



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.В. Чириков

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ**

ПРЕПРИНТ 86-22



НОВОСИБИРСК

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ^{*})

Б.В.Чириков

Институт ядерной физики СО АН СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

Обсуждается теория стационарных адиабатических колебаний, основанная на введении специального, резонансного параметра адиабатичности, экспоненциально малого по обычному параметру медленности возмущения. Рассмотрен "простой" пример нелинейных колебаний с двумя степенями свободы, демонстрирующий, в частности, любопытный феномен хаотической адиабатичности. Приведены некоторые новые асимптотики инкремента неустойчивости и ширины резонансных зон для уравнений Матье и Хилла.

^{*}) Статья в сборнике "Асимптотические методы математической физики". Ред. Королук В.С. Киев: Наукова думка, 1986.

I. Введение

Адиабатические задачи, т.е. теоретический анализ действия адиабатического возмущения на колебательную систему, встречаются во многих приложениях классической и квантовой динамики. Примером может служить задача Будкера /1/ о колебании заряженной частицы в адиабатической магнитной ловушке, предложенной еще в начале 50-х г.г. для удержания горячей термоядерной плазмы. Помимо очевидного прикладного значения подобных задач исследование адиабатической инвариантности переменных действия представляет для физики интерес и в принципиальном отношении, поскольку речь здесь идет об одном из законов сохранения, хотя бы и приближенном. Не удивительно, что исследованию условий и точности сохранения адиабатических инвариантов посвящено огромное число работ (обширную, хотя и далеко не исчерпывающую библиографию можно найти, например, в /2/).

Адиабатические задачи можно грубо разбить на два класса. В первом из них адиабатическое возмущение эффективно действует в течение конечного интервала времени, т.е. является импульсным, однократным. Например, некоторый параметр системы монотонно изменяется от одного асимптотического значения ($t \rightarrow -\infty$) до другого ($t \rightarrow +\infty$). Для таких задач, как это хорошо известно, основным условием адиабатической инвариантности является медленность возмущения по сравнению с характерными частотами системы. В классе аналитических функций нарушение адиабатичности колебаний при этом экспоненциально мало по параметру медленности и потому, как правило, не существенно. Здесь интересны особые случаи нарушения условия медленности возмущения, например, при прохождении частоты осциллятора через нуль, в частности, при пересечении сепаратрисы нелинейного осциллятора /2/ или при медленном прохождении резонанса /3/ .

Ниже мы рассмотрим другой, более интересный и более сложный класс адиабатических задач, в которых возмущение является стационарным, многократным (периодическим или почти - периодическим). Примером может служить движение частицы в упомянутой выше адиабатической магнитной ловушке. Это - консервативная гамильтонова система с несколькими степенями свободы, отношение частот колебаний в которой очень мало (или велико). В § 2 ниже подобный пример используется для иллюстрации некоторых

современных методов теоретического анализа стационарных адиабатических процессов.

В рассматриваемом случае медленность возмущения (его низкая частота) еще не гарантирует сохранения адиабатических инвариантов на достаточно большом интервале времени, поскольку малые изменения переменных действия на каждом периоде возмущения могут накапливаться. Как и во многих других задачах теории колебаний на первый план здесь выступают резонансы (линейные или нелинейные) между возмущением и колебаниями системы или между различными степенями свободы под действием возмущения.

Неясная идея о влиянии резонансов на адиабатическую инвариантность возникла довольно давно. Так, например, Борн писал (цитируется по работе /4/): "Мы рассматриваем как адиабатическое такое изменение системы, которое, во-первых, не находится ни в каком соотношении с периодом невозмущенной системы..." . Зоммерфельд определял адиабатическое возмущение как "бессистемный, неупорядоченный по отношению к фазам движения вид воздействия" /4/. Но это была лишь интуиция. Впервые вопрос о роли резонансов в проблеме адиабатической инвариантности был четко поставлен и решен Андроновым, Леонтовичем и Мандельштамом /4/ в случае линейных колебаний. Для этого оказалось достаточно внимательно посмотреть с точки зрения физики на хорошо известное уравнение Матье и его решения. Действительно, зоны неустойчивости (параметрический резонанс) существуют при сколь угодно малых значениях параметра медленности

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{2\omega_0} \quad (I.I)$$

в окрестности $\varepsilon \approx 1/n$, где $n \neq 0$ - любое целое; ω_0 - невозмущенная частота линейного осциллятора, а Ω - частота гармонического параметрического возмущения. Таким образом, в данном случае необходимым условием адиабатической инвариантности является нерезонансность возмущения. Его медленность только помогает в том смысле, что ширина резонанса $\Delta\Omega$, как и инкремент неустойчивости в нем, экспоненциально падают с ε (см., например, /5,6/ и § 3 ниже):

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} \sim \varepsilon g^{1/\varepsilon} \quad (I.2)$$

где $g \ll 1$ безразмерная амплитуда возмущения.

Для нелинейных колебаний задача становится значительно более сложной. Прежде всего резонансы зависят теперь не только от параметров системы, но и от начальных условий движения, определяющих частоты колебаний. Далее, отдельный нелинейный резонанс вообще не вызывает неустойчивости движения и сколь угодно существенного изменения адиабатического инварианта из-за стабилизации резонансного возмущения нелинейностью (см., например, /7/). Однако взаимодействие нескольких (хотя бы двух) нелинейных резонансов уже приводит, вообще говоря, к неустойчивости и притом весьма неожиданной – к так называемому динамическому хаосу (стохастичности) /7/ .

Специфическая трудность стационарных адиабатических задач в теории нелинейных колебаний состоит в том, что здесь нельзя прямо использовать мощные асимптотические методы теории возмущений и, в частности, простой и эффективный метод усреднения /8/. Это видно уже из простой оценки (I.2). Хотя зависимость от амплитуды возмущения g является степенной и может быть получена с помощью стандартных асимптотических рядов /5,6/, разложение по степеням малого параметра медленности ε невозможно. Между тем при большой амплитуде возмущения, что типично для адиабатических процессов, ε остается единственным малым параметром задачи.

Как обойти эту трудность? Идея одного из подходов, которому и посвящена эта статья, состоит в том, чтобы ввести новый, "хороший" параметр адиабатичности ξ , который бы с самого начала включал в себя неаналитическую экспоненту типа (I.2), вместо исходного, "плохого" параметра ε . В неявном виде подобный метод использовался фактически еще в работе /9/ и позднее был развит в /10/ (см. также /11/, раздел 4.4).

2. Адиабатические колебания

Рассмотрим нелинейный осциллятор с двумя степенями свободы, заданный гамильтонианом:

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2} [p_x^2 + p_y^2 + (1 + \varepsilon^2 x^2)^2 y^2] \quad (2.1)$$

где ε — малый параметр адиабатичности аналогичный (1.1), т.е. параметр медленности. Система (2.1) качественно моделирует движение заряженной частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке. Эта сторона вопроса, также как и другие более реалистические модели динамики частиц в магнитном поле, подробно рассмотрены в обзоре [12]. Мы же займемся здесь исследованием собственно модели (2.1) в качестве относительно "простого" примера стационарных адиабатических колебаний.

При $\varepsilon = 0$ движение финитно только по y , тогда как $p_x = \text{const}$. Покажем прежде всего, что в адиабатическом приближении ($\varepsilon \rightarrow 0$) движение является финитным также и по x , т.е. представляет собой стационарные колебания. Для этого введем вспомогательный гамильтониан

$$H_y^0(p_y, y; x) = \frac{p_y^2}{2} + \frac{\omega_y^2(\varepsilon x) y^2}{2} = \omega_y(\varepsilon x) I_y \quad (2.2)$$

в котором мы рассматриваем x как параметр. Тогда вспомогательная система (2.2) есть гармонический осциллятор с переменной действия I_y и частотой

$$\omega_y(\varepsilon x) = 1 + (\varepsilon x)^2$$

В адиабатическом приближении $I_y = \text{const}$, и полный гамильтониан (2.1) принимает вид

$$H \rightarrow H_x^0(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2} + \omega_y(\varepsilon x) I_y \quad (2.3)$$

Он описывает только движение по x , которое имеет характер ограниченных колебаний при любом $\varepsilon > 0$. Вводя действие I_x , запишем (2.3) в виде

$$H^0(I_x, I_y) = H_x^0(p_x, x, I_y) = I_y + \varepsilon I_x \sqrt{2 I_y} \quad (2.4)$$

Основная проблема состоит в том, будет ли движение по X финитным на самом деле, а не только в адиабатическом приближении. Это и есть задача Будкера /1/. Заметим, что сохранение энергии здесь не помогает, поскольку эквипотенциали исходной системы ($y(1 + \varepsilon^2 x^2) = const$) не замкнуты.

Решение этой задачи разобьем на два этапа. Сначала найдем изменение действия ΔI_y на полупериоде медленных колебаний по X (оба полупериода для системы (2.1) симметричны). Величина

$$\xi \sim \frac{\Delta I_y}{I_y} \quad (2.5)$$

и будет новым, "хорошим" параметром адиабатичности. Поэтому эту часть задачи нужно решить каким-то прямым (неасимптотическим) методом. Зато на втором этапе, исследуя динамику системы (2.1) с параметром ξ на произвольном интервале времени, мы уже можем использовать, например, просто метод усреднения или любой другой вариант асимптотических разложений.

2.1. Невозмущенная система. Для выполнения этой программы нужно прежде всего правильно выбрать невозмущенную систему. Если в качестве последней взять, например, частный (и вполне реальный) случай системы (2.1) при $\varepsilon = 0$, то вычисление ξ окажется просто невозможным, так как в этом случае никаких колебаний по X нет. Такая невозмущенная система является вырожденной, а ее (инфинитное) движение качественно отличается от возмущенного (финитного).

Для того, чтобы обойти это затруднение, выберем в качестве невозмущенной вспомогательную систему (2.4), движение которой, строго говоря, никогда не осуществляется в исходной системе (2.1), но может быть близко к нему, а, главное, оно качественно такое же (финитное).

Адиабатическое приближение (2.4) для рассматриваемой классической задачи соответствует хорошо известному методу Борна-Оппенгеймера в квантовой динамике молекул /13/. Недавно этот метод был вновь использован и для некоторых классических задач /14/.

Интересно отметить, что колебания выбранной невозмущенной системы (2.4) являются почти гармоническими (с точностью

до медленного изменения частоты колебаний по y из-за колебаний по x). Тем не менее система (2.4) существенно нелинейна, поскольку ее частоты

$$\omega_x = \frac{\partial H^0}{\partial I_x} = \varepsilon \sqrt{2I_y}; \quad \langle \omega_y \rangle = \frac{\partial H^0}{\partial I_y} = 1 + \frac{\varepsilon I_x}{\sqrt{2I_y}} \quad (2.6)$$

зависят от переменных действия. Например, $\frac{1}{\omega_x} \cdot \frac{\partial \omega_x}{\partial I_y} = \frac{1}{2I_y}$. Более того, детерминант

$$\left| \frac{\partial^2 H^0}{\partial I_i \partial I_k} \right| = -\frac{\varepsilon^2}{2I_y} \neq 0$$

т.е. невозмущенная система невырождена. Наконец, отметим, что отношение частот на энергетической поверхности $H^0 = \text{const}$

$$\varepsilon \frac{\langle \omega_y \rangle}{\omega_x} = \frac{H^0}{(2I_y)^{3/2}} + \frac{1}{2(2I_y)^{1/2}} \quad (2.7)$$

также не остается постоянным.

Частота $\langle \omega_y \rangle$ равна временному среднему "мгновенной" частоты $\omega_y(\varepsilon x(t))$ /12/. Это можно показать, используя общее соотношение^{*})

$$\frac{\partial I(\mathcal{H}, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\omega} \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(p, x, \mu)}{\partial \mu} \right\rangle \quad (2.8)$$

где μ — некоторый параметр, а угловые скобки обозначают усреднение при $\mu = \text{const}$. Полагая здесь $\mathcal{H} = H_x^0$; $\mu = I_y$ и используя закон сохранения $H^0 = \text{const}$, получим:

$$\langle \omega_y \rangle = -\omega_x \frac{\partial I_x(H^0, I_y)}{\partial I_y} = \left\langle \frac{\partial H_x^0(p_x, x, I_y)}{\partial I_y} \right\rangle$$

^{*}) Это соотношение получается из определения $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = \frac{1}{2\pi} \oint p \dot{x} dt$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial \mu} \right)_x = -\frac{1}{\dot{x}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu}$.

2.2. Адиабатическое возмущение. Далее можно пойти двумя путями. Первый /II, I2/ - найти точное уравнение для $\dot{I}_y$. В общем случае это может быть сделано следующим образом /I5/. Считая в (2.2) $x(t)$ заданной функцией времени и используя общие соотношения $d\mathcal{H}/dt = \partial\mathcal{H}/\partial t$ и (2.8), найдем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_y(H_y^0, x(t)) &= \frac{\partial I_y}{\partial H_y^0} \dot{H}_y^0 + \frac{\partial I_y}{\partial x} \dot{x} = \\ &= \frac{\dot{x}}{\omega_y} \left(\frac{\partial H_y^0(p_y, y; x)}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial H_y^0(p_y, y; x)}{\partial x} \right\rangle \right) = -I_y \frac{\dot{\omega}_y}{\omega_y} \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Последнее выражение относится к рассматриваемой системе (2.1), а фаза θ определяется из условий:

$$y \equiv \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}} \sin \theta; \quad p_y \equiv \sqrt{2I_y \omega_y} \cos \theta \quad (2.10)$$

Второй путь - каноническое преобразование к переменным действие-фаза: $p_x, p_y, x, y \rightarrow I_x, I_y, \theta_x, \theta_y$. Выбрав, например, производящую функцию в виде /I4/:

$$\begin{aligned} F(I_x, I_y, x, y) &= \\ &= \int dy \sqrt{2 \left[H_y^0 - \frac{\omega_y^2(\epsilon x) y^2}{2} \right]} + \int dx \sqrt{2 \left[H_x^0 - \omega_y(\epsilon x) I_y \right]} \end{aligned} \quad (2.11)$$

и проделав необходимые вычисления, найдем:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2I_x}{\epsilon \sqrt{2I_y}}} \sin \theta_x \\ \omega_y &= 1 + \frac{2\epsilon I_x}{\sqrt{2I_y}} \sin^2 \theta_x = \langle \omega_y \rangle - \frac{\epsilon I_x}{\sqrt{2I_y}} \cos(2\theta_x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$y = \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}} \sin \left[\theta_y - \frac{I_x}{4I_y} \sin(2\theta_x) \right] \equiv \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}} \sin \theta$$

$$P_y = P_y^0 \equiv \sqrt{2 \left[H_y^0 - \frac{\omega_y^2(\epsilon x) y^2}{2} \right]}$$

$$P_x = P_x^0 + \Delta P_x$$

где

$$P_x^0 \equiv \sqrt{2 [H^0 - \omega_y(\epsilon x) I_y]} \quad (2.13)$$

и

$$\Delta P_x = \frac{I_y \omega_y'}{2 \omega_y} \sin(2\theta); \quad \omega_y' \equiv \frac{d\omega_y}{dx} \quad (2.14)$$

Последняя величина и описывает адиабатическое возмущение в новом гамильтониане

$$H(I_x, I_y, \theta_x, \theta_y) = H^0(I_x, I_y) + P_x^0 \Delta P_x + \frac{(\Delta P_x)^2}{2} \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\dot{I}_y = -\frac{\partial H}{\partial \theta_y} = -P_x \frac{\partial(\Delta P_x)}{\partial \theta} = -I_y \frac{\dot{x} \omega_y'}{\omega_y} \cos(2\theta) \quad (2.16)$$

что совпадает с выражением (2.9).

2.3. Уточненный адиабатический инвариант I_y^* . Уравнение (2.16) показывает, что невозмущенное действие I_y (также как и I_x) сохраняется только с точностью $\sim \epsilon$. Действительно, подставляя в правую часть (2.16) невозмущенное решение

$$\theta_x = \omega_x t + \theta_{x0}; \quad \theta_y = \langle \omega_y \rangle t + \theta_{y0} \quad (2.17)$$

$$\theta = \theta_y - \frac{I_x}{4I_y} \sin(2\theta_x) = \int dt \omega_y(\theta_x)$$

и интегрируя по частям, получим поправку

$$\delta I_y = -I_y \frac{\dot{\omega}_y}{2\omega_y^2} \sin(2\theta) + O(\epsilon^2) \quad (2.18)$$

Это асимптотическое разложение можно продолжить. В любом порядке по ε поправка будет периодической функцией фаз θ_x, θ_y и, следовательно, не может накапливаться. Иначе можно сказать, что изменение уточненного инварианта $I_y^* = I_y - \delta I_y$ убывает при $\varepsilon \rightarrow 0$ быстрее любой степени ε , т.е. экспоненциально. В достаточно общем случае это было выяснено в свое время Крускалом /16/.

Простой способ исключения всех этих малых и несущественных поправок состоит в том, чтобы перейти от дифференциальных уравнений движения к отображению на полупериоде колебаний по X /10/. Если выбрать при этом начальные условия движения $(I_x, I_y$ или $H^0, I_y)$ так, чтобы отношение частот (2.7) равнялось целому кратному π , т.е. чтобы изменение фазы θ_y , а, следовательно, и фазы $\varphi = 2\theta$ адиабатического возмущения

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\langle \omega_y \rangle}{\omega_x} = \frac{\pi}{\varepsilon} \left[\frac{2H^0}{(2I_y)^{3/2}} + \frac{1}{(2I_y)^{1/2}} \right] = 0 \mod 2\pi \quad (2.19)$$

то поправка δI_y выпадает, и вместо очень сложной величины I_y^* можно использовать просто невозмущенное действие I_y . Соотношение (2.19) определяет, очевидно, условие точного резонанса между двумя степенями свободы, когда квазипериодические колебания становятся периодическими.

2.4. Резонансный параметр адиабатичности. Проинтегрируем теперь уравнение (2.9), по-прежнему, с невозмущенными $\omega_y(t)$ и $\theta(t)$, но не по частям, а точно. На полупериоде колебаний по X это вполне возможно, а для рассматриваемой задачи и относительно элементарно. Соответствующая техника интегрирования подробно описана в /12/. Здесь мы упомянем только, что контур интегрирования в плоскости комплексной фазы θ замыкается по двум вертикальным прямым $\theta_x = \pm i\pi/2$. В точном резонансе (2.19) их вклады взаимно уничтожаются, и интеграл определяется особенностью $\omega_y = 0$ в точке

$$x_p = \frac{i}{\varepsilon}; \quad \theta_p = \theta_0 + \int_0^{x_p} \frac{\omega_y dx}{\dot{x}} \approx \theta_0 + \frac{2i}{3\varepsilon\sqrt{2H^0}} \quad (2.20)$$

где $\theta_0 = \text{Re } \theta_p$ - значение действительной фазы $\theta(t)$ при $X = 0$. Для упрощения формул мы приняли в последнем выражении $\dot{X} \approx \sqrt{2H^0}$, или $I_y \omega_y \leq I_y \ll H^0$ (общий случай рассмотрен в [12]). Производя необходимые вычисления, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I_y}{I_y} &\approx \Delta \ln I_y = - \int dt \frac{\dot{\omega}_y}{\omega_y} \cos(2\theta) \approx - \text{Re} \int d\theta \frac{\dot{\omega}_y'}{\omega_y^2} e^{2i\theta} = \\ &= -\pi \text{Re} \left(i e^{2i\theta_p} \right) = \pi e^{-\frac{4}{3\varepsilon \sqrt{2H^0}}} \sin(2\theta_0) \end{aligned} \quad (2.21)$$

где мы использовали соотношение

$$\theta - \theta_p = \int_{x_p}^{x-x_p} \left(\frac{\omega_y'}{\dot{X}} \right)_p (x-x_p) dx = \left(\frac{\omega_y'}{2\dot{X}} \right)_p (x-x_p)^2 \rightarrow 0$$

В качестве нового малого параметра возьмем амплитуду величины $\Delta \ln I_y$, т.е.

$$\xi = \pi e^{-\frac{4}{3\varepsilon \sqrt{2H^0}}} \quad (2.22)$$

и будем называть ее резонансным параметром адиабатичности.

2.5. Отображение. Новый параметр ξ (2.22) улавливает основной неасимптотический эффект адиабатического возмущения и поэтому теперь по нему можно производить обычное асимптотическое разложение и использовать эффективный метод усреднения. В частности, можно просто отбросить нерезонансные малые поправки δI_y (п.2.3) и вычислять изменение фазы θ_0 между двумя последовательными прохождениями положения $X = 0$, во-первых, по невозмущенному отношению частот (2.19) (см. также § 3 ниже), а, во-вторых, для любых значений I_y , а не только в точном резонансе. Вместе с соотношением (2.21) это дает возможность описывать долговременную динамику рассматриваемой системы с помощью канонического двумерного отображения $\Lambda, \vartheta \rightarrow \bar{\Lambda}, \bar{\vartheta}$, где $\Lambda = \ln I_y$; $\vartheta = 2\theta_0$ и

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + \xi \cdot \sin \vartheta; \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \Delta \vartheta(H^0, \bar{\Lambda}) \quad (2.23)$$

$$\Delta \vartheta(H^0, \Lambda) = \frac{\pi}{\varepsilon \sqrt{2}} \left(H^0 e^{-\frac{3\Lambda}{2}} + e^{-\frac{\Lambda}{2}} \right)$$

Резонансы этой системы определяются условием $\Lambda = \Lambda_r$, где $\Delta \vartheta(\Lambda_r) = 2\pi r$ с любым целым r . Поскольку резонансов много, их взаимодействие приводит к образованию хаотической компоненты движения.

При достаточно малом ξ это отображение можно еще упростить, линеаризуя функцию $\Delta \vartheta(\Lambda)$ вблизи резонансного значения $\Lambda = \Lambda_r$, такого, что $\Delta \vartheta(\Lambda_r) = 0 \pmod{2\pi}$ (2.19). Вводя новое действие

$$P = \left(\frac{d \Delta \vartheta}{d \Lambda} \right)_{\Lambda = \Lambda_r} \equiv (\Delta \vartheta)'_r (\Lambda - \Lambda_r) \quad (2.24)$$

получим так называемое стандартное отображение

$$\bar{P} = P + K \cdot \sin \vartheta; \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \bar{P} \quad (2.25)$$

с единственным параметром

$$K = \xi \left| (\Delta \vartheta)'_r \right| \quad (2.26)$$

который и определяет условия адиабатичности исходной модели (2.1). Стандартное отображение описывает динамику системы (2.23) локально по Λ , а, значит, и динамику исходной модели (2.1) локально по I , на энергетической поверхности. Резонансы соответствуют теперь $P = P_r = 2\pi r$.

2.6. Хаотическая адиабатичность. Исследованию системы (2.25) посвящено большое число работ (см., например, /7,10-12/). Динамика этой нехитрой на первый взгляд модели оказывается очень сложной, богатой и своеобразной. Прежде всего существует критическое значение параметра

$$K_c = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3H^0 + e^{\Lambda_c}}{\varepsilon} \cdot \exp \left[- \left(\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2}H^0} + \frac{3}{2} \Lambda_c \right) \right] \approx 1 \quad (2.27)$$

такое, что при $K < K_c$ колебания P строго ограничены на любом интервале времени ($|\Delta P| \leq 2\sqrt{K}$). Изменение I_y при этом также ограничено и мало (см. (2.18, 24)):

$$\left| \frac{\Delta I_y^*}{I_y^*} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{K}}; \quad \left| \frac{\Delta I_y}{I_y} \right| \leq \varepsilon \frac{3\sqrt{6}H^0}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4 \ln\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)} \quad (2.28)$$

Мы имеем, следовательно, стационарные адиабатические колебания конечной амплитуды. При этом изменения невозмущенного действия $|\Delta I_y| \gg |\Delta I_y^*|$, но также не накапливаются.

При заданных начальных условиях адиабатичность движения зависит от параметра медленности ε , который должен быть достаточно малым (2.27). При заданном ε адиабатичность определяется начальными условиями движения H^0, Λ , причем Λ должно быть достаточно большим: $\Lambda > \Lambda_c(H^0, \varepsilon)$. В принятом выше упрощающем предположении $I_y = \exp(\Lambda) \ll H^0$ критическое значение

$$\Lambda_c \approx -\frac{8}{9\varepsilon\sqrt{2H^0}} + \frac{2}{3} \ln\left(\pi^2 \frac{H^0}{\varepsilon}\right) \quad (2.29)$$

Вместо Λ_c можно ввести критическое значение α_c максимального (по быстрым y - колебаниям) угла между осью X и вектором скорости в окрестности $X = 0$:

$$\sin^2 \alpha_c = \frac{e^{\Lambda_c}}{H^0} \approx \left(\frac{\pi^4}{\varepsilon^2 H^0}\right)^{1/3} \cdot \exp\left(-\frac{8}{9\varepsilon\sqrt{2H^0}}\right) \quad (2.30)$$

Область адиабатичности ($K < K_c$) имеет весьма сложную и своеобразную структуру. Хотя движение здесь и является глобально устойчивым в смысле неравенств (2.28), оно может быть (в зависимости от начальных условий) и хаотическим. При $K \rightarrow K_c$ мера хаотических траекторий в фазовом пространстве системы достигает 50%. Такой необычный режим движения можно назвать хаотической адиабатичностью. В устойчивых областях адиабатический инвариант I_y^* становится точным. Для достаточно малого возмущения это строго доказано Арнольдом /17/, который назвал такой случай вечной адиабатической инвариантностью.

Замечательный результат Арнольда о том, что хаотическая компонента строго ограничена (2.28) на энергетической поверхности и не ведет к глобальной неустойчивости, связан с топологией фазового пространства и определяется числом степеней свободы системы ($N = 2$ в нашем случае). При $N > 2$ это уже не так, и возникает слабая (при $\varepsilon \rightarrow 0$), но универсальная неустойчивость — диффузия Арнольда /18/, которую также можно успешно исследовать асимптотическими методами /11/.

Возвращаясь к нашей задаче, отметим, что в области $K > K_c$ движение для большинства начальных условий является хаотическим как результат сильного взаимодействия резонансов. Хотя оно и сохраняет колебательный характер, амплитуда колебаний по X неограниченно возрастает, а $I_y \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow -\infty$). Движение такого рода называется в небесной механике осциллирующим. В данном случае этот процесс является стохастическим и описывается некоторым диффузионным уравнением для фазовой плотности $\varrho(I_y, t)$. Поскольку для нашей системы инвариантная эргодическая мера на энергетической поверхности /12/

$$\frac{d\mu(I_y, H^0)}{dI_y} = \frac{1}{\omega_x(I_y)} = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2I_y}} \quad (2.31)$$

компактна (нормируема), то в процессе статистической релаксации фазовая плотность $\varrho(I_y, t) \rightarrow \varrho_s(I_y) \propto d\mu/dI_y$ стремится к равновесной. Последняя является сингулярной при $I_y = 0$, но интегрируемой.

Как показывает рассмотренный "простой" пример, условия адиабатичности нелинейных колебаний сложным образом зависят как от параметров системы, так и от начальных условий движения, а нарушение адиабатичности определяется взаимодействием нелинейных резонансов.

3. Линейный параметрический резонанс

Описанную выше технику можно применять и для асимптотических оценок инкремента неустойчивости и ширины линейного параметрического резонанса. Начнем с простого уравнения Матье

$$\ddot{y} + [a - 2q \cdot \cos(2t)]y = 0 \quad (3.1)$$

Здесь переменная частота $\omega(t)$ задана как явная функция времени

$$\omega^2(t) = a [1 - g \cdot \cos(2t)] \quad (3.2)$$

и можно использовать непосредственно уравнение (2.9) с заменой $\omega_y(x(t)) \rightarrow \omega(t)$ и $I_y \rightarrow I$. При произвольных $0 < g \leq 1$ условие параметрического резонанса имеет вид

$$\langle \omega \rangle = n \equiv \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.3)$$

Здесь целое n – номер гармоники частотной модуляции $\omega(t)$ и номер зоны параметрической неустойчивости; ε – адиабатический параметр медленности, а среднее значение частоты осциллятора

$$\frac{\langle \omega \rangle}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{1 - g \cdot \cos \varphi} d\varphi = \frac{2\sqrt{1+g}}{\pi} E\left(\sqrt{\frac{2g}{1+g}}\right) \quad (3.4)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода. Отметим, что в интервале $0 \leq g \leq 1$ отношение (3.4) изменяется весьма незначительно (от 1 до $2\sqrt{2}/\pi \approx 0.9$).

Интегрируя, как и в п.2.4 выше, уравнение (2.9) с заменой $d\theta/dt \approx \omega(t)$ (см. (3.8) ниже), найдем изменение действия за период модуляции частоты $\omega(t)$:

$$\Delta \ln I \approx \xi \cdot \sin(2\theta_0) \quad (3.5)$$

Резонансный параметр адиабатичности равен

$$\xi(g, n) = \frac{2\pi}{3} \cdot \exp\left[\pi n \frac{E(k') - K(k')}{E(k)}\right] \quad (3.6)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I-го рода; $k^2 = 1 - (k')^2 = 2g/(1+g)$. Отсюда максимальный инкремент в зоне n есть

$$\Gamma_n = \frac{\xi(g, n)}{n} \quad (3.7)$$

При выводе (3.6) использовано аналогичное (2.20) выражение для фазы колебаний

$$\begin{aligned} \theta_p - \theta_0 &\approx \sqrt{a} \int_0^{t_p} \sqrt{1-g \cdot \cos(2t)} dt = \\ &= -\frac{i\sqrt{a}}{2} \int_0^{z_p} \sqrt{1-g \cdot \operatorname{ch} z} dz = \\ &= -i\sqrt{a(1+g)} \left[E\left(\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right) - K\left(\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right) \right] \end{aligned}$$

в особенности $\omega(t_p) = 0$, или

$$\cos(2it_p) = \operatorname{ch} z_p = \frac{1}{g} > 1$$

а также соотношения вблизи особенности:

$$\theta - \theta_p = \int_{t_p}^{t-t_p} \sqrt{(t-t_p) \frac{d}{dt} \omega^2(t_p)} dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{d}{dt} \omega^2(t_p)} (t-t_p)^{3/2} \rightarrow 0$$

$$\omega^3(t) = (t-t_p)^{3/2} \left[\frac{d}{dt} \omega^2(t_p) \right]^{3/2} = \frac{3}{2} (\theta - \theta_p) \frac{d}{dt} \omega^2(t_p) \rightarrow 0$$

Для оценки ширины резонанса запишем стандартные уравнения первого приближения асимптотической теории вблизи резонанса /8/ в канонических переменных действие-фаза I, ψ :

$$\dot{I} = I \Gamma_n \sin \psi_n; \quad \dot{\psi}_n = 2\langle \omega \rangle - n + \Gamma_n \cos \psi_n \quad (3.8)$$

Эти уравнения получаются из "резонансного гамильтониана"

$$H_n = 2I (\langle \omega \rangle - n) + I \Gamma_n \cos \psi_n \quad (3.9)$$

в котором отброшены нерезонансные гармоники возмущения (асимптотический метод усреднения). В зоне неустойчивости решение уравнений (3.8) имеет вид:

$$I = I_0 e^{\gamma_n t}; \quad \gamma_n = \Gamma_n \sin \psi_n^0 \quad (3.10)$$

$$\Delta_n = \langle \omega \rangle - n = \frac{\Gamma_n}{2} \cos \psi_n^0$$

Исключая постоянную фазу ψ_n^0 , приходим к обычному соотношению между инкрементом γ_n и расстройкой Δ_n :

$$\gamma_n^2 + (2\Delta_n)^2 = \Gamma_n^2 = \left(\frac{\xi}{\pi} \right)^2 \quad (3.11)$$

Отметим, что это соотношение определяется линейной поправкой к частоте в (3.8), которая отброшена в задаче о нелинейных адиабатических колебаниях (см. (2.23)). В последнем случае это допустимо, поскольку малым параметром асимптотического разложения служит величина $\sqrt{\Gamma_n} \sim \sqrt{\xi}$, а не ξ как для линейного осциллятора. Действительно, если бы в (3.8) расстройка $\Delta_n(I)$ зависела от I (нелинейные колебания), то $\Delta_n \sim (d\Delta_n/dI)\Delta I \sim (d\Delta_n/dI)I\Gamma_n/\Delta_n$ и $\Delta_n \sim \sqrt{\Gamma_n} \gg \Gamma_n$

Из (3.11) полная ширина параметрического резонанса

$$\Delta a = \frac{2n}{\pi} \left(\frac{a}{n^2} \right) \xi \quad (3.12)$$

где (a/n^2) дается выражением (3.4) с $\langle \omega \rangle = n$ (резонанс). При $g \rightarrow 1$ отношение $a/n^2 \approx \pi^2/8$, а

$$\xi \approx \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{\pi^2}{8}(1-g)n} \ll 1 \quad (3.13)$$

Последнее неравенство необходимо для справедливости асимптотического разложения, т.е. необходимо, чтобы $1-g \gtrsim \frac{1}{n} = \varepsilon$.

В обратном предельном случае $g \rightarrow 0$

$$\xi \approx \frac{2\pi}{3} \left(\frac{e^2 g}{8} \right)^n \left(1 + \frac{ng^2}{16} \right) \quad (3.14)$$

где $e = 2.71 \dots$ и

$$\frac{a}{n^2} \approx 1 + \frac{g^2}{8} \quad (3.15)$$

Используя это соотношение и переходя в (3.14) к $q = ng/2$, получим из (3.12)

$$\Delta a \approx \frac{4n}{3} \left(\frac{e^2 q}{4n^2} \right)^n \left(1 - \frac{q^2}{4n^3} \right) \quad (3.16)$$

Это выражение отличается при $n \gg 1$ от результата в работе /6/ множителем $\pi/3$. Причина этого небольшого расхождения неясна.

Как видно из (3.14, 16) формальным параметром разложения при $g \rightarrow 0$ является величина $ng^2 \ll 1$ или $q^2/n^3 \ll 1$ /6/. Интересно, однако, отметить, что в простейшем виде оценка (3.14) дает неплохое приближение во всем интервале $0 < g \leq 1$ для не слишком больших n :

$$\xi \approx \frac{2\pi}{3} \left(\frac{e^2 g}{8} \right)^n \quad (3.17)$$

Это видно уже из того, что даже при $g = 1$ величина $e^2/8 \approx 0.92$ и существенное отличие от (3.13) возникает только для $n > n_c(g) \approx 10$. Для $g = 0.7$ граница применимости (3.17) повышается до $n_c(0.7) \approx 30$; $n_c(0.4) \approx 100$ и т.д. Оценка для максимального инкремента неустойчивости и полной ширины резонанса принимает в этом случае совсем простой вид (см. (15.1) в /12/, где $\Delta\Omega$ — полуширина резонанса):

$$\left(\frac{\Delta a}{\sqrt{a}} \right)_n \approx 2\Gamma_n \approx \frac{4}{3} \left(\frac{e^2 g}{8} \right)^n \quad (3.18)$$

Сравнение этой оценки с точными значениями ширины резонансов и инкремента неустойчивости иллюстрируется данными в

таблице и на рисунке. Численные (точные) значения ширины $(\Delta a)_T$ взяты из таблиц /20/ периодических решений уравнения Матье, которые лежат на границах между устойчивыми и неустойчивыми зонами на плоскости параметров (a, g) или (a, μ) . Значения $(\Delta a)_T$ брались при фиксированном g , а в качестве a принималось среднее двух значений на краях неустойчивой зоны.

На рисунке показана зависимость максимального инкремента неустойчивости $\mu_{max} = \Gamma_n / 2$ от номера зоны n для нескольких значений g . Численные значения μ_{max} взяты из таблиц /21/. Оценка (3.18) естественно объясняет изменение знака производной $d\mu_{max}(n)/dn$ /21/ при $g \approx 1$. Однако удивительный факт почти линейной зависимости $\mu_{max}(n)$ при $g \gtrsim 1$, отмеченный в /21/, остается непонятным. Возможно, что эта особенность дает ключ к получению простых оценок и в области $g > 1$. На рисунке ясно виден асимптотический ($n \gg 1$) характер оценки (3.18) и область ее применимости ($g \lesssim 1$).

Таким же методом можно исследовать и уравнение Хилла:

$$\ddot{y} + a[1 - g \cdot f(t)]y = 0 \quad (3.19)$$

где период функции $f(t)$ мы примем равным 2π для удобства сравнения с уравнением Матье. Рассмотрим, например, асимптотику ширины резонансов при $g \rightarrow 0$ в частном случае, когда $f(t)$ есть тригонометрический полином степени p /19/. Тогда $f(t)$ представляется конечным рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_{m=1}^p f_m \cdot \cos(2mt + \varphi_m) \quad (3.20)$$

Как и для уравнения Матье параметрические резонансы соответствуют всем целым значениям $\sqrt{a} = n$. Однако теперь ширина (и инкремент) резонансов $n = m\gamma$, где $m \leq p$, а целое $\gamma < n$, значительно возрастает при $g \rightarrow 0$, поскольку она определяется гармоникой возмущения $m > 1$. В таком случае в оценке (3.18) нужно заменить $g \rightarrow g f_m$; $n \rightarrow \gamma = n/m$ с максимальным $m \leq p$. Это совпадает с результатом Арнольда /19/. В частности, для $n \leq p$ всегда работает гармоника

$m=n$, т.е. $r=1$ и $(\Delta a/\sqrt{a})_n \sim \Gamma_n \sim g f_n$. Этот результат сохраняется для любого n в случае периодической функции $f(t)$ общего вида, содержащей все гармоники основной частоты ($p \rightarrow \infty$) /19/.

Л И Т Е Р А Т У Р А :

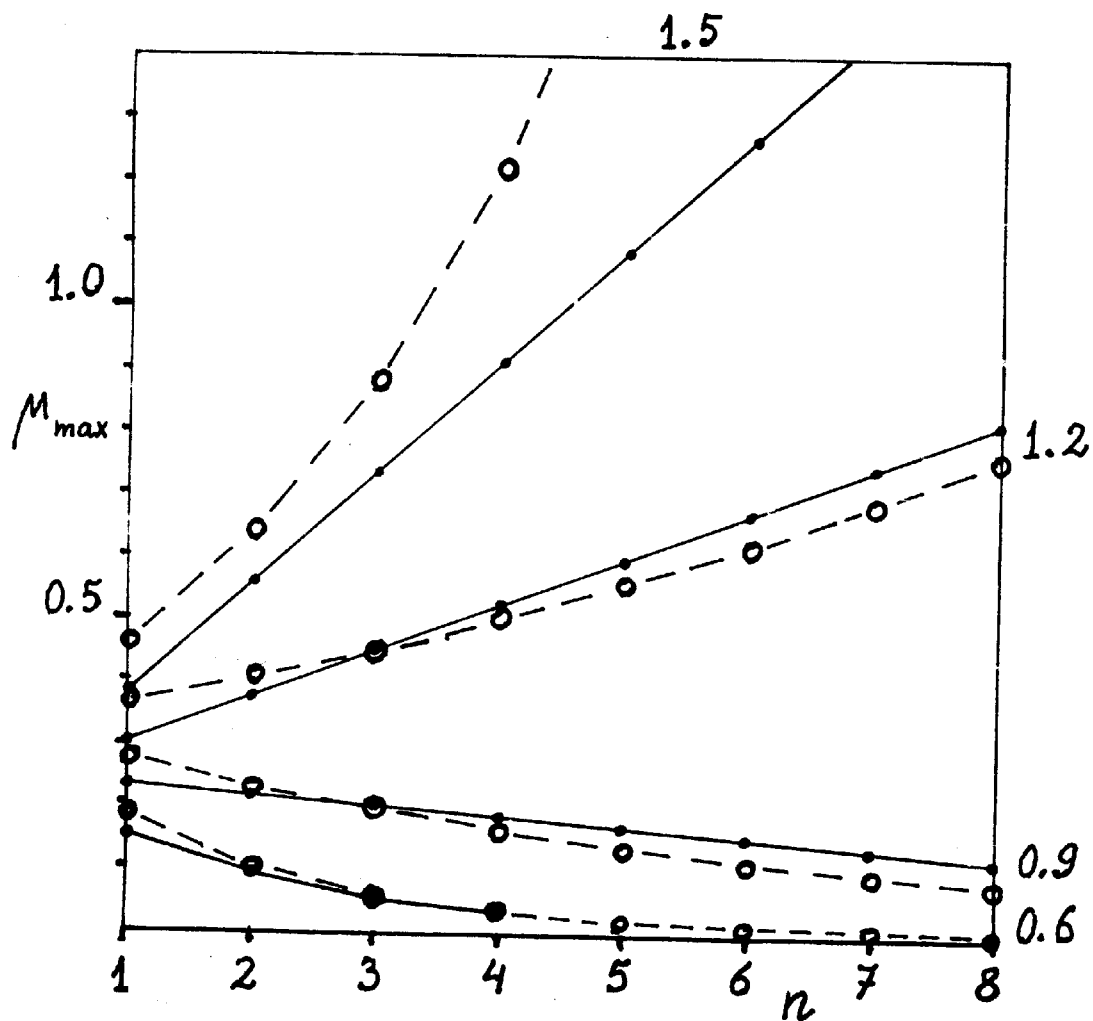
1. Г.И.Будкер. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. - В кн.: Г.И.Будкер. Собрание трудов. М.: Наука, 1982, с.72.
2. А.С.Бакай, Ю.П.Степановский. Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.
3. Б.В.Чириков. ДАН СССР 125 (1959) 1015.
4. А.А.Андронов, М.А.Леонтович, Л.И.Мандельштам. Ж. русского физ.-хим.общества 60 (1928) 413; Л.И.Мандельштам. Полное собрание трудов. т.1, М.: Изд-во АН СССР, 1948, с.297.
5. Н.Мак-Лаклан. Теория и приложения функций Матье. М.: ИИЛ, 1953.
6. В.М.Фролов. Дифф. уравнения 18 (1982) 1363.
7. А.Лихтенберг, М.Либсман. Регулярная и стохастическая динамика, М.: Мир, 1984.
8. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
9. Б.В.Чириков. Атомная энергия 6 (1959) 630.
10. Б.В.Чириков. Физика плазмы 4 (1978) 521.
11. В.В.Chirikov. Phys. Reports 52 (1979) 263.
12. Б.В.Чириков. Динамика частиц в магнитных ловушках. - В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.13, ред. Б.Б.Кадомцев. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.3.
13. M.Born, R.Oppenheimer. Ann. der Physik, IV, 84(1927) 457.
14. K.Stefanski and H.S.Taylor. A New Approach to Studying Quasiperiodicity and ~~the Onset of~~ Chaos in Non-Integrable Hamiltonian Systems, ~~1984 (unpublished)~~ *Phys. Rev. A* 31 (1985) 2810
15. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 267, Новосибирск, 1969.
16. М.Крускал. Адиабатические инварианты. М.: ИИЛ, 1962.
17. В.И.Арнольд. УМН 18:6 (1963) 91.

18. В.И.Арнольд. ДАН СССР 156 (1964) 9.
19. В.И.Арнольд. УМН 38:4 (1983) 189.
20. Таблицы для вычисления функций Матье. М.: ВЦ АН СССР, 1967.
21. Т.Д.Кузнецова, Ю.Н.Смирнов. Таблицы характеристических показателей для уравнений Матье. М.: ВЦ АН СССР, 1969.

Таблица. Ширина параметрических резонансов для уравнения Матъе (3.1)

$g=2q/a$	0.20	0.23	0.29	0.40	0.59	0.72	0.89	1.00	1.10	1.47
n	5	8	13	11	9	8	7	5	6	5
$\sqrt{a}$	5.01	8.03	13.07	11.12	9.22	8.32	7.50	5.47	6.74	5.84
$(\Delta a)_T$ числ.	1.30-3	4.64-5	7.1-7	2.99-4	5.36-2	0.466	2.53	3.99	7.18	12.0
Δa (3.18)	1.40-3	4.88-5	7.15-7	2.93-4	5.04-2	0.432	2.51	4.94	9.97	35.7
$\frac{(\Delta a)_T}{\Delta a}$	0.93	0.95	0.99	1.02	1.06	1.08	1.01	0.81	0.72	0.34

$1.30-3 \equiv 1.30 \times 10^{-3}$



Зависимость максимального инкремента неустойчивости $\mu_{\max}$ от номера зоны n для уравнения Маттье. Цифры на кривых — значения $g = 2q/a$. Сплошные линии соединяют численные данные (точки), взятые из [21]. Кружки, соединенные пунктирными линиями, получены из оценки (3.18).