

И Н С Т И Т У Т ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

ПРЕПРИНТ И Я Ф 63 - 73

Ф.М.Израйлев, В.С.Сынах, В.А.Таюрский

Б.В.Чириков, В.Ф.Шмаков

РАСЧЁТ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЗИТРОННОГО КОНВЕРТЕРА МЕТОДОМ МОНТЕ - КАРЛО

1. Описание программы счета

Новосибирск

1973

В В Е Д Е Н И Е

Метод Монте-Карло является весьма эффективным средством моделирования каскадных процессов, в том числе электронно-фотонных ливней в веществе. Сечения электромагнитных взаимодействий отдельных частиц (электронов, позитронов, фотонов) с веществом хорошо известны. По ним, методом Монте-Карло, с помощью вычислительной машины (ЭВМ) можно воссоздать картину развития ливня в целом. Реально, моделирование электронно-фотонных ливней на современных ЭВМ выполняется до отношения энергий $E_0/E \sim 10^3$, где E_0 — энергия начальной частицы, вызывающей ливень, а E — минимальная энергия частиц в ливне. При больших отношениях для получения хорошей статистики скорости современных ЭВМ недостаточно. Метод позволяет рассчитывать каскады в средах любой конечной геометрии и получать пространственные, угловые и энергетические характеристики частиц ливня.

Другой подход к исследованию ливней — аналитическая теория — изучает каскадные процессы в бесконечных однородных средах. Вопросы, связанные с поведением ливней в слоистых средах, или в средах конечной геометрии практически еще только начинают разрабатываться. Кроме того, в аналитической теории делаются различные приближения, уменьшающие точность результатов, особенно для тяжелых веществ, где развитие ливней происходит наиболее интенсивно.

В работах /1,2/ проведено моделирование развития электронно-фотонных ливней в свинце методом Монте-Карло. Счет проводился до весьма больших глубин (порядка 30 радиационных длин) и для большого диапазона энергий (100 Мэв — 1000 Мэв). Результаты моделирования хорошо согласуются с различными экспериментальными данными.

Нами была написана программа для моделирования ливней в веществе, в основных чертах совпадающая с /1,2/. Наиболее существенное отличие состояло в том, что нас интересовали, главным образом, спектры позитронов, вылетающих из конвертера конечного размера и различной геометрии.

В программе учитываются следующие процессы:

- а) тормозное излучение,
- б) рождение пар фотонами,

- в) многократное рассеяние,
- г) ионизационные потери,
- д) комптон-эффект на электронах,
- е) аннигиляция позитронов.

При высоких энергиях главную роль играют первые два процесса. Благодаря им число частиц в ливне растет, а их энергия уменьшается. Когда энергия частиц достигает критической $\sim 1200 mc^2/Z$, начинают сказываться ионизационные потери и ливень затухает. При энергиях порядка критической и ниже основную роль играют процессы в) - е). Кроме перечисленных процессов, при низких энергиях (порядка нескольких Мэв) некоторый вклад дает фотоэффект на атомах. Однако для интересующих нас энергий частиц ливня (больше 10 Мэв), его сечение мало. Более подробно этот вопрос рассмотрен в § 1, ж.

Наиболее исследованным является развитие ливней в свинце. Поэтому первоначально моделировался ливень в свинце ($Z = 82$). Впоследствии мы сделали то же самое и для вольфрама ($Z = 74$), который имеет значительно большую плотность и потому более пригоден в качестве материала для конвертера.

В настоящей работе дается подробное описание методики монте-карловского моделирования каскада. Результаты моделирования и их подробное обсуждение содержится в /16/.

Авторы приносят глубокую благодарность Т.А.Всеволожской, А.Н.Скринскому и В.А.Эльтекову за полезные обсуждения и ценные советы.

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

а) Тормозное излучение

Для расчета тормозного излучения использовалась формула Бете-Гайтлера (3/), в которую введен фактор, учитывающий процессы на атомных электронах } и поправка к борновскому приближению (4) - $f(z)$

$$We(E, E') = 4n\alpha z(z+\zeta)[1-f(z)]r_0^2 \frac{dE'}{E} \chi \left[\left\{ 1 + \left(1 - \frac{E'}{E} \right)^2 \right\} \phi_1 + \left\{ 1 - \frac{E'}{E} \right\} \phi_2 \right] \quad (1.1)$$

Формула дает вероятность образования фотона электроном на пути 1 см, z - заряд ядра, $\alpha = 1/137$, $r_0 = e^2/mc^2$, n - число атомов в 1 см, E - энергия электрона, E' - энергия фотона.

Функции ϕ_1 и ϕ_2 определяются следующим образом, в зависимости от параметра экранирования γ (1/)

$$\gamma = 100 \frac{mc^2}{E} \frac{E'}{E-E'} z^{-\frac{1}{3}} \quad (1.2)$$

Для полного экранирования ($\gamma \approx 0$):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \ln(191 \cdot z^{-\frac{1}{3}}); \\ \phi_2 &= -\frac{2}{3} \ln(191 \cdot z^{-\frac{1}{3}}) + 1/9 \end{aligned} \quad (1.3)$$

в отсутствие экранирования ($\gamma \gg 1$)

$$\phi_1 = \ln\left(\frac{2E}{mc^2} \cdot \frac{E-E'}{E'}\right) - \frac{1}{2}; \quad \phi_2 = -\frac{2}{3} \cdot \phi_1 \quad (1.4)$$

Промежуточные случаи:

$$\gamma < 2; \quad \phi_1 = \frac{f_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln z; \quad \phi_2 = -\frac{2}{3} \left[\frac{f_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln z \right] \quad (1.5)$$

х) В (3/), в формуле для тормозного излучения (1.1) имеется ошибка в знаке.

$$2 < \gamma < 15; \phi_1 = \ln \frac{2E(E-E')}{mc^2 \cdot E'} - \frac{1}{2} - c(\gamma);$$

$$\phi_2 = -\frac{2}{3} \phi_1; \quad (1.6)$$

Значения функций $f_1(\gamma), f_2(\gamma), c(\gamma)$ взяты из [3] (таблица 1 и рис.1).

Функции $f_1(\gamma)$ и $f_2(\gamma)$ в вычислениях аппроксимировались с помощью выражений:

$$f_1(\gamma) = 20.9 - 4.5 \cdot \gamma - 1.25 \gamma^2 \quad \gamma \leq 0.8 \quad (1.7)$$

$$f_2(\gamma) = 20.23 - 2.67 \gamma$$

$$\text{и } f_1 = f_2 = 18.1 - 2.6 (\gamma - 0.8) + 0.5 (\gamma - 0.8)^2, \gamma > 0.8 \quad (1.8)$$

В дальнейшем, все длины будут измеряться в радиационных единицах. Радиационная единица для данного вещества, это длина, на которой энергии электрона и фотона уменьшается в среднем в e раз за счет тормозного излучения и рождения пар, соответственно.

Радиационная единица определяется выражением [5]:

$$1/t_0 = 4\pi \alpha r_0^2 \cdot z(z+1) [\ln(191 \cdot z^{-1/3})]; \quad (1.9)$$

Для свинца это дает:

$$t_0 = 0.56 \text{ см} \quad \text{или} \quad 6.4 \text{ г/см}^2 \quad (1.10)$$

Для вольфрама:

$$t_0 = 0.35 \text{ см} \quad \text{или} \quad 6.8 \text{ г/см}^2 \quad (1.11)$$

Фактор ζ , учитывающий процессы на атомных электронах выражается следующим образом [6]:

$$\int = \ln(1440 \cdot z^{-\frac{2}{3}}) / \ln(191 \cdot z^{-\frac{1}{3}}) \quad (1.12)$$

и равен: $\int = 1.16$ как для свинца, так и для вольфрама.

Поправка к борновскому приближению $f(z)$ дается формулой [4]:

$$f(z) = \left(\frac{z}{137}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m \left[m^2 + (z/137)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (1.12)$$

Для свинца $f(z) = 0.332$, для вольфрама $f(z) = 0.282$. При очень высоких энергиях $E \sim 10^{13}$ эв вероятности тормозного излучения и рождения пар сильно уменьшаются за счет эффекта многократного рассеяния. Так как нас интересовали значительно меньшие энергии, этот эффект в программе не учитывался.

б) рождение пар фотонами

Для расчета использовалась формула Бете-Гайтлера для дифференциального сечения рождения пар, в которую введены те же поправки, что и для тормозного излучения:

$$W_e(E', E) = 4\pi\alpha z(z+\int) [1-f(z)] r_0^2 \frac{dE}{E} \chi \cdot \chi \left[\left\{ \left(\frac{E}{E'}\right)^2 + \left(1 - \frac{E}{E'}\right)^2 \right\} \phi_3 + \frac{E}{E'} \left(1 - \frac{E}{E'}\right) \phi_4 \right] \quad (1.13)$$

Все обозначения те же, что и в формуле (1).

Функции ϕ_3 и ϕ_4 зависят от параметра экранирования

$$\gamma = 100 \frac{mc^2}{E} \frac{E'}{E' - E} \quad \text{и определяются формулами:}$$

полное экранирование ($\gamma \approx 0$):

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \ln(191 \cdot z^{-\frac{1}{3}}); \\ \phi_4 &= \frac{2}{3} \ln(191 \cdot z^{-\frac{1}{3}}) - \frac{1}{9}; \end{aligned} \quad (1.14)$$

отсутствие экранирования ($\delta \gg 1$):

$$\phi_3 = \ln \frac{2E(E'-E)}{mc^2 \cdot E'} - 1/2 \quad (1.15)$$

$$\phi_4 = \frac{2}{3} \phi_3$$

промежуточные случаи

$$2 < 2; \phi_3 = \phi_1; \phi_4 = -\phi_2 \quad (1.16)$$

$$2 < \delta < 15; \phi_3 = \ln \frac{2E(E'-E)}{mc^2 \cdot E'} - \frac{1}{2} - c(\delta)$$

$$\phi_4 = \frac{2}{3} \phi_3 \quad (1.17)$$

Функции $\phi_1, \phi_2, c(\delta)$ те же, что и для тормозного излучения.

Углы вылета вторичных частиц по отношению к направлению движения первичных частиц, в случае тормозного излучения и рождения пар имеют величину $\theta_\gamma \sim mc^2/E$, где E — первичная энергия. Этот угол значительно меньше угла, который частица набирает за счет многократного рассеяния ($\theta_s \sim \frac{E_1}{E}$, где $E_s \sim 20$ Мэв). Поэтому углы вылета вторичных частиц в процессах тормозного излучения и образования пар в программе не учитывались.

в) Многократное рассеяние

Многократное рассеяние определяет пространственное распределение частиц в ливне. В расчетах мы использовали формулы теории Мольера с поправками Бете /8/. Учитывался только первый гауссовский, член разложения функции распределения:

$$f(\theta) d\theta' = 2\theta' e^{-\theta'^2} \cdot d\theta' \quad (1.18)$$

$f(\theta)$ — вероятность того, что электрон будет иметь пространственный угол от θ до $\theta + d\theta$ после прохождения расстояния

$$\theta' = \frac{\theta}{x_c \cdot B^{1/2}} \quad (1.19)$$

$$\chi_c^2 = 4\pi e^2 n z(z + \frac{1}{2}) \chi / E^2 \quad (1.20)$$

где χ измеряется в см, а параметр B определяется из трансцендентного уравнения

$$B - \ln B = \ln \frac{\chi_c^2}{1.167 \chi_0^2} = \ln \Omega$$

$$\chi_0^2 = 1.7 \cdot 10^{-5} \cdot z^{2/3} [1.13 + 3.76 \left(\frac{z}{137}\right)^2] \left(\frac{2mc^2}{E}\right)^2$$

решение которого можно приближенно записать в виде (9):

$$B = 1,153 + 2,583 \lg_{10} \Omega$$

Приближение имеет точность 0,5% для Ω от 10^2 до 10^5 и 3% для Ω до 10^9 .

Для свинца приведенные формулы дают:

$$\Omega = 31000 t \quad \chi_c^2 = 32,8 \cdot E^{-2} t \quad (1.22)$$

здесь t — длина в радиационных единицах, E — в мэвах. Для вольфрама имеем:

$$\Omega = 39000 t \quad ; \quad \chi_c^2 = 32,0 \cdot E^{-2} t$$

Основное время при моделировании ливня тратится на многократное рассеяние. Особенно сильное рассеяние испытывают частицы низких энергий. Для экономии машинного времени мы использовали следующий прием. Считалось, что рассеяние частиц низкой энергии изотропно, а плотность распределения частиц в зависимости от расстояния определяется диффузионным уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \Delta f \quad (1.23)$$

Коэффициент диффузии равен /15/:

$$D = \frac{t}{3(1 - \langle \cos \theta \rangle)} \approx \frac{2}{3} \frac{t}{\langle \theta^2 \rangle} \approx \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{200B(t)};$$

где t — полная (истинная) длина траектории частицы, $\langle \theta^2 \rangle$ — средний угол многократного рассеяния приобретаемый на длине t .

Рассеяние происходит аксиально-симметрично относительно начальной скорости частицы. Поэтому достаточно рассмотреть проекцию диффузионного процесса на любые две взаимноперпендикулярные плоскости симметрии. Для одной из плоскостей решение имеет вид:

$$f_2 = \frac{e^{-\rho^2/4Dt}}{4\pi Dt}; \quad (1.24)$$

где ρ — расстояние на плоскости. Розыгрыш ρ осуществляется по обычной формуле (подробное объяснение в § 2):

$$\xi = \int_0^\rho f_2(\rho') \cdot 2\pi \rho' d\rho' \quad (1.25)$$

где ξ — случайное число, равномерно распределенное в интервале /0,1/. После интегрирования получаем для ρ :

$$\rho = \sqrt{-4\pi Dt \ln(\xi)} \quad (1.26)$$

Интересующее нас расстояние в пространстве определяется как

$$r = \sqrt{\rho_1^2(\xi_1) + \rho_2^2(\xi_2)} \quad (1.27)$$

где $\rho_1(\xi_1)$ и $\rho_2(\xi_2)$ даются выражением (1.26), а случайные числа ξ_1, ξ_2 — независимы. Так как энергия частицы во время диффузии меняется за счет ионизационных потерь, следует заметить Dt на

$$\int_0^t D(t') dt' \approx \frac{1}{50B(t)} \left\{ E_0^2 t - \epsilon E_0 t^2 + \frac{\epsilon^2 t^3}{3} \right\} \quad (1.28)$$

Здесь E_0 - энергия частицы в начале диффузии, ϵ - средние ионизационные потери на радиационной длине.

Розыгрыш угла многократного рассеяния осуществлялся по распределению (1.18). Полная длина траектории частицы разбивалась на части (Δz) так, чтобы средний угол, набираемый на каждом участке, был много меньше единицы ($\frac{\epsilon}{E} \sqrt{\Delta z} \ll 1$).

г) Потери энергии

Изменение энергии частицы за счет ионизации, при прохождении расстояния в t радиационных единиц, с учетом эффекта плотности, дается формулой [1]:

$$\Delta E_i = E_0 - E = \frac{\pi r_e z \cdot t_0 c^4}{m^2 c^4} \left\{ \ln \left[\frac{1}{4\pi r_e z} \frac{mc^2}{\ell^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \frac{E_0}{2mc^2} \right] + \frac{9}{8} \right\} t \quad (\text{мэв})$$

Для свинца потери на ионизацию равны:

$$\Delta E = 0.380 \left\{ 19.15 + \ln \left(\frac{E_0}{2mc^2} \right) \right\} t \quad (\text{мэв}) \quad (1.29)$$

Для вольфрама:

$$\Delta E = 0.405 \left\{ 18.59 + \ln \left(\frac{E_0}{2mc^2} \right) \right\} t \quad (\text{мэв}) \quad (.)$$

Кроме ионизационных потерь учитывались потери на испускание мягких тормозных квантов с энергией $E' < E_{min}$ (меньше энергии обрезания, см. § 2). Как для свинца, так и для вольфрама эти потери равны: E_{min}

$$\Delta E_r = t_0 t \int_0^{E_{min}} dw(E_0, E') E' dE' = 1.7 \cdot 10^{-2} E_0 t \quad (\text{мэв})$$

Полные потери энергии равны:

$$\Delta E = \Delta E_i + \Delta E_\gamma$$

д) Комптон-эффект на электронах

Энергия вторичного фотона разыгрывалась по формуле Клейна-Нишины:

$$\alpha W_c(E, E') = \pi r_0^2 \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left[\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - 2 \left(\frac{mc^2}{E'} - \frac{mc^2}{E} \right) + \left(\frac{mc^2}{E'} - \frac{mc^2}{E} \right)^2 \right] \times d(mc^2/E) \quad (1.30)$$

Здесь E , E' - энергия падающего и рассеянного фотона, соответственно. Первичный электрон считается покоящимся. Полное сечение Комптон-эффекта при $E \gg mc^2$ равно:

$$\Sigma_c = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{E} \left(\ln \frac{2E}{mc^2} + 0.5 \right) \quad (1.31)$$

Под полным сечением процесса здесь и дальше понимается обратная величина среднего пробега частицы.

Для свинца $\Sigma_c = 0.385 \frac{mc^2}{E} \left(\ln \left(\frac{2E}{mc^2} \right) + 0.5 \right)$ обратных радиационных единиц.

Для вольфрама: $\Sigma_c = 0.420 \frac{mc^2}{E} \left(\ln \left(\frac{2E}{mc^2} \right) + 0.5 \right)$

Выборка энергии вторичного фотона осуществлялась методом "реджекции и композиции" [10], с помощью алгоритма, описанного в [11] (изложение метода дано в следующем параграфе).

Отбрасывая несущественный множитель, (1.30) можно записать в виде:

$$f = \alpha_1 q_1(v) h_1(v) + \alpha_2 q_2(v) h_2(v) \quad (1.32)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + 2}{9\lambda + 2}; \quad \alpha_2 = \frac{8\lambda}{9\lambda + 2};$$

$$q_1 = \frac{\lambda}{2}; \quad q_2 = \frac{\lambda + 2}{2v^2};$$

$$h_1 = 4 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} \right); \quad h_2 = \frac{1}{2} \left[(1 - \lambda v + \lambda)^2 + \frac{4}{v} \right];$$

$$\lambda = mc^2/E; \quad v = E/E';$$

По этой формуле и производился розыгрыш энергии вторичного фотона. Энергия электрона определяется из закона сохранения энергии. Угол вылета вторичного фотона по отношению к направлению движения падающего фотона однозначно связан с энергией и определяется выражением:

$$mc^2(1-E) = E \cdot E(1 - \cos \theta); \quad (1.33)$$

где $E = \frac{E'}{E}$ - доля энергии, уносимая вторичным фотоном.

Угол вылета электрона по отношению к направлению движения первичного фотона вычислялся по формуле:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{mc^2}{mc^2 + E} \operatorname{ctg} \theta/2;$$

е) Аннигиляция позитронов

Процесс аннигиляции вносит заметный вклад в развитие каскада при низких энергиях, так как его сечение того же порядка, что и сечение эффекта комптона. Дифференциальное сечение аннигиляции определяется выражением:

$$dW_a(E, \theta) = \pi r_e^2 N_0^2 \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{2\beta} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \left[\frac{1 + \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} - \frac{2\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \right]; \quad (1.34)$$

где E - энергия позитрона, θ - угол вылета одного из фотонов по отношению к скорости позитрона; $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{(E/mc^2)^2 - 1}} \left(\frac{E}{mc^2} + 1 - \frac{1}{\beta} \right)$;
 $E' = (E + mc^2) \beta$ - энергия этого фотона.

Величина полного сечения при $E \gg mc^2$ равна для свинца:

$$\Sigma_a = \frac{0.385 mc^2}{E} \left\{ \ln \left(\frac{2E}{mc^2} \right) - 1 \right\}; \quad (1.35)$$

для вольфрама:

$$\Sigma_a = \frac{0.420 mc^2}{E} \left\{ \ln \left(\frac{2E}{mc^2} \right) - 1 \right\};$$

Энергия вторичных квантов разыгрывалась с помощью метода "реджекции и композиции", как и в случае Комpton-эффекта.

Дифференциальное сечение (1.34) для розыгрыша представляется в виде /12/:

$$f_a(v) = \left\{ \alpha_1 \left[\frac{2}{\alpha_1} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{1-v} \right) \right] + \alpha_2 \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{(1-v)^2} \right] \right\} \times \\ \times q(\beta, v) / q(\beta); \quad (1.38)$$

где

$$q(\beta, v) = q(\beta) - (2v-1)^2 \left[1 - \beta^2 + \frac{1}{2} (2v-1)^2 \right];$$

$$q(\beta) = \frac{1}{2} + \beta^2 (1 - \beta^2);$$

$$\alpha_2 = 8\beta / (1 - \beta^2); \quad \alpha_1 = 2 \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right);$$

$$\beta = \sqrt{(E - mc^2) / (E + mc^2)};$$

Область изменения v :

$$(1 - \beta) / 2 \leq v \leq (1 + \beta) / 2;$$

ж) Фотоэффект

При высоких энергиях $E / mc^2 \gg 1$, сечение фотоэффекта равно $E_\phi \approx 4\pi\alpha^4 Z^5 mc^2 / E$. Сравним его с сечением Комpton-эффекта:

$$\Sigma_\phi / \Sigma_{com} \approx \frac{4(\alpha Z)^4}{\ln(2E / mc^2)} \sim 0.1;$$

В области низких энергий сечение фото-эффекта растет быстрее и достигает сечения эффекта Комптона при энергиях $E \approx 1$ Мэв. Однако эти энергии лежат за границами интересующего нас диапазона, поэтому фото-эффект не учитывался в программе.

На рис.1 приведена зависимость от энергии сечений элементарных процессов, учитывающихся в программе (для свинца).

§ 2. Моделирование ливня

При моделировании ливня приходится производить розыгрыш (выборку) различных случайных величин по их функции распределения. Основой любого метода выборки является тот или иной механизм получения случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$, которые мы будем обозначать буквой ξ . Обычно для этого используются так называемые генераторы случайных чисел, заданные с помощью того или иного вычислительного алгоритма [18]. В настоящей работе использовался наилучший, на наш взгляд, мультипликативный генератор, предложенный еще Лемером [20] и детально исследованный в [13].

Пусть интересующая нас случайная величина X распределена по закону $f(x) = \frac{dw}{dx}$; где dw - вероятность попадания X в заданный интервал dx . Тогда величина $F(x) = \int_0^x f(x') dx'$, представляющая собой интегральное распределение по X , будет всегда распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Таким образом $F(x)$ можно моделировать просто с помощью случайного числа $\xi = F(x)$. Интересующая же нас случайная величина X выражается при этом через обратную функцию:

$$X = F^{-1}(\xi) \quad (2.1)$$

Описанная процедура является одним из наиболее известных методов розыгрыша произвольной случайной величины [22].

Другим весьма общим методом нахождения случайной величины по заданной функции распределения является метод Неймана, который используется, если обращение $F(x)$ вызывает затруднения. Пусть случайная величина распределена с плотностью $f(x)$ на интервале $[a,b]$ (рис.2)

Разыграем X с помощью случайного числа ξ_1 , т.е. положим $X_1 = a + \xi_1(b-a)$. Сравним теперь $f(X_1)$ с величиной $M \cdot \xi_2$, где ξ_2 - второе независимое случайное число, а M - наибольшее значение $f(x)$. Значение X_1 считается искомой случайной величиной, если $f(X_1) \leq M \xi_2$, в противном случае процедура повторяется сначала. Именно последнее неравенство обеспечивает необходимую частоту появления различных значений.

Очевидно, что эффективность метода Неймана, т.е. доля полезных выборок, пропорциональна площади под кривой $f(x)$ (рис.2). Более точно: $\eta = 1/M(b-a) \int_a^b f(x) dx$, если считать, что функция распределения нормирована: $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Другим распространенным методом выборки является метод "реджекции и композиции". Этот метод позволяет выбирать случайные величины из функций распределения весьма сложной структуры. Он является сочетанием прямой выборки (по формуле (2.1)) и выборки по методу Неймана.

Пусть плотность вероятности может быть записана в виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) g_i(x); \quad (2.2)$$

где $0 \leq g_i(x) \leq 1$, $\alpha_i > 0$; $f_i(x) \geq 0$ и

$$\int f_i(x) dx = 1$$

Тогда выборка X осуществляется следующим образом. Сначала разыгрывается целое число i ($1 \leq i \leq n$) с вероятностью α_i . Для этого нужно взять случайное число ξ_1 и найти i такое, чтобы

$$\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \leq \xi_1 \leq \sum_{k=1}^i \alpha_k \quad (2.3)$$

Далее по плотности $f_i(x)$ находится случайное число X по обычной формуле обращения:

$$\xi_2 = \int_0^X f_i(x') dx' \quad (2.4)$$

Это X принимается в качестве искомой случайной величины, если $\xi_2 \leq g_i(x)$ (метод Неймана), в противном случае проце-

дура повторяется сначала. Здесь ξ_1, ξ_2, ξ_3 — различные случайные числа. Метод "реджекции и композиции" эффективен, когда $f(x)$ просто обращаются, а доля отбрасываемых случаев мала, т.е. $g_i(x)$ близки к единице.

Перейдем теперь к описанию методики расчета основных характеристик частиц ливня. Прежде всего разыгрывается полный пробег частицы. Плотность вероятности того, что частица будет иметь пробег от ℓ до $\ell+d\ell$ определяется выражением

$$f(\ell) = \Sigma \cdot e^{-\ell \cdot \Sigma} \quad (2.5)$$

Полный пробег частицы разыгрывается с помощью случайного числа ξ по формуле (2.1), которая в данном случае принимает вид:

$$\ell = - \frac{\ln(\xi)}{\Sigma}, \quad (2.6)$$

где Σ представляет собой сумму сечений тормозного излучения и аннигиляции для позитрона, сечение тормозного излучения для электрона и сумму сечений рождения пар и Комpton-эффекта для фотона. Выбор процесса в конце траектории производился с вероятностью, пропорциональной его сечению.

Полные сечения тормозного излучения и рождения пар находились в процессе счета по таблицам с помощью линейной интерполяции по энергии. Полное сечение тормозного излучения расходится при $E' \rightarrow 0$, поэтому вводилось обрезание при $E' = 10^{-2}$. Для полного сечения тормозного излучения в интервале энергий 1,5 - 5 Мэв был введен экспериментальный поправочный множитель (/7/, таблица 5). Полные сечения Комpton-эффекта и аннигиляции вычислялись по формулам (1.31), (1.35).

Для розыгрыша вторичных энергий в процессах тормозного излучения и рождения пар были составлены таблицы зависимости $E'(E, \xi)$. Вычисления таблиц производились следующим образом. Энергия вторичной частицы определяется из уравнения (2.1), где $f(x)$ равно соответствующей функции $W(E, E')$. Из уравнения (2.1) получаем:

$$\frac{d\xi}{dE'} = W(E, E')$$

откуда (2.7)

$$\frac{dE'}{d\xi} = 1/W(E, E')$$

Последнее уравнение решалось методом Рунге-Кутты для различных E . Таблицы $E'(E, \xi)$ вычислялись для 5 значений E и 100 значений ξ . Во время счета производилась линейная интерполяция по E и ξ .

Счет моделирует траектории отдельных частиц. По ним можно построить функции $\pi(E, E'; t, r, \vartheta)$ и $\Gamma(E, E'; t, r, \vartheta)$, дающие полное описание ливня, вызванного электроном энергии E . Функция распределения $\pi(E, E'; t, r, \vartheta)$ представляет число электронов (позитронов) на глубине t с энергиями от E до $E+dE$ на расстоянии от r до $r+dr$ от оси ливня x , летящих в полярном угле от ϑ до $\vartheta+d\vartheta$ к оси ливня x ; $\Gamma(\dots)$ — такое же распределение для фотонов. На рис.3 показаны геометрические параметры траектории.

Для улучшения статистики при выводе производилось суммирование по некоторым переменным. Так $\Gamma(E, E'; t) = \int \pi(E, E', t, r, \vartheta) dE' dr d\vartheta$ представляет собой число частиц с энергией больше E на глубине t , то есть каскадную кривую.

Многократное рассеяние на некотором участке траектории характеризуется изменением единичного вектора направления траектории $\vec{m} \rightarrow \vec{m}'$ (рис.4). Вектора $\vec{m}, \vec{m}'$ связаны соотношением [1]:

$$\vec{m}_\perp = \vec{m} \cdot \cos \theta + (\vec{\alpha} \cdot \cos \rho \cdot \vec{\beta} \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \theta \quad (2.8)$$

где θ — полярный угол многократного рассеяния (полярная ось направлена по вектору $\vec{m}$; φ — азимутальный угол рассеяния; $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ — пара единичных векторов, ортогональных между собой и к вектору $\vec{m}$. Последние выбирались следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \left(\frac{l^2}{n+1} - 1, \frac{lm}{n+1}, l \right) \\ \vec{\beta} &= \left(\frac{lm}{n+1}, \frac{m^2}{n+1} - 1, m \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Длина S участка траектории, на котором считалось многократное рассеяние выбиралась таким образом, чтобы средний угол

х) Распределение по азимутальному углу считалось однородным.

рассеяния $\theta < 1$ (обычно $\sim 6^\circ$). Движение частицы на этом участке считалось прямолинейным в направлении вектора $\vec{r}$.

Каждая частица ливня прослеживалась до тех пор, пока она не выходила из конвертера, или пока её энергия не становилась меньше некоторой минимальной энергии (обычно ~ 10 Мэв).

§ 3. Исходные и выходные данные

В качестве исходных в программу вводятся следующие данные:

- 1) число начальных электронов;
- 2) их энергия;
- 3) минимальная энергия вторичных частиц ливня;
- 4) параметры конвертера;
- 5) шаги гистограмм $\Delta E, \Delta \theta, \Delta z$ - по энергии, пространственному углу и толщине конвертера;
- 6) допустимый угол многократного рассеяния на одном участке S (обычно 0.1);
- 7) угол многократного рассеяния на полном пробеге частицы, определяющий переход к диффузионному приближению (обычно ~ 1);
- 8) поперечный размер начального пучка электронов (функция распределения считается гауссовой).

Программа выдает:

1) Гистограммы распределения частиц по энергии на различных глубинах конвертера (20 значений по E и 50 значений по z). Пример гистограммы дан на рис.5.

2) Распределение вылетающих из вещества частиц по энергии E и углу θ к оси ливня (100 значений по E и 20 значений по θ). Пример гистограммы приведен на рис.7.

3) Распределение остановившихся на глубине z частиц по расстоянию от оси ливня r .

4) Для выходящих из мишени позитронов рассчитываются величины $\langle r^2 \rangle, \langle \theta^2 \rangle, \langle r\theta \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \langle \theta_x^2 \rangle, \langle \theta_y^2 \rangle, \langle x\theta_x \rangle, \langle y\theta_y \rangle$, а также фазовые объемы: $\phi_x^2 = \langle x^2 \rangle \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x \rangle^2$ и ана-

логично для ϕ_y . Усреднение производится по каждому из 15 энергетических интервалов, ширина которых пропорциональна средней энергии позитронов в интервале ($\Delta E/E = \text{const}$).

5) Полные ионизационные потери частиц в мишени.

6) Каскадная кривая $N_{\pm}(z)$, пример которой изображен на рис.8.

§ 4. Сравнение с другими расчетами и экспериментальными данными

Описанная выше программа использовалась для расчета линий в свинце для начальных энергий 25 - 1000 Мэв. Верхняя граница может быть значительно больше. Ограничение связано здесь, главным образом, с временем счета. Для случая бесконечной среды наши результаты хорошо согласуются с результатами работ /1,2/(рис.8). На рис.9 показан интегральный угловой спектр электронов по расчетам Месселя /1/ и по нашим расчетам. При минимальной энергии 1,5 Мэв имеется некоторое отличие в каскадной кривой (10%). Оно объясняется неточностью использовавшихся формул в этой области, а также тем, что при низких энергиях нужно учитывать фотоэффект.

Результаты расчетов сравнивались также с экспериментальными данными по выходу позитронов из тонкой пластинки. На рис. 10 приведены экспериментальные угловые спектры позитронов, вылетающих из конвертера и гистограмма спектра, полученного с помощью расчета. Наблюдается хорошее согласие для $E = 20$ Мэв. Однако при $E = 8$ Мэв спектры заметно отличаются. Причина этого расхождения пока не ясна. Более того, последние измерения во Фраскати (Италия) и ФРГ это расхождение /21/ только увеличили.

§ 5. Фокусировка позитронов магнитным полем.

Для уменьшения конечного фазового объема пучка позитронов, точнее, для ограничения его возрастания вследствие многократного рассеяния можно использовать магнитное поле /17/. Это особенно необходимо в случае цилиндрического конвертера, в котором можно достичь заметного увеличения полного выхода позитронов по сравнению с пластинкой, ценой существенного возрастания

фазового объема пучка /16/. Наиболее эффективным для фокусировки оказывается поперечное магнитное поле, действующее на поперечную скорость частицы. Оно может быть создано пропусканием тока по самому конвертеру /17/.

Если ток направлен в ту же сторону, что и пучок, он фокусирует позитроны и дефокусирует электроны. Поскольку сильные магнитные поля, необходимые для фокусировки, всегда импульсные, можно считать, что они не проникают внутрь конвертера и фокусируют таким образом только вылетающие позитроны. В типичном режиме /17/ при частоте поля около 1 МГц толщина скин-слоя для вольфрама составляет около 0,2 мм, тогда как диаметр конвертера обычно 2 мм. Тем не менее, в программе предусмотрена возможность учета поля внутри конвертера. В этом случае необходимо принять во внимание его действие не только на позитроны, но и на электроны.

Для расчета траекторий частиц в магнитном поле вне цилиндра воспользуемся уравнениями движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}], \quad \vec{H} = \left(-\frac{yH_0}{R}, \frac{xH_0}{R}, 0 \right) \quad (5.1)$$

где R_0 — радиус цилиндра, а

$$H_0(\text{эрст}) = \begin{cases} 0.2 I(\text{амп}) / R(\text{см}) & R > R_0 \\ 0 & R \leq R_0 \end{cases}$$

Уравнение (5.1) можно свести к системе 3-х уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha \cdot \ln R/R_2 \\ \dot{\psi} &= M_0 / mR^2 \\ \dot{R} &= \sqrt{1 - (\dot{\psi}R)^2 - z^2}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\text{где } \alpha = H_0(R_0) / R_0 m, \quad R_2 = e^{-\dot{z}_0 / \alpha}$$

M_0 — сохраняющийся угловой момент. Кроме того, сохраняется полная скорость (равная c для рассматриваемых энергий). Из урав-

нения (5.2) можно получить одно уравнение 1-го порядка.

$$\frac{dR}{dz} = \sqrt{1 - (M_0/mR)^2 - \alpha^2 \ln^2 R/R_2}; \quad (5.3)$$

Последнее уравнение и интегрировалось на ЭВМ методом Рунге-Кутты.

Поскольку нас интересовала фокусировка позитронов, уравнение решалось только для них. Электроны, двигаясь в поле, могут возвращаться в конвертер и продолжать каскад. Но увеличение числа позитронов за счет этого эффекта невелико (несколько %, /16/). Поэтому электроны, вылетающие из мишени, больше не принимались во внимание. Позитроны, вращаясь в поле, также попадают в мишень и могут дать каскад. Но они могут и, чуть-чуть зацепив мишень, выйти из неё. Ввиду этого обстоятельства, позитроны учитывались и при возвращении их в мишень. На рис.13 изображена траектория позитронов в поле тока.

Результаты расчетов по фокусировке позитронов полем и их обсуждение содержатся в /16/.

ДОПОЛНЕНИЕ: Элементарный вариант моделирования каскада

Описанная программа расчета электромагнитного каскада является довольно громоздкой и требует значительной предварительной подготовки, связанной с составлением таблиц. Поэтому в тех случаях, когда от расчета не требуется высокой точности, можно ограничиться значительно более простой программой, которая может быть написана и отлажена очень быстро. Её основу составляют очень простые аналитические выражения для всех основных процессов в электронно-фотонном каскаде. Как будет видно ниже такой элементарный вариант каскада дает тем не менее весьма приличное согласие с более точными расчетами и с экспериментом.

Основные процессы аппроксимировались следующим образом:

а) Тормозное излучение. Используя кривые, вычисленные Росси и Грейзенем /17/ можно аппроксимировать дифференциальную вероятность $\phi(\gamma, \nu)$ излучения фотона с энергией $\omega = \nu \gamma$ на радиационной единице длины как

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\gamma} - \ell \right); \\ \ell &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\nu}};\end{aligned}\tag{1}$$

где γ — полная энергия электрона (позитрона) в единицах mc^2 . Обрезая тормозное излучение снизу на $\nu = \nu_1$, получим полную вероятность:

$$\Sigma(\gamma) = \frac{4}{3} (L_1 - \ell); \quad L_1 = \ln\left(\frac{1}{\nu_1}\right);\tag{2}$$

и нормированное на единицу дифференциальное распределение

$$\varphi(\gamma, \nu) = \frac{1/\nu - \ell}{L_1 - \ell}; \quad \nu > \nu_1\tag{3}$$

Для розыгрыша приравниваем интегральное распределение случайному числу (см. §2):

$$\xi = \frac{\ln \nu / \nu_1 - \ell \nu}{L_1 - \ell};\tag{4}$$

Для нахождения ν по^{нужно} решать трансцендентное уравнение или табулировать функцию $\nu(\delta, \nu, \xi)$. Вместо этого перейдем к еще более простой аппроксимации:

$$\tilde{\ell} = \frac{1}{\nu \cdot L_0}; \quad L_0 = \ln(1/\nu_0), \quad \nu > \nu_0 \quad (5)$$

Это модельное распределение занижает число фотонов для низкой энергии и завышает для высокой, ($\nu \tilde{\ell} = \text{const}$) сравниваясь с (3) при $\nu = \nu_e$:

$$L_0 = \frac{L_1 - \ell}{1 - \ell \nu_e} \quad (6)$$

Величину ν_e выбираем из условия равенства средних потерь энергии ($\nu_0 \ll 1$)

$$\frac{1}{L_0} = \frac{1 - \ell/2}{L_1 - \ell} \quad (7)$$

Сравнивая это выражение с (7.6), находим Розыгрыш ν происходит теперь по формуле: которая легко обращается:

$$\nu_e = \frac{1}{2} \quad \xi = \ln\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) / \ln\left(\frac{1}{\nu_0}\right)$$

$$\nu = \nu_0^{1-\xi} \quad (8)$$

б) Параобразование. Дифференциальную вероятность примем независимой от энергии электрона (позитрона). Это означает, что энергия одной из заряженных частиц равномерно распределена от 0 до $\omega - 1$ (ω - энергия фотона, μ - энергия заряженной частицы в единицах $m c^2$).

Полная вероятность рождения пары на радиационной единице длины может быть аппроксимирована выражением:

$$\Sigma(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{9} \ln \frac{\omega}{2} & \omega \leq 2000 \\ \frac{7}{9} & \omega > 2000 \end{cases}$$

Отметим, что аппроксимация слабо зависит от вещества /18/.

в) Ионизационные потери примем независимыми от энергии электрона (позитрона) и равными $\beta = 15 \text{ (} mc^2 \text{)}$ для свинца на радиационную единицу длины.

г) Комптоновское рассеяние. Дифференциальную вероятность процесса примем в виде [18]:

$$x(\omega', \omega) = \frac{\omega_c}{\omega} \left(\frac{1}{\omega} + \omega \right) \quad (10)$$

где $\omega_c = \frac{137 \pi}{(Z+1)4(183Z^{-1/3} - f(Z))} \approx 0.38$ (в единицах mc^2);

$\omega = \omega'/\omega$, численное значение ω_c дано для свинца. Полная вероятность комптоновского рассеяния на радиационной длине равна:

$$\Sigma_c(\omega) \approx \frac{\omega_c}{\omega} \ln(3.3\omega) \quad (11)$$

Розыгрыш вторичной энергии по распределению (10) приводит к трансцендентному уравнению относительно ω' -энергии рассеянного фотона. Вместо этого примем, что фотон всегда уносит свою среднюю энергию: $\langle \omega' \rangle = \frac{4\omega}{3 \ln(3.3\omega)}$, а

электрон-остаток: $u = \omega - \langle \omega' \rangle$. Энергии ω, ω', u измеряются в единицах mc^2 .

д) Аннигиляция позитронов на лету - эффект того же порядка, что и комптоновское рассеяние. Дифференциальную вероятность того, что один из фотонов пары получит энергию ω при-
 мем постоянной, не зависящей от энергии вторичной частицы.

Полная вероятность аннигиляции на радиационной длине равна:

$$\Sigma_a(u) = \frac{\omega_c}{u} \ln(0.72u) \quad (12)$$

где ω_c имеет ту же величину, что и в (11), а u - энергия позитрона в mc^2 .

е) Многократное рассеяние будем учитывать в гауссовом приближении. Пространственная функция распределения имеет вид:

$$d\theta' f(\theta) = 2\theta' e^{-\theta'^2} d\theta' \quad (13)$$

где $\theta' = \theta / \sqrt{\bar{\theta}^2}$; $\bar{\theta}^2 \approx (\frac{6}{E})^2 B \cdot z$; E-энергия (Мэв); z - пробег в радиационных длинах; параметр B тот же, что и в §1, в Если моделировать ливень в плоскости, то нужно использовать распределение для проекции угла:

$$f(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \bar{\theta}} e^{-\theta^2 / \bar{\theta}^2} \quad (14)$$

где $\bar{\theta}^2 \approx \frac{1}{2} (\frac{6}{E})^2 B \cdot z$. Многократное рассеяние определяет угловое распределение частиц. Во всех остальных процессах угловые отклонения частиц можно не учитывать.

Моделирование ливня в основном производится так же, как это описано в §3.

Расчеты простого варианта каскада требуют значительно меньше машинного времени, так как используются очень простые аналитические выражения для моделирования. Описанный вариант каскада может быть легко запрограммирован. Интересно сравнить, как согласуются расчеты по простой модели с более точными расчетами. На рис.14 приводятся каскадные кривые, полученные с помощью разных схем моделирования. Различие между кривыми не превышает 20%. Нижняя граница по энергии, при которой можно производить расчет по простой модели того же порядка, что и граница применимости более точного варианта каскада §§1-5, то-есть 10 Мэв.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Messel et. al. *Nuclear Physics* 39, (1962), 1
2. H. Nagel *Zeits. für Physik* 186, (1965), 319
3. С.З.Беленький. Лавинные процессы в космических лучах. ОГИЗ
Гостехиздат 1948 г.
4. H. Davies et. al. *Phys. Rev.* 93, (1954), 788
K.L. Brown *Phys. Rev.* 103, (1956), 243
H. Olsen *Phys. Rev.* 99, (1955), 1335
5. T. Nishimura, *Handbuch der Physik* B 46/2
6. Э.Сегре. Экспериментальная ядерная физика т.1.
7. H.W. Koch, J.W. Motz. *Rev. Mod. Phys.* 31, (1959) 20
8. H. Bethe *Phys. Rev.* 89(1953) 1256
9. T. Scott *Rev. Mod. Phys.* 35(1963), 231
10. J.C. Butcher, H. Messel, *Phys. Rev.* 112(1958), 2096
11. У.Фано, Л.Спенсер, М.Бергер. Перенос гамма-излучения. Гос-
атомиздат 1963 г.
12. M. Tamura. *Progress of theoretical Physics* 34, (1965), 912
13. М.А. Антипов, Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков. Статистическая про-
верка датчика псевдослучайных чисел.
З.А. Королева, Г.А. Михайлов. Оптимальные процедуры модели-
рования некоторых случайных величин. ВЦ СО АН СССР отчет
Новосибирск 1969.
14. H. Wiedemann, *Preprint, DESY-H5/6, 1970*
15. В.Г. Левин. Курс теоретической физики т.П, Наука, 1971.
16. В.А. Таюрский, Б.В. Чириков, В.Ф. Шмаков. Расчет оптимально-
го позитронного конвертера методом Монте-Карло, П,Ш,ИЯФ,
Новосибирск.
17. Г.И. Будкер и др. Доклад на втором Всесоюзном совещании по
ускорителям (Москва, 1970).
18. Б. Росси, Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веще-
ством. ИИЛ, 1948.
19. А.И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдо-
случайных чисел на ЭВМ, 1965.

20. D.H. Lehmer, *Annals Comp. Lab. Harvard Univ.*, 26, (1951), 141
21. H. Wiedemann, частное сообщение, 1972.
22. С.М.Ермаков. Метод Монте-Карло и смежные вопросы, Наука, 1971.

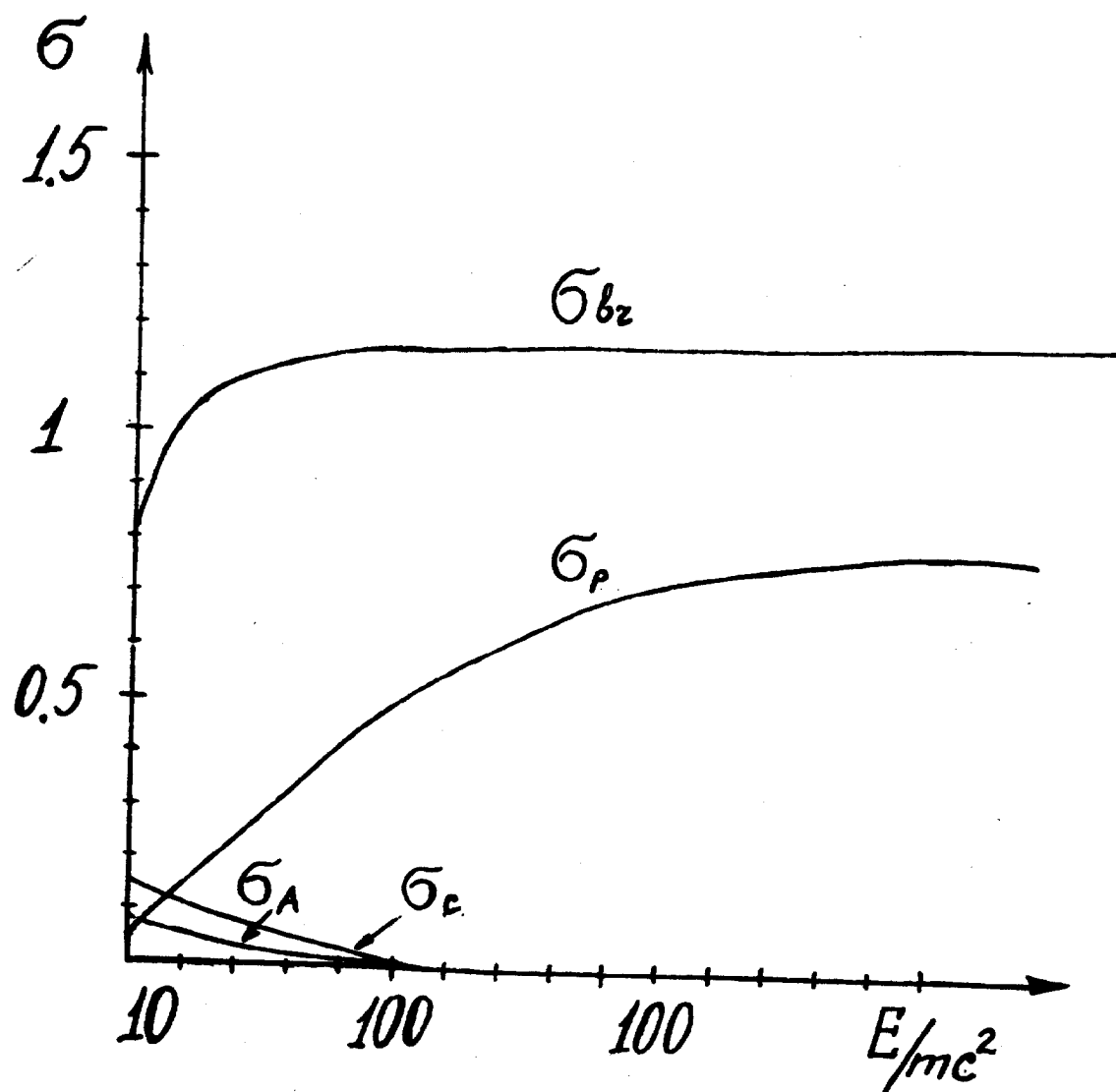


Рис. 1. График зависимости сечений элементарных процессов от энергии для свинца. При вычислении полного сечения тормозного излучения интеграл обрезался при $E'/E = 10^{-2}$.

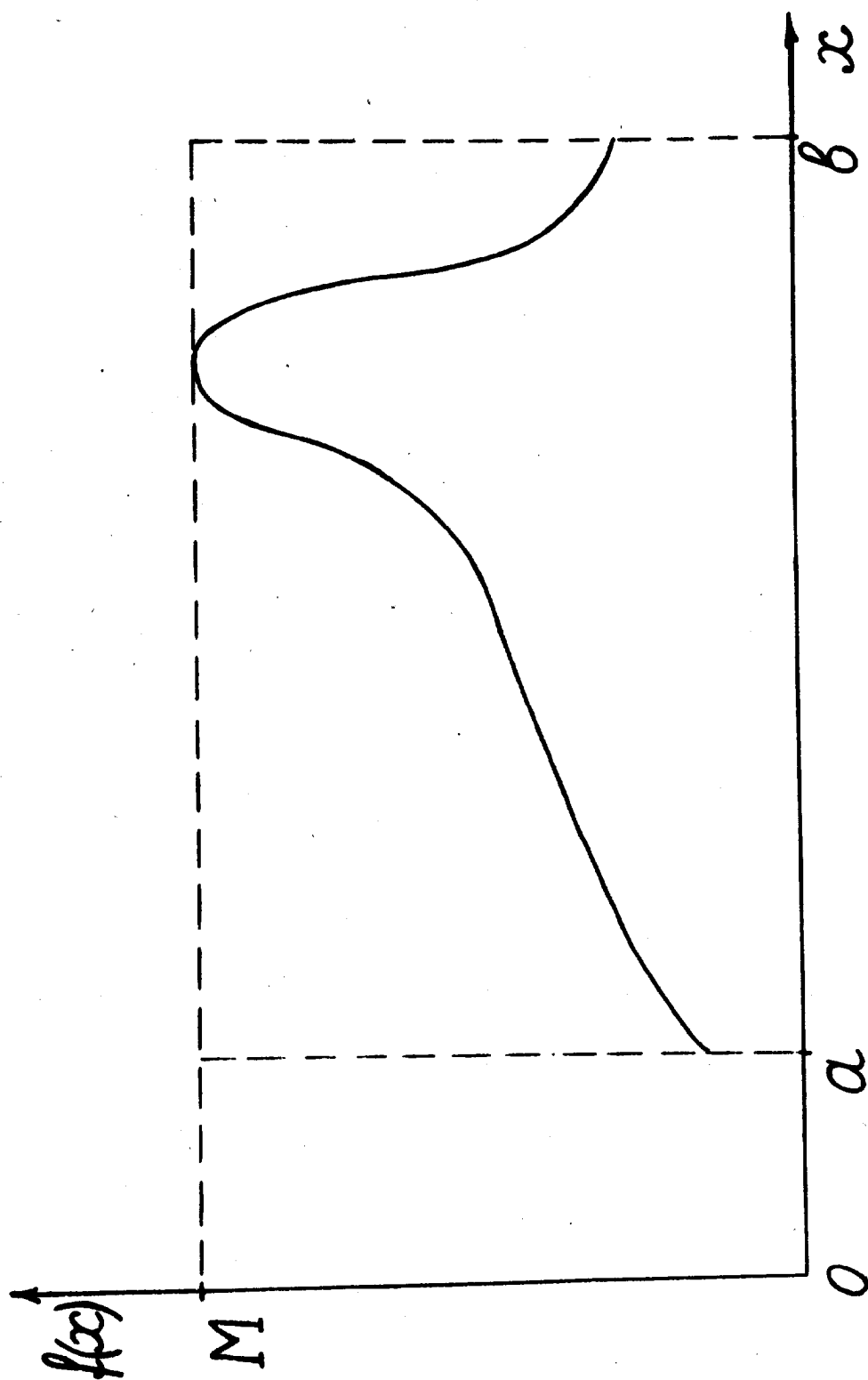


Рис.2. Выборка случайных чисел по методу Неймана.

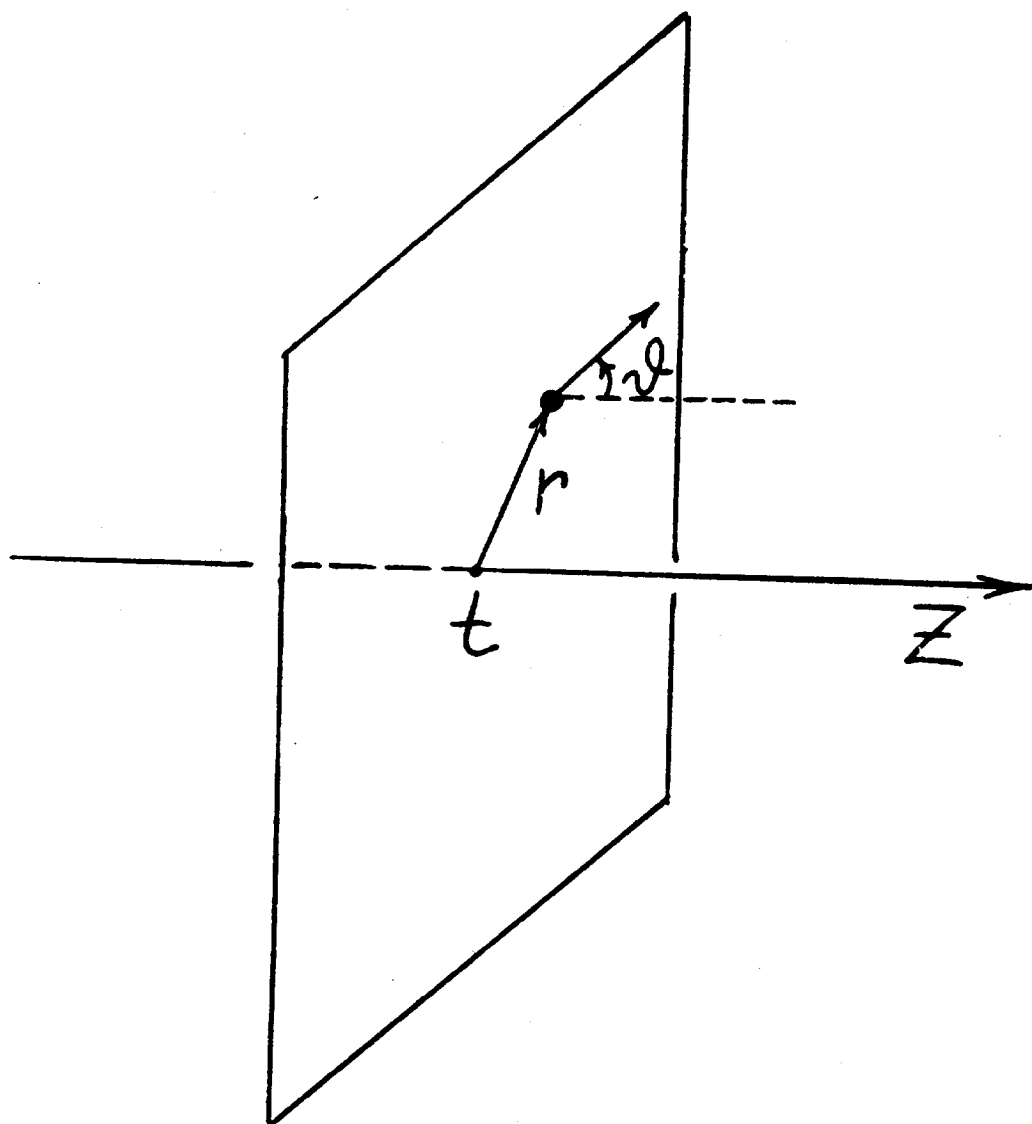


Рис.3. Геометрическое описание траектории.

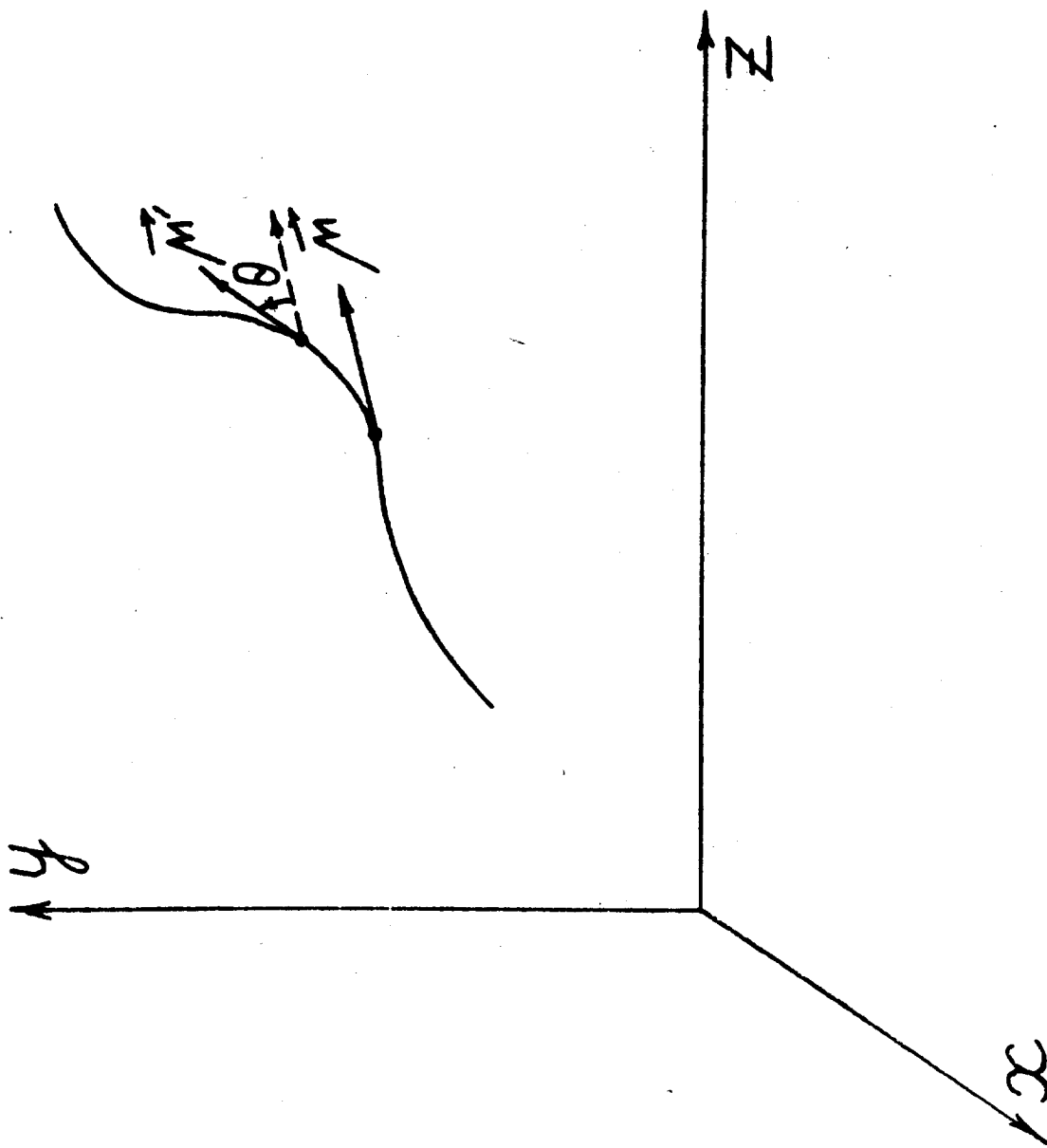


Рис.4. Участок траектории частицы в каскаде.

КАСКАДНАЯ КРИВАЯ. ПРОВЕГ В РАД. ДЛ. ЧЕРЕЗ													0.100000
1.02	1.09	1.20	1.36	1.53	1.74	2.00	2.20	2.49	2.68	2.96	3.23	3.50	3.74
4.20	4.42	4.63	4.80	4.99	5.14	5.32	5.61	5.91	5.94	5.61	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Рис.7. Каскадная кривая, то же Е₀

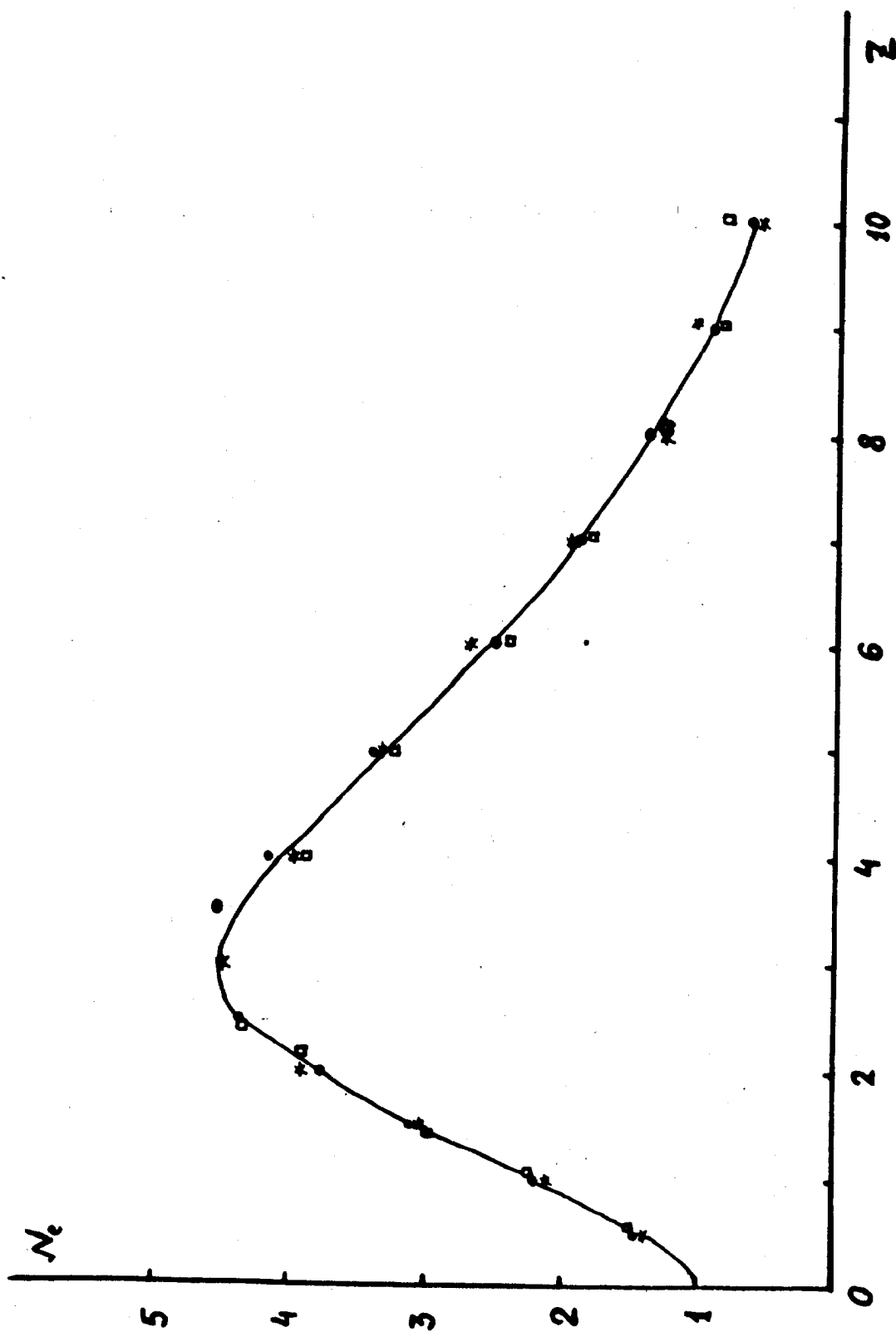


Рис.8. Сравнение каскадных кривых в свинце: $E_0 = 1000$ Мэв;
 $E = 10$ Мэв; $\odot$ - Нагель /2/; $\square$ - Мессель /1/;
 * - Наш расчет.

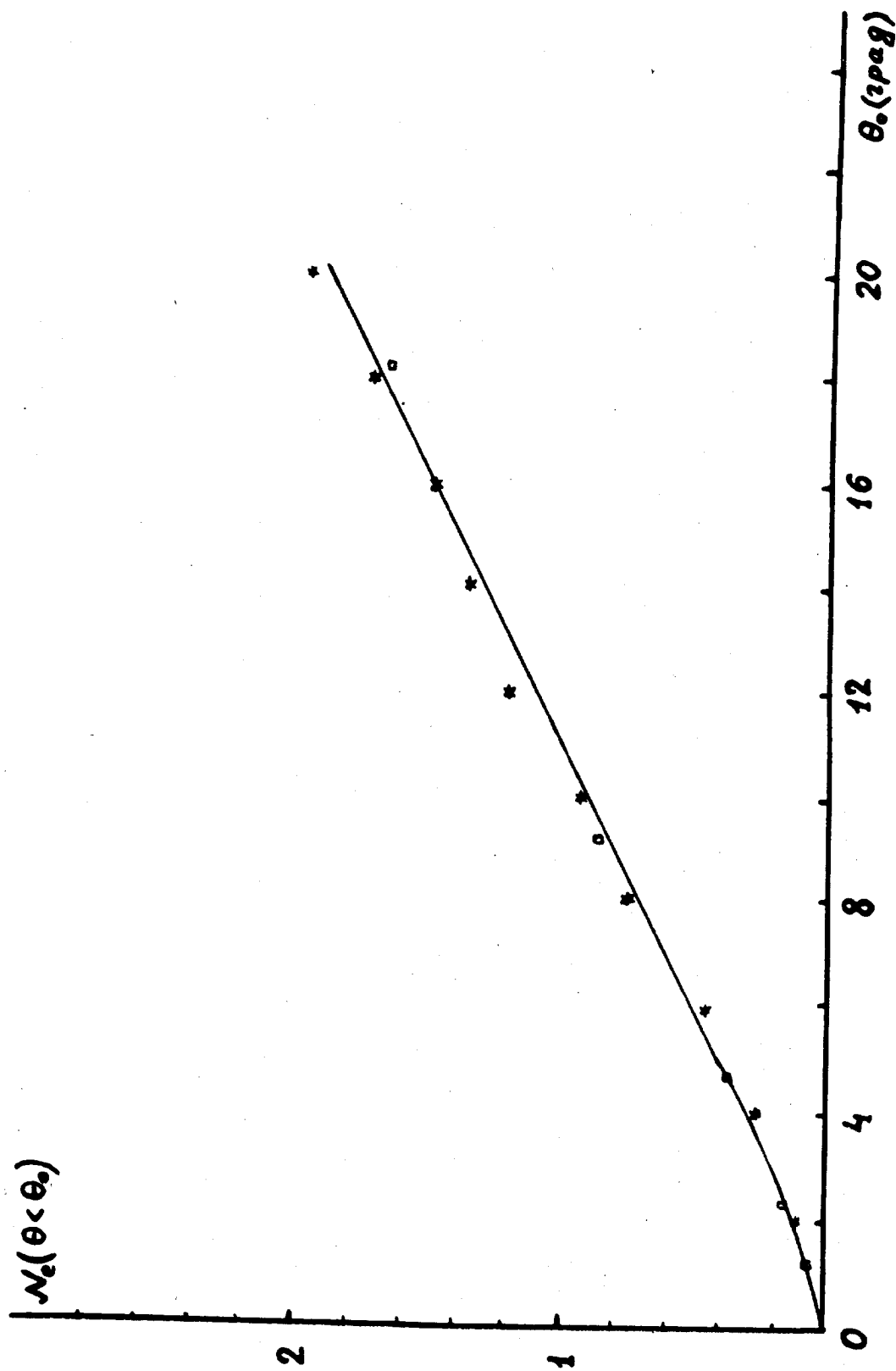


Рис. 8. Интегральные угловые спектры по нашим данным и по данным Месселя /1/: $E_\theta = 1000$ МэВ, $E_{min} = 10$ МэВ.

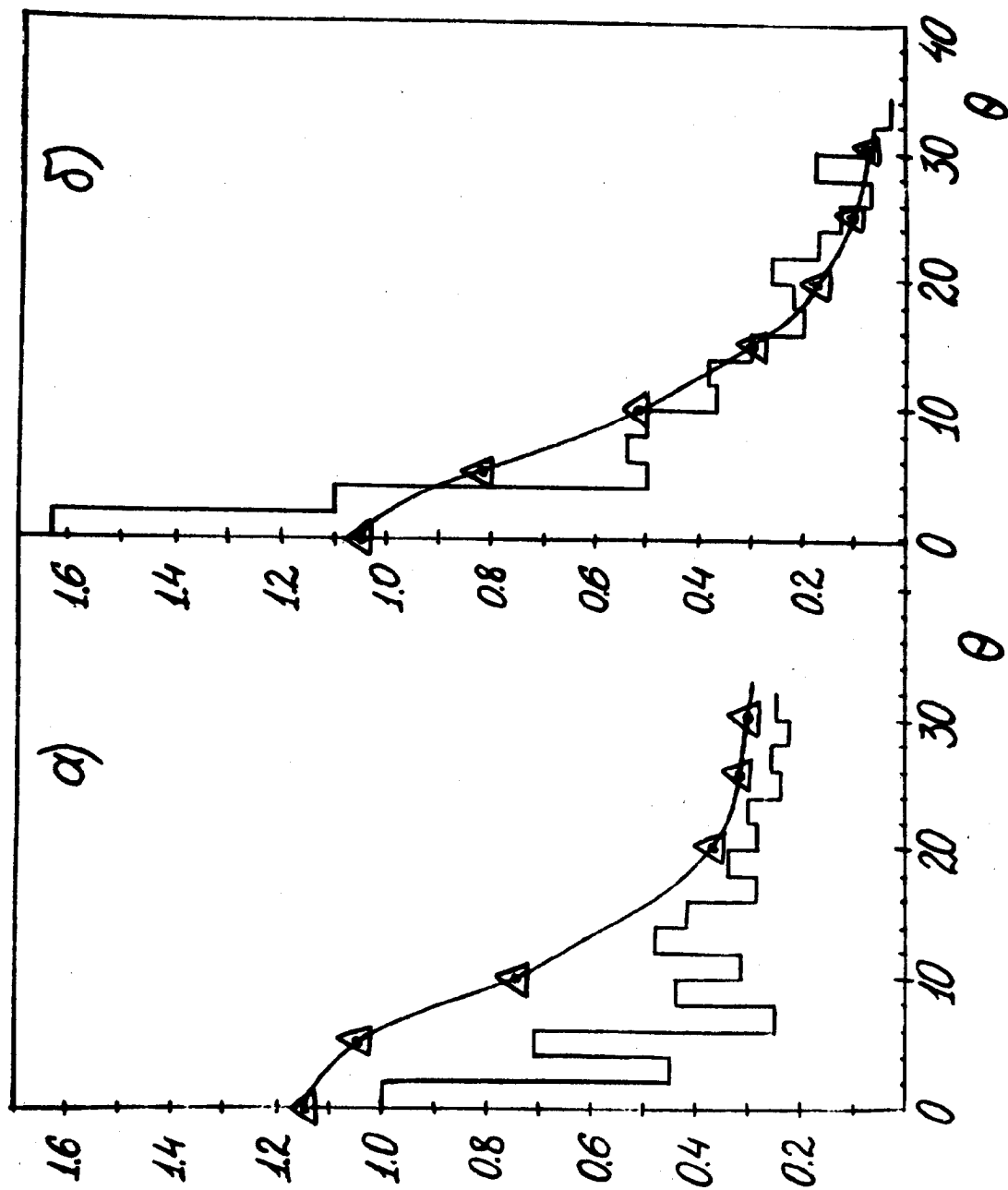


Рис. 10. Сравнение расчетных и экспериментальных угловых распределений в свинце: $E = 1000$ Мэв; $Z_M = 2,6$ рад.дл.

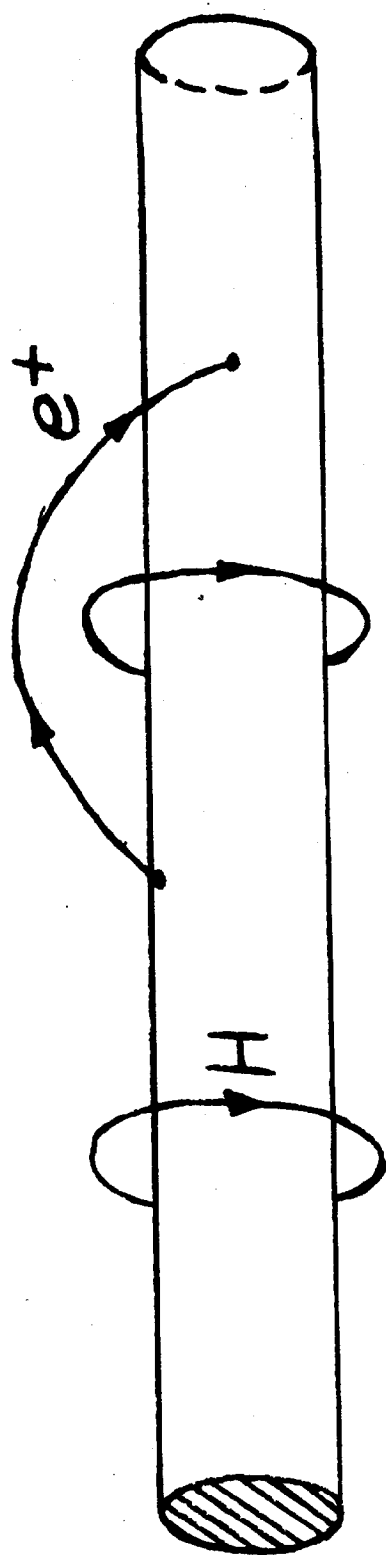


Рис.11. Движение частицы в поле прямого тока.

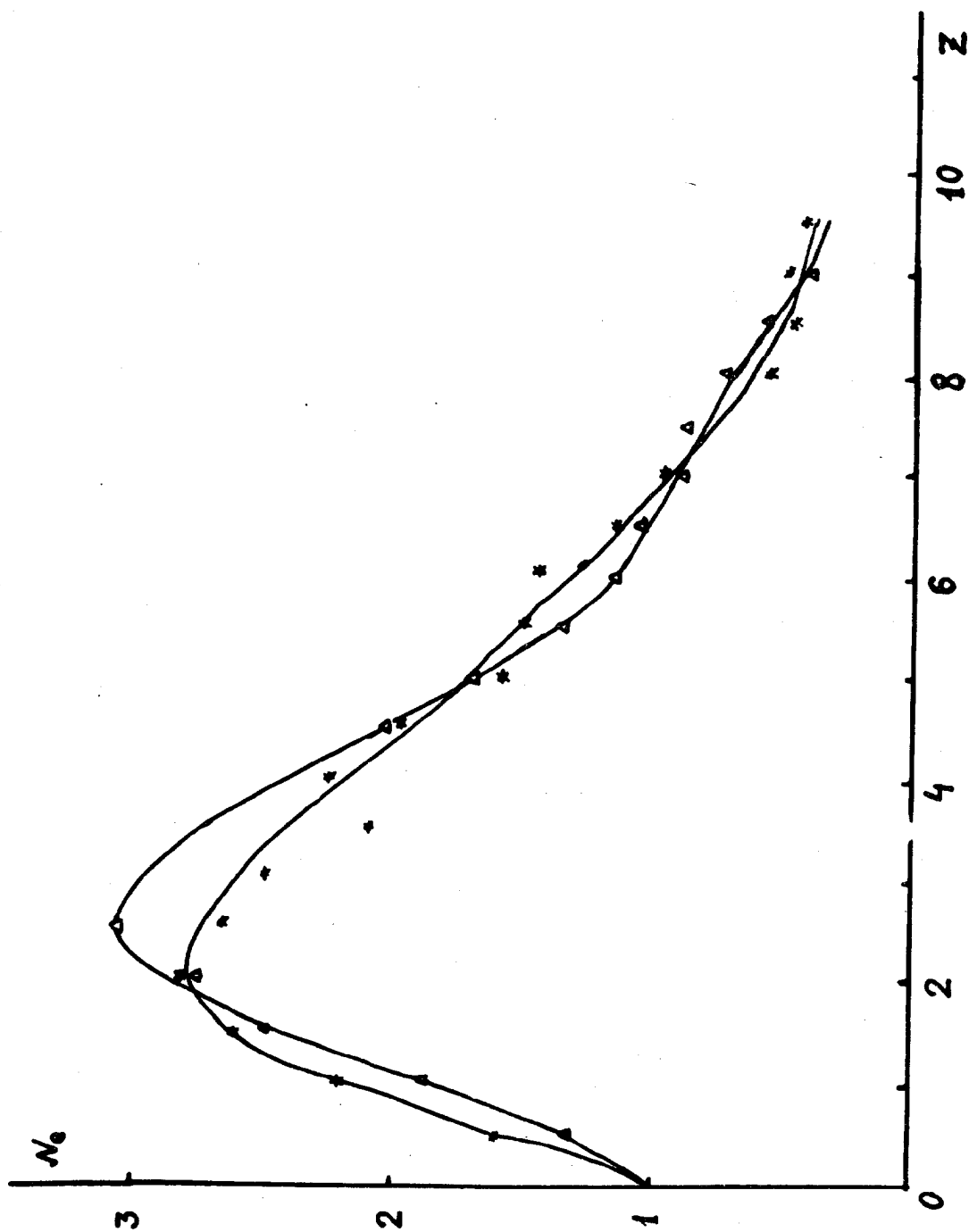


Рис.12. Сравнение результатов расчета каскадов по простой модели (Дополнения) с более точными расчетами (§ 1-5).