

# **И Н С Т И Т У Т ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 49**

**Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков**

## **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИ- МЕНТЫ ПО ДИФФУЗИИ АРНОЛЬДА**

**Новосибирск**

**1974**

## А Н Н О Т А Ц И Я

В работе приводятся первые результаты численных экспериментов, доказывающие существование так называемой диффузии Арнольда на простейшей модели двух нелинейных осцилляторов с линейной связью под действием внешней периодической силы. Получены зависимости коэффициента диффузии от параметров системы, которые совпадают по порядку величины с аналитическими оценками.

Диффузия Арнольда является универсальной, очень слабой неустойчивостью нелинейной колебательной системы с несколькими степенями свободы ( $N \geq 3$  для консервативной системы и  $N \geq 2$  для неконсервативной) /1-3/. Эта неустойчивость приводит (для очень специальных начальных условий) к медленному стохастическому обмену энергией между степенями свободы и (в неконсервативной системе) к стохастическому изменению полной энергии системы. В принципиальном отношении диффузия Арнольда интересна, как весьма тонкий механизм взаимодействия нелинейных резонансов, который до самого последнего времени ускользал от внимания математиков и механиков в этой классической области теории нелинейных колебаний.

Впервые на возможность такой неустойчивости обратил внимание Арнольд /1/; он же высказал предположение об универсальности этого механизма диффузии в динамических системах с большим числом степеней свободы /2/. В /3/ получены грубые оценки скорости диффузии Арнольда для широкого класса нелинейных гамильтоновых систем. Строгие оценки, но только сверху, были даны недавно Нехорошевым /4/.

Как было сказано выше и будет показано ниже, диффузия Арнольда имеет место только для очень специальных начальных условий малой меры, внутри так называемого стохастического слоя в окрестности сепаратрисы нелинейных резонансов /3/. Может показаться поэтому, что никакого практического значения эта неустойчивость не имеет. Это, однако, не всегда так. Дело в том, что обычно в реальных системах имеет место более или менее сильная глобальная (для любых начальных условий) диффузия, вызванная теми или иными внешними случайными возмущениями. Такая глобальная диффузия рано или поздно приводит систему к ближайшему стохастическому слою, после чего возможна более быстрая диффузия Арнольда вдоль слоя.

Насколько нам известно, до сих пор нет убедительных экспериментальных данных по диффузии Арнольда, хотя можно предполагать, что именно это явление наблюдалось в экспериментах по длительному удержанию электронов в магнитной ловушке /5-8/ (особенно это касается /8/), а также в некоторых численных экспериментах /9-II/. Есть подозрения, что диффузия Арнольда может иг-

рать определенную роль еще в двух процессах /3/. Один из них – гибель астероидов, частоты вращения которых попадают в резонанс с Юпитером (так называемые "люки" в энергетическом спектре астероидов /14/). Второй – очень медленное расширение пучка протонов в накопителе ЦЕРНа за время порядка суток /15/. Оба явления пока не нашли удовлетворительного объяснения.

Настоящая работа является продолжением /II/. Используя близкую методику, мы показываем, что обнаруженная в /II/ очень слабая неустойчивость действительно является диффузией Арнольда. Далее, исследуются её качественные особенности и определяется зависимость ее скорости от различных параметров системы.

### § I. М о д е л ь

Мы используем близкую к /II/ модель с двумя степенями свободы, описываемую нелинейным преобразованием  $p_i, x_i \rightarrow \bar{p}_i, \bar{x}_i$ :

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= p_1 - x_1^3 + \mu x_2 + f_1(t) \\ \bar{p}_2 &= p_2 - x_2^3 + \mu x_1 + f_2(t) \\ \bar{x}_1 &= x_1 + \bar{p}_1 \\ \bar{x}_2 &= x_2 + \bar{p}_2\end{aligned}\tag{I.I}$$

Выбор дискретной модели (преобразование) вместо непрерывной (дифференциальные уравнения) даёт возможность максимально ускорить счет и уменьшить его ошибки. Последние сводятся для (I.I) только к ошибкам округления. Основным недостатком дискретной модели является её собственный "фон", связанный с тем, что дискретная модель эквивалентна непрерывной системе с сильным периодическим возмущением в виде коротких толчков. Можно было бы наблюдать эволюцию дискретной системы под действием этого же "фонового" возмущения, как это и было сделано в /II/. Однако сравнение с теорией в этом случае сильно затруднено, так как "фоновое" возмущение не является слабым. Поэтому в отличие от /II/ мы ввели дополнительные слабые силы  $f_1, f_2$  (I.I). Для уменьшения фона необходимо, чтобы собственные частоты системы были малы по сравнению с частотой фонового возмущения (I.3).

Нелинейное преобразование (I.I) представляется нам простейшей моделью диффузии Арнольда. В то же время эта модель, по крайней мере качественно, соответствует некоторым реальным механическим системам, например, частице в ускорителе или накопительном кольце /II/.

Для выяснения физического смысла модели перейдем от преобразования (I.I) к дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -x_1^3 + \mu x_2 + f_1(t) \\ \dot{p}_2 &= -x_2^3 + \mu x_1 + f_2(t) \\ \dot{x}_1 &= p_1 \\ \dot{x}_2 &= p_2\end{aligned}\tag{I.2}$$

Это справедливо при условии:

$$\frac{dp_i}{p_i} = \frac{\bar{p}_i - p_i}{p_i} \ll 1; \quad \frac{dx_i}{x_i} = \frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} \ll 1\tag{I.3}$$

Время  $t$  измеряется здесь в числе шагов преобразования, так что  $dt=1$ . Система (I.2) имеет гамильтониан:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - x_1 f_1 - x_2 f_2\tag{I.4}$$

Теперь ясно, что наша модель представляет собой два нелинейных осциллятора с линейной связью, на каждый из которых действует внешняя сила. Импульсы и координаты осцилляторов равны  $p_1, p_2, x_1, x_2$ , соответственно;  $\mu$  — коэффициент связи. Внешние силы  $f_1, f_2$  выбраны в виде несимметричной "пилы" с периодами  $T_1, T_2$ , (или основными частотами  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$ ;  $\Omega_2 = 2\pi/T_2$ ), причем на каждом периоде сила имеет вид:

$$f_i(t) = f_{oi} \frac{t - t_{oi}}{T_i}, \quad -\frac{T_i}{2} < t - t_{oi} < \frac{T_i}{2}\tag{I.5}$$

Величины  $t_{oi}$  определяют фазы сил.

Отметим, что преобразование (I.I) можно рассматривать как простейшую разностную аппроксимацию дифференциальных уравнений (I.2). В таком случае описанное выше "фоновое" возмущение яв-

ляется ошибками такой аппроксимации. Существенно, что аппроксимация (I.1) точно сохраняет фазовый объем системы (I.1) и, тем самым, основные эргодические свойства системы (I.2).

Не возмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} = \frac{1}{4} \left( \frac{3\pi}{2K_0} \right)^{4/3} (J_1^{4/3} + J_2^{4/3}) \quad (I.6)$$

описывает независимые колебания двух нелинейных осцилляторов с частотами  $\omega_i$ , пропорциональными амплитудам колебаний  $x_{0i}$ :

$$\omega(x_0) = \frac{\pi x_0}{K_0} \approx 0.85 x_0 \quad (I.7)$$

Здесь

$$J = \frac{x_0^4}{3\omega_0} \quad (I.8)$$

-действие осцилляторов;  $K_0 = K(1/\sqrt{2}) \approx 1.85$

- полный эллиптический интеграл. Нелинейность осциллятора характеризуется безразмерным параметром

$$\lambda = \frac{J}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dJ} = \frac{1}{3} \quad (I.9)$$

Она не зависит от амплитуды колебаний и является достаточно сильной ( $\lambda \sim 1$ ). Именно по этой причине мы исключили из нашей модели квадратичный потенциал, хотя это, конечно, ухудшает соответствие модели реальным системам.

Интересно отметить, что несмотря на сильную нелинейность невозмущенные колебания осцилляторов очень близки к гармоническим: вклад высших гармоник составляет менее 5%. Поэтому можно принять приближенно:

$$x(t) \approx x_0 \cos \theta(t) \quad (I.10)$$

Диффузия Арнольда идет вдоль резонансов системы-резонансов связи ( $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \approx 0$ ) или внешних резонансов ( $n_1 \omega_1 \approx m_1 \Omega_1$ ;  $n_2 \omega_2 \approx m_2 \Omega_2$ ), (рис.1). В этой работе мы ограничимся исследованием диффузии Арнольда вдоль основного резонанса связи:  $\omega_1 \approx \omega_2$ .

При малых возмущениях ( $\mu, f \rightarrow 0$ ) уравнения движения "сглаженной" системы (I.4) в переменных действие-угол имеют вид /12/:

$$\begin{aligned}\dot{J}_1 &\approx -\frac{\mu x_{01} \cdot x_{02}}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sum_m (-1)^m \frac{x_{01} l_{01}}{\pi \cdot m} \cos(\theta_1 - m \vartheta_1) \\ \dot{J}_2 &\approx +\frac{\mu x_{01} \cdot x_{02}}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sum_m (-1)^m \frac{x_{02} l_{02}}{\pi \cdot m} \cos(\theta_2 - m \vartheta_2) \\ \dot{\theta}_1 &\approx \omega_1(J_1); \quad \dot{\theta}_2 \approx \omega_2(J_2) \\ \dot{\vartheta}_1 &= \Omega_1; \quad \dot{\vartheta}_2 = \Omega_2\end{aligned}\tag{I.II}$$

где оставлены только резонансные гармоники возмущения и отброшены линейные поправки к частотам  $\omega_i$ ; последнее справедливо ввиду  $\lambda \sim 1/12$ .

Пусть вначале внешние силы отсутствуют  $l_{0i} = 0$ . Тогда остаются только фазовые колебания на резонансе связи, которые имеют интеграл:  $J_1 + J_2 = \text{const}$  (I.II). Вводя новые переменные:

$$\Delta = \frac{J_1 - J_2}{2}\tag{I.I2}$$

$$\Psi = \theta_1 - \theta_2$$

и принимая  $x_{01} \approx x_{02} \approx x_0 \approx \text{const}$ ,  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0 \approx \text{const}$ , можем записать уравнения движения в виде:

$$\dot{\Delta} \approx -\frac{\mu \cdot x_0^2}{2} \cdot \sin \Psi\tag{I.I3}$$

$$\dot{\Psi} \approx \omega_1 - \omega_2 \approx 2 \cdot \frac{\omega_0^2}{x_0^4} \cdot \Delta$$

Последняя система допускает гамильтониан:

$$H_\mu = \frac{\omega_0^2 \cdot \Delta^2}{x_0^4} - \frac{\mu \cdot x_0^2}{2} \cos \Psi\tag{I.I4}$$

Отсюда получаем частоту малых фазовых колебаний:

$$\Omega_\mu = \sqrt{\mu} \cdot \frac{\omega_0}{x_0}\tag{I.I5}$$

Резонанс связи ограничен сепаратрисой:

$$\Delta_c = \pm \sqrt{\mu} \frac{x_0^3}{\omega_0} \sin \frac{\Psi}{2} = \pm \Delta_\mu \cdot \sin \frac{\Psi}{2}\tag{I.I6}$$

где разные знаки соответствуют двум ветвям сепаратрисы. Полуширину резонанса удобно характеризовать амплитудой биений частоты  $\omega$  :

$$(\Delta\omega)_\mu = \frac{d\omega}{dJ} \Delta J = \Omega_\mu \quad (I.17)$$

Обратим внимание, что ширина резонанса связи не зависит от  $\chi_0$ , а, следовательно, и от частот (рис. I).

Рассмотрим теперь влияние одной гармоники внешней силы  $l_1$  при отсутствии связи ( $\mu=0$ ). В этом случае  $J_2 = \text{const}$ . Вводя новые переменные:

$$\begin{aligned} \delta &= J - J_0; & \varphi &= \theta_1 - m\vartheta_1 \\ J_0 &= J(\chi_0); & \omega_1(\chi_0) &\approx m\Omega_1 \end{aligned} \quad (I.18)$$

получим аналогично случаю резонанса связи гамильтониан фазовых колебаний на внешнем резонансе:

$$H_f = \frac{\omega_0^2 \delta^2}{2\chi_0^4} + \frac{\chi_0 l_0}{\pi \cdot m} \sin \varphi \quad (I.19)$$

Откуда частота малых фазовых колебаний:

$$\Omega_f = \sqrt{\frac{l_0}{\pi \cdot m}} \cdot \frac{\omega_0}{\chi_0^{3/2}} \approx \frac{0.44}{m} \sqrt{\frac{l_0}{\Omega}} \quad (I.20)$$

В последнем выражении подставлено  $\omega_0 = m\Omega$ . Полуширина резонанса равна:

$$(\Delta\omega)_f \approx 2\Omega_f \quad (I.21)$$

Для справедливости полученных выражений необходимо прежде всего выполнение условия (I.3) перехода к "стлаженной" системе, которое можно записать в виде:

$$\omega \ll 1 \quad (I.22)$$

Численные эксперименты в [II, I3] показали, что если  $\omega \gtrsim 0.65$ , то даже для  $\mu = l_0 = 0$  начинается сильная стохастическая неустойчивость за счет фонового возмущения (дискретности системы). Область этой "фоновой стохастичности" показана на рис. I. Кроме того, необходимо, чтобы возмущения  $\mu, l_0$  были достаточно малы, точнее, необходимо, чтобы ширина резонансов была мала по сравнению с "расстоянием" (по частоте) до соседних резонансов:

$$\Omega_\mu, \Omega_f \ll \Omega \quad (I.23)$$

Это требование связано с тем, что мы рассматривали выше один изолированный резонанс.

## § 2. Перекрытие резонансов и стохастическая неустойчивость

При достаточно большой величине возмущений  $\mu, \rho_0$  происходит перекрытие резонансов и возникает стохастическая неустойчивость [12]. Пусть вначале  $\mu = 0$ , тогда система распадается на два независимых осциллятора. Можно считать, что начало стохастической неустойчивости соответствует касанию сепаратрис двух соседних внешних резонансов:

$$S_f = \frac{(\Delta\omega)_+^{(m)} + (\Delta\omega)_+^{(m+1)}}{\Omega} = \frac{0.9}{\Omega^{3/2}} \cdot \frac{2m+1}{m(m+1)} \cdot \sqrt{\rho_c} \approx 1 \quad (2.1)$$

Величина  $S_f$  называется параметром перекрытия, так как при  $S_f > 1$  соседние резонансы налагаются друг на друга. Из (2.1) получаем критическое значение амплитуды силы:

$$\rho_c \approx 1.2 \left[ \frac{m(m+1)}{2m+1} \right]^2 \Omega^3 \cdot S_f^2 \quad (2.2)$$

Эти соотношения следует рассматривать как оценки, поскольку использованное в них выражение для  $(\Delta\omega)_+$  получено при условии (I.23) или

$$S_f \ll 1$$

тогда как при  $S_f \sim 1$  сепаратриса искажается под влиянием соседнего резонанса. Поэтому в (2.2) мы оставили множитель  $S_f$  для сравнения с экспериментом.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай  $\rho_0 \ll \mu$ . Тогда перекрытие резонансов возможно, если размах фазовых колебаний на резонансе связи превышает расстояние между внешними резонансами:  $2(\Delta\omega)_\mu > \Omega$  (рис. I). Отсюда критическое значение  $\mu_c$  равно:

$$\mu_c \approx 0.35 \Omega^2 S_\mu^2 \quad (2.3)$$

где  $S_\mu$  — параметр перекрытия для резонанса связи.

Наконец, в случае  $\rho_0 \sim \mu$  граница стохастичности определяется соотношением:

$$S = \frac{2(\Delta\omega)_\mu + (\Delta\omega)_+^{(m)} + (\Delta\omega)_+^{(m+1)}}{\Omega} \approx 1.7 \frac{\sqrt{\mu_c}}{\Omega \cdot S_\mu} + 0.9 \frac{2m+1}{m(m+1)} \cdot \frac{\sqrt{\rho_c}}{\Omega^{3/2} S_f} \approx 1 \quad (2.4)$$

Это условие получено для одной внешней силы, в случае двух сил параметр перекрытия  $S$  определяется наибольшей силой. Так как стохастическая неустойчивость значительно сильнее диффузии Арнольда (§3), последнюю можно наблюдать только в области  $S < 1$  (область диффузии Арнольда).

### § 3. Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились на БЭСМ-6 Вычислительного центра СО АН СССР. Программа счета и обработки результатов написана на языке АЛГОЛ за исключением основного цикла преобразования (I.I), который для ускорения счета написан в кодах машины. Это дало возможность максимально сократить время счета. Большинство расчетов проводилось на время  $t = 10^6$  шагов.

Обработка включала:

1. Измерение частот  $\omega_1, \omega_2$  по числу проходов координат осцилляторов через нуль с усреднением на интервале  $T_\omega = 10^4$ .
2. Зависимость полного гамильтониана "сглаженной" системы (I.4) от времени через  $10^4$  шагов (рис.5).
3. Вычисление среднего коэффициента диффузии по  $H$ :

$$D_n = \frac{1}{T_n} \overline{(\Delta \bar{H})^2} \quad (3.1)$$

где  $T_n = 10^n$  — интервал усреднения гамильтониана;  $\Delta \bar{H}$  — разница средних значений гамильтониана на соседних интервалах. Верхняя черта означает усреднение по всем интервалам в пределах одного счета. Обычно вычислялось два коэффициента диффузии для  $n=4;5$ . Если их значения близки, это дополнительно указывает на диффузионный характер изменения  $H(t)$ ; если же они различаются примерно на порядок, то это свидетельствует о периодических колебаниях  $H$  (главным образом за счет дискретности преобразования).

Основной результат численных экспериментов — обнаружение очень слабой неустойчивости в отсутствии перекрытия резонансов ( $S < 1$  (2.4)). На рис.2 представлена зависимость коэффициента диффузии от амплитуды одной из сил (вторая сила равна нулю). Кривая  $\mu = 0$  характеризует колебания одного осциллятора. Резкий рост  $D$  обусловлен перекрытием внешних резонансов. Сравнение экспериментального критического значения  $\rho_c^* \approx 10^{-2}$  с оценкой (2.2) даёт  $S_1 \approx 2$  ( $m=1$ ). Хотя для оценки это не столь уже большое различие

с ожидаемым  $S_4 \approx 1$ , можно предположить, что оно связано со специальными начальными условиями счета, требующими большего перекрытия резонансов для попадания в стохастическую область.

Как известно, для одного осциллятора существует граница (по  $f_0$ ) вечной устойчивости (теория КАМ, см., например, [12]). В работе [13] показано, что эта граница совпадает по порядку величины с оценкой по перекрытию резонансов.

Причина резкого выброса  $D$  при  $f_0 \sim 10^{-3}$  осталась невыясненной.

При  $\mu \neq 0$  диффузия, превышающая фон на несколько порядков, продолжается в области столь малых  $f_0$ , где перекрытие внешних резонансов полностью исключено. Коэффициент диффузии в этой области изменяется по закону:  $D \sim f_0^2$  (рис.2).

На рис.3 приведена зависимость коэффициента диффузии от параметра связи  $\mu$ . Резкое увеличение диффузии при  $1/\sqrt{\mu} < 12$  ( $\mu > 0,007$ ) объясняется перекрытием резонанса связи с внешними резонансами. Однако диффузия продолжается и при значительно меньших  $\mu$ , убывая приблизительно по экспоненциальному закону (рис.3). Ориентировочная граница области перекрытия резонансов показана на рис.3 вертикальной заштрихованной линией. Если в (2.4) использовать экспериментальное значение  $S_\mu = S_4 = 2$ , то  $S \approx 0,45$ ; если положить  $S_\mu = S_4 = 1$ , то  $S \approx 0,89$ . В последнем случае имеет место вполне удовлетворительное согласие с ожидаемыми значениями:  $S_\mu = S_4 = S = 1$ . Между тем в первом случае значения  $S$  для разных резонансов расходятся между собой, что косвенно указывает на неправильное значение  $S_4 = 2$ , связанное, по-видимому, как уже говорилось выше, со специальными начальными условиями.

Комбинируя эмпирические законы, представленные на рис.2,3 прямыми линиями, получим:

$$D^*(\mu, f_0) \approx \frac{A f_0^2}{\sqrt{\mu}} e^{-\frac{b}{\sqrt{\mu}}} \quad (3.3)$$

$$A \approx 2,5 \cdot 10^{-4}; \quad b \approx 0,27$$

Постоянные  $A, b$  зависят, вообще говоря, от  $x_0, \Omega$ .

Обнаруженная диффузия не является локальной и при достаточной длительности счета приводит к "гибели" системы, т.е. к попаданию её в область "фоновой стохастичности" (рис.1). В численных

экспериментах счет прекращался, если одна из величин  $p_i, x_i$  превышала по модулю 1. Соответствующее число шагов можно назвать временем "жизни" системы. На рис.4 показана зависимость времени жизни  $T$  от амплитуды внешней силы  $f_0$ . Для  $\mu = 0$  диффузия прекращается (время жизни  $T > 10^7$ ) при  $f_0 < f_c \approx 10^{-2}$  - значение, хорошо согласующееся с данными по коэффициенту диффузии (рис.2). При  $\mu \neq 0$  время жизни системы остается конечным и при  $f_0 \ll f_c$ .

Пример зависимости энергии системы от времени приведен на рис.5 (кривая II). Ясно виден нерегулярный характер изменения энергии, а также резкое увеличение скорости диффузии вблизи границы "фоновой стохастичности".

Обычно счет производился при следующих начальных условиях:

$$p_1(0) = p_2(0) = 0; \quad x_1(0) = -x_2(0) = x_0 \approx 0.37$$

Условие на знаки  $x_i(0)$  обеспечивало попадание системы на сепаратрису резонанса связи, так как оно эквивалентно условию

$$\theta_1(0) - \theta_2(0) = \psi(0) = \pi \quad (\text{см (I.I4)})$$

Для контроля производился счет с другими начальными условиями:

$$p_1(0) = p_2(0) = 0; \quad x_1(0) = x_2(0) = x_0 \approx 0.37$$

В этом случае  $\psi(0) = 0$  и система оказывается в центре резонанса связи (I.I4). Для  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$  и  $f_0 = 2.9 \cdot 10^{-4}$  коэффициент диффузии падает при этом с  $D_4 \approx D_5 \approx 10^{-11}$  до  $D_4 \approx 4 \cdot 10^{-17}$ , последнее значение вполне объясняется фоном ( $D_5 \approx 2 \cdot 10^{-18}$ ). Это же иллюстрирует кривая I на рис.5, которая получена для начальных условий:  $x_1(0) = x_2(0)$ .

Более тонкая проверка природы обнаруженной неустойчивости состояла в определении области начальных условий, для которых она имеет место. Для этого снималась зависимость коэффициента диффузии от  $x_2(0)$  при фиксированном значении  $x_1(0) \approx 0.312$  и  $p_1(0) = p_2(0) = 0$ . Знаки  $x_1, x_2$  выбирались одинаковыми, так что при  $x_1 = x_2$  система находилась в центре резонанса. Однако при увеличении расстройки ( $x_2 - x_1$ ) она попадала на сепаратрису, двигаясь вдоль оси  $\omega_1$  на рис.1.

Полученная зависимость показана на рис.6. Видно, что диффузия имеет место лишь в относительно узком интервале начальных

условий:

$$(\Delta x_2)_c \approx 0.046 \quad (3.4)$$

Эту величину можно рассматривать как некоторую меру ширины стохастического слоя в окрестности сепаратрисы резонанса связи.

Дополнительный контрольный эксперимент состоял в увеличении частоты внешней силы вдвое. При этом из двух ближайших резонансов оставался только один (рис. I). В соответствии с механизмом диффузии Арнольда (§ 4) коэффициент диффузии упал примерно на порядок, несмотря на увеличение частоты (4.6).

#### § 4. Обсуждение результатов

В предыдущем параграфе было показано, что наблюдаемая неустойчивость качественно согласуется с диффузией Арнольда. Попробуем сравнить её количественно с аналитическими оценками. Последние получаются следующим образом: /3/. Скорость изменения энергии системы (I.4) под действием внешней силы равна

$$\dot{H} = -x_1 \cdot \dot{f}_1 \approx -(-1)^m \frac{x_0 f_0 \Omega_1}{\pi} \cos(\theta_1 - m\vartheta_1) \quad (4.1)$$

При условии:

$$f_0 \ll \mu x_0 \quad (4.2)$$

зависимость  $\theta_1(t)$  можно найти из уравнений фазовых колебаний на резонансе связи (I.I3):

$$\theta_1(t) = \int \omega_1(t) dt \approx \omega_0 t \pm \frac{\Psi}{2} \mp \frac{\pi}{2} + \theta_0 \quad (4.3)$$

где  $\theta_0$  — начальная фаза в момент времени, когда  $\Psi = \pi$  (см. ниже), а зависимость  $\Psi(t)$  дается выражением:

$$\Psi(t) = 4 \cdot \arctg(e^{\frac{\Omega_1}{\mu} t}) \quad (4.4)$$

которое получается интегрированием (I.I6). Разные знаки соответствуют двум ветвям сепаратрисы.

Изменение энергии за полпериода фазовых колебаний (от одной неустойчивой точки:  $\Psi = 0$  до другой:  $\Psi = 2\pi$ ) дается интегралом:

$$\begin{aligned} (\Delta H)_1 &= -(-1)^m \frac{x_0 f_0 \Omega_1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \cdot \cos(\delta \omega_0 t \pm \frac{\Psi}{2} \mp \frac{\pi}{2} + \beta_0) \approx \\ &\approx -(-1)^m \frac{4 x_0 f_0 \Omega_1}{\Omega_\mu} e^{-\frac{\pi |\delta \omega_0|}{2 \Omega_\mu}} \cdot \cos \beta_0, \quad \beta_0 = \theta_0 - m\vartheta_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Интеграл вычисляется с помощью вычетов /1/, причем знак  $\delta\omega_0 = \omega_0 - m\Omega$  должен быть противоположен знаку перед  $\psi$ . Если система находится посередине между двумя резонансами, как это имело место в наших экспериментах (рис.1), то на каждом из полупериодов фазовых колебаний "работает" один из соседних внешних резонансов с соответствующим знаком  $\delta\omega_0$ , причем  $|\delta\omega_0|$  одинаков для обоих резонансов.

Внутри стохастического слоя фаза  $\beta_0$  случайно изменяется за полпериода фазовых колебаний /12/, поэтому коэффициент диффузии равен:

$$D = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta H)_1^2 \rangle}{(T_p/2)} = \frac{4 \cdot l_0^2 x_0^2 \Omega^2}{L \cdot \Omega_p} \cdot e^{-\frac{\pi |\delta\omega_0|}{\Omega_p}} \quad (4.6)$$

где усреднение производится по фазе  $\beta_0$ :  $\langle \cos^2 \beta_0 \rangle = 1/2$ ; период фазовых колебаний:

$$T_p = \frac{\pi \Omega_p}{\ln \frac{32}{|\omega|}}; \quad \omega = \frac{\Delta H_p}{H_p^0} \quad (4.7)$$

Здесь  $\Delta H_p = H_p - H_p^0$ ;  $H_p^0$  - значение  $H_p$  (I.14) на сепаратрисе. Стохастический слой расположен приблизительно симметрично по обе стороны от невозмущенной сепаратрисы (I.16). Коэффициент диффузии нужно усреднить также и по стохастическому слою (по  $\omega$ ), что даёт  $L = \ln \frac{32}{\omega_c}$ , где  $\omega_c$  - полуширина сепаратрисы.

Отметим, что в /3/ ошибочно утверждалось, что применительно к данному случаю диффузия Арнольда возможна лишь при наличии двух сил ( $l_1; l_2 \neq 0$ ). Хотя одна сила, скажем,  $l_1$  изменяет только  $\omega_1$  и, казалось бы, выводит систему из стохастического слоя, связь ( $\mu$ ) приводит и к изменению  $\omega_2$  и обеспечивает диффузию вдоль слоя даже при  $l_2 = 0$ . Существенно, однако, что в рассматриваемом случае есть два внешних резонанса по обе стороны от резонанса связи, в противном случае скорость диф-

фузии значительно упала бы. По этой же причине диффузия Арнольда идет только в режиме колебания фазы  $\Psi = \theta_1 - \theta_2$  резонанса связи, т.е. когда  $\omega < 0$  (4.7); в режиме вращения фазы  $\Psi$

( $\omega > 0$ ) коэффициент диффузии существенно меньше и в первом приближении им можно пренебречь. Так как стохастический слой расположен симметрично относительно  $\omega = 0$ , то средний коэффициент диффузии упадет приблизительно в 2 раза (4.6).

Оценка ширины стохастического слоя по критерию перекрытия резонансов /3,12/ приводит к результату:

$$\omega_c \approx \frac{64}{\pi^2} \cdot \frac{\rho_0}{\mu x_0} \cdot \left( \frac{\delta \omega_0}{\Omega_r} \right)^2 \cdot e^{-\frac{\pi |\delta \omega_0|}{2 \Omega_r}} \quad (4.8)$$

Для  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\rho_0 = 2.9 \cdot 10^{-4}$ ;  $|\delta \omega_0| = \frac{\Omega}{2} \approx 0.108$ ;

$x_0 \approx 0,37$  эта оценка даёт:  $\omega_c^T \approx 0,2$ . Экспериментальные данные (3.4) приводят к значению:

$$\omega_c^3 \approx \frac{(\Delta x_e)_c}{\sqrt{\mu}} \approx 0.65 \quad (4.9)$$

Хотя различие в три с лишним раза не является очень большим для оценки по порядку величины (4.8), нам кажется все же, что здесь не учтены какие-то эффекты.

Если воспользоваться экспериментальным  $\omega_c$ , то выражение (4.6) приводит к следующим значениям коэффициентов эмпирической формулы (3.3):

$$A(x_0, \Omega) = \frac{4 x_0^3 \Omega^2}{L \cdot \omega_0} \approx 6 \cdot 10^{-3} \quad (4.10)$$

$$b(\delta \omega_0) = \frac{\pi x_0 |\delta \omega_0|}{\omega_0} \approx 0.40$$

Несмотря на то, что теоретическая формула правильно описывает порядок величины коэффициента диффузии Арнольда, необходимо отметить существенные различия между эмпирическими и теоретическими значениями коэффициентов  $A, b$ , которые трудно объяснить случайными ошибками. На рис.3 отложена теоретическая зависимость  $\Phi(\mu)$  (4.6) (прямая II). Видно, что в средней части теория удовле-

творительно согласуется с экспериментом, а по краям наблюдаются значительные расхождения. Понижение скорости диффузии при больших  $\mu$  объясняется, возможно, переходом системы с резонанса связи на внешний резонанс  $\omega_1 = \Omega$ , что наблюдалось в некоторых контрольных экспериментах. Что же касается малых  $\mu$ , то здесь нарушается условие применимости теории (4.2). Действительно, на рис.2 видно, что при больших  $l_0$  зависимость  $\Phi(l_0)$  отклоняется от квадратичной в сторону более быстрой диффузии. Значительные отклонения начинаются при  $l_0 \sim 10^{-3} \sim \mu x_0$  (ср. (4.2)). На рис.3 этому условию соответствует значение  $\mu \sim 10^{-3} (\frac{1}{\sqrt{\mu}} \approx 30)$ , т.е. как раз последние точки кривой.

Несмотря на указанные расхождения с теорией, факт наблюдения диффузии Арнольда представляется нам бесспорным. Вместе с тем желательны дальнейшие более аккуратные эксперименты в условиях применимости теории диффузии Арнольда.

Пользуемся случаем выразить нашу признательность В.И.Арнольду за ценные замечания.

## Л и т е р а т у р а

- I. В.И.Арнольд. ДАН, 156, (1964), 9.
2. В.И.Арнольд. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. Доклад на Международном съезде математиков. Москва, 1966.
3. Б.В.Чириков. Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
4. Н.Н.Нехорошев. Функциональный анализ и его применения, 5 (1971) 82; Ю.Мозер, Лекции о гамильтоновых системах, МИР, 1973, добавление, стр. 150.
5. G. Gibson, W. Jordan, E. Lauer, Phys. Fluids 6, (1963), 116, 133.
6. В. .Балбеков, Н. .Семашко. Nuclear Fusion ,7, (1967) 207.
7. А.Н.Дубинина, Л.С.Красицкая. Письма ЖЭТФ, 5 (1967), 230.
8. В.Г.Пономаренко, Л.Я.Трайнин, В.И.Юрченко, А.Н.Яснецкий, ЖЭТФ, 55, (1968) 3.
9. E.D. Courant, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-12 (1965) 550.
10. J. Rees, Proc. Intern. Symposium on Electron-Positron Storage Rings, Saclay (1966) (Presses Universitaires de France 1966), VI-7
- II. B.V. Chirikov, E. Keil, A.M. Sessler, Journal of Statistical Physics, 3, (1971) 307.
12. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков. УФН, 105 (1971) 3.
13. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев. Переходная зона нелинейного резонанса, ДАН (в печати).
14. И.И.Путилин, Малые планеты, М., 1953.
15. E. Keil. Incoherent Space Charge Phenomena in the ISR VIII th Intern. Conf. on High Energy Accelerators (Geneva, Switzerland) 1971.

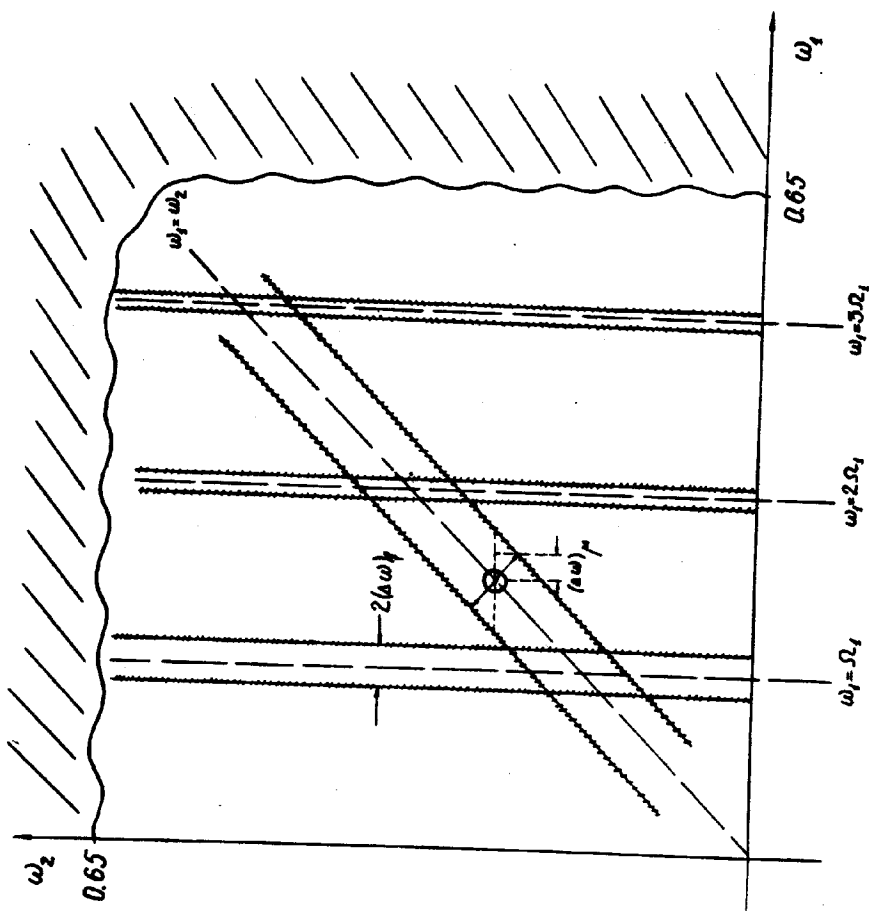


Рис. I. Схема резонансов:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  - частоты колебаний осцилляторов;  $\Omega_1$  - частота внешней силы, действующей на I-й осциллятор;  $(\Delta\omega)_r$ ,  $(\Delta\omega)_s$  - ширина резонанса связи и внешнего резонанса. Пунктиром показаны линии точного резонанса; заштрихованные линии - проекции стохастических слоев, ограничивающих резонансы на плоскость частот; заштрихованная область  $\omega > 0,65$  - область "тибели" системы вследствие "фоновой стохастичности". Кругом отмечены типичные начальные условия ( $x_0 \approx 0,37$ ;  $\omega_0 \approx 0,31$ ).

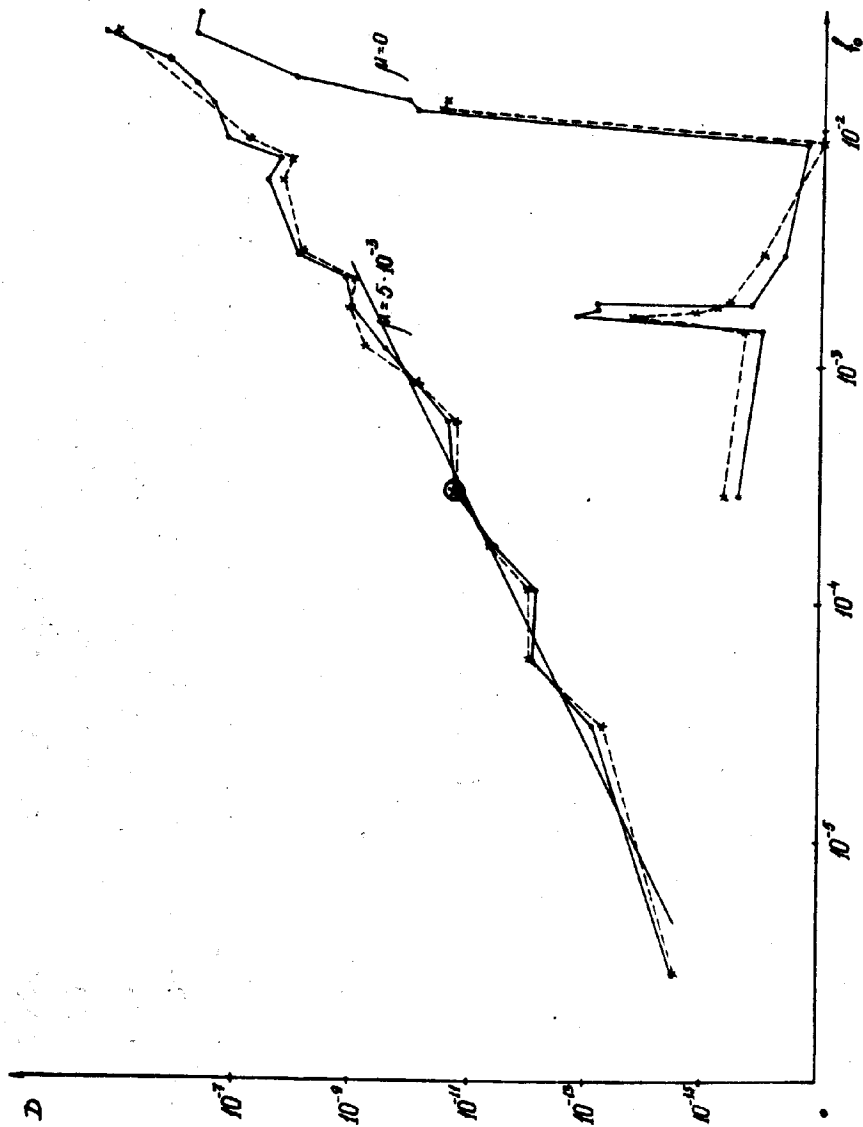


Рис. 2. Зависимость коэффициентов диффузии от амплитуды силы  $f_1$  ( $f_2=0$ );  $\mu$  - коэффициент связи (I.4). Сплошные ломаные - для  $\Phi_1$ ; пунктир - для  $\Phi_5$ . Прямая линия соответствует зависимости  $\Phi \sim f_0^k$ ;  $k \approx 2,06$ . Кругом отмечено значение  $f_0$ , для которого снята зависимость  $\Phi(\mu)$  (рис.3).

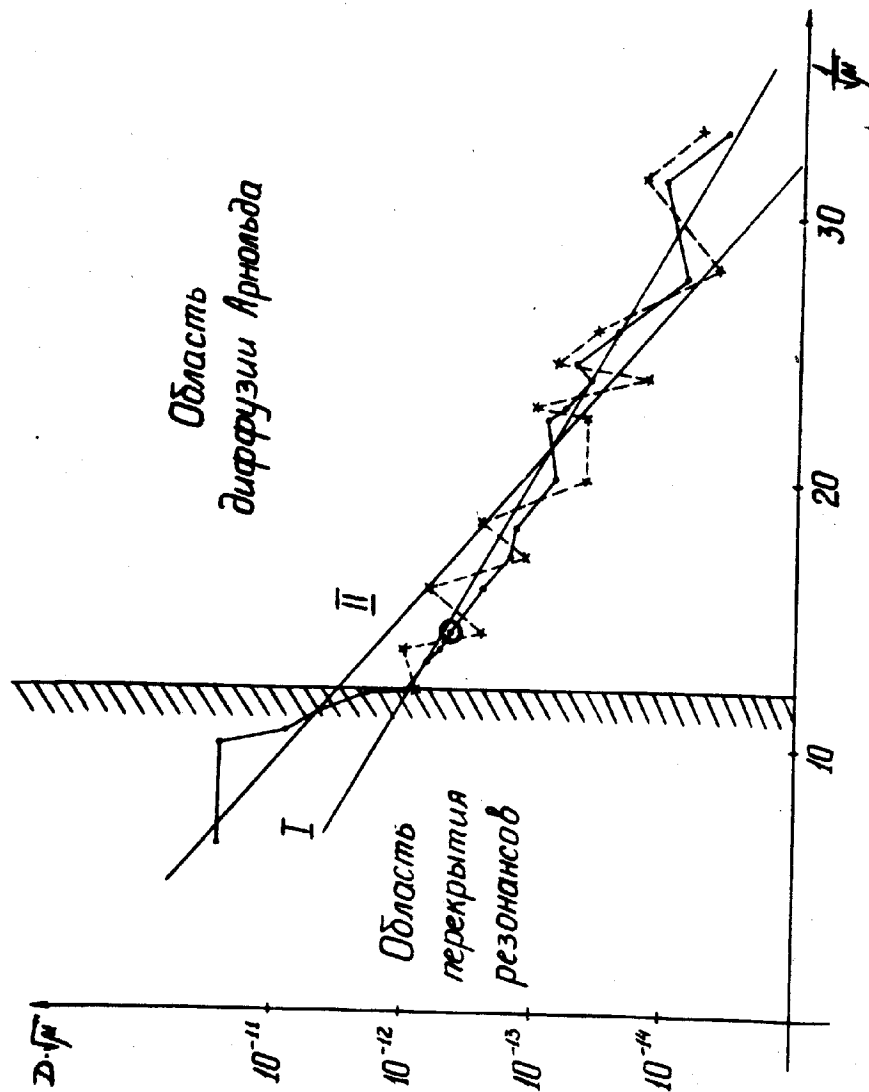


Рис. 3. Зависимость коэффициента диффузии от параметра связи  $\mu$ :  $f_0 = 2,9 \cdot 10^{-4}$  (вторая сила равна нулю). Сплошная линия — для  $\mathcal{D}_4$ ; пунктир — для  $\mathcal{D}_5$ . Прямая I соответствует эмпирической зависимости:  $\mathcal{D}(\mu) = 2,1 \cdot 10^{-11} \mu^{-1/2} \exp(-0,27 \mu^{-1/2})$ . Прямая II — теоретическая:  $\mathcal{D}(\mu) = 5,2 \cdot 10^{-10} \mu^{-1/2} \exp(-0,40 \mu^{-1/2})$ . Кругом отмечено значение  $\mu$ , для которого снята зависимость  $\mathcal{D}(f_0)$  (рис. 2). Заштрихованная вертикальная линия показывает ориентировочно границу между областями диффузии Арнольда и перекрытия резонансов.

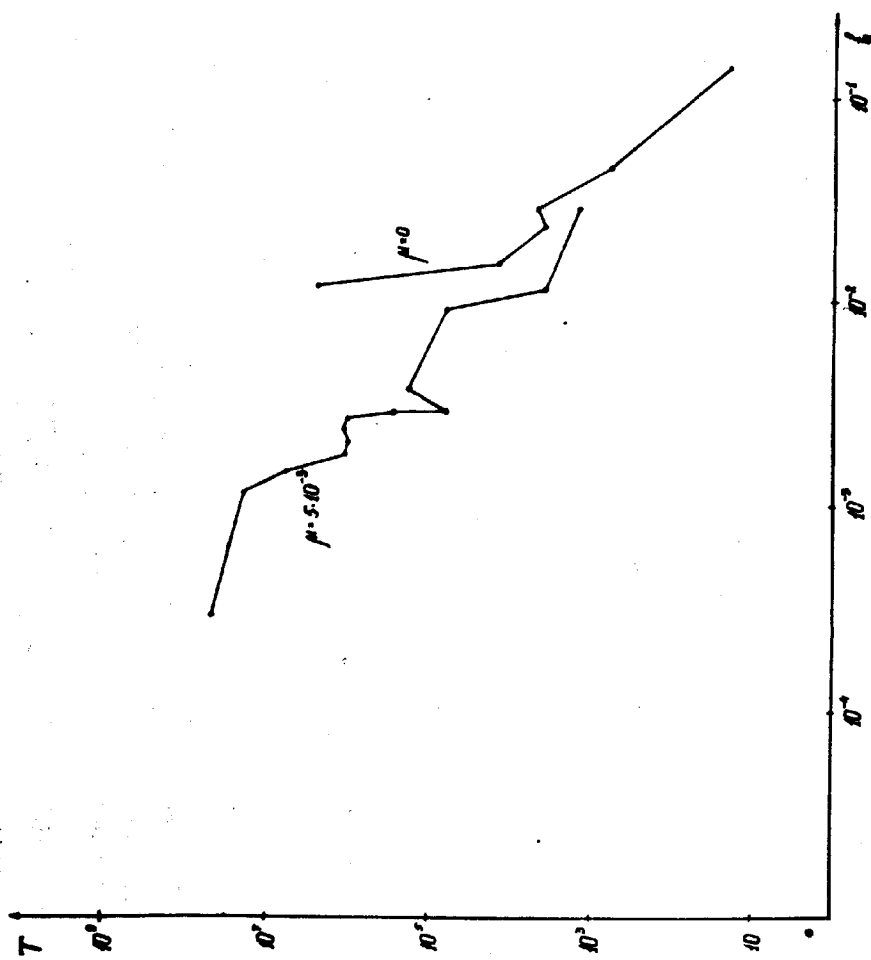


Рис. 4. Зависимость времени жизни  $T$  от амплитуды внешней силы  $\xi$  при  $\mu=0$  и  $\mu=5 \cdot 10^{-3}$ .

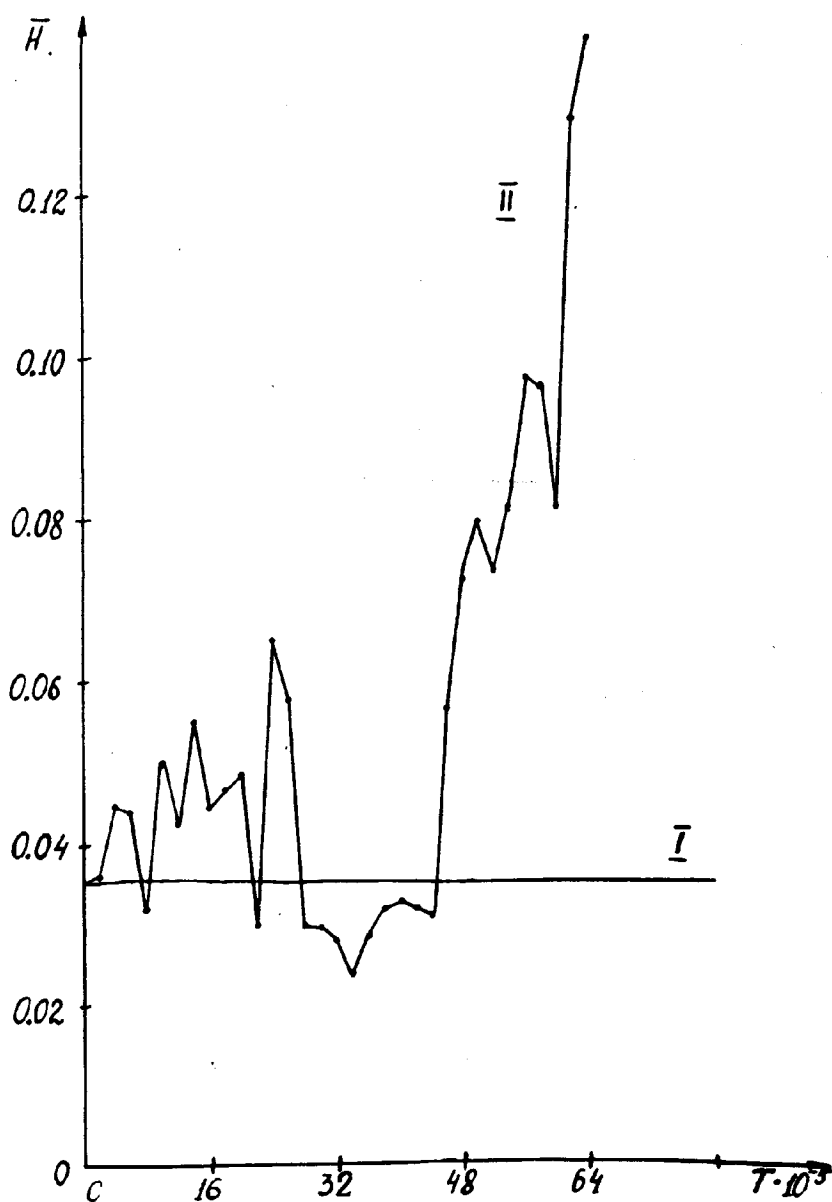


Рис.5. Пример зависимости энергии системы от времени в области диффузии Арнольда: I - внутри резонанса ( $x_1(0) = x_2(0)$ ) ; II - на сепаратрисе ( $x_1(0) = -x_2(0)$ )

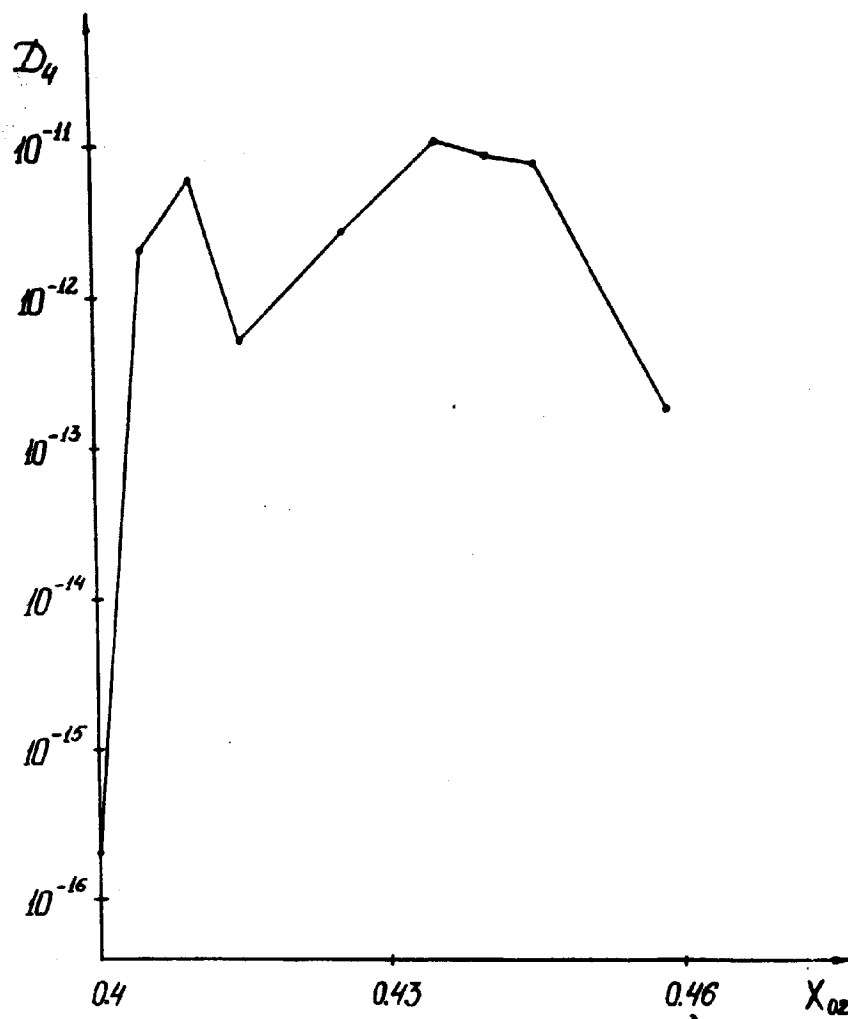


Рис.6. Зависимость коэффициента диффузии от начальных условий в окрестности сепаратрисы резонанса связи:  $P_1(0) = P_2(0) = 0$ ;  $X_1(0) = 0.312$ ;  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\gamma_0 = 2,9 \cdot 10^{-4}$ .