ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков

МЕХАНИЗМ СОХРАНЕНИЯ СЕПАРАТРИСЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ХАОСА

ИЯФ 2000-68

НОВОСИБИРСК
2000

нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса

В.В. Вечеславов[1], *Б.В. Чириков*[2]
Институт ядерной физики им.Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Предлагается простой и достаточно общий механизм сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса, что приводит к полному подавлению глобальной диффузии несмотря на сильный локальный хаос движения. Это новое явление было подробно исследовано недавно одним из авторов (В.В.В.) в численных экспериментах на простой модели двумерного канонического отображения. Развита приближенная теория, которая позволяет построить полную зависимость угла расщепления сепаратрисы от параметров системы и найти, в частности, те их специальные значения, при которых эта сепаратриса остается нерасщепленной. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающих теоретические выводы для определенного класса динамических гамильтоновых систем. Обнаружены новые особенности подавления хаоса в таких системах. В заключение обсуждается область применения предлагаемого механизма и его теории.

PACS 05.45.+b, 05.60.+w
Ключевые слова: гамильтонова система; нелинейный резонанс; сепаратриса; хаос.

B.V. Chirikov, V.V. Vecheslavov

Preservation mechanism
of a nonlinear resonance separatrix amid strong chaos

[1]Email: vecheslavov@inp.nsk.su
[2]Email: chirikov@inp.nsk.su

1 Введение: неожиданная устойчивость сепаратрисы нелинейного резонанса

Динамика нелинейных гамильтоновых систем определяется взаимодействием нелинейных резонансов, каждый из которых в отличие от линейного резонанса занимает, при малом возмущении, относительно небольшую область фазового пространства, ограниченную так называемой *сепаратрисой* (см., например, [1, 2, 3, 4]). Для одиночного резонанса сепаратриса представляет из себя особую траекторию (в общем случае поверхность), отделяющую колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса)[1]. На самом деле это две пространственно совпадающие ветви, отвечающие ходу времени вперед и назад, соответственно. Каждая ветвь является непрерывной траекторией с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и затем асимптотически к нему же приближается. В типичной (то есть неинтегрируемой) гамильтоновой системе любое сколь угодно малое возмущение, например, от других (хотя бы одного) нелинейных резонансов приводит к расщеплению сепаратрисы на две пересекающиеся ветви, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но более к нему не возвращаются. Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют при этом узкую область вблизи невозмущенной сепаратрисы, формируя так называемый *хаотический слой*. Перекрытие хаотических слоев всех резонансов системы приводит к возникновению глобального хаоса и, в частности, диффузии, ограниченной только точными интегралами движения, например, поверхностью постоянной энергии.

Условия образования глобального хаоса зависят как от величины, так и от *гладкости* возмущения (по фазе). Последняя характеризуется ско-

[1] Здесь и ниже мы используем канонические переменные действие – фаза.

убывание является экспоненциальным. В этом случае всегда существует критическая величина возмущения ϵ_{cr}, такая, что глобальная диффузия возникает лишь при $\epsilon \gtrsim \epsilon_{cr}$. Если же $\epsilon \lesssim \epsilon_{cr}$, хаос локализован в относительно узких хаотических слоях, которые образуются при любом $\epsilon > 0$. При числе степеней свободы $N > 2$ глобальная диффузия все же возможна, однако только для специальных начальных условий и с очень малой скоростью (так называемая диффузия Арнольда [2]). При $\epsilon \to 0$ как скорость диффузии, так и мера ее области убывают экспоненциально по параметру $1/\epsilon$.

Характер движения существенно изменяется для *гладкого* возмущения гамильтониана, Фурье–амплитуды которого убывают как некоторая степень γ их номера (см., например, [5] и ссылки там). В этом случае существует критическая гладкость γ_{cr}, такая, что только при $\gamma > \gamma_{cr}$ происходит подавление глобальной диффузии при достаточно малом возмущении [6]. Существенно, что обратное утверждение вообще говоря несправедливо, т.е. при $\gamma < \gamma_{cr}$ глобальная диффузия обычно наблюдается в численных экспериментах, однако известны и обратные примеры, когда траектория движения оставалась локализованной в некоторой части фазового пространства в течение всего весьма длинного времени счета (см., например, [7] и Примечание к настоящей работе).

Ситуация в этой области начала постепенно проясняться совсем недавно, после того как Л.В. Овсянников нашел относительно простой точно решаемый пример (см. (2.1) ниже), для которого ему удалось доказать теорему о сохранении единой (нерасщепленной) сепаратрисы при специальных значениях параметра возмущения [8]. Эта теорема приведена полностью в [9] (Приложение). Интенсивные исследования примера Овсянникова [9, 10, 11] немедленно показали, что самым важным и неожиданным в этой теореме оказалось сохранение сепаратрисы в условиях сильного хаоса, а не в каком-то исключительном случае полностью интегрируемой системы без всякого хаоса вообще. Более того, при специальных значениях параметра возмущения как найденных Овсянниковым, так и многих других (множество таких значений является, по-видимому, всюду плотным) [9, 10, 11] сепаратрисы нелинейных резонансов не только не расщепляются, но и образуют непроходимые барьеры для других траекторий, т.е. полностью подавляют глобальную диффузию. И это несмотря на то, что гладкость возмущения в примере Овсянникова существенно меньше критической и можно было бы ожидать глобальную диффузию при любой величине возмущения.

В настоящей работе мы предлагаем, обсуждаем и проверяем в численго явления подавления глобальной диффузии в гамильтоновых системах. Мы начнем с примера Овсянникова.

2 Пример Овсянникова

Овсянников рассматривал разностное уравнение, которое эквивалентно следующему двумерному отображению в канонических переменных действие p – фаза x

$$\overline{p} = p + K \cdot f(x)\,, \quad \overline{x} = x + \overline{p} \pmod 1. \tag{2.1}$$

Здесь $K = \epsilon$ – параметр возмущения (не обязательно малый), а "сила" $f(x)$ имеет форму антисимметричной ($f(-y) = -f(y),\ y = x - 1/2$) кусочнолинейной "пилы"с периодом 1 (см. (2.2) ниже), что существенно упрощает нахождение точного решения отображения (2.1). Тем не менее такое решение можно получить только для определенного счетного множества специальных (критических) значений $K = K_m$, при которых сепаратриса не расщепляется. В противном случае никакое точное решение даже такого "простого"на вид отображения невозможно из-за хаотического характера траекторий, в частности, расщепленной сепаратрисы.

Пожалуй, самым неожиданным в этом примере является то, что гладкость гамильтониана (производящей функции) отображения (2.1) $\gamma = 1 < \gamma_{cr} \leq 4$ [6] существенно меньше критической. Иными словами, при $K = K_m$ нерасщепленная сепаратриса "погружена в море"сильного хаоса и тем не менее сохраняется и запирает глобальную диффузию [9, 11]!

Поскольку на компьютере невозможно задать *точное* значение K, следующим решающим шагом было исследование поведения (расщепленной) сепаратрисы и других траекторий при малом отклонении $|K - K_m| \to 0$, что возможно только в численных экспериментах. Первые же исследования [10] показали, что угол расщепления сепаратрисы меняет знак вместе с разностью $K - K_m$, причем при нечетных m этот угол плавно проходит через ноль, а при четных – скачком меняет знак (см. рис.1 в [9] и рис.2 ниже). Прежде всего это позволило сразу же и относительно просто найти множество других специальных K_m, при которых сепаратриса сохраняется. Вместе с тем такое необычное поведение угла расщепления "подсказало"и динамический механизм сохранения сепаратрисы, что является основным предметом обсуждения в настоящей работе.

Удобно рассмотреть сразу целое семейство пилообразных возмуще-

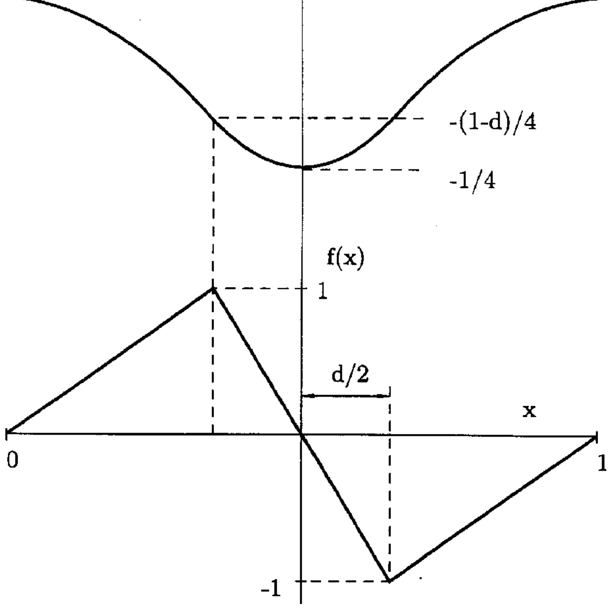

Рис. 1: Схема потенциала $V(x)$ и силы $f(x) = -dV/dx$ с периодом 1 для семейства моделей (2.2) с параметром d.

ний, заданных силой (см. рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} 2x/(1-d), & \text{если } |x| \le (1-d)/2 \\ -2y/d, & \text{если } |y| \le d/2 \end{cases}, \tag{2.2}$$

где $y = x - 1/2$, а $d < 1$ – расстояние между "зубьями" пилы $|f(x)| = 1$, расположенными в точках $y = y_\pm = \pm d/2$. Пример Овсянникова соответствует значению $d = 1/2$. В этих двух точках сила имеет сингулярность – разрыв первой производной $f' = df/dx$:

$$\Delta f' = \pm \frac{2}{d(1-d)}\,. \tag{2.3}$$

Исходная идея о механизме сохранения сепаратрисы состояла в том, что возмущение (сила) имеет *две* сингулярности, которые интерферируют между собой.

Для исследования предполагаемого механизма удобно перейти от исходного отображения (2.1) к непрерывной системе с гамильтонианом, яв-

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + K \cdot V(x) \cdot \delta_1(t) = H_0(x,p) + H_1(x,t)\,, \qquad (2.4)$$

где $\delta_1(t)$ обозначает δ–функцию периода 1. Невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + K \cdot V(x) \qquad (2.5)$$

описывает основной (целый) резонанс в (2.1), а

$$H_1(x,t) = K \cdot V(x)(\delta_1(t) - 1) \qquad (2.6)$$

его возмущение (с прежним периодом $T_1 = 1$ и частотой $\Omega = 2\pi/T_1 = 2\pi$) от всех остальных целых резонансов.

Потенциал силы (2.2) равен:

$$V(x) = -\int f(x)dx = \begin{cases} -x^2/(1-d), & \text{если } |x| \le (1-d)/2 \\ (4y^2-d)/4d, & \text{если } |y| \le d/2 \end{cases} . \qquad (2.7)$$

Максимальное значение потенциала $V_{max} = 0$ определяет невозмущенную сепаратрису основного резонанса

$$p_s(x) = \pm\sqrt{-2K \cdot V(x)}\,, \qquad (2.8)$$

а минимальное значение $V_{min} = -1/4$ дает полную глубину U невозмущенной потенциальной "ямы"

$$U = K \cdot (V_{max} - V_{min}) = \frac{K}{4}. \qquad (2.9)$$

Особенность возмущения (2.6) состоит в том, что оно порядка невозмущенного гамильтониана независимо от параметра возмущения $K \to 0$. Тем не менее теория возмущений, вообще говоря, применима, если другой параметр возмущения

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1 \qquad (2.10)$$

является большим. Здесь $\omega_0 = \sqrt{2K/d}$ – частота малых колебаний на основном резонансе (2.5), а $\Omega = 2\pi$ – частота внешнего возмущения. Именно этот параметр "адиабатичности"и определяет расщепление сепаратрисы. Использование в данном случае термина "адиабатичность" подчеркивает, что эффект высокочастотного возмущения качественно такой же, как и низкочастотного.

изменение невозмущенного гамильтониана (2.5) на периоде движения в малой окрестности невозмущенной сепаратрисы. Следуя [11] получаем:

$$\Delta H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \{H_1, H_0\} \approx K \int_{-\infty}^{\infty} dt\, p_s\, f(x_s)\, (\delta_1(t) - 1). \tag{2.11}$$

В последнем выражении движение по близкой к сепаратрисе траектории приближенно заменено движением по невозмущенной сепаратрисе (отсюда бесконечные пределы интегрирования).

Поскольку сила $f(x)$ имеет две сингулярности (2.3) в точках $y_\pm = \pm d/2$, интегрируем (2.11) два раза по частям, так что

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \approx \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \cdot p^2 = p^2 \cdot \Delta f' \cdot \delta_1(y - y_\pm)\,, \tag{2.12}$$

где $p = dx/dt$ и оставлен только главный член с δ-функцией. В результате получаем

$$\Delta H_0 \approx K \cdot p_\pm^2 \cdot \Delta f' \cdot [\psi(t_+) - \psi(t_-)] = \frac{K^2}{d}\, \Delta\psi, \tag{2.13}$$

где $t_\pm$ – моменты времени прохождения сингулярностей в точках $y_\pm$, а функция $\psi(t)$ определяется уравнением

$$\ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \delta_1(t) - 1. \tag{2.14}$$

Для вычисления разности $\Delta\psi = \psi(t_+) - \psi(t_-)$ перейдем к новым переменным Δ и t_0, где

$$\Delta = \frac{t_+ - t_-}{2} = \sqrt{\frac{d}{2K}} \cdot \arcsin\,(\sqrt{d}) = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \arcsin\,(\sqrt{d}) \tag{2.15}$$

половина времени движения между сингулярностями, а

$$t_0 = \frac{t_+ + t_-}{2} \tag{2.16}$$

момент прохождения минимума потенциала ($y = 0$), где обычно и исследуется пересечение ветвей расщепленной сепаратрисы.

В общем случае $\Delta\psi$ не факторизуется в этих переменных, однако это возможно при дополнительном ограничении: $|t_0| \le \Delta$ (> 0). В таком случае

$$\Delta\psi = t_0 \cdot (1 - 2\Delta)\,. \tag{2.17}$$

приближенной формулой (см. [12, 10])

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha \approx \frac{dp}{dy} \approx \frac{dH_0}{p_0^2\, dt_0} \approx \frac{2K}{d}(1-2\Delta). \qquad (2.18)$$

Здесь использованы соотношения: $dp = dH_0/p$, $dy = p\, dt$, и

$$\frac{dH_0}{dt} = \Delta\dot{\psi} = 1 - 2\Delta$$

где все величины берутся в точке пересечения ветвей сепаратрисы $(y = 0)$. Зависимость $\alpha(K, d)$ принимает исключительно простой вид

$$\alpha_s \approx (1 - 2\lambda_s) \qquad (2.19)$$

в преобразованных переменных:

$$\alpha_s = \alpha\,\frac{d}{2K} = \alpha\,\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\,, \qquad \lambda_s = \Delta = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot \arcsin\left(\sqrt{d}\right) \mod 1. \qquad (2.20)$$

Подчеркнем, что осцилляции $\alpha(K)$ появились как раз вследствие *двух* особенностей в гамильтониане, интерферирующих между собой.

Соотношение (2.19) и является основным результатом нашей работы. Оно объясняет и описывает новое явление подавление хаоса сепаратрисы, а значит и глобальной диффузии, в определенном классе гамильтоновых систем.

Сравнение с результатами численных экспериментов приведено на рис.2. Весьма высокая точность простой теории (при $K \ll 1$) ограничивается небольшим сдвигом критических значений $K = K_m$. В примере Овсянникова $(d = 1/2)$ его можно получить и без численных экспериментов, используя точные выражения для K_m, как предсказанные в [8], так и найденные позже в работе [10]

$$K_m = \frac{\pi^2}{16\, m^2}\cdot\left(1 - \frac{\pi^2}{48\, m^2} + \ldots\right) \approx \frac{\pi^2}{16\, m^2}. \qquad (2.21)$$

Последний член представляет нашу теорию, а в скобках указана поправка первого порядка. Теория объясняет также неожиданный разрыв функции $\alpha(\lambda_s)$ при $\lambda_s = 0 \mod 1$ (но не при $\lambda_s = 1/2$!), который был обнаружен и обсуждался с другой точки зрения в [10].

На рис.2 показано также еще более простое приближение с сохранением только первого члена Фурье-разложения $\delta_1(t) - 1 \approx 2\cos(2\pi t)$, которое

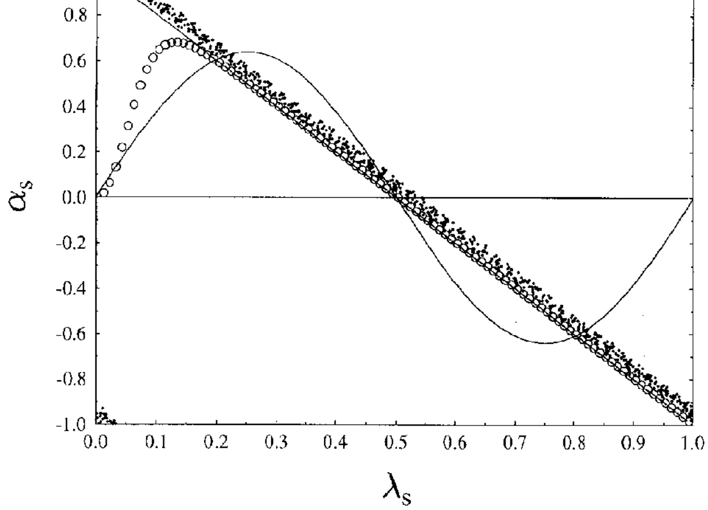

Рис. 2: Периодическая зависимость угла расщепления сепаратрисы α от параметров K и d в нормированных переменных $\alpha_s(\lambda_s)$ (2.20): $d = 0.25, 0.5, 0.75, 0.999$ (точки), $d = 0.01$ (кружки) по данным численного счета. Сплошная прямая – теория (2.19), кривая – первое приближение $\delta_1(t) - 1 \approx 2\cos(2\pi t)$ (см. (2.11)). Аргумент λ_s берется по модулю один, так что все точки (но не кружки !) представляют много периодов зависимости $\alpha(K, d)$ (см. текст).

столь же точно представляет критические значения K_m, но не воспроизводит разрыва угла α.

Простое соотношение (2.19) также не дает полной картины для всего семейства (2.2), как это демонстрирует пример с малым значением $d = 0.01$, представленный на рис.2 кружками. Обсуждение этой области дано в следующем разделе.

3 Предел $d \to 0$: разрывная сила

Рассмотрим вначале предельный случай $d = 0$, когда непрерывная сила $f(x)$ становится разрывной (см. рис.1). Качественное отличие предела состоит в том, что две особенности потенциала при $d > 0$ сливаются теперь в *одну* и следовательно, согласно нашей гипотезе, угол расщеплепри любом K.

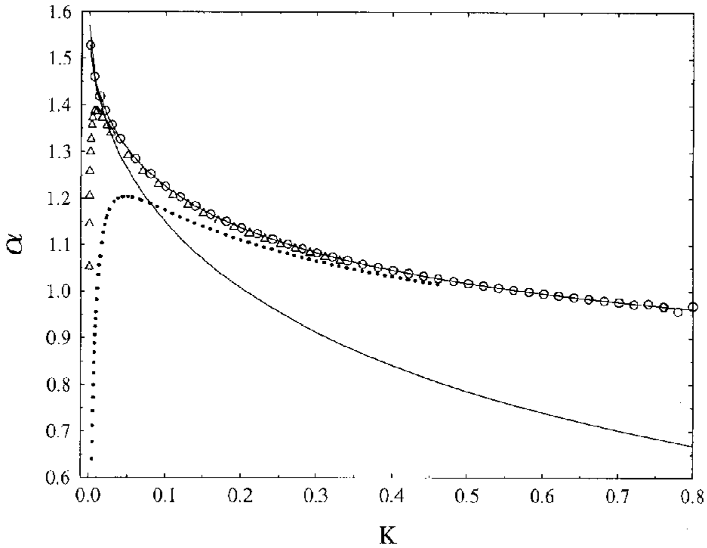

Рис. 3: Зависимость угла расщепления сепаратрисы α от параметра K при значениях $d = 0.01$ (точки), 0.001 (треугольники), $d = 0$ (кружки) по данным численного счета. Нижняя кривая – приближенная теория (3.6), верхняя кривая – точная теория (3.10).

На рис.3 показаны результаты некоторых численных экспериментов как в самом пределе $d = 0$ (кружки), так и в его малой окрестности $d = 0.001$ (треугольники) и $d = 0.01$ (точки). Приведена непосредственно зависимость $\alpha(K)$, так как при $d = 0$ параметр адиабатичности $\lambda = \pi\sqrt{2d/K} = 0$ теряет смысл. Прежде всего видно, что предельный переход $d \to 0$ в модели (2.2) является непрерывным с эмпирической границей (по максимуму $\alpha(K)$):

$$K \sim K_B \sim 7\,d\,. \tag{3.1}$$

Физическая причина, по которой соотношение (2.18) становится неприменимым при $K \gtrsim K_B$ заключается в том, что при его выводе пренебрегается изменением скорости в промежутке между двумя сингулярностями за счет действия первой из них, а также изменением времени пролета Δ между ними (см. ф-лы (2.13) и (2.15)). В прежних переменных переход

Подчеркнем, что отклонение от (2.18) имеет место только при $K \gtrsim K_B$ и не повторяется периодически как зависимость (2.18) (см. кружок в левом верхнем углу рисунка). Таким образом, в пределе $d = 0$ угол расщепления действительно не меняет знак и, следовательно, сепаратриса всегда расщепляется.

Для количественного анализа можно применить тот же метод, что и при $d \neq 0$ (раздел 2). Отличие состоит лишь в том, что теперь разрыв $\Delta f(x) = -2$ имеет сама сила и поэтому достаточно проинтегрировать (2.11) по частям только один раз. Имеем:

$$\Delta H_0 \approx K \int_{-\infty}^{\infty} dt\, p_s\, f(x_s)\, (\delta_1(t) - 1) \approx K p_0 \cdot \Delta f \cdot \dot{\psi}(t_0) \approx -\sqrt{2} K^{3/2} \dot{\psi}(t_0)\,. \tag{3.2}$$

Здесь по прежнему $p_0 \approx \sqrt{K/2}$, а

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{2} - t \mod 1 \tag{3.3}$$

(см. (2.14)). Однако простое выражение (2.18) в приближении малых углов теперь уже неприменимо, поскольку при дифференцировании по t_0 возникает сингулярность:

$$\frac{dH_0}{dt} = -K p_0 \cdot (\delta_1(t) - 1), \tag{3.4}$$

причем производная берется при двух значениях $t = t_0 = 0$ и $1/2$, когда $\Delta H_0 = 0$ (пересечение ветвей сепаратрисы, ф-ла (3.3)). Каждое из этих значений определяет угол наклона соответствующей ветви сепаратрисы относительно оси x (см. рис.4). Сингулярность возникает при $t = 0$ и отвечает углу $\alpha_0 = \pi/2$ ($\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \infty$). Угол другой ветви β определяется соотношением (ср. (2.18)):

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{dp}{dx} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{dH_0}{p_0^2\, dt_0} \approx \frac{K}{p_0} \approx \sqrt{2K}\,. \tag{3.5}$$

Множитель $1/2$ при производной возникает из–за того, что ΔH_0 вычисляется относительно невозмущенной сепаратрисы (сплошная ломаная линия на рис.4), а угол β (как и α_0) берется относительно оси x. Знаки углов определяются с учетом того, что ветвь с α_0 соответствует движению вперед по времени, тогда как другая ветвь – обратному движению (см.[9]). Окончательно, для угла между ветвями сепаратрисы получаем

$$\alpha(K) = \alpha_0 - \beta \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2K}\,. \tag{3.6}$$

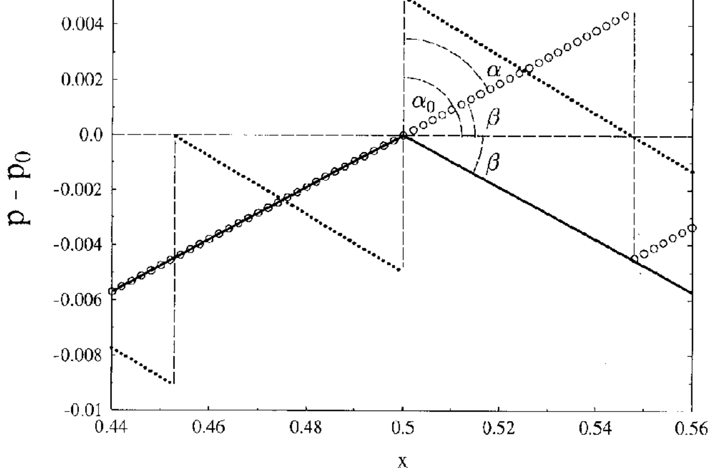

Рис. 4: Пример расщепления сепаратрисы при $K = 0.005$ и $d = 0$: сплошная линия с изломом в точке $x = 0.5$ – невозмущенная сепаратриса (3.7); ветви сепаратрисы представлены точками (вперед по времени) и кружками (назад по времени), разрывы ветвей соединены пунктиром, показывающим последовательность точек; $p_0 \approx 0.04756$ - ордината точки пересечения (3.8).

Эта простая зависимость показана на рис.3 нижней сплошной линией. При малых K она хорошо согласуется с численными экспериментами, однако при увеличении K ошибка возрастает, достигая величины около 40% при $K \approx 0.6$. При бо́льших K вся простая картина расщепления сепаратрисы отдельного резонанса теряет смысл из–за перекрытия многих резонансов (см. ниже).

Ошибка при больших $K \gtrsim 0.6$ связана с приближенным использованием, при вычислении интеграла (3.2), невозмущенной сепаратрисы (см. ф-лы (2.8) и (2.7))

$$p_s(x) = \pm p_0 \cdot (1 - 2|y|) \tag{3.7}$$

с амплитудой $p_0 \approx \sqrt{K/2}$. Интересной особенностью рассматриваемой системы является сохранение формы невозмущенной сепаратрисы (две прямые) под действием возмущения (рис.4). Это позволяет вычислить точное значение $p_0(K)$ при любом K по собственным векторам исходного результате получаем:

$$p_0(K) = \frac{K}{\sqrt{2K + K^2} + K} \,. \tag{3.8}$$

Однако при подстановке этого выражения в (3.5) согласие не только не улучшается, но даже ухудшается:

$$\operatorname{tg}\beta \approx \frac{K}{p_0(K)} > \sqrt{2K} \,. \tag{3.9}$$

Причина этого лежит в другом приближении интеграла (3.2) – сохранении только вклада от скачка силы $\Delta f(x)$. Опять таки, из-за специфической особенности невозмущенной сепаратрисы при $d = 0$ угол β находится точно безо всякого интегрирования прямо из рис.4: $\operatorname{tg}\beta = 2p_0(K)$. В результате получаем:

$$\alpha(K) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2/K}}\right) \,. \tag{3.10}$$

Это выражение представляет наиболее точный результат нашей теории (верхняя сплошная линия на рис.3), который прекрасно совпадает с численным экспериментом (кружки) вплоть до начала перекрытия резонансов. Поясним, что в силу периодичности отображения (2.1) не только по x, но и по p (и с тем же периодом 1), имеется бесконечная система целых резонансов при $p(0) = n\,, H_0 = n^2/2$, где n – любое целое число, как положительное, так и отрицательное, а также нуль. Последний частный случай и рассматривается в настоящей работе. При $p_0 = 1/2$ сепаратрисы соседних целых резонансов начинают перекрываться, что полностью разрушает их структуру. Формально, это происходит лишь в пределе $K \to \infty$ (3.8). Однако фактически такое разрушение начинается значительно раньше из-за перекрытия с промежуточными дробными резонансами (см. [9]). Отметим также, что формально всегда угол расщепления $\alpha > \pi/4 \approx 0.785$ (см. ф–лу (3.10)), однако фактически, и по той же причине, регулярная зависимость $\alpha(K)$ резко обрывается уже при $\alpha \approx 0.96 \approx 55^o\,,\ K = K_{cr} \approx 0.8\,,\ p_0(K_{cr}) \approx 1/3$ (рис.3). При $K > K_{cr}$ ветви сепаратрисы становятся настолько неустойчивыми, что сколько-нибудь надежное измерение угла расщепления не представляется возможным. Интересно отметить, что отклонение ординаты точки пересечения ветвей сепаратрисы $p_0(K)$ согласно (3.8) в этой области (вплоть до $K = 1.24$) не превышает 1%. Однако этого оказывается достаточным для очень сильного и нерегулярного искажения ветвей сепаратрисы.

тра $K < 0.8$ угол расщепления сепаратрисы далеко не достигает нуля, и тем более не меняет знак, а значит сепаратриса всегда расщепляется.

4 Заключение: насколько типично сохранение сепаратрисы?

В настоящей работе предложен и проверен простой механизм нового неожиданного явления - сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса на большей части фазовой плоскости динамической системы [8, 9, 10, 11]. Предлагаемый механизм основан на простой идее об интерференции нескольких сингулярностей в гамильтониане динамической системы, которые и определяют расщепление сепаратрисы нелинейного резонанса. Численные эксперименты и теоретический анализ проводились для семейства 2D–отображений (2.1), в простейшем случае двух сингулярностей, включающего и первый пример Овсянникова [8, 9]. Результаты исследования не только подтвердили и объяснили такой механизм, но и позволили разработать простую теорию для вычисления как специальных значений параметра $K = K_m$, так и зависимости угла расщепления сепаратрисы $\alpha(K)$ в достаточно широком диапазоне параметров K и d, ф–лы (2.19), (3.6) и (3.10).

Отдельно рассмотрен переход к пределу $d \to 0$, в котором сепаратриса расщепляется при любом K (раздел 3). В обратном пределе $d \to 1$ зависимость (2.19) сохраняется, по крайней мере до $d = 0.999$ (рис.2). Следует однако отметить, что в самом пределе ($d = 1$) характер движения качественно изменяется. Прежде всего, движение по сепаратрисе представляет собой просто гармонические колебания (см. (2.7) и рис.1). Помимо этого, внутри резонанса ($H_0 < 0$) траектория движения вообще не достигает сингулярности потенциала в точке $x = 0 \bmod 1$. Наконец, наши предварительные численные эксперименты в этом пределе определенно указывают на очень быстрое уменьшение меры хаотической компоненты с уменьшением K. Было бы чрезвычайно интересно продолжить исследование этой специальной динамической системы.

В настоящей работе мы рассматривали только целые резонансы с $p(0) = n$, где n – любое целое. Как известно (см., например, [2, 3, 9]), дробные резонансы с $p(0) \approx n/q$ имеют такую же структуру в подходящих переменных. Поэтому можно ожидать, что подобный механизм как и его простая теория применимы и для дробных резонансов. В случае это позволило бы не только объяснить сохранение сепаратрисы некоторых дробных резонансов, обнаруженное в численных экспериментах [9, 10, 11], но и распространить этот результат на *все* дробные резонансы. Последнее означало бы, что множество всех специальных значений $K = K_{qn}$, при которых сепаратриса сохраняется, является всюду плотным. В свою очередь, это позволило бы ожидать сильного (хотя и не полного) подавления глобальной диффузии при *любом* значении K (см. [9, 10, 11]).

Интересный и важный вопрос: насколько типичным является сохранение сепаратрисы вообще и его конкретный механизм, в частности. Хорошо известно, что к настоящему времени "сконструировано"большое число примеров, и даже целых семейств, так называемых полностью интегрируемых нелинейных динамических систем (см., например, [13]). В таких системах хаос полностью отсутствует, однако они определенно не являются типичными, а образуют в некотором смысле множество меры нуль в пространстве всех возможных динамических систем. С этой точки зрения новое явление сохранения сепаратрис в хаотической системе представляется более типичным несмотря на весьма ограниченное, в данный момент, число примеров.

Условие существования нескольких сингулярностей потенциала, положенное в основу настоящего исследования, само по себе не является ни необходимым, ни достаточным для сохранения сепаратрисы. С одной стороны, предварительное исследование других примеров показало, что наличие нескольких сингулярностей силы еще не гарантирует сохранение сепаратрисы. Например, если просто продолжить разрывную силу (2.2) с $d = 0$ еще на один период, так что формально появяться две сингулярности, сепаратриса будет по–прежнему разрушаться при любом значении параметра K. В данном случае это происходит из–за того, что потенциал принимает форму двух сопряженных "ям"с неустойчивой неподвижной точкой как раз на границе между ними. В результате невозмущенная сепаратриса всегда оказывается локализованной в одной из них (в зависимости от начальных условий) с единственной сингулярностью.

С другой стороны, в случае аналитического потенциала сингулярности, определяющие расщепление сепаратрисы, могут быть расположены не на действительной оси времени, а в комплексной плоскости. Такая ситуация, по–видимому, действительно наблюдалась в совершенно другой задаче об удержании заряженных частиц в длинной магнитной ловушке Коэна [14] (см. также [15]).

нуль в зависимости от параметра системы, а значит и сохранение сепаратрисы при определенных значениях этого параметра, возможен, в принципе, и для особой формы потенциала безо всяких сингулярностей вообще. Все это несомненно заслуживает дальнейшего исследования.

В заключение можно сказать, что хотя новый эффект сохранения сепаратрисы в хаосе и не является универсальным (любимый термин в современных исследованиях динамического хаоса !), критерий интерференции сингулярностей, как и разработанная на его основе теория (которая легко обобщается на произвольное число сингулярностей), может значительно помочь, как мы надеемся, в исследованиях широкого класса гамильтоновых динамических систем.

Примечание при корректуре.

Мы благодарны Д.Л.Шепелянскому, указавшему на важную и интересную работу [16], которая к сожалению была нам ранее неизвестна. В этой работе проведено подробное математическое исследование как раз того самого отображения, которое мы называем примером Овсянникова. Главным результатом [16] является доказательство существования инвариантных кривых в широком диапазоне значений параметра K и числа вращения ν, включая и рациональные ν.

В этой работе, однако, практически отсутствует рассмотрение также очень интересного и своеобразного предельного случая $\nu = 0$, отвечающего сепаратрисам нелинейных резонансов (об этом лишь кратко упоминается для двух первых критических чисел $K = 1/3$ и $K = 1/8$).

В этом смысле как настоящая работа, так и предшествующие исследования [8,9,10,11] подтверждают и существенно дополняют [16].

Следует отметить, что в доказательствах [16] применяется метод, по идее близкий к тому, что мы назвали интерференцией особенностей, который был впервые предложен и эффективно использован в [17]. Полученные в работах [17,16] результаты показывают, что подобный механизм действительно распространяется на весьма широкий класс динамических задач.

В частности, появление инвариантных кривых с рациональными значениями ν можно интерпретировать как подавление самих резонансов вместе с их сепаратрисами. Один такой "странный"случай для $K = 1/4$ с $\nu = 1/3$ наблюдался в [9], однако его дальнейшее исследование было отложено на будущее.

[1] *V.I. Arnold and A. Avez.* Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin (1968) [Имеется перевод: В.И. Арнольд, А. Авез, *Эргодические проблемы классической механики*, Ижевск (1999)].

[2] *B.V. Chirikov.* Phys. Reports, **52**, 263 (1979).

[3] *A. Lichtenberg and M. Lieberman.* Regular and Chaotic Dynamics, Springer (1992) (Имеется перевод 1-го издания: А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, МИР, Москва (1984)).

[4] *Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев.* Введение в нелинейную физику, Наука, Москва (1988).

[5] *B.V. Chirikov.* Chaos, Solitons and Fractals, **1**, 79 (1991).

[6] *J. Moser.* Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Princeton Univ. Press (1973).

[7] *B.V. Chirikov, E. Keil and A. Sessler.* J. Stat. Phys. **3**, 307. (1971).

[8] *Л.В. Овсянников.* Частное сообщение, май 1999.

[9] *В.В. Вечеславов.* Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты. Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; nlin.CD/0005048.

[10] *В.В. Вечеславов.* Необычная динамика пилообразного отображения, Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск, 1999.

[11] *В.В. Вечеславов.* Подавление динамического хаоса в гамильтоновых системах, Препринт ИЯФ 2000-59, Новосибирск, 2000.

[12] *В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков.* ЖЭТФ, **114**, 1516 (1998).

[13] *B.G. Konopelchenko.* Nonlinear Integrable Equations, Springer (1987).

[14] *R. Cohen.* Stochastic motion of particles in mirror machines, in: *Intrinsic Stochasticity in Plasmas*, Ed. by G. Laval and D. Gresillon, Orsay, Edition de Physique (1979).

[15] *Б.В. Чириков.* Динамика частиц в магнитных ловушках, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, N13, ред. Б.Б. Кадомцев, Москва, Энергоатомиздат (1984).

[16] *S. Bullet.* Commun. Math. Phys. **107**, 241 (1986).

[17] *M. Hénon, J. Wisdom.* Physica, **8**D, 157 (1983).

В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков

Механизм сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса

B.V. Chirikov, V.V. Vecheslavov

Preservation mechanism of a nonlinear resonance separatrix amid strong chaos

ИЯФ 2000-68

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 9.08.2000 г.

Сдано в набор 18.09.2000 г.
Подписано в печать 19.09.2000 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.4 уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ N 68

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр.академика Лаврентьева, 11.