

О Т Ч Е Т

г.н.с. теоретического отдела Института ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН
ак. Чирикова Б.В. за 1999 г.

1. НАУКА

Продолжены численные эксперименты и теоретические исследования по хаосу в динамических системах.

Совместно с В.В. Вечеславовым исследована хаотическая динамика при пересечении сепаратрисы нелинейного резонанса. В таком процессе нарушение адиабатической инвариантности максимально как по скорости диффузии ($\sim \epsilon^2$, где $\epsilon \ll 1$ параметр адиабатичности), так и по размеру хаотической области, которая вообще не зависит от ϵ . Последнее означает сингулярность в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, где система является полностью интегрируемой, а ее движение вполне регулярным. Эта работа была стимулирована исследованиями G. Casati и сотрудников (университет Инсубрия, Комо, Италия), в которых было показано, что в квантовой механике такой переход является непрерывным из-за локализации собственных функций, а значит и диффузии.

Прежде всего мы детально исследовали нарушение адиабатичности при однократном пересечении сепаратрисы. Было показано, что существующая хорошо разработанная теория справедлива только в диффузионной части хаотической области. Дополнительная (баллистическая) область, хотя и относительно мала ($\sim \epsilon^{1/3}$), имеет большое значение, поскольку нарушение адиабатичности здесь максимально. Ранее эта область была пропущена из-за использования специальной версии модели пересечения сепаратрисы, которая хотя и проще для анализа, но оказалась менее интересной.

При многократном пересечении сепаратрисы, что и является наиболее интересной частью нашей работы, скорость диффузии падает за счет корреляций. Было показано, что максимальное подавление диффузии происходит именно в относительно большой окрестности ($\sim 5\epsilon^{1/3}$) баллистической области. Во всей этой области скорость диффузии падает до чрезвычайно низкой величины, что приводит к весьма своеобразной кинетике статистической релаксации. Предполагается продолжить исследования этого интересного и неожиданного явления.

Мы подтвердили незерговичность движения, обнаруженную недавно другим методом А.И. Нейштадтом, В.В. Сидоренко и Д.В. Трещевым, и выяснили ряд новых интересных особенностей регулярной компоненты движения, включая ее относительную меру $\mu_r \approx 0.7\%$ и сложную структуру.

Все эти особенности неадиабатичности удалось объяснить с помощью простого приближенного отображения в переменных действие - фаза (J, ϕ) , которое описывает динамику модели локально по J . Согласно существующей приближенной теории зависимость неадиабатичности от фазы является сингулярной: $\Delta J \sim \epsilon \ln |2 \sin \phi|$. Это качественно меняет структуру движения, а именно хаотическая компонента существует при любом возмущении и, более того, является связанной (единой) во

всей области пересечения сепаратрисы. Из анализа локального отображения вытекает также, что все безразмерные характеристики неадиабатичности, такие как мера регулярной компоненты μ_r , приведенная скорость диффузии D/ϵ^2 и показатель неустойчивости Ляпунова Λ (на период возмущения), не зависят от ϵ .

Наконец, нам удалось найти убедительное подтверждение существования ожидаемой критической структуры вблизи границы хаоса на краю области пересечения сепаратрисы. Это было сделано путем получения эмпирической зависимости $D(\Lambda)$, которая с высокой точностью совпала с предсказанием резонансной теории критических явлений, разработанной ранее совместно с Д.Л. Шепелянским: $D/\epsilon^2 = \Lambda^8$. Мы предполагаем продолжить изучение критических явлений в адиабатических процессах.

Проанализирована теорема Л.В. Овсянникова (Институт гидродинамики СО РАН) о сохранении внутри хаотической компоненты движения нового типа инвариантных кривых (сепаратрис резонансов) в точно решаемой задаче для специально выбранного двумерного отображения с гладкой (пилообразной) силой на некотором счетном множестве значений параметра (амплитуда силы). Этот неожиданный результат имеет большое значение для общей теории динамических систем, поскольку он показывает, что сепаратриса резонанса, которая обычно разрушается (расщепляется) почти любым возмущением, становится при определенных условиях самой устойчивой инвариантной кривой. Численные эксперименты, проведенные В.В. Вечеславовым, подтвердили этот результат и существенно расширили его содержание. Оказалось, что кроме одного, явно вычисленного в теореме множества значений параметра имеется и много других с теми же свойствами. Это позволяет сделать осторожное заключение, что полное множество таких значений является всюду плотным по параметру. Для любого из них глобальная диффузия в хаотической компоненте полностью прекращается, а при близких значениях значительно подавляется. Численные эксперименты в этом направлении продолжаются.

Несколько позднее Л.В. Овсянников доказал вторую теорему, которая формально кажется значительно более сильной: о существовании сепаратрис при любом значении параметра. Однако из нее нельзя сделать важных физических выводов относительно процессов переноса, в частности диффузии в такой системе, как из первой теоремы. Это непосредственно вытекает из численных экспериментов В.В. Вечеславова. Предварительный анализ новой теоремы показывает, что все дело в незначительном, на первый взгляд, изменении определения понятия сепаратрисы. При произвольном значении параметра новая "сепаратриса" не переходит при движении сама в себя и поэтому не является инвариантной кривой. Мы продолжаем детальный анализ этой теоремы. В любом случае это еще один пример, который показывает, что нужно с большой осторожностью относиться к строгим математическим теоремам в части их точной формулировки.

Совместно с В.Г. Давидовским было продолжено исследование хаоса в модели Халатникова - Кройтера. Ранее было показано, что при малой внешней силе f , представляющей тепловую накачку, эта модель удовлетворительно описывает рождение турбулентности второго звука в сверхтекучем гелии. Теперь мы провели исследование структуры хаотического аттрактора в широкой области

f с целью выяснения особенностей хаоса в маломерной диссипативной системе, что представляет интерес для общей теории динамических систем. Для этого в численных экспериментах были измерены зависимости (дробной) размерности аттрактора и показателя Ляпунова от безразмерной силы $F \sim f/\gamma$ (γ - параметр диссипации), которая для маломерных систем может служить аналогом числа Рейнольдса в бесконечномерной гидродинамической турбулентности. Показано, что в отличие от последней в маломерной модели обе зависимости являются логарифмическими, т.е. значительно более медленными, в огромном диапазоне $F \sim 10^5$. Однако, самый интересный результат заключается в том, что логарифмическая зависимость оказалась лишь промежуточной, и переходит в конце концов в степенную как и в многомерной турбулентности. При этом выяснилось, что существует замечательное соответствие между зависимостью от F в диссипативной модели и зависимостью от времени t в предельной консервативной системе $\gamma = 0$. Это соответствие определяется безразмерным произведением $\gamma t = const$. В дальнейшем мы предполагаем более подробно исследовать эту неожиданную взаимосвязь.

Совместно с О.В. Жировым начато исследование квантовой локализации в моделях с гладким гамильтонианом. Целью этой работы является выяснение динамического механизма степенной локализации, наблюдавшейся G. Casati и сотрудниками (университет Инсубрия, Комо, Италия) вместо обычной экспоненциальной для аналитических гамильтонианов. В частности, G. Casati поставил вопрос, можно ли и как обобщить на этот случай классическое диффузионное уравнение с дополнительным членом, описывающим квантовое отражение, которое было предложено мною ранее. В результате предварительных обсуждений и численных экспериментов, проведенных О.В. Жировым, мы пришли к выводу, что такое обобщение невозможно, а механизм степенной локализации связан с эффектом одного "толчка" (в модели, описываемой отображением), т.е. в общем случае с баллистической, а не диффузионной релаксацией волнового пакета. Эта работа будет продолжена совместно с G. Casati во время предстоящей командировки О.В. Жирова в Италию.

Мною было проведено подробное изучение статистики возвратов Пуанкаре при наличии границы хаоса в фазовом пространстве, имеющей промежуточную экспоненциальную асимптотику. Эта новая особенность возвратов была обнаружена ранее И.И. Шевченко (Институт теоретической астрономии, Петербург) при моделировании динамики астероидов в Солнечной системе. Моя гипотеза состояла в том, что экспоненциальная статистика связана с баллистической, а не диффузионной, кинетикой хаотического движения при дополнительном условии относительной малости критической структуры вблизи границы хаоса. Это значит, что вся хаотическая область проходит траекторией за время, сравнимое с затуханием корреляций, а вероятность попадания в область с критической структурой мала. Эта гипотеза была действительно подтверждена на простой и хорошо изученной модели стандартного отображения при специальных значениях параметра, соответствующих наличию малых областей регулярного движения. Однако, в численных экспериментах была обнаружена и другая неожиданная особенность: переход на обычную степенную асимптотику происходил с площади, значительно (на несколько порядков) превышающей область регулярного движения. Замечательной особенностью этой новой области, которую я называю глобальной

критической структурой, является отсутствие в ней характерной в обычном случае сложной иерархической регулярной компоненты движения, которая и вызывает "застревание" траектории. В данный момент моя рабочая гипотеза состоит в том, что застревание в новой области вызывается сильными корреляциями движения, которые непосредственно не видны, но не менее эффективны, чем регулярная компонента. Вполне возможно, что именно эта новая область критической структуры проявляется и в задаче о пересечении сепаратрисы, описанной выше. Конечно, для выяснения этого вопроса нужны дальнейшие исследования глобальной критической структуры.

Работы частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, грант 97-01-00865.

Научные публикации

1. B.V. Chirikov and D.L. Shepelyansky, Asymptotic statistics of Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with divided phase space, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 528 (1999).
2. B.V. Chirikov and F. Vivaldi, An algorithmic view of pseudochaos, *Physica D* **129**, 223 (1999).
3. B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov, Adiabatic invariance and separatrix: Single separatrix crossing, preprint Budker INP 99-52, 1999.
4. B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov, Multiple separatrix crossing: Chaos structure, preprint Budker INP 2000-1, 1999.
5. B.V. Chirikov, Poincaré recurrences in microtron and the global critical structure, preprint Budker INP 99-7, Новосибирск, 1999.
6. B.V. Chirikov and V.G. Davidovsky, Dynamics of a simple model for turbulence of the second sound in helium II, preprint Budker INP 99-70, 1999.
7. B.V. Chirikov and V.G. Davidovsky, The structure of chaotic attractor in a few-freedom dynamical system, preprint Budker INP 99-96, 1999.

3. НАУЧНО-ОРГАНИЗАЦИОННАЯ РАБОТА

1. Ученый совет ИЯФ
2. Спецсовет Д.002.24.02 при ИЯФ
3. Объединенный ученый совет СО РАН по физико-техническим наукам
4. Экспертная комиссия по присуждению золотой медали имени П.Н. Лебедева
5. Экспертная комиссия по присуждению золотой медали имени Л.Д. Ландау
6. Редакция международного журнала "Chaos, Solitons & Fractals"

Б.В. Чириков

1 января 2000 г.