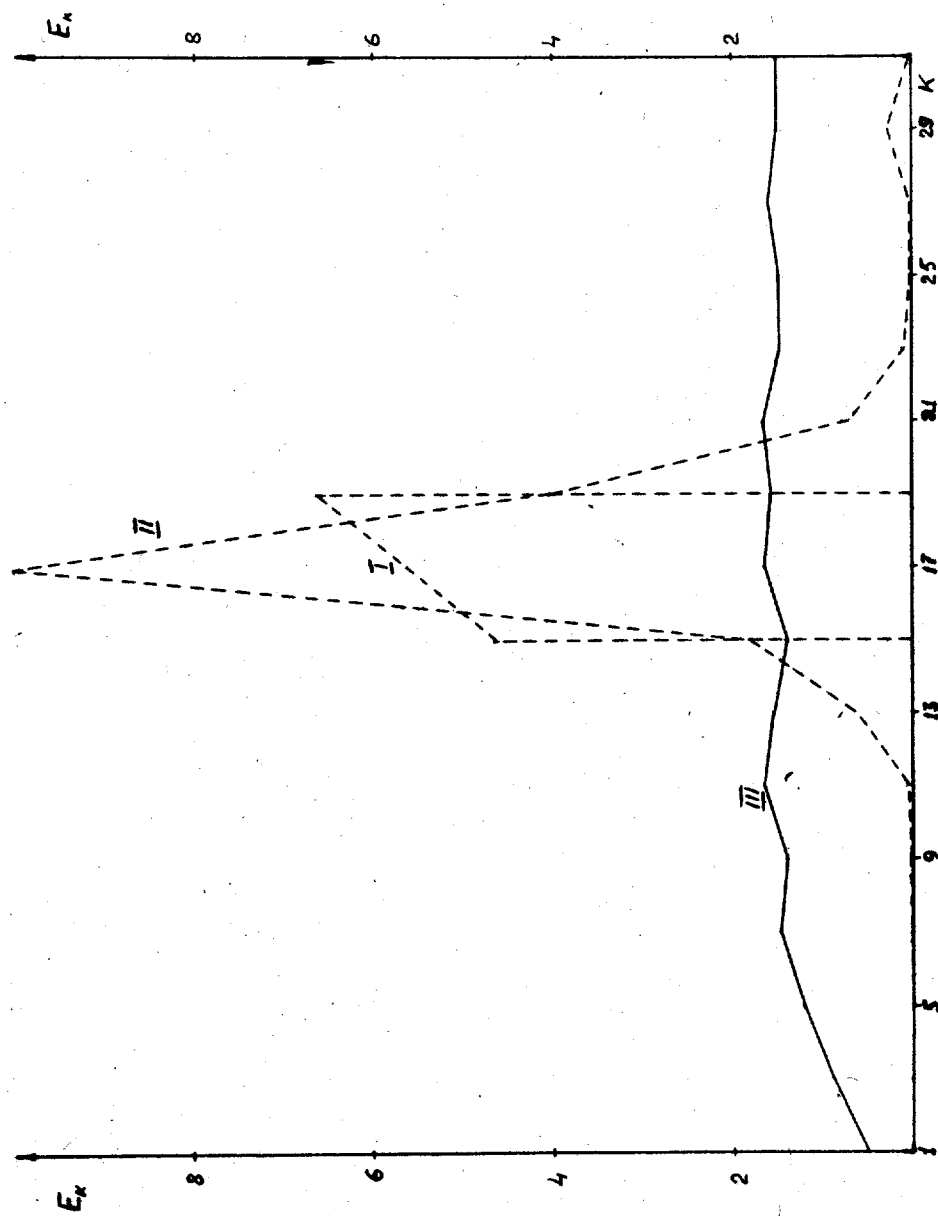


Рис.12. Спектр энергий для начального возбуждения трех мод ($K=15, 17, 19; m=3$) с симметризацией (кривая I); кривая II соответствует средним энергиям мод для данных рис.11, кривая III - для данных рис.13.

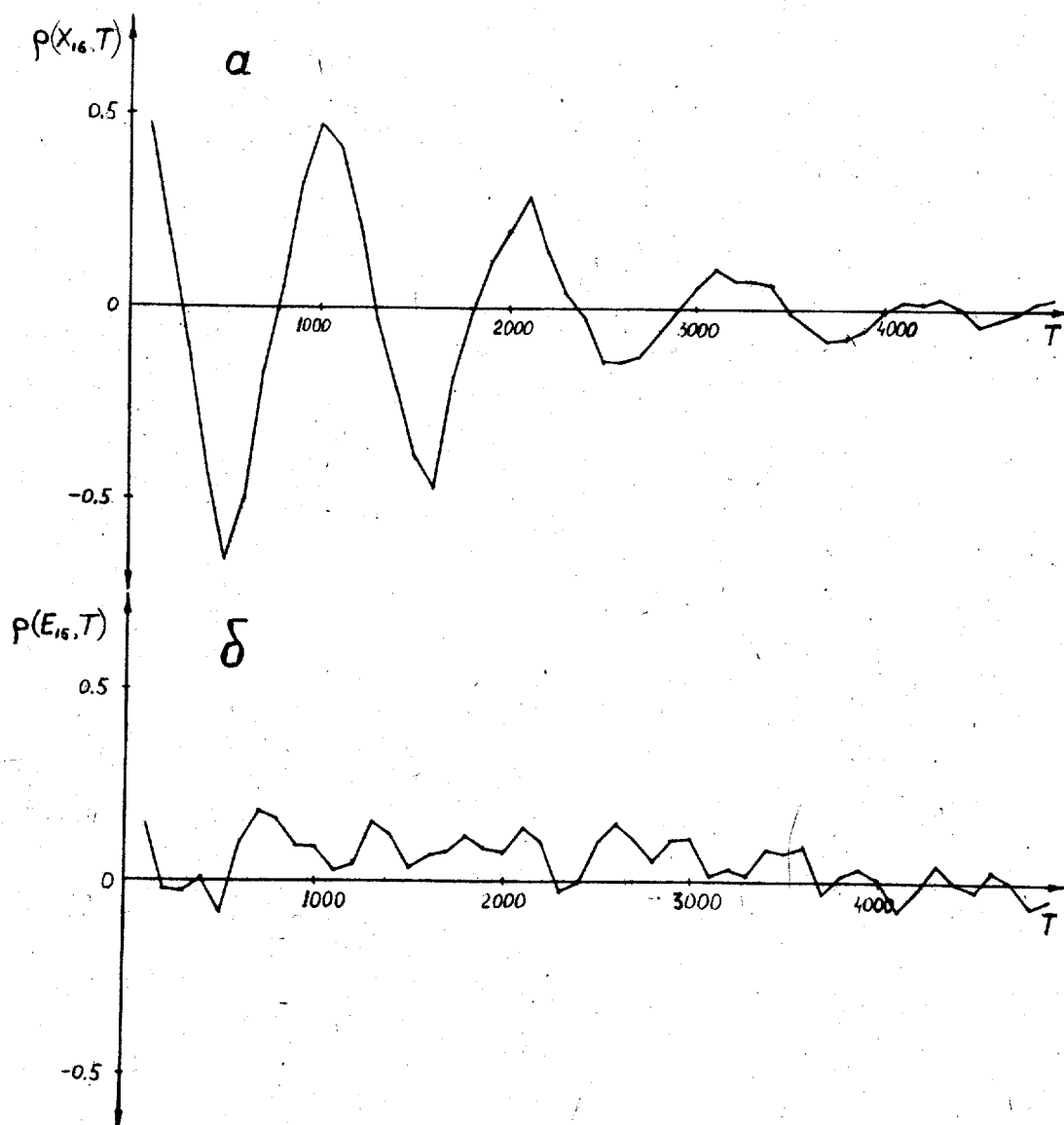


Рис.13. Корреляции для начального возбуждения трёх нечетных мод ($K_0=15, 17, 19; m=3$) с симметризацией; $\gamma \approx 1/6$; $\beta \approx 0.314$; $t_{\max} \approx 16050$; $\Delta T = 100$; $\Delta t = 1$; $E \approx 24$; $\Delta E/E \approx 2\%$; $\rho(E_{15}, E_{17}) = -(0 - 0,13)$.

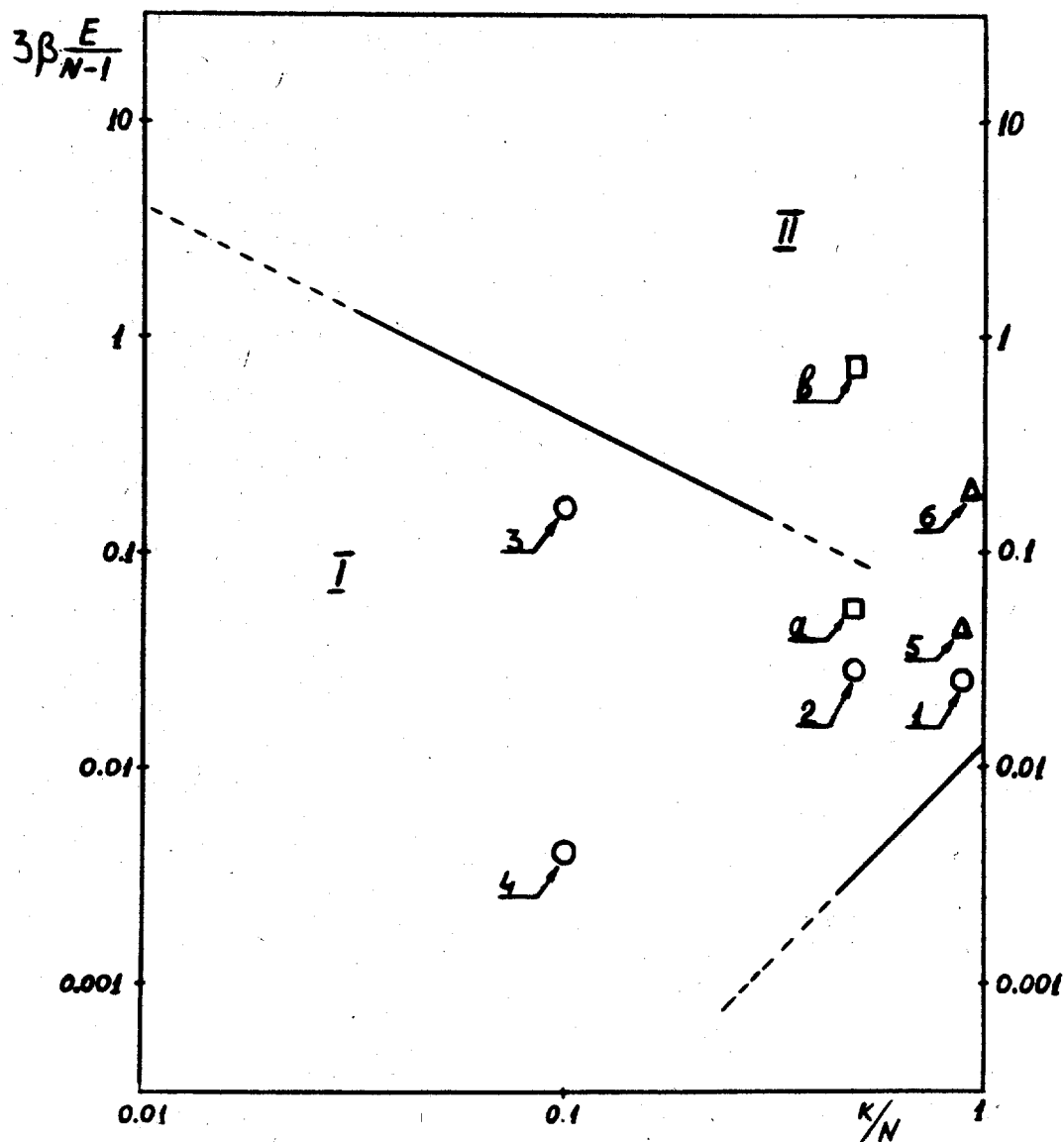


Рис.14. Вид границы стохастичности по критерию (3.1) (прямые линии) и сводка экспериментальных результатов; I - область колмогоровской устойчивости, II - область стохастичности. Точки 1,2,3,4,5,6 соответствуют $\beta_{кр}$, полученным из прямых I, II, III, IV, V, VI, приведенных на рис.15; точка A соответствует данным рис.11; точка B - данным рис.13.

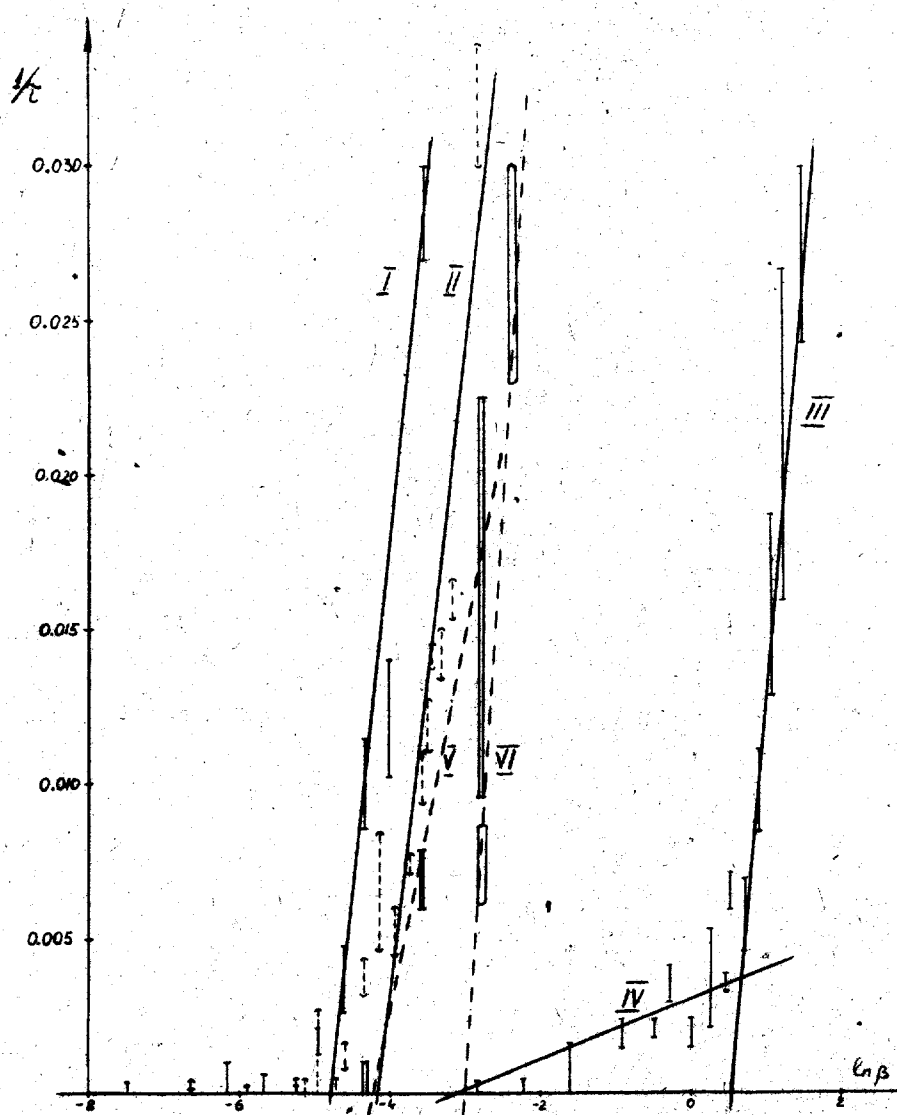


Рис.15. Зависимость скорости развития локальной неустойчивости от параметра β . Начальные условия: $Ko=27,29,31$ (I), $E \approx 30$; $Ko=15,17,19$ (II), $E \approx 17$; $Ko=1,3,5$ (III) и (IV), $E \approx 0,95$; $Ko=27,29,31$ с симметризацией (V), $E \approx 30$; $Ko=28,29,30$ (VI), $E \approx 35$. Прямые линии аппроксимируют зависимость (3,2) и позволяют определить $\beta_{кр}$. Значения $1/\tau$ приведены с экспериментальными ошибками. Для I: $\beta_{кр} \approx 8,7 \cdot 10^{-3}$, $\Omega \approx 2,4 \cdot 10^{-2}$; для II $\beta_{кр} \approx 1,6 \cdot 10^{-2}$, $\Omega \approx 2,2 \cdot 10^{-2}$; для III: $\beta_{кр} \approx 1,7$, $\Omega \approx 2,9 \cdot 10^{-2}$; для IV: $\beta_{кр} \approx 4,6 \cdot 10^{-2}$, $\Omega \approx 1,0 \cdot 10^{-3}$; для V: $\beta_{кр} \approx 1,6 \cdot 10^{-2}$, $\Omega \approx 1,3 \cdot 10^{-2}$; для VI: $\beta_{кр} \approx 5 \cdot 10^{-2}$, $\Omega \approx 4,0 \cdot 10^{-2}$.

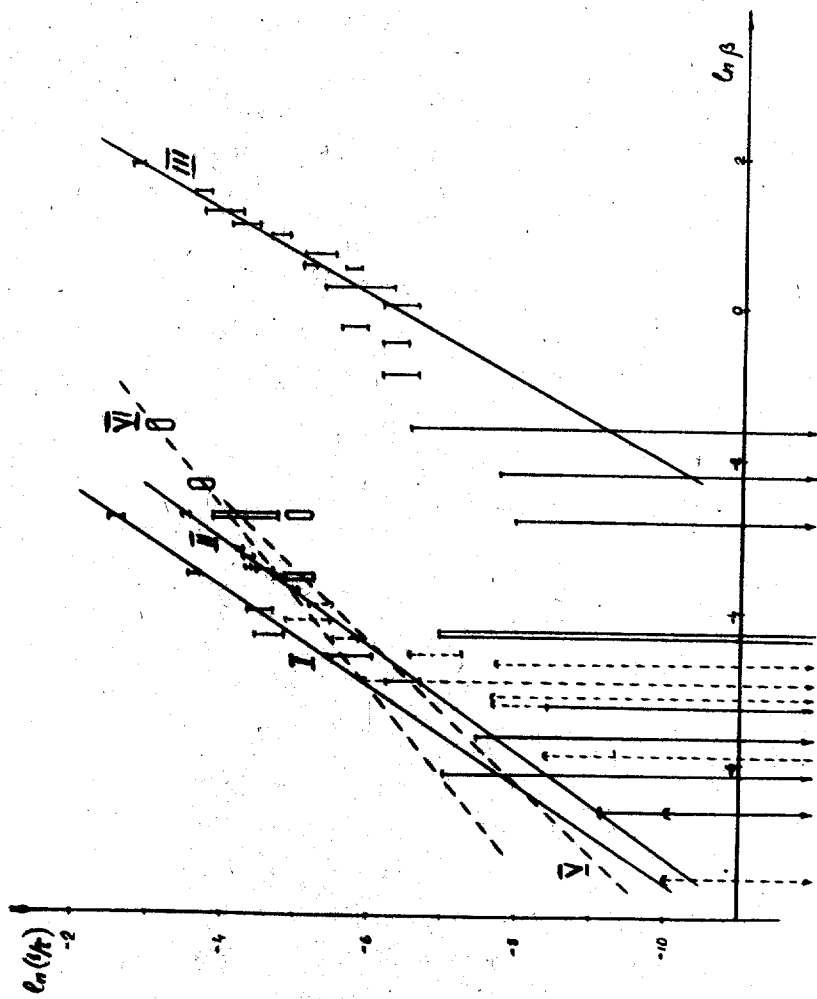


Рис. 16. То же, что и на рис. 15, но в двойном логарифмическом масштабе. Прямые линии аппроксимируют зависимость (3.3). Стрелки указывают, что в пределах экспериментальных ошибок возможно: $\chi^2 = 0$; для I - $\eta = 1.6 \pm 0.3$; для II - $\eta = 1.5 \pm 0.2$; для III - $\eta = 1.9 \pm 0.2$; для IV - $\eta = 1.1 \pm 0.5$; для VI - $\eta = 0.9 \pm 0.4$.

Л и т е р а т у р а

1. E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam, Studies of Nonlinear Problems I, Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955.
2. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики. Изд. АН, 1950.
3. E.Fermi, Phys. Zeitschr., 24, 261 (1923).
4. Y.Bacannier, B. de Raad, Ch. Steinbach, Experiments on Beam Survival and Nonlinear Resonances in the CERN PS, Proc. Vth Intern. Conf. on High Energy Accelerators, Frascati, 1955.
5. Ф.Говард, Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхротрону (октябрь, 1953); М.Хайн, там же.
6. R.Е. Scraton, The Computer Journal, 6, N4, 386 (1964)
7. А.Н.Колмогоров, ДАН, 98, 527 (1954)
8. В.И.Арнольд, УМН, ХУШ, 91 (1963)
9. В.И.Арнольд, ДАН, 156, 9 (1964)
10. M.D.Kruskal, N.J.Zabusky, Journ. Math. Phys., 5, 231 (1964)
11. J.Ford, ibid, 2, 787 (1961); 4, 1293 (1963).
12. E.A.Jackson, ibid, 4, 551, 686 (1963).
13. Ф.М.Израйлов, Б.В.Чириков, ДАН, 166, 57 (1966)
14. N.J.Zabusky, M.D.Kruskal, Phys. Rev. Lett., 15, 240 (1965).
15. W.B.Riley, Electronics, 1967, N10, 141.
16. Б.В.Чириков. Когда динамическая система становится статистической? Сообщение на Международном съезде математиков, Москва, 1966.
17. B.Chirikov, E.Keil, A.Sessler, The Stochasticity Limit of Many-Dimensional Non-Linear Oscillating Systems, CERN Report, to be published.