



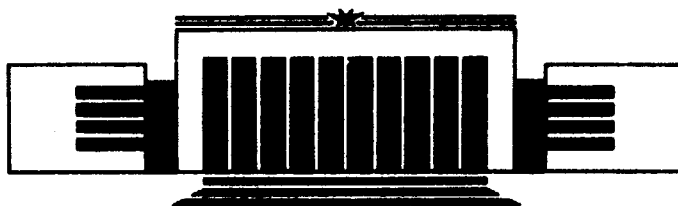
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.В. Чириков

**КЛАССИЧЕСКИЙ И КВАНТОВЫЙ
ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС
В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ**

.

ПРЕПРИНТ 86-131



НОВОСИБИРСК

1986

КЛАССИЧЕСКИЙ И КВАНТОВЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ^{*)}

Б.В. Чириков

Институт ядерной физики, 630090, Новосибирск,
СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

В докладе обсуждается современное понимание явления динамического хаоса в классической и квантовой механике, его природа, механизм и статистические свойства. Подробно рассмотрен квазиклассический переход и квантовая локализация динамического хаоса, а также ее отношение к статистической локализации Андерсона. Обсуждаются некоторые статистические свойства уровней энергии (квазиэнергии) и собственных функций, сформулированы условия эргодичности последних и динамические ограничения в теории случайных матриц.

^{*)} Доклад на УШ Международном конгрессе по математической физике, Марсель, 1986.

I. Введение

Основной целью настоящего доклада является обсуждение современных представлений о так называемом квантовом хаосе, а также некоторых математических задач, которые возникают в этой мало исследованной области.

Примером может служить такое казалось бы простое и хорошо изученное явление как фотоэффект в водороде, т.е. ионизация атома водорода монохроматическим электрическим полем. Если речь идет об основном состоянии, то эта задача и в самом деле давно решена. Однако ионизация с высоких уровней энергии происходит совершенно по-другому /1/. Оказывается (см. /2/), что максимум ионизации приходится не на частоту однофотонного перехода^{*}

$\omega_1 = 1/2n_0^2$, а на значительно более низкую кеплеровскую частоту $\omega_K = 1/n_0^3 = 2\omega_1/n_0 \ll \omega_1$ вращения классического электрона, причем скорость ионизации значительно (примерно в $n_0^{4/3}/20$ раз) превышает скорость однофотонной ионизации при $\omega = \omega_1$. Как показывают численные эксперименты /2/, эта необычная ионизация является диффузионной, т.е. происходит в результате нерегулярного ("случайного") блуждания электрона по невозмущенным уровням атома. С другой стороны, при любом $n_0 \rightarrow \infty$ такой процесс не может быть полностью описан как классический /2/.

Руководящей идеей нашего подхода /3/ к исследованию квантового хаоса служит принцип соответствия. Мы исходим из хорошо изученного и в основном понятного к настоящему времени явления динамического хаоса в классической механике, или в классическом пределе квантовой механики, и на этой основе исследуем квантовые эффекты в квазиклассической области. В дальнейшем я ограничусь исключительно гамильтоновыми системами как более фундаментальными или, лучше сказать, более элементарными. Напомню, что речь идет о чисто динамических системах, в уравнениях движения которых нет никаких случайных параметров.

Рассмотрим сначала кратко основные особенности классического динамического хаоса.

^{*} В атомных единицах $e = m = \hbar = 1$, n_0 - главное квантовое число начального состояния.

2. Что такое динамический хаос?

По этому вопросу нет единого мнения. Одна, крайняя точка зрения состоит в том, чтобы вообще отказаться от определения понятия динамического хаоса (случайности) и вместо этого просто классифицировать динамические системы по их статистическим свойствам (эргодичность, перемешивание, K -свойство и т.д.). Мы придерживаемся другой, возможно тоже крайней точки зрения: сначала выделить класс хаотических систем, а затем уже исследовать их статистические свойства.

Следуя Алексееву /4/, мы определяем хаотическое (случайное без кавычек) движение как движение с положительной метрической энтропией ($h_\mu > 0$), т.е. с экспоненциальной локальной неустойчивостью траекторий. Основанием для выделения такого класса систем служит качественное отличие их поведения от случая $h_\mu = 0$. Согласно теореме Алексеева-Брудно (см. /5/) для почти всех траекторий хаотической компоненты движения

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{Y(t)}{|t|} = h_\mu > 0 \quad (2.1)$$

где $Y(t)$ — информация на отрезке траектории длительности $|t|$, равная колмогоровской сложности этого отрезка $K(t)$. Замечательно, что соотношение (2.1) не зависит от точности регистрации траектории $\varepsilon > 0$, которая определяет лишь время динамических корреляций $t_c \sim |\ln \varepsilon| / h_\mu$. Иначе это можно выразить с помощью параметра случайности /6/

$$\mathcal{R} = \frac{|t| h_\mu}{|\ln \varepsilon|} \sim \frac{|t|}{t_c} \quad (2.2)$$

Динамическое представление движения (в частности предсказание) возможно только для $\mathcal{R} \ll 1$ (временный детерминизм), тогда как при $\mathcal{R} \gg 1$ поведение системы оказывается полностью статистическим (асимптотическая случайность). Отметим, что в области $\mathcal{R} \ll 1$ и при достаточно малом ε возможно как динамическое, так и статистическое представление движения.

Хаотическое движение обладает, вообще говоря (хотя и не всегда), следующим интересным свойством. Рассмотрим символические траектории движения, построенные по любому конечному разбиению фазового пространства (хаотической компоненты) на $M = 1/\varepsilon \gg 1$ областей с регистрацией положения системы через интервалы времени T . Тогда при $Th_\mu \gg \ln M$ система содержит все символические траектории. Это прямо следует из положительности топологической энтропии $h_T \geq h_\mu > 0$ при некоторых дополнительных ограничениях на характер хаотической компоненты, а именно, в пределах экспоненциального "разбегания" близких траекторий, пока оно не перешло в значительно более медленный диффузионный процесс (см. § 3).

Одна из трудностей принятого определения динамического хаоса состоит в том, что оно неинвариантно, вообще говоря, по отношению к замене времени. Если, например, новое время $\tau = e^t$, то новая энтропия (как метрическая, так и топологическая) $h^{(\tau)} = 0$, хотя $h^{(t)} > 0$. Паллиативное решение этой проблемы состоит в том, чтобы выбирать некоторое "физически адекватное" время, например, такое, что характерные частоты движения остаются в ограниченных пределах. Однако в конкретных задачах выбор адекватного времени не всегда очевиден (см. § 5).

Для дальнейшего существенно, что первоисточником динамического хаоса является непрерывность фазового пространства в классической (но не квантовой!) механике. Поэтому точно заданные (абстрактно!) начальные условия движения уже содержат в себе бесконечную информацию, которая и "разворачивается" во времени с помощью механизма локальной неустойчивости. При этом от самой динамической системы требуется лишь обеспечить такую неустойчивость. Это возможно и в очень простой системе, что и объясняет казавшиеся еще совсем недавно такими парадоксальными примеры чрезвычайно сложной динамики простых систем.

3. "Простая" модель

В дальнейшем для иллюстрации я буду использовать некоторые результаты численных "экспериментов" на простой модели, заданной так называемым стандартным отображением (см., например [7]): $(n, \theta) \rightarrow (\bar{n}, \bar{\theta})$, где

$$\bar{n} = n + k \cdot \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + T \bar{n} \quad (3.1)$$

а переменные n , θ имеют смысл действия и фазы. Динамика этой модели определяется единственным параметром $K = kT$ (два параметра потребуются при переходе к квантовой механике, § 7). Несмотря на кажущуюся простоту системы (3.1) ее поведение оказалось чрезвычайно сложным и буквально неисчерпаемым. Это связано не только со сложностью отдельных хаотических траекторий, но и с очень запутанной структурой всей фазовой плоскости модели, особенно вблизи критического значения $K = K_s \approx 1$, разделяющего финитное ($K \leq K_s$) и инфинитное ($K > K_s$) движение по n . Как оказалось, вся сложность структуры движения связана с границами хаоса, которые отделяют хаотические компоненты от регулярных или друг от друга (см. § 5 ниже).

При $K \gg K_s$ единая хаотическая компонента движения заполняет, по-видимому, вся фазовая плоскость (за исключением узких специальных интервалов значений K /7/), а энтропия (на итерацию) $h_\mu \approx \ln(K/2)$; $K > 4$.

Однако этот результат получен из численных экспериментов. Что же касается строгих математических выводов, то не исключена пока даже возможность обратного предельного случая — нулевой меры хаотической компоненты, в том числе и при $K \rightarrow \infty$.

Отметим, что динамическая область рассматриваемой модели, т.е. область экспоненциального разбегания пучка траекторий, соответствует грубо $\Delta\theta \sim 1$; $\Delta n \sim 1/T = k/K (\gg 1)$. За пределами этой области начинается значительно более медленная диффузия (§ 4).

Разумеется, такая сложная динамика характерна не только для стандартного отображения, но для многих других "простых" моделей (см., например, /8/).

С другой стороны, модель (3.1) не является совсем абстрактной — к ней сводятся приблизительно многие реальные задачи теории нелинейных колебаний, например, движение заряженной частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке или движение вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса /7/.

В связи с этим возникает интересная и важная математичес-

кая задача об условиях ограниченной грубости гамильтоновых динамических систем, т.е. грубости в классе гамильтоновых возмущений.

4. Статистические свойства динамического хаоса

В отличие от традиционной статистической механики, теория динамического хаоса не нуждается в дополнительных статистических гипотезах – все определяется динамикой системы. Строго говоря, некоторая минимальная гипотеза все же неявно подразумевается, а именно, начальные условия движения не должны принадлежать множеству нулевой меры особых ("нетипичных", например, периодических) траекторий. Это – обычное условие справедливости эргодической теории, совершенно очевидное с физической точки зрения (ср. § 9).

Однако статистические свойства, полностью определяемые теперь динамикой, могут оказаться и весьма необычными с точки зрения традиционной статистической механики. Пример подобных статистических "аномалий" будет рассмотрен ниже в § 5. Сейчас же отметим трудность, возникающую в этой связи для принятого определения хаоса (§ 2). Дело в том, что из условия $h_\mu > 0$ не следуют, вообще говоря, обычные статистические свойства, такие как эргодичность или перемешивание. Правда, из (2.1) вытекает асимптотическая независимость движения – важнейшее условие применения теории вероятностей, причем независимость не только статистическая, но и гораздо более сильная – алгоритмическая (см. /5/). Это значит, что в такой системе идет некоторый процесс статистической релаксации. Отсюда, в свою очередь, следует, что спектр движения обязательно содержит непрерывную компоненту. Однако он может иметь и дискретную компоненту.

Пусть, например, $z(t)$ – траектория хаотического движения с $h^{(z)} > 0$. Рассмотрим процесс

$$\zeta(\xi, t) = \xi z(t) + \sin t \quad (4.1)$$

с такой же энтропией $h^{(\zeta)} = h^{(z)}$ при любом $\xi > 0$. Ясно, что при $\xi \rightarrow 0$ движение (4.1) является почти регулярным, в частности, предсказуемым (с точностью $\sim \xi$). Тем не менее, и

в этом особом случае есть основания считать процесс (4.1) случайным. Действительно, если $\xi(t)$ является возмущением для другой системы (степени свободы), то именно малая добавка $\xi z(t)$ будет приводить к качественно иным эффектам диффузионного (релаксационного) типа.

Статистические свойства модели (3.1) при очень больших K весьма простые и обычные. В этом пределе значения фазы θ оказываются случайными и независимыми, а движение по n носит характер однородной диффузии со скоростью /7/ $D_n = \langle (\Delta n)^2 \rangle / t \approx k^2/2$, где t - число итераций отображения. Флуктуации диффузии также являются обычными - гауссовыми.

При меньших K скорость диффузии сложным образом зависит от K из-за остаточных корреляций фазы θ /9,10/ (рис.1):

$$D_n = \frac{k^2}{2} R(K)$$

$$R(K) \approx \begin{cases} 1 + 2 J_2(K) [1 + J_2(K)]; & K \geq 4.5 \\ 0.60 (K - K_s)^3 / K^2; & K_s < K \leq 4.5 \end{cases} \quad (4.2)$$

где $J_2(K)$ - функция Бесселя.

Совсем необычные статистические свойства в этой модели возникают при некоторых особых значениях параметра $K \approx 2\pi m$, где m - любое целое, кроме нуля. Скорость диффузии при этом резко возрастает по сравнению с зависимостью (4.2). Последнее связано с появлением относительно больших устойчивых областей, окруженных границей хаоса, которая имеет очень сложную так называемую критическую структуру.

5. Критические явления в гамильтоновой динамике

Критические явления возникают на границе хаоса либо по параметру системы, например, K для стандартного отображения, либо в фазовом пространстве. Это - одна из очень интересных проблем классического динамического хаоса, исследование которой только начинается /11-16,6/. Фактически сейчас изучается только простейший случай двумерных канонических или даже одномерных отображений.

Критическая структура характеризуется бесконечной последовательностью масштабов, сходящихся к критической инвариантной кривой на границе хаоса. Оказывается, что в окрестности критической кривой вся структура движения определяется арифметикой числа вращения на критической кривой, т.е. арифметическими свойствами отношения частот

$$\gamma = \frac{\langle \omega \rangle}{2\pi} = (m_1, m_2, \dots, m_n, \dots) \quad (5.1)$$

Здесь m_n — элементы разложения γ в непрерывную дробь, а $\langle \omega \rangle$ — средняя скорость изменения фазы. Величина (5.1) играет важную роль в теории КАМ, развитием которой на область предельных (критических) возмущений и является теория критических явлений в гамильтоновой динамике.

Подходящие дроби $\gamma_n = p_n/q_n = (m_1, \dots, m_n)$ разложения (5.1) соответствуют основным резонансам в окрестности критической кривой, которые определяют, в свою очередь, основные масштабы критической структуры. Для анализа результатов численного моделирования широко используются различные варианты метода ренормгруппы /II-13/. Однако таким путем не удалось пока найти аналитически основные параметры критической структуры и их связь с числом вращения γ . Некоторые характеристики критической структуры удается получить приближенно в резонансной теории с помощью анализа основных резонансов q_n /6,14,15/, а также в специальной теории двух резонансов /17/.

Первая из упомянутых теорий описывает среднюю по критической кривой структуру, в частности, структуру фурье-спектра критического движения. Основным фактором подобия в этой теории служит чисто арифметическая характеристика γ , а именно, отношение знаменателей соседних подходящих дробей: $S_n = q_{n+1}/q_n$. В простейшем случае однородной непрерывной дроби ($m_n = m$) фактор $S_n \rightarrow S_\infty = 1/\gamma$ стремится к предельному значению, что соответствует точной масштабной инвариантности критической структуры, или неподвижной точке ренормгруппы /II-13/.

Фактически подробно изучен только случай с $m = 1$, когда $\gamma = \gamma_G = (\sqrt{5} - 1)/2$ — "золотое сечение" или "золотой хвост" ($m_n = 1, n > n_1$). Для этого γ недавно предложена еще

одна количественная, но тоже приближенная теория /16/.

Ренормгруппу можно рассматривать как некоторую абстрактную динамическую систему, описывающую изменение критической структуры при переходе от одного масштаба к другому, причем роль времени ("ренормвремя") играет номер масштаба, или логарифм характерного физического времени соответствующего масштаба /14/. Неподвижная точка дает пример простейшей "ренормдинамики". Противоположным предельным случаем будет "ренормхаос", т.е. случайные вариации критической структуры от одного масштаба к другому. Ренормхаос является новым особым видом динамического хаоса. На основе упомянутых динамических аналогий он был предсказан и наблюдался в модели (3.1) /14,6/ (рис.2). Для одномерного отображения, моделирующего "предельный тор" в диссипативных системах, ренормхаос наблюдался независимо в работе /18/. Более интересным примером являются случайные колебания метрики однородных неизотропных моделей Вселенной /19/ (последние результаты см. в /20/).

Ренормхаос соответствует почти всем иррациональным γ , для которых целые $\{m_n\}$ образуют случайную последовательность, определяемую отображением:

$$\gamma(n+1) = \frac{1}{\gamma(n)} \bmod 1; \quad m_{n+1} = \left[\frac{1}{\gamma(n)} \right] \quad (5.2)$$

В этом случае асимптотическая ($n \rightarrow \infty$) неподвижная точка ренормгруппы для $m_n = m$ становится "неподвижной кривой" (по терминологии Синая) с параметром γ . Оператор дискретной ренормализации (перехода к следующему масштабу) определяется соотношением

$$\hat{R} f(\gamma(n)) = f(\gamma(n+1)) \quad (5.3)$$

где $f(\gamma)$ – любая характеристика критической структуры в безразмерных (масштабно-инвариантных) переменных. Такого рода соотношения, по-видимому, впервые введены в работе /21/ для диссипативных систем.

Отметим, что переход к ренормвремени $n \sim \ln|t|$ есть как раз та самая особая замена времени, которая обсуждалась в

§ 2. В частности, энтропия ренормотображения (5.2) $h^{(n)} > 0$ только по времени n , но не t ($h^{(t)} = 0$). В данном случае физически адекватным для критических явлений представляется именно безразмерное время n , в котором операция ренормализации образует группу (5.3).

Для границы хаоса в фазовом пространстве главной нерешенной задачей является определение граничного числа вращения γ_g . Численные эксперименты указывают на особый характер γ_g , не исключаящий и ренормхаос [22, 14, 23]. Гипотеза об арифметической структуре γ_g высказана в [14], однако данные [23] подтверждают ее лишь частично.

Другой нерешенный вопрос – какому переходу (и при каких условиях) соответствует граница хаоса в фазовом пространстве: хаос–порядок или хаос–хаос?

Поскольку характерное время масштабов $\sim q_n \rightarrow \infty$, движение вблизи любой критической кривой, в частности, на границе хаоса становится очень медленным. Траектория надолго "застывает" в этой области, что и приводит к статистическим "аномалиям", в частности, к очень медленному убыванию корреляций

$$C(\tau) \sim \tau^{-\rho} \quad (5.4)$$

Связанный с этим эффект сильных флуктуаций, по-видимому, впервые наблюдался качественно в работе [24]. В [22] получено среднее значение $\langle \rho \rangle \approx 0.4$, которое остается приблизительно тем же самым для различных двумерных канонических отображений. Однако для стандартного отображения с критическим $K = K_s$ (§ 3) показатель ρ в (5.4) близок к нулю [14], т.е. корреляции почти не убывают, по крайней мере до $\tau \sim 10^5$.

В работах [14, 25] наблюдались нерегулярные колебания локального показателя $\tilde{\rho} = d \log C(\tau) / d \log \tau$, свидетельствующие, по-видимому, о ренормхаосе на границе. Медленно убывающим корреляциям (5.4) ($\rho < 1$) соответствует сингулярный спектр движения при $\omega \rightarrow 0$ [6]

$$S(\omega) \sim \omega^{\rho-1} \quad (5.5)$$

Если такие корреляции определяют некоторый диффузионный

процесс, то его скорость оказывается аномально большой /14/

$$\sigma^2 \sim t^{2-p}; \quad 0 < p < 1 \quad (5.6)$$

где σ^2 — дисперсия функции распределения. Это имеет место, в частности, для стандартного отображения при специальных значениях параметра K (§ 4). Обычный коэффициент диффузии обращается при этом в бесконечность.

Интересной задачей является полное статистическое описание такой сверхбыстрой диффузии.

Хотя качественно причина медленного убывания корреляций ясна, в настоящее время нет законченной теории этого явления. Попытки получения закона (5.4) на основе различных механизмов движения в критической области содержатся в работах /14, 6, 26/.

6. Квантовый псевдохаос

Переходя к более точной, квантовой механике, мы сразу же сталкиваемся со следующим противоречием. Фазовое пространство в квантовой механике дискретно (размер "ячейки" $\hbar = 1$), и, следовательно, настоящий хаос здесь невозможен (§ 2). К тому же спектр энергий (и частот) консервативной квантовой системы, ограниченной в фазовом пространстве, также всегда дискретный, т.е. ее эволюция, $\psi(t)$, является почти-периодической. В классической механике такое движение считается регулярным — случай, прямо противоположный динамическому хаосу. Трудность эта была известна уже Крылову /27/. Она усугубляется фундаментальным принципом соответствия, который требует перехода к классическому хаосу в квазиклассической области.

Особенности квазиклассического перехода в условиях динамического хаоса в классическом пределе рассматривались в работе /3/ на основе представления о характерных временных масштабах квантовой эволюции. В настоящее время известно два таких масштаба.

Первый из них (t_E), очень короткий (логарифмический), который мы называем масштабом Эренфеста, имеет порядок

$$\hbar_\mu t_E \sim \ln q \quad (6.1)$$

где h_μ — динамическая энтропия системы (§ 2), а q — характерный квантовый параметр задачи, например, квантовое число. Этот масштаб впервые рассматривался в работе /28/ и имеет простой физический смысл: t_E есть максимальное время распыливания минимально узкого волнового пакета (когерентного состояния).

По теореме Эренфеста узкий квантовый пакет движется по классической траектории и, следовательно, его динамика на этом масштабе столь же хаотична как и в классическом пределе. Поскольку время t_E растет с q хотя и медленно, но неограничено, масштаб Эренфеста, в принципе, решает проблему квазиклассического перехода к стационарному динамическому хаосу.

Здесь возникает, однако, следующая трудность. Настоящий классический хаос соответствует большим значениям параметра случайности $\mathcal{R}$ (2.2), который зависит от точности наблюдения ε . В квантовой механике реально достижима предельная точность (максимально полное измерение, задающее чистое начальное состояние) $\varepsilon \sim 1/q$, что соответствует фиксации минимальной ячейки фазового пространства. В таком случае $\mathcal{R} \lesssim \ln q / |\ln \varepsilon| \sim 1$, т.е. квантовый хаос все же не является полным. В классическом пределе ($q \rightarrow \infty$) этому соответствует нефизическое $\varepsilon = 0$.

В любом случае квантовый хаос при конечном значении квантового параметра q , хотя бы и очень большом, является временным, или переходным /3/, и мы будем называть его псевдохаосом.

Заметим, что настоящий классический хаос, который, строго говоря, никогда не осуществляется в природе, служит своего рода абстрактным эталоном хаоса, с которым можно сравнивать реальную квантовую динамику.

Подчеркнем, что мы рассматриваем квантовую динамику без промежуточных измерений, которые, в отличие от классической механики, существенно изменили бы квантовую эволюцию (см. ниже, § 7). Иными словами, мы считаем, что производится только два измерения: первое задает начальное состояние системы, а второе регистрирует результат ее эволюции. Заметим попутно, что принципиальным преимуществом численных экспериментов в квантовой механике является возможность непрерывного наблюдения за состоянием системы без изменения ее динамики.

7. Квантовая локализация классического хаоса

Второй характерный масштаб квантовой эволюции (t_D), упомянутый выше (§ 6), является гораздо более длинным и поэтому более важным. Этот масштаб был обнаружен в численных экспериментах с квантовой версией модели (3.1) /29/ и объяснен в работе /3/, согласно которой его порядок ($\hbar = 1$):

$$t_D \sim \rho \quad (7.1)$$

где ρ — средняя плотность уровней энергии квантовой системы.

Физический смысл оценки (7.1) очень простой: при $t \lesssim \rho$ дискретный характер спектра не разрешается из-за неопределенности частоты ($\Delta\omega \sim 1/t \gtrsim 1/\rho$), и динамика системы определяется как бы "непрерывным" спектром с той же средней спектральной плотностью. Этого достаточно для классической диффузии и релаксации к состоянию статистического равновесия. Отсюда название этого масштаба — диффузионный или релаксационный. Обычно ρ растет как некоторая степень q , и поэтому $t_D \gg t_E$. Эти простые соображения позволяют легко получать оценки t_D в разных случаях /2,3,10,34/.

В согласии с принципом соответствия диффузия в квантовой системе при $t \ll t_D$ близка к классической. Это иллюстрирует данные на рис.1 для квантованной модели (3.1), которая также задается отображением /29/

$$\bar{\psi} = \exp\left(\frac{iT}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \cdot \exp(-ik \cdot \cos \theta) \psi \quad (7.2)$$

Динамика квантовой модели существенно зависит от обоих параметров (k, T). Характерным квантовым параметром q может служить здесь как k , так и $1/T$. Квазиклассический переход соответствует $k \rightarrow \infty$; $T \rightarrow 0$; $kT = \text{const}$ (классический параметр модели). Как видно из рис.1 квантовая диффузия действительно хорошо повторяет все детали классической зависимости $D(k)$, в том числе и не описываемые относительно простым соотношением (4.2).

Однако такая квантовая диффузия является весьма необычной. В частности, здесь полностью отсутствует характерная для классического хаоса неустойчивость движения. Это демонстрируется изящным численным экспериментом, выполненным Шепелянским /30/ (рис.3а, верхняя кривая). В момент $t \approx 150$ итераций квантового отображения (7.2) производится обращение скоростей ($\psi \rightarrow \psi^*$), после чего возникает "антидиффузия", в точности повторяющая диффузию при $t < 150$. Более того, даже случайные изменения квантовых фаз фурье-компонент $\psi(\theta)$ на величину $\Delta\varphi_n \sim 0.1$ не разрушают антидиффузию.

Для сравнения на том же рисунке показан эффект обращения скоростей в классической модели (3.1) с теми же параметрами. Здесь точности счета $\sim 10^{-12}$ хватает всего лишь на 10 итераций антидиффузии.

Аналогичное явление наблюдалось и в другом случае, упомянутом в § I, при численном моделировании ионизации атома водорода монохроматическим электрическим полем /31/. На рис.4а показано распределение вероятностей по невозмущенным состояниям в момент обращения скоростей. Квантовое и классическое распределения неплохо согласуются между собой (в среднем) и с классической теорией в хаотической области ($n > 75$). В классически устойчивой области ($n < 75$) ясно видно квантовое туннелирование.

После обращения скоростей квантовый атом возвращается в начальное состояние ($n = 100$) с точностью лучше 10^{-16} (по вероятности), тогда как в классическом атоме продолжается прежняя диффузия (рис.4б). Интересно отметить, что в данном случае квантовый возврат происходит также и из непрерывного спектра атома водорода, который учитывался в численном моделировании. Эта своеобразная "когерентная рекомбинация" показывает, что даже непрерывный спектр не разрушает устойчивость квантовой динамики.

Подобные эксперименты доказывают, что квантовая диффузия представляет собой не более чем имитацию некоторого, хотя и важного, но все же частного свойства настоящего хаоса. Интересно отметить, что волновая функция системы $\psi(\theta)$ в момент обращения скоростей (рис.3б) выглядит весьма нерегулярной, "случайной". Причина, по которой вся эта сложная картина точно воз-

вращается к начальному состоянию (рис.3с), заключается в устойчивых корреляциях квантовых фаз, не разрушаемых диффузией.

Другая интересная особенность хаотического квантового состояния (рис.3б) заключается в том, что $\psi(\theta)$ состоит из предельно узких пиков, ширина которых определяется полной шириной спектра. Каждый из пиков значительно уже начального состояния (рис.3с). Поэтому можно сказать, что "расплывание" узкого начального пакета обязательно сопровождается его "расщеплением" на множество вторичных пакетов, ширина которых уменьшается по мере диффузии по n . Иначе говоря, хаотическое квантовое состояние представляет собой как бы "газ" частиц-пакетов, число которых растет по мере диффузии: $\Delta n \sim \sqrt{D_n t} \gg 1$ /32/.

На рис.3а ясно виден диффузионный масштаб $t_D \sim 50$. При $t \gg t_D$ квантовая диффузия постепенно останавливается и возникает специфически квантовое равновесное состояние стационарных колебаний $\psi_s(t)$. Специальные численные эксперименты показали, что скорость изменения средней энергии системы $E = \langle n^2 \rangle / 2$ в таком состоянии $2|\dot{E}| / D_n \lesssim 2 \cdot 10^{-6}$ /10/. Это свидетельствует о дискретном спектре квазиэнергий, что не является тривиальным ввиду неограниченности фазового пространства по n (см. § 8 и /33/) и несохранению энергии для отображения (см. (7.2)). Подчеркнем в связи с этим, что образование квантового равновесного состояния не связано с каким-либо законом сохранения и имеет динамическую природу.

Если теперь произвести измерение, скажем, фазы θ , то произойдет редукция $\psi(\theta)$ на рис.3б к одному из пиков, и последующее его "расплывание-расщепление". Это приведет к неограниченной диффузии по n . Роль "измерения" может играть внешний шум, влияние которого на динамику модели (7.2) исследовалось в работе /34/. В частности, при достаточно сильном шуме, например, при случайном изменении квантовых фаз $\Delta \varphi_n \gg 1$ на интервале $t \ll t_D$, неограниченная диффузия будет идти с классической скоростью (ср. выше). Мы использовали последний эффект для проверки алгоритма численного моделирования.

Оценка диффузионного масштаба для модели (7.2) не может быть получена прямо из (7.1), так как полная плотность уровней квазиэнергии $\varrho = \infty$, и нужно учитывать только собственные

функции, возбуждаемые заданным начальным состоянием. Согласно /3/ $t_D \sim D_n \sim k^2$. Для уточнения этой оценки удобно перейти к спектру стационарных колебаний, который оказывается экспоненциальным /32/:

$$|\psi_s(n)|^2 \sim \exp\left(-\frac{2|n|}{\ell_s}\right) \quad (7.3)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается локализованное по n начальное состояние, обычно $n_0 = 0$ или, во всяком случае, $\Delta n_0 \ll \ell_s$ (подробнее см. в /10/). По порядку величины длина локализации в равновесном состоянии $\ell_s \sim t_D \sim D_n$ /3/. Численные эксперименты дают /10/ (см. рис.5)

$$\ell_s \approx D_n \quad (7.4)$$

Причиной локализации квантовой диффузии и образования равновесного состояния является локализация собственных функций квазиэнергии. Длину их локализации (ℓ) можно определить, не вычисляя самих собственных функций с помощью следующего простого метода /35/ (см. также /36/).

Разложим собственную функцию и оператор возмущения в (7.2) в ряд Фурье:

$$\psi_\omega(\theta) = \sum_n \psi_\omega(n) e^{in\theta}; \quad e^{-ik \cos \theta} = \sum_m i^{-m} J_m(k) e^{im\theta} \quad (7.5)$$

где $J_m(k)$ — функции Бесселя, причем $J_m(k) \rightarrow 0$ при $m > k$. Тогда из (7.2) имеем приближенно

$$\psi_\omega(n) \approx e^{i(\omega - \frac{Tn^2}{2})} \sum_{m=-N}^N \psi_\omega(n-m) J_m(k) i^{-m} \quad (7.6)$$

где ω — квазиэнергия, а $N > k$ /29/. При любом n соотношение (7.6) связывает $2N+1$ соседних по n значений $\psi_\omega(n)$, и его можно рассматривать как уравнение движения (отображение) для некоторой новой динамической системы с N степенями свободы. Эта система оказывается гамильтоновой, а роль времени иг-

рает здесь номер невозмущенного уровня энергии n . В силу линейности отображения его динамику можно характеризовать показателями Ляпунова $\Lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |\psi_n^{(j)}(n)| / n$, минимальный из которых и определяет длину локализации $l = \Lambda_{\min}^{-1}$. Конечно, $l \sim \mathcal{D}_n$, как и l_s , однако, численные эксперименты /35/ показали, что более точно

$$l \approx \frac{\mathcal{D}_n}{2} \quad (7.7)$$

В результате специальных исследований выяснилось, что причина столь значительного различия l и l_s связана с сильными флуктуациями собственных функций, которые можно представить в виде:

$$\psi_m(n) \sim \exp\left(-\frac{|n-m|}{l} + \xi_{mn}\right) \quad (7.8)$$

Согласно данным Шепелянского флуктуации ξ_{mn} диффузионно растут с n со скоростью

$$\mathcal{D}_\xi = \frac{\langle (\Delta \xi_{mn})^2 \rangle}{|\Delta n|} \approx \frac{1}{l}; \quad \langle \Delta \xi_{mn} \rangle = 0 \quad (7.9)$$

Это и приводит к увеличению длины локализации l_s в равновесном состоянии, которое является суперпозицией большого числа собственных функций ($l_s / l = 2 \mathcal{D}_\xi l \approx 2$). На рис.5, взятом из работы /35/, ясно видна разница между l и l_s , несмотря на значительные флуктуации.

Замечательной особенностью соотношений (7.4) и (7.7) является даваемая ими связь существенно квантового параметра — длины локализации, с классической скоростью диффузии $\mathcal{D}_n$. Эти соотношения представляют собой, таким образом, важную характеристику квазиклассического перехода. Отметим, что скорость диффузии выражается здесь в специальных безразмерных единицах (см. § 4). В обычных единицах соотношение (7.7), например, принимает вид:

$$l_I = \hbar l = \frac{\hbar D_I}{2\hbar} \rightarrow \infty; \quad \hbar \rightarrow 0 \quad (7.10)$$

где $D_I = \langle (\Delta I)^2 \rangle / t$; t - обычное время, а I - действие.

При $k \gg 1$ число $N > k$ различных (по модулю) показателей Ляпунова вспомогательной динамической системы (7.6) очень велико. Поэтому простая экспоненциальная локализация собственных функций (7.8) имеет место лишь асимптотически при $|n-m| \rightarrow \infty$. Тем не менее оказывается, что весь спектр равновесного состояния можно приближенно принять в виде экспоненты (7.3). Отсюда получается, в частности, следующее простое выражение для энергии равновесного состояния

$$E = \frac{\langle n^2 \rangle}{2} \approx \frac{l_s^2}{4} = \frac{\alpha^2 D_n^2}{4} \quad (7.11)$$

которое удовлетворительно согласуется с численными данными /10/: $\langle \alpha \rangle \approx 1.3$.

Динамическую локализацию квантовой диффузии ($l, l_s \gg 1$) следует отличать от полного подавления диффузии, или квантовой устойчивости при $k \leq 1$. В последнем случае, который также иногда называют локализацией, возмущение вообще не вызывает переходы в квантовой системе, и невозмущенные состояния изменяются лишь незначительно, независимо от поведения системы в классическом пределе (например, и для $k \gg 1$). Применительно к классически хаотическим системам это явление было исследовано теоретически Шуряком /37/. Существенно также, что при $k \gg 1$ длина локализации $l \sim k^2 \gg k$ много больше числа невозмущенных состояний, которые связываются однократным действием возмущения (см. (7.5)).

Асимптотически экспоненциальная локализация (7.8) связана с однородностью диффузии в модели (7.2) (D_n не зависит от n), или, что то же самое, с однородностью динамической системы (7.6). Возникает интересная задача о неоднородной локализации. Пусть, например, скорость классической диффузии $D_n = D_0 n^\beta$ /10/. Тогда при $\beta \geq 1$ и

$$D_1 \gtrsim n_0^{1-\beta} \quad (7.12)$$

где n_0 — начальное значение n , происходит делокализация, т.е. квантовая диффузия продолжается неограниченно, а ее скорость асимптотически по t приближается к классической. Именно такой процесс имеет место, в частности, при диффузионной ионизации атома водорода /2/.

Характер локализации при нарушении условия (7.12) остается неясным. Неизвестно даже, является ли локализация в этом случае полной. На основе соображений о механизме локализации в § 7 можно высказать следующую гипотезу: при $\beta < 1$ локализация остается полной в том смысле, что скорость диффузии $D_n \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (дискретный спектр квазиэнергий); если же $\beta > 1$ и $D_1 \lesssim n_0^{1-\beta}$, локализации на самом деле не происходит, но скорость квантовой диффузии падает по сравнению с классической и тем больше, чем сильнее последнее неравенство.

Локализацию собственных функций квазиэнергии в импульсном пространстве естественно сравнить с локализацией Андерсона в случайном потенциале. В работе /38/ было показано, что модель (7.2) можно преобразовать в модель одномерного кристалла с нерегулярным потенциалом, правда, только для $k < \pi$. Это нефизическое ограничение было снято в /35/. Нерегулярность потенциала задается в такой модели последовательностью фаз (см. (7.6))

$$\chi_n = \omega - \frac{T_n^2}{2} \mod 2\pi \quad (7.13)$$

которая, конечно, не является случайной. Это показывает, в частности, что для локализации Андерсона достаточно и слабых статистических свойств потенциала. Более того, замена последовательности (7.13) случайными и независимыми χ_n изменяет длину локализации. В последнем случае $\ell = D_{ql}/2 = k^2/4$, тогда как для (7.13) $\ell = D_{ql} R(K)/2$ (4.2) имеет место сложная зависимость от классического параметра $K = kT$ (рис.1) /35/.

Можно сказать поэтому, что описанная выше локализация в

импульсном пространстве является динамическим вариантом статистической локализации Андерсона. Отметим, что описанный выше метод показателей Ляпунова для определения длины локализации также имеет аналог в теории локализации Андерсона (см. /35/).

8. Хаотические собственные функции консервативной системы

Стандартное отображение (3.1), (7.2) можно рассматривать и как модель локальной динамики на энергетической поверхности консервативной системы с двумя степенями свободы. Оказывается, что в квантовом случае (7.2) эту же модель можно использовать и для исследования глобальной структуры собственных функций, т.е. всей квантовой энергетической поверхности. Это достигается следующим образом /39/. При рациональных значениях $T/4\pi = p/q$ в системе (7.2) возникает так называемый квантовый резонанс /29,40/, когда асимптотически по времени $E \propto t^2$. Собственные функции при этом делокализованы, а спектр является непрерывным и состоит из q полос. Продолжая аналогию с локализацией Андерсона, можно сказать, что квантовый резонанс соответствует одномерному периодическому кристаллу.

Зафиксируем теперь параметр непрерывного спектра (квази-импульс в кристалле), так чтобы все волновые функции стали периодическими

$$\psi(n+q) = \psi(n) \quad (8.1)$$

Полученную систему можно рассматривать как модель замкнутого энергетического слоя с конечным числом состояний q и чисто дискретным спектром. В классическом пределе этому соответствует стандартное отображение (3.1) на торе с периметром $\Delta n = q$, что составляет $2p = qT/2\pi$ периодов отображения по n . В этом пределе $q \rightarrow \infty$; $T \rightarrow 0$; $qT = \text{const}$ (ср. § 7).

Нефизической особенностью рассматриваемой модели является дискретность фазовой переменной θ , значения которой удобно выбрать в симметричном виде:

$$\theta_m = \pm \frac{\pi m}{N}; \quad m = 0, 1, \dots, N; \quad q = 2N+1 \quad (8.2)$$

Соответственно, значения импульса равны $\pm n = 0, 1, \dots, N$. В такой модели узкие пики волновой функции $\psi(\theta)$ заменяются δ -функциями (ср. рис. 3B). В этом смысле более адекватной представляется модель на сфере, предложенная в работе /41/.

В силу сохранения пространственной четности все собственные функции будут либо симметричны, либо антисимметричны. Рассмотрим последние, в которых максимальное число независимых значений с однородной статистикой равно N .

Отношение ℓ/N является важным новым параметром модели. Если $\ell/N \ll 1$, мы возвращаемся к локальной динамике модели (7.2). В обратном предельном случае $\ell = D_n/2 \gg N$ можно ожидать, что все собственные функции будут эргодическими по Шнирельману /42/ (см. также /43/). Условие эргодичности удобно записать в духе теории случайных матриц (см., например, /44/):

$$\langle |\psi(\theta_m)|^2 \rangle = \langle |\psi(n)|^2 \rangle = \frac{1}{N} \quad (8.3)$$

Здесь среднее берется по ансамблю собственных функций одной системы или разных систем с близкими значениями параметров, а последнее равенство определяет нормировку.

Согласно теореме Шнирельмана /42/ почти все собственные функции становятся эргодическими в пределе больших квантовых чисел или, формально, при $\hbar \rightarrow 0$, причем для этого требуется только эргодичность движения в классическом пределе. В рассматриваемом классе моделей это следует из (7.10) и условия эргодичности

$$\ell_I = \frac{\pi D_I}{2\hbar} \gtrsim I \quad (8.4)$$

если только скорость диффузии $D_I \neq 0$ остается конечной на всей энергетической поверхности размера $\sim I$. Оценка (8.4) позволяет находить границу эргодичности со стороны малых квантовых чисел.

Для хаотических собственных функций характерно специфическое распределение их собственных значений энергии или квазиэнер-

гии — так называемое "отталкивание" уровней /44/. Численные эксперименты /39/ показали, что для рассматриваемой модели этот эффект действительно имеет место, причем распределение расстояний между ближайшими уровнями с высокой статистической достоверностью совпадает с распределением Вигнера-Дайсона для ортогонального или унитарного ансамбля случайных матриц в зависимости от симметрии модели.

Подчеркнем в этой связи еще раз, что рассматриваемая модель (как и все предыдущие) является чисто динамической. Тем не менее, ее статистические свойства соответствуют ансамблю случайных матриц, по крайней мере, в отношении статистики уровней энергии (квазиэнергии). Можно ожидать, что и статистика самих собственных функций ($\psi(\theta_m)$ или $\psi(n)$) также будет совпадать с предсказаниями теории случайных матриц. При $N \gg 1$ ожидается гауссова статистика:

$$w(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \psi^2 \rangle}} e^{-\frac{\psi^2}{2\langle \psi^2 \rangle}} \quad (8.5)$$

где собственные функции считаются действительными, а дисперсия для эргодических функций определяется нормировкой (8.3) /44/. Некоторое подобие гауссовых флуктуаций $\psi(x, y)$ для консервативной системы наблюдалось в работе /45/, хотя и без какого-либо количественного анализа.

Более интересно, что при конечных, не слишком больших N должны наблюдаться отклонения от распределения Гаусса (8.5), связанные с ограничением флуктуаций $\psi^2 \leq 1$. Распределение в этом случае имеет вид /44/

$$w_N(\psi) = \frac{\Gamma(N/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{N-1}{2})} (1 - \psi^2)^{\frac{N-3}{2}} \quad (8.6)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Экспериментальное подтверждение таких ограниченных флуктуаций свидетельствовало бы об изотропном ("микроканоническом") распределении хаотических собственных

ψ -векторов в гильбертовом подпространстве нужной размерности N .

Другая возможность определения эффективной размерности ($N_{эф}$) собственных векторов состоит в измерении четвертого M_4 (и высших) моментов распределения $\psi_N(\psi)$:

$$N_{эф} = \frac{2}{\frac{M_6}{M_4} - 1} \quad (8.7)$$

где $M_6 = 3\langle\psi^2\rangle^2 = 3/N^2$ - четвертый момент распределения Гаусса (8.5).

В рассматриваемой модели значение параметра N является произвольным. В реальной консервативной системе эффективное число N_g невозмущенных состояний, связанных собственной функцией, определяется наибольшей частотой классической релаксации, т.е., грубо говоря, энтропией h_μ . Последняя дает порядок квантовой ширины классической энергетической поверхности. В классическом пределе относительная ширина $\hbar h_\mu / E \rightarrow 0$ как и должно быть. В квазиклассической области число

$$N_g \sim \rho h_\mu \sim t_D h_\mu \quad (8.8)$$

остается конечным.

Теория случайных матриц применима к такой системе только при дополнительном условии $d \ll N_g$, где d - размерность матрицы /46/. Иначе говоря, теория случайных матриц является локальной по отношению к квантовому энергетическому слою. Дополнительное условие $d \ll N_g$ практически всегда выполняется с большим запасом в атомных ядрах, где $N_g \sim 10^6$. Однако для электронных состояний даже очень сложных атомов $N_g \sim 10$ согласно /46/, и поэтому здесь можно наблюдать глобальную структуру собственных функций.

В связи с этим возникает интересная задача построения "глобальной" теории случайных матриц, т.е. описания статистических свойств всей собственной функции, а не только ее "центральной части".

Эти свойства будут, вообще говоря, значительно более сложными, что видно из оценки (8.8), если подставить в нее $t_D \sim \ell$;

$h_{\mu} \sim \ln K$ для стандартного отображения. Имеем: $\ell/N_2 \sim 1/\ln K \leq 1$, т.е. условие эргодичности не выполняется. Для консервативной системы это отражает неизбежную поперечную по отношению к энергетическому слою локализацию собственных функций.

9. Классический псевдохаос

Основным результатом первых исследований квантового хаоса явилось представление о том, что в квантовой механике возможен лишь временный псевдохаос, т.е. временная имитация некоторых свойств настоящего хаоса в классическом пределе. С другой стороны, особенности квантового хаоса показывают, что движение с дискретным спектром, которое в классической механике считается регулярным, противоположным хаотическому, устроено на самом деле далеко не так просто как это казалось вначале — в нем может быть скрыт псевдохаос, такой же как и в квантовой механике.

Примеры подобного классического псевдохаоса были известны, по-существу, уже давно. Один из них — статистическая "релаксация" в полностью интегрируемой цепочке Тоди /47/, где наблюдался даже переход по энергии от "регулярного" к "хаотическому" режиму движения.

Фактически, именно на таком псевдохаосе основана и вся традиционная статистическая механика. В этом отношении здесь нет различия между классическим и квантовым случаями — механика псевдохаоса остается одной и той же. Этот вопрос подробно обсуждается в /48/ на классическом примере Боголюбова. В таком подходе существенным является так называемый термодинамический предел, когда число степеней свободы $N \rightarrow \infty$. Это полностью снимает ограничения, связанные с диффузионным масштабом времени $t_D \propto N$.

Другая проблема — дополнительные статистические гипотезы, исключающие процессы типа антидиффузии (§ 7). Легко видеть, что вероятность попадания на такие начальные условия весьма мала. Грубо ее можно оценить как

$$W \sim \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right)^N = e^{-AN} \quad (9.1)$$

где $\Delta\varphi \sim 1 < 2\pi$ - максимальный фазовый интервал, в котором еще сохраняется антидиффузия (см. /30/ и § 7). По существу, такие дополнительные гипотезы в теории псевдохаоса эквивалентны минимальной статистической гипотезе в теории классического хаоса (§ 4). Только в последнем случае вероятность попадания на особые, нехаотические траектории равна нулю, тогда как для псевдохаоса она конечна (9.1), хотя и быстро убывает с N .

Новые задачи, возникающие в традиционной статистической механике, связаны с большим, но конечным N . Тогда диффузионный масштаб становится конечным и возможна стабилизация псевдохаоса и классическая локализация /48/.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Ф.М. Израйлеву и Д.Л.Шепелянскому, а также М.Берри, И.Гварнери, Дж. Казати, Т.Селигману и Э.Хеллеру за интересные обсуждения. Автор признателен Р.Мак-Каю, Ф.Хааке и У.Смилянскому за предоставленную возможность ознакомиться с неопубликованными результатами.

Л И Т Е Р А Т У Р А :

- I. J.E.Bayfield and P.M.Koch. Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 258.
2. G.Casati, B.V.Chirikov and D.L.Shepelyansky. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 2525.
3. B.V.Chirikov, F.M.Izrailev and D.L.Shepelyansky. Sov. Sci. Rev. 20 (1981) 209.
4. B.M.Алексеев. Матем. сб. 76:I (1968) 72.
5. V.M.Alekseev and M.V.Yakobson. Phys. Reports 75 (1981) 287.
6. B.V.Chirikov. Intrinsic Stochasticity. In: Proc. Intern. Conf. on Plasma Physics, Lausanne, 1984, Vol. 2, p. 761.
7. B.V.Chirikov. Phys. Reports 52 (1979) 263.
8. А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
9. A.B.Rechester and R.B.White. Phys. Rev. Lett. 44 (1980)1586;
A.B.Rechester, M.N.Rosenbluth and R.B.White. Phys. Rev. A 23 (1981) 2664.
10. Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. Радиофизика 29 (1986) 609.
11. J.M.Green. J. Math. Phys. 20 (1979) 1183.
12. R.S.MacKay. Physica D 7 (1983) 283.
13. S.J.Shenker and L.P.Kadanoff. J. Stat. Phys. 27 (1982) 631.
14. B.V.Chirikov and D.L.Shepelyansky. Physica D 13 (1984) 395.
15. B.V.Chirikov. Lecture Notes in Physics 179 (1983) 29.
16. W.M.Zheng. Phys. Rev. A 33 (1986) 2850.
17. D.F.Escande. Physica Scripta T2/1 (1982) 126.
18. S.Ostlund, D.Rand, J.Sethna, E.Siggia. Physica D8(1983)303.
19. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1973, § II8.
20. Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, Я.Г.Синай, К.Ханин, Л.Н.Щур. Письма в ЖЭТФ, 38 (1983) 79.

21. D.Rand, S.Ostlund, J.Sethna and E.Siggia. Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 132.
22. Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. Тр. 9-й Международ. конф. по нелинейным колебаниям (Киев, 1981). Киев: Наукова думка, 1984, т.2, с.421.
23. J.M.Green, R.S.MacKay and J.Stark. Boundary Circles for Area-Preserving Maps, 1986 (unpublished).
24. S.R.Channon and J.L.Lebowitz. Ann. N.Y.Acad. Sci. 357 (1980) 108.
25. C.F.F.Karney. Physica D 8 (1983) 360.
26. J.D.Meiss and E.Ott. Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 2741.
27. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики. М.: АН СССР, 1950.
28. G.P.Berman and G.M.Zaslavsky. Physica A 91 (1978) 450.
29. G.Casati, B.V.Chirikov, J.Ford and F.M.Izrailev. Lecture Notes in Physics 93 (1979) 334.
30. D.L.Shepelyansky. Physica D 8 (1983) 208.
31. G.Casati, B.V.Chirikov, I.Guarneri and D.L.Shepelyansky. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2437.
32. Б.В.Чириков. УФН 139 (1983) 360.
33. G.Casati and I.Guarnery. Comm. Math. Phys. 95 (1984) 121.
34. E.Ott, T.M.Antonsen Jr. and J.D.Hanson. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 2187.
35. D.L.Shepelyansky. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 677.
36. R.Blumel, S.Fishman, M.Griniasti and U.Smilansky. Localization in the Quantum Description of the periodically perturbed Rotor, 1986 (unpublished).
37. Э.В.Шуряк. ЖЭТФ, 71 (1976) 2039.
38. S.Fishman, D.R.Grempel and R.E.Prange. Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 509; Phys. Rev. A 29 (1984) 1639.
39. F.M.Izrailev. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 541.
40. Ф.М.Израйлев, Д.Л.Шепелянский. ТМФ, 43 (1980) 417.

- 41. F.Haake, M.Kus, J.Mostovsky and R.Scharf. Quantum Chaos on a Sphere, 1985 (unpublished).
- 42. A.И.Шнирельман. УМН 29:6 (1974) 181.
- 43. M.V.Berry. J. Phys. A 10 (1977) 2083;
A.Voros. Lecture Notes in Physics 93 (1979) 326.
- 44. T.A.Brody et al. Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 157.
- 45. M.Shapiro and G.Goelman. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1714.
- 46. B.V.Chirikov. Phys. Lett. A 108 (1985) 68.
- 47. J.Ford, S.D.Stoddard and J.S.Turner. Prog. Theor. Phys. 50 (1973) 1547.
- 48. B.V.Chirikov. Foundations of Physics 16 (1986) 39.

Подписи к рисункам:

- Рис.1. Зависимость скорости диффузии в модели (3.1) от параметра K : $\mathcal{D}_{qe} = k^2/2$ - квазилинейный коэффициент диффузии; сплошная кривая - теория (4.2) /9/; $\circ$ - численные данные /9/; $\times$ - квантовая модель (7.2), численные данные /10/, $k = 40$.
- Рис.2. Пример "ренормхаоса" для модели (3.1) (кружки): n - номер масштаба; q - знаменатели подходящих дробей; a - соответствующие фурье-амплитуды критического движения; R - вычет Грина /11/. Для сравнения показан случай $r = r_G$ (точки).
- Рис.3. Динамическая устойчивость квантовой диффузии: а) обращение скоростей в классической (3.1) (нижняя кривая) и квантовой (7.2) (верхняя кривая, масштаб по E изменен) моделях; наклонные прямые - ожидаемая классическая диффузия (антидиффузия), $E = \langle n^2 \rangle / 2$ - энергия; $k = 20$; $K = 5$; б) волновая функция $\psi(\theta)$ в момент обращения скоростей ($t \approx 150$ итераций); в) начальное ($t = 0$) и конечное ($t = 300$) состояние системы $\psi(\theta)$ (сдвинуты по вертикали).
- Рис.4. Динамическая устойчивость диффузионного фотоэффекта в водороде по данным работы /31/: а) распределение вероятности $f(n)$ по невозмущенным состояниям с главным квантовым числом n в момент обращения скоростей $\tilde{\omega} \approx 60$ (периодов поля); начальное состояние $n = 100$; $\diamond$ - квантовый атом; $\blacklozenge$ - классический атом; $\blacksquare$ - классическая теория; б) то же при $\tilde{\omega} = 120$.
- Рис.5. Локализация собственных функций (точки) и в равновесном состоянии (кружки) для модели (7.2): $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_n T^2$ (см. (4.2)); пунктирная прямая $\ell_s / \mathcal{D}_n = 1.04$; сплошная прямая $\ell / \mathcal{D}_n = 1/2$. На вставке численные данные /10/ для классической модели (3.1).

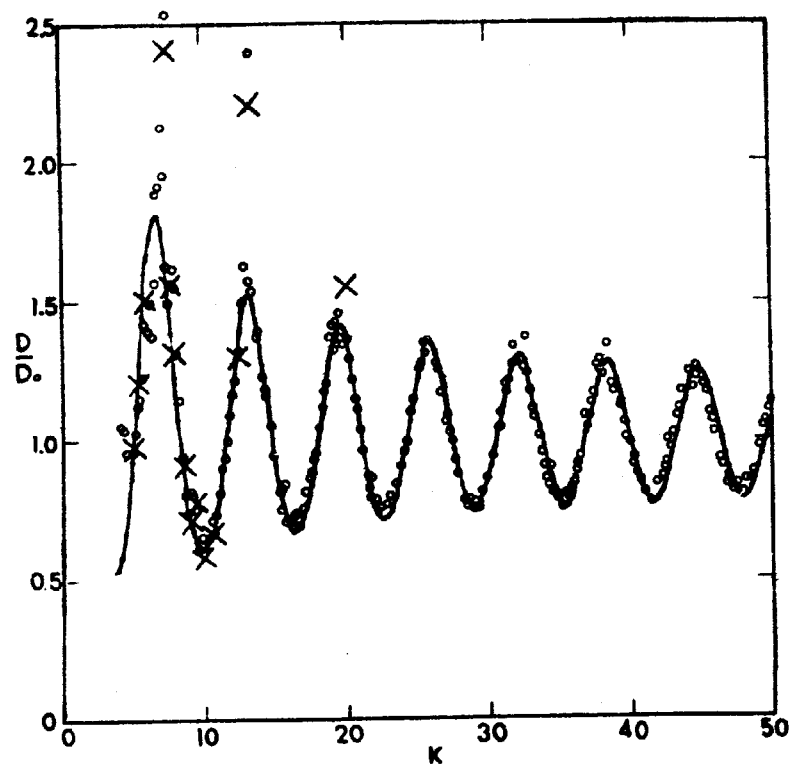


Рис. I

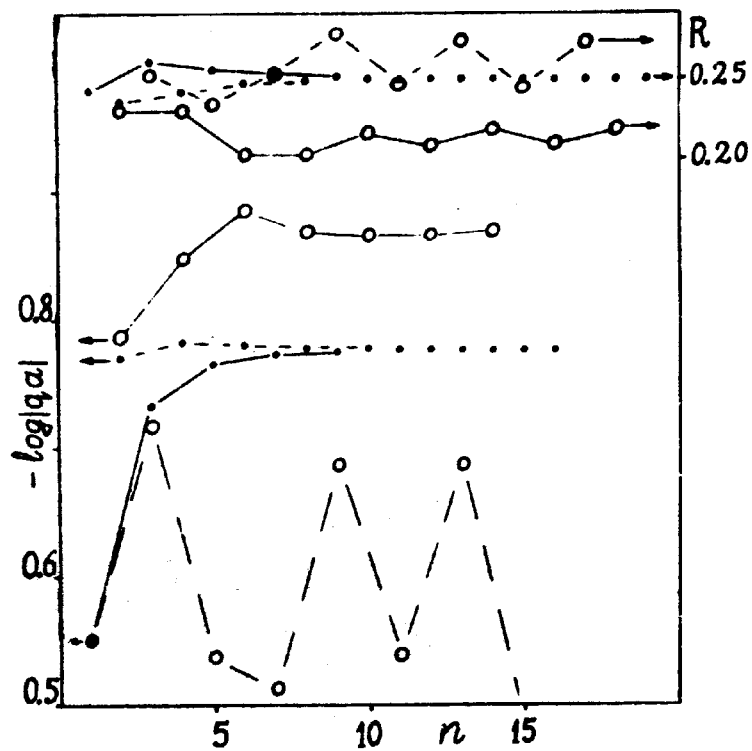


Рис. 2

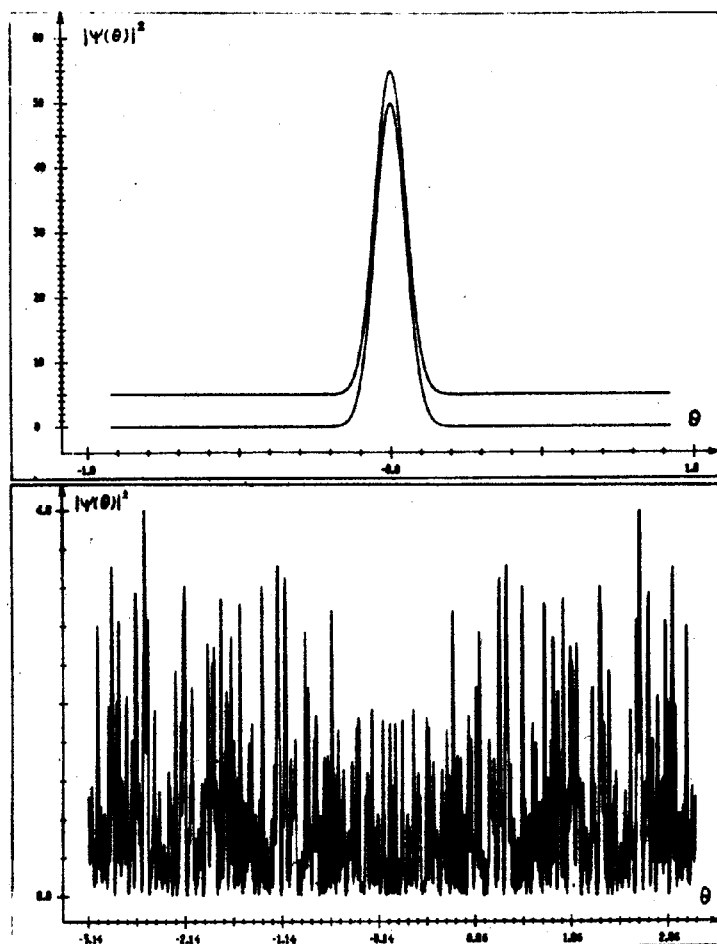
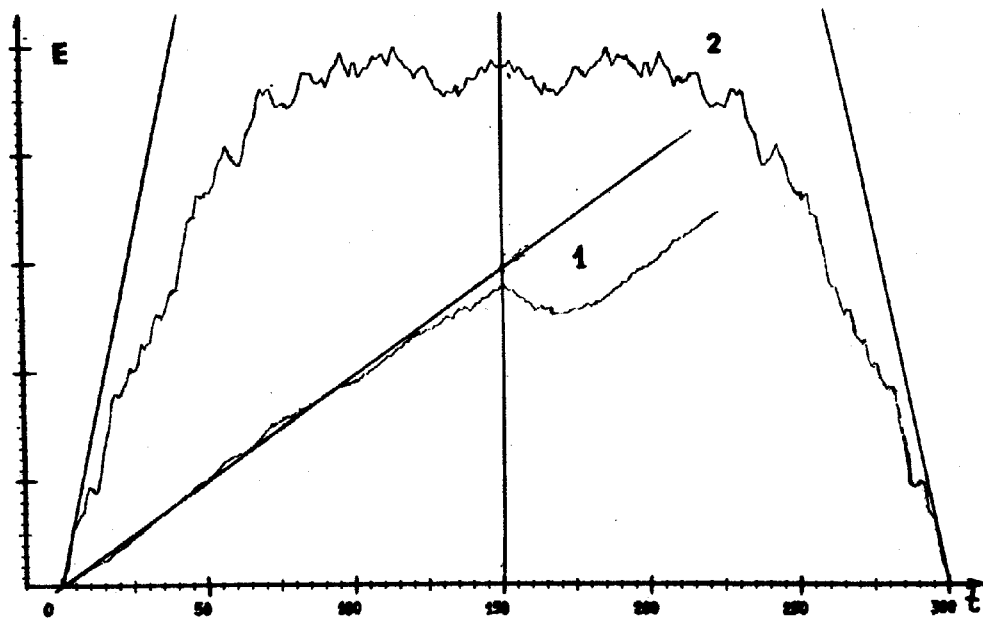


Рис.3

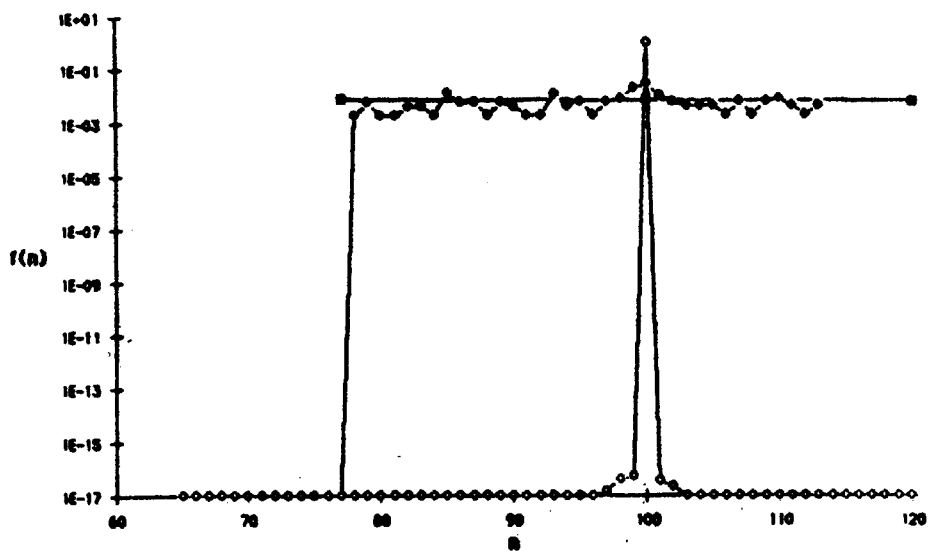
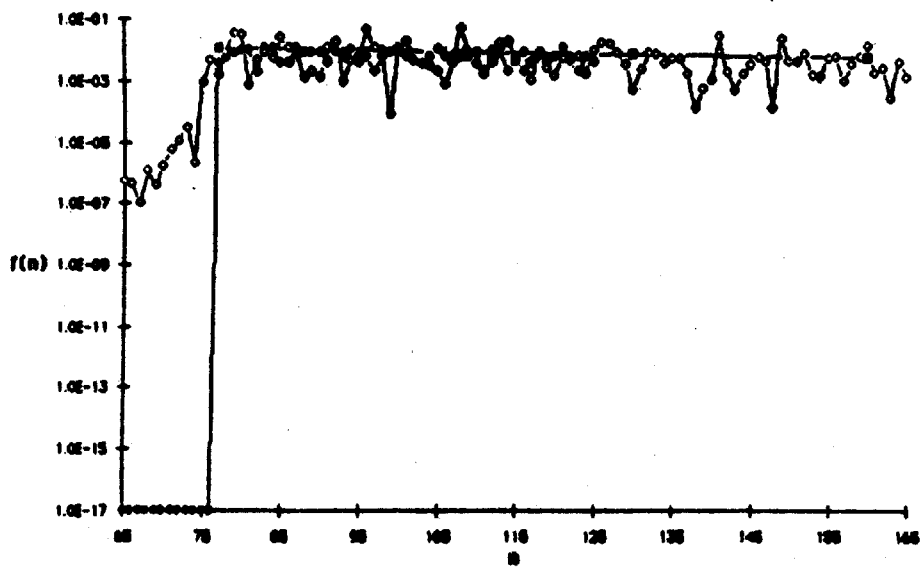


Рис.4

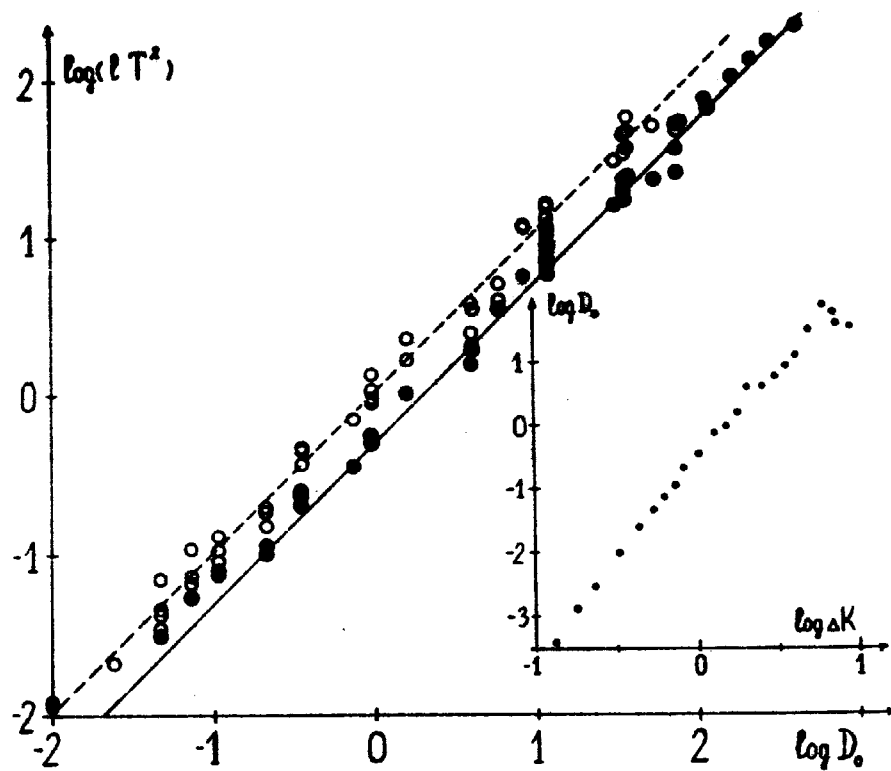


Рис. 5