О Т Ч Е Т

г.н.с. теоротдела Института ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН
ак. Чирикова Б.В. за 2000 г.

НАУКА

Продолжены численные эксперименты и теоретические исследования по хаосу в классических динамических системах.

Основным направлением исследований было новое явление сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса. Теорема о сохранении сепаратрисы (вне связи с нелинейными резонансами и хаосом) была доказана Л.В. Овсянниковым (Ин-т гидродинамики СО РАН) в 1999 г. для простой модели - двумерного канонического отображения с одним параметром. Впоследствии выяснилось, что частично (но не полностью) эта теорема была доказана еще в 1986 г. С. Булитом (S. Bullett, Queen Mary College, England). В обеих работах, однако, математическое решение оказалось возможным только для сохраняющейся (нерасщепленной) сепаратрисы при определенных значениях параметра модели. Напротив, наши исследования с В.В. Вечеславовым (ИЯФ) были направлены с самого начала (1999 г.) на выяснение и объяснение очень сложной хаотической динамики системы в окрестности сохраняющейся сепаратрисы, как в фазовом пространстве, так и по параметру системы.

В отчетном году наши основные усилия были посвящены поиску динамического механизма подавления расщепления сепаратрисы. Нам удалось решить эту задачу причем ответ оказался очень простым, почти тривиальным (постфактум !). Все дело в том, что исследованные отображения являются лишь гладкими, а не аналитическими, и потому обычно имеют сингулярности типа разрыва производных. Если таких сингулярностей хотя бы две, они интерферируют и при определенных значениях параметра гасят друг друга, что и предотвращает расщепление сепаратрисы. Опять таки выяснилось, что подобный механизм рассматривался (для другой задачи) уже в 1983 г. М. Эноном и Дж. Виздомом (M. Henon, J. Wisdom, Observatoire de Nice, France). Однако в отличие от этих авторов нам удалось развить приближенную теорию [6], которая позволяет построить полную зависимость угла расщепления сепаратрисы от параметров системы и найти, в частности, те их специальные значения, при которых сепаратриса остается нерасщепленной. Результаты наших численных экспериментов подтверждают теоретические выводы для определенного класса динамических гамильтоновых систем. Одной из дальнейших задач в этом направлении является как расширение области возможного применения предлагаемого механизма, так и развитие его теории.

До сих пор мы исследовали, в основном, только целые резонансы, т.е. резонансы с целым числом вращения $\nu = n$ (отношение частот колебаний и возмущения). Как известно, дробные резонансы ($\nu = n/m$) имеют такую же структуру в подходящих переменных. Поэтому можно ожидать, что подобный механизм как и его простая теория применимы и для дробных резонансов. В случае подтверждения, которое мы надеемся получить в ближайшее время, это позволило бы объяснить сохранение сепаратрисы некоторых дробных резонансов, предсказанное еще Булитом и обнаруженное в численных экспериментах Вечеславова. Хотя совокупность всех дробных резонансов в фазовом пространстве является всюду плотной, множество всех специальных значений параметра, при которых сепаратриса сохраняется, не является таковым по Булиту. Однако их средняя плотность достаточно велика и можно ожидать сильное (хотя и не полное) подавление глобальной диффузии при любом значении параметров системы. Эта гипотеза подтверждается дополнительно большим количеством периодических инвариантных кривых (не сепаратрис, $\nu \neq 0$), как обычных с иррациональным числом вращения ν, так и новых с рациональным ν, что и было основным содержанием работы Булита. Мы предполагаем, что появление последних можно интерпретировать как подавление самих резонансов вместе с их сепаратрисами. Один такой "странный" случай с $\nu = 1/3$ действительно наблюдался Вечеславовым, однако его дальнейшее исследование было отложено (на будущее тысячелетие !).

Другое направление моих исследований (совместно с О.В. Жировым, ИЯФ) посвящено свойствам больших флуктуаций энтропии и подобных ей величин, которые так или иначе связаны со Вторым "принципом" термодинамики - основой фундаментальных статистических законов физики. Это направление возникло из обсуждения на нескольких семинарах, а также из частных дискуссий, весьма странного и устойчивого заблуждения относительно "необратимости" статистических законов (пресловутая "стрела времени", но только для статистических законов !). Это недоразумение зашло так далеко, что захватило даже главную международную конференцию по статистической физике (Proc. 20th IUPAP Intern. Conference on Statistical Physics (Paris, 1998), Physica A **263**, 516 - 544 (1999)), во время которой был организован специальный "Круглый стол по необратимости" (!). Сама по себе эта "проблема" является скорее философской, чем научной в физике. Поэтому я быстро отказался от попыток включиться в эти странные дебаты. Анализ типичных аргументов поклонников "стрелы времени" привел меня к заключению, что истоки недоразумения лежат в недооценке фундаментальной (а не только прикладной) роли больших флуктуаций в статистической физике и вытекающей отсюда "вере"(!) в монотонный рост энтропии в неравновесных процессах. Так возник цикл работ по динамике и статистике больших флуктуаций [7-11].

Физика больших флуктуаций исследована относительно мало и еще меньше известна широкому кругу физиков (даже, как это не странно, специалистам в области статистической физики !). Проблема эта представляет, по моему, большой интерес независимо от философских споров. Нашим главным достижением в этой области было четкое разграничение двух принципиально различных (по отношению к рассматриваемой проблеме) классов динамических систем: допускающих и не допускающих (устойчивое) состояние статистического равновесия (сокращенно КР - конечная по времени релаксация к такому равновесию и БР - бесконечная "релаксация" неизвестно куда). Системы КР обычно, но не обязательно, конечны и в фазовом пространстве, а системы БР всегда бесконечны.

Модели систем класса КР неизмеримо проще для исследования, особенно в численных экспериментах [7]. Пожалуй, самое главное, что в этом и только в этом классе систем можно с самого начала отказаться от рассмотрения запутанной проблемы начальных условий, и вместо этого просто наблюдать (в длинном счете) спонтанное рождение и гибель произвольно больших флуктуаций для любого начального состояния динамической модели. Была проведена большая серия численных экспериментов на простой гамильтоновой модели классической механики с двумя степенями свободы и сильным хаосом, описываемой модифицированным отображением Арнольда. Основным результатом этих исследований были статистические свойства больших флуктуаций, полученные из анализа длинной цепочки случайных реализаций некоторой средней ("макроскопической") флуктуации, заданной параметрами модели и начальными условиями движения. Последние влияют только на отдельные реализации флуктуации, но не на ее статистические ("макроскопические") характеристики. Наиболее интересной (и малоизвестной) из них является полная симметрия флуктуации относительно её максимума (минимума энтропии), который также задается в численном счете для статистического анализа конкретной флуктуации по её реализациям. Было показано, что эволюция отдельной флуктуации по обе стороны максимума хорошо описывается "макроскопической" кинетикой, которая в зависимости от условий отбора может быть как быстрой (баллистической), так и медленной (диффузионной). При этом перед максимумом флуктуации, на стадии её роста, энтропия уменьшается, т.е. идет антидиффузия (без обращения времени !). Это является наиболее интересной особенностью больших флуктуаций. После максимума происходит обычная релаксация с ростом энтропии. Существенно, что такая симметричная картина в точности сохраняется и при обращении времени в соответствии с симметрией уравнений движения. Эти результаты согласуются с фундаментальной теоремой Колмогорова (1937 г. !), которая, к сожалению, практически неизвестна физикам. Новым элементом в наших исследованиях было распространение результатов этой теоремы, доказанной для (стохастического) уравнения диффузии, на хаотические динамические системы, в том числе и для баллистической кинетики. Другой интересной и неожиданной особенностью больших флуктуаций является их необычная устойчивость по отношению к возмущениям любой величины, как регулярным, так и стохастическим, несмотря на экспоненциальную локальную неустойчивость движения. Наши численные эксперименты показали, что эта сильная неустойчивость влияет лишь на момент спонтанного роста очередной реализации флуктуации, но не на её макроскопическую эволюцию, которая по-прежнему определяется соответствующей кинетикой (конечно, с учетом возмущения). Эти результаты также согласуются с важной теоремой Аносова (Ин-т математики РАН) о грубости хаотической динамики, и опять таки распространяют её на более широкий класс динамических систем, недоступный для строгого анализа. Наконец, цепочка реализаций большой флуктуации аналогична, а в некоторых случаях и тождественна, хорошо известным возвратам Пуанкаре в малую область фазового пространства, которые в свою очередь являются частным случаем больших флуктуаций. Повидимому, новым элементом здесь оказалась малоизвестная возможность описания таких возвратов уравнениями обращенной кинетики, например антидиффузии, опять таки без обращения времени или, лучше сказать, для обоих направлений времени. Помимо такой качественной картины, нам удалось найти простое эмпирическое соотношение для среднего периода между реализациями флуктуации ("цикл" Пуанкаре), которое подтверждено в численных экспериментах. Другим "побочным" результатом оказалось новое представление энтропии через дисперсию небольшого числа траекторий ("частиц"), которое значительно облегчает вычисления при сохранении достаточно высокой точности для больших флуктуаций.

В динамических системах класса БР исследования больших флуктуаций практически отсутствуют из-за чрезвычайно серьезных технических трудностей численного моделирования. Однако недавно (около 1990 г.) появилась интересная возможность обойти эти трудности с помощью замены бесконечного термостата "хитрой" силой "трения" обратимой во времени (так называемый термостат Гаусса). Ценой такого гигантского упрощения динамических моделей БР оказалось катастрофическое сокращение области их применимости к физическим системам БР. Практически, термостат Гаусса можно использовать только для моделирования неравновесного стационарного состояния, что и было сделано во многих работах последнего времени. При этом выяснилось, что свойства больших флуктуаций даже в таком специальном случае качественно отличаются от таковых в моделях КР. Именно с помощью моделей неравновесного стационара была впервые четко выявлена, хотя и не понята, немонотонность роста энтропии и сформулирован так называемый Закон ("теорема") флуктуаций, выражающий (неявно для авторов !) эту немонотонность. Было показано, что так называемые локальные флуктуации в ансамбле фиксированных интервалов времени вдоль траектории приближенно описываются распределением Гаусса (фактически это есть главное условие для применимости Закона флуктуаций), неограничены по величине и могут легко и даже с большой вероятностью превосходить средний рост энтропии в стационаре. Я повторил [9] эти исследования на еще более простой модели с термостатом Гаусса и подтвердил полученные ранее результаты. Однако более существенным было исследование флуктуаций другого типа, которые я назвал глобальными [9]. Это флуктуации непрерывной зависящей от времени энтропии $S(t)$ с начальным значением $S(0) = 0$. Здесь главный вопрос состоял в том, могут ли такие флуктуации вернуть энтропию к начальному состоянию и ниже $(S(t) < 0)$? Численные эксперименты показали, что в случае нормальной диффузии, с дисперсией пропорциональной времени, вероятность появления отрицательных значений энтропии не только экспоненциально убывает со временем, но при достаточно больших t величина $S(t) < S_{min} \to \langle S(t) \rangle$ имеет строгий нижний предел близкий к среднему значению энтропии. Наличие такого неожиданного для хаотического процесса абсолютного барьера устанавливается знаменитой теоремой Хинчина (1924 г.), которая к сожалению почти неизвестна физикам. Такой барьер полностью исключает возвраты к начальному состоянию с низкой энтропией. Однако предварительные численные эксперименты и теоретические оценки (с использованием последних результатов Боровкова (Ин-т математики СО РАН)) в специальном случае так называемой критической динамики со сверхдиффузией, когда дисперсия растет пропорционально t^2, указывают, напротив, на существование бесконечного числа возвратов к начальному и еще более низким состояниям. Эта чрезвычайно интересная задача требует, конечно, дальнейших подробных исследований.

Для модели КР [7] исследовались также локальные флуктуации [8]. Нам было интересно сравнить такие флуктуации в условиях переходного (временного) неравновесного состояния (большая флуктуация) и в неравновесном стационаре модели [9]. Мы предполагали, что в обоих случаях флуктуации должны быть похожи при условии, что размер интервалов значительно меньше полного времени роста/релаксации большой флуктуации. Последний случай представляет особый интерес, поскольку на фоне большой флуктуации понятия "правильной" и "неправильной" локальной флуктуации меняются местами при прохождении максимума большой флуктуации. Численные эксперименты качественно подтвердили эту гипотезу и позволили сформулировать аналогичный закон флуктуаций для переходного неравновесного процесса. В нашей формулировке [7,9] этот закон выражается интегралом (для нормальной диффузии)

$$P(F) = \int_F^\infty \frac{\exp\left(-s^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}\, ds \approx \frac{\exp\left(-F^2/2\right)}{2(F+1)}$$

который дает вероятность "неправильной" флуктуации в зависимости от параметра F, равного отношению среднего по модулю изменения энтропии к её стандартному отклонению. Последнее выражение представляет любопытное приближение интеграла от распределения Гаусса, которое при всей его простоте имеет относительную точность $|\Delta P/P| < 0.05$ лучше 5% в огромном диапазоне $P \gtrsim 10^{-4}$, охватывающем больше 5 порядков величины P ! Асимптотически, при $F \to \infty$, ошибка $|\Delta P/P| \to \sqrt{\pi/2} - 1 \approx 0.25$ возрастает, но все еще остается удивительно небольшой. Однако эмпирическая вероятность "неправильных" флуктуаций оказалась в этом случае на три порядка (!) меньше, чем в неравновесном стационаре. Причину столь большого неожиданного различия еще предстоит исследовать. Результаты [8] указывают, повидимому, что это связано каким-то образом с большими корреляциями локальных флуктуаций по времени. Возможно, что такие корреляции возникают из-за того, что кинетика локальных флуктуаций в модели КР является медленной (диффузионной) как и для самой большой флуктуации, тогда как для неравновесного стационара она была случайно (без достаточного анализа) выбрана быстрой (баллистической). В последнем случае её легко сделать тоже медленной, и наша новая гипотеза [8] состоит в том, что при этом непонятное количественное различие между моделями БР и КР будет таким образом объяснено и устранено.

В работах [7,9] кратко обсуждается также отношение наших результатов к затянувшимся дебатам о статистической "необратимости" и "стреле времени". Этому же посвящены и краткие комментарии [10,11]. В первом из них мы весьма эмоционально возражаем против дальнейшей эскалации "парадокса необратимости" путем введения теперь уже двух (!) "стрел времени" противоположного направления, мирно сосуществующих в разных частях вселенной. Помимо того, что это просто невозможно по динамике хаотической системы, в критикуемой работе рассматривается модель КР, которая совершенно несовместима с динамикой вселенной. Вместо этого мы предлагаем ввести новое понятие - "термодинамическая стрела", которая направлена в сторону (немонотонного, в среднем) увеличения энтропии и остается инвариантной при обращении времени [9,7].

Модели КР представляют также прекрасную возможность для обсуждения "принципа" макроскопической причинности [9,7]. В случае больших флуктуаций этот "принцип" выполняется только на стадии релаксации флуктуации и нарушается на предшествующей стадии её роста независимо от направления времени. Всю эту картину можно охарактеризовать также новым понятием - "стрела причинности", которая направлена от полностью независимой макроскопической причины (малая энтропия) к её "правильному" следствию (рост энтропии). Обе стрелы, причинная и термодинамическая, всегда направлены в одну и ту же сторону независимо от направления времени. Подробному анализу макроскопической причинности будет посвящена отдельная работа, которую я подготавливаю сейчас к публикации.

Работы частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, грант 97-01-00865.

Публикации

1. B.V. Chirikov, Poincaré recurrences in microtron and the global critical structure, nlin.CD/0006013, 2000.
2. B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov, Adiabatic Invariance and Separatrix: Single Separatrix Crossing, ЖЭТФ **117** (2000) 644.
3. B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov, Multiple Separatrix Crossing: Chaos Structure, ЖЭТФ **117** (2000) 1030.
4. B.V. Chirikov and V.G. Davidovsky, Dynamics of a simple model for turbulence of the second sound in helium II, nlin.CD/0006018, 2000.
5. B.V. Chirikov and V.G. Davidovsky, Few-Freedom Turbulence, nlin.CD/0006020, 2000.
6. В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков, Механизм сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса, препринт ИЯФ 00-68, Новосибирск, 2000.
7. B.V. Chirikov and O.V. Zhirov, Big Entropy Fluctuations in Statistical Equilibrium: The Macroscopic Kinetics, nlin.CD/0010056, 2000.
8. B.V. Chirikov and O.V. Zhirov, Big Entropy Fluctuations in Statistical Equilibrium: The Fluctuation Law (подготовлена к печати).
9. B.V. Chirikov, Big Entropy Fluctuations in Nonequilibrium Steady State: A Simple Model with Gauss Heat Bath, nlin.CD/0006033, 2000.
10. G. Casati, B.V. Chirikov and O.V. Zhirov, How many "arrows of time" do we really need to comprehend statistical laws? Phys. Rev. Lett. **85**, 896 (2000).
11. B.V. Chirikov and O.V. Zhirov, On the Fluctuation Law(s) for Hamiltonian systems (with equilibrium steady state), cond-mat/0009125, 2000.

ОРГРАБОТА

1. Ученый совет ИЯФ

2. Спецсовет Д.002.24.02 при ИЯФ

3. Объединенный ученый совет СО РАН по физико–техническим наукам

4. Экспертная комиссия по присуждению золотой медали имени П.Н. Лебедева

5. Экспертная комиссия по присуждению золотой медали имени Л.Д. Ландау

6. Редколлегия международного журнала "Chaos, Solitons & Fractals"

Б.В. Чириков

13 января 2001 г.