

Академия наук СССР
Журнал «Приборы и техника эксперимента»
№ 5, 1957 г.

УЧЕТ ПЕРЕКРЫТИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ПЛОТНОСТИ СЛЕДА
В ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ

М. Ф. Ломанов, Б. В. Чириков

УЧЕТ ПЕРЕКРЫТИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ПЛОТНОСТИ СЛЕДА В ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ

М. Ф. ЛОМАНОВ, Б. В. ЧИРИКОВ

(Получено 11 марта 1957 г.)

Производится сравнение различных методов учета перекрытия при измерении плотности следа в пузырьковой камере. Показано, что для малых перекрытий ($gD' < 2$) наиболее удобным является метод скважности следа с округлением, а для больших перекрытий ($gD' > 2$) метод числа просветов.

В работе [1] обоснована возможность измерения ионизирующей способности (плотности следа) частиц в пузырьковой камере и предлагаются методы ее измерения в широком диапазоне. Целью данной работы является обзор различных методов измерения плотности следа и анализ статистических ошибок. Под плотностью следа мы будем понимать, как и в работе [1], первоначальное число зародышевых пузырьков на единицу длины следа, возникших в жидкости под действием заряженной частицы.

Если плотность следа достаточно мала, ее определение сводится к простому подсчету числа изображений пузырьков на фотографии следа. В обычных же условиях необходимо учитывать случайное перекрытие изображений пузырьков, что делает невозможным прямое измерение плотности следа. Аналогичная задача возникает при измерении плотности зерен в ядерных фотоэмульсиях, где соответствующая методика подробно разработана, но не всегда применима к пузырьковой камере, так как структуры следа различны в обоих случаях. Различие состоит в том, что свойства перегретой жидкости одинаковы в любой точке, а фотоэмульсия имеет зернистое строение [2].

Для дальнейших расчетов примем следующую упрощенную картину следа. Будем считать, что изображения пузырьков имеют вид кружков одного и того же диаметра D , центры которых расположены случайно вдоль прямой линии со средней плотностью g . Такое приближение хорошо выполняется в случае пузырьковой камеры в отличие от камеры Вильсона и диффузионной камеры, где имеет место значительный разброс диаметров изображений из-за диффузии ионов в газе. Вероятность различных расстояний z между центрами пузырьков получается из распределения Пуассона и имеет вид:

$$w(x) dx = g \cdot \exp(-gx) dx. \quad (1)$$

При перекрытии след состоит из сгустков и просветов и приобретает вид, схематически изображенный на рис. 1, а. Просветы между изображениями пузырьков, центры которых находятся на расстояниях,

меньших D , не будут видны, а длины остальных просветов сократятся на D . Интегральное распределение длин просветов получим из (1):

$$P(l) = \exp(-gl). \quad (2)$$

Эксперимент подтверждает распределение (2), за исключением очень коротких просветов

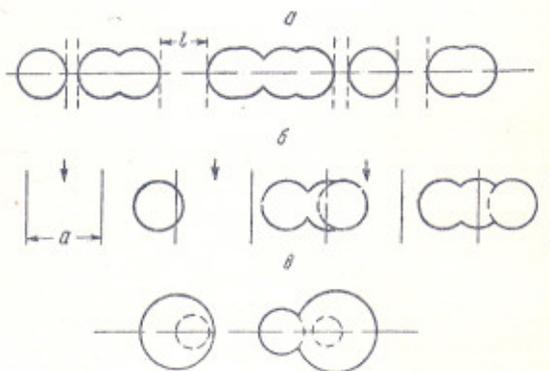


Рис. 1

($l < l_0 \sim D/2$), которые поэтому необходимо отбрасывать при измерении [1]. Если длины всех оставшихся просветов также уменьшить на l_0 , то это эквивалентно увеличению диаметра изображения пузырька до $D' = D + l_0$. Такой прием позволяет упростить дальнейшие вычисления.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим следующие методы измерения плотности следа.

1. Плотность просветов, больших l_0 , или среднее число таких просветов на единицу длины следа.

2. Средняя длина просветов, больших l_0 .

3. Сквасность следа, или среднее отношение суммарной длины всех просветов, больших l_0 , к длине следа.

Пользуясь распределением (2), можно вывести соотношения, позволяющие вычислять плотность следа g по измеряемым величинам. Статистическую точность определения g можно найти приближенно по обычной формуле [3]:

$$\Delta g = |dg/dx| \Delta x, \quad (3)$$

где x — измеряемая величина, а $\Delta x = \sqrt{(x-\bar{x})^2}$ — ее средняя квадратичная флюктуация. При этом в ряде случаев можно воспользоваться результатами работ [4, 5], где вычисляются просчеты в счетчиках, мертвое время которых не зависит от предшествующих импульсов. Для того чтобы эти расчеты были приложимы к нашему случаю, следует заменить центр изображения пузырька каким-нибудь его краем, например левым. Тогда диаметр изображения будет эквивалентен мертвому времени счетчика.

Перейдем к разбору отдельных методов.

1. *Плотность просветов.* Средняя плотность просветов n , больших l_0 , и дисперсия их распределения $(\Delta n)^2$ равны, согласно [4]:

$$n = g \cdot \exp(-\gamma) \quad (4)$$

$$(\Delta n)^2 = (g/L) \exp(-\gamma) [1 - 2\gamma \exp(-\gamma)], \quad (5)$$

где L — полная длина следа, $\gamma = gD' = g \times (D + l_0)$. Статистическая ошибка определения g равна, согласно (3):

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{D'/L} (\exp \gamma / \gamma - 2)^{1/2} |1 - \gamma|^{-1}. \quad (6)$$

Основной недостаток этого метода — непригодная для измерения область вблизи $\gamma = 1$ (рис. 2), где ошибки велики.

2. *Средняя длина просветов.* Основные соотношения получаются непосредственно из (2):

$$\lambda = 1/g \quad (7)$$

$$(\Delta \lambda)^2 = \lambda^2 / nL \quad (8)$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{D'/L} (\exp \gamma / \gamma)^{1/2}. \quad (9)$$

Здесь λ — средняя длина просветов, уменьшенных на l_0 . Иногда удобно применять округление длины просветов до целого числа делений измерительной шкалы [6].

3. *Сквасность следа.* Как и в предыдущем методе, будем уменьшать все просветы

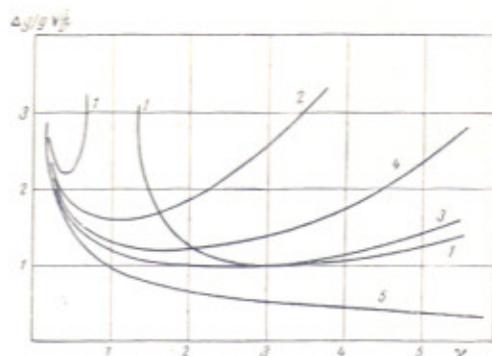


Рис. 2. Сравнение точности различных методов учета перекрытия. 1 — плотность просветов, 2 — средняя длина просветов, 3 — сквасность следа, 4 — сквасность следа с округлением, 5 — точность в отсутствие перекрытия

на длину l_0 , а просветы, меньшие l_0 , отбрасывать. Согласно [4], получим для средней сквасности ν и дисперсии $(\Delta \nu)^2$:

$$\nu = \exp(-\gamma), \quad (10)$$

$$(\Delta \nu)^2 = (2/Lg) \exp(-\gamma) \times [1 - (1 + \gamma) \exp(-\gamma)], \quad (11)$$

откуда

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{D'/L} \sqrt{2} \gamma^{-3/2} (\exp \gamma - \gamma - 1)^{1/2}; \quad (12)$$

Этот метод отличается большой точностью, но трудоемок, так как требует измерения длины просветов. Для упрощения обработки можно применять округление, например следующим образом. На след накладывается шкала, разбитая делениями на ячейки длины a . Считается число ячеек, в которых не находится ни одного центра изображения. Так как положение центра непосредственно не видно, то его можно заменить, как это отмечалось выше, каким-нибудь краем, например левым. На рис. 1, б дана схематическая картинка следа, на которой стрелками отмечены считающиеся ячейки. Поскольку необходимо отбрасывать просветы короче l_0 , должно выполняться неравенство $a \geq D + l_0$.

Вероятность того, что ячейка будет свободна, равна $\exp(-ga)$. Вероятность того, что из m ячеек будет сосчитано n , подчиняется биномиальному распределению. Отсюда легко найти среднее отношение числа сосчитанных ячеек к числу всех ячеек (ок-

ругленная скважность следа ν_0) и дисперсию распределения $(\Delta\nu_0)^2$:

$$\nu_0 = \exp(-ga). \quad (13)$$

$$(\Delta\nu_0)^2 = m^{-1} \exp(-ga)(1 - \exp(-ga)); \quad (14)$$

при $a = D'$ и $m = L/a$ имеем:

$$\Delta g/g = \sqrt{D'/L} \gamma^{-1} (\exp \gamma - 1)^{1/2}. \quad (15)$$

В случае небольших gD' , удобнее, разумеется, считать не свободные ячейки, а занятые. Среднее отношение числа занятых ячеек к числу всех ячеек равно $1 - \nu_0$, а статистические ошибки, как легко показать, будут также выражаться формулой (15), которая для $gD' < 1$ принимает следующий простой вид:

$$\Delta g/g = 1/\sqrt{N}, \quad (16)$$

где N — полное число занятых ячеек.

Сравнение точности различных методов дано на рис. 2. Кривая 5 соответствует максимальной возможной точности — при отсутствии перекрытия, равной $1/\sqrt{gL}$.

Из сопоставления кривых, относящихся к различным методам, видно, что наилучшую точность дают: метод скважности следа при $gD' < 2,9$ и метод плотности просветов при $gD' > 2,9$. Метод средней длины просветов значительно уступает методу скважности. Метод скважности с округлением менее точен, чем без округления, но зато более удобен, так как не требует измерения длины просветов и потому выгоден при $gD' < 2$.

Для увеличения точности следует уменьшать D . Минимальное значение D определяется разрешением пленки и равно примерно 20 мк. g также можно изменять при заданной скорости частицы, регулируя чувствительность пузырьковой камеры. Пользуясь этим, можно существенно расширить пределы измерения плотности следа. Так, например, если выбрать $g_{\text{мин}} D' = 0,25$, можно измерять плотности следов, отличающиеся в 25 раз, причем во всем этом диапазоне точность измерений различается всего лишь в два раза.

РАЗБРОС ДИАМЕТРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПУЗЫРЬКОВ

Мы предполагали, что изображения всех пузырьков имеют одинаковый диаметр. В действительности имеет место распределе-

ние изображений по их диаметру $Q(D)$. Можно показать, что формулы (4), (7), (10) остаются справедливыми для любого $Q(D)$, если заменить в них D его средним значением, которое может быть найдено с достаточной степенью точности по многим следам. Для скважности следа это вытекает из работы [5], где показано, что вероятность попадания произвольной точки следа в просвет равна $\exp(-g\bar{D})$ и не зависит от $Q(D)$. Для плотности просветов это выведено в работе [7]. Так как средняя длина просветов может быть получена непосредственно из выражения для плотности просветов, то формула (7) также сохраняется для любого $Q(D)$. Этот вывод расходится с результатами работ [8, 9], поскольку в последних не учитываются перекрытия типа изображенных на рис. 1, в.

Статистические ошибки несколько увеличиваются из-за разброса диаметров изображений. Рассмотрим это на примере первого метода. Прием для простоты, что функция распределения диаметров имеет вид прямоугольника со средним значением D и шириной 2σ . Тогда из общей формулы работы [7] получим для $(\Delta n)^2$ вместо (5):

$$(\Delta n)^2 = (g/L) \exp(-\gamma) [1 - 2\gamma \exp(-\gamma) + 1/3 \exp(-\gamma)(g\sigma)^2] \quad (17)$$

При расчете принималась $g\sigma < 1$, что выполняется, так как обычно $\sigma/D \ll 1$ [1]. Таким образом, дополнительная ошибка невелика.

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА

Поскольку связь между g и α (измеряемая величина) нелинейная, то при усреднении значений g , полученных для группы следов, будет возникать систематическая ошибка.

Действительно:

$$\begin{aligned} \bar{g} &\approx \int [g(\bar{\alpha}) + (\alpha - \bar{\alpha}) g'(\bar{\alpha}) + \\ &+ 1/2 (\alpha - \bar{\alpha})^2 g''(\bar{\alpha})] w(\alpha) d\alpha = \\ &= g(\bar{\alpha}) + 1/2 (\Delta\alpha)^2 g''(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $w(\alpha)$ — распределение по измеряемой величине. Систематическая ошибка равна:

$$(\Delta g/g)_{\text{сист}} = 1/2 (\Delta\alpha)^2 g''/g. \quad (19)$$

Так как статистическая ошибка среднего значения g , полученного из N следов, составляет $(\Delta g/g)_N = \Delta\alpha \cdot g'/g \sqrt{N}$, то имеем

$$(\Delta g/g)_{\text{сист}} / (\Delta g/g)_N = 1/2 \sqrt{N} \Delta\alpha \cdot g''/g'. \quad (20)$$

Для грубой оценки можно принять, что $g''/g' \sim 1/\bar{\alpha}$ и $\Delta\alpha/\bar{\alpha} \sim 1/\sqrt{nL}$. Используя (20) найдем, что обе ошибки сравниваются, когда число следов порядка числа просветов в следе.

Если усреднение производится для группы частиц с одной и той же плотностью следа, то для устранения систематической ошибки необходимо сначала усреднить измеряемую величину (α) по всем следам, а затем перейти к g . Такой способ нельзя осуществить, если для различных следов применяются по каким-либо причинам различные методы измерения. В этом случае для устранения систематической ошибки необходимо исправлять значение (g_i) плотности для каждого следа, вычитая из него величину $1/2 g''(\alpha_i) (\Delta\alpha_i)^2$, специально вычисленную для этого следа. Подобным же образом необходимо устранять систематическую ошибку при вычислении по g какой-либо другой физической величины, например массы частицы.

МАЛАЯ СТАТИСТИКА

Формула (3) для вычисления статистической ошибки измерения g справедлива, если флуктуации измеряемой величины ($\Delta\alpha$) достаточно малы, т. е. полное число просветов в следе (nL) достаточно велико. Для оценки точности формулы (3) воспользу-

емся вместо нее более строгой формулой:

$$(\Delta g)^2 = (\overline{x - \bar{x}})^2 g'^2 + (\overline{x - \bar{x}})^3 g' g'' + (\overline{x - \bar{x}})^4 \times \\ \times \left[\frac{g''^2}{4} + \frac{g' g'''}{3} \right] - [(\overline{x - \bar{x}})^2]^2 \frac{g''^2}{4}, \quad (21)$$

которая легко получается разложением $g(\alpha)$ в ряд Тейлора вокруг $\bar{\alpha}$, аналогично (18). Величина $(\overline{x - \bar{x}})^2$ связана с несимметрией функции распределения $\bar{w}(\alpha)$ и потому мала. Кроме того, для грубой оценки можно считать, что $(\overline{x - \bar{x}})^4 \sim (\Delta\alpha)^4 \sim 1/n^2 L^2$. Тогда

$$\Delta g = g' \Delta\alpha [1 + \varphi(\bar{\alpha})/nL]^{1/2}, \quad (22)$$

где $\varphi(\bar{\alpha})$ — комбинация производных функции $g(\alpha)$. Формула (22) дает некоторое представление о точности (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Блинов, Ю. С. Крестников, М. Ф. Ломанов. ЖЭТФ, 1956, 31, 762.
2. C. Castagnoli, G. Cortini, A. Manfredini. Nuovo Cim., 1955, 2, 301.
3. И. В. Дуни-Барковский, П. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике, 1955, 92. ГИТТЛ.
4. C. Domb. Proc. Camb. Phil. Soc., 1947, 43, 329.
5. L. Takacs. Proc. Camb. Phil. Soc., 1956, 52, 488.
6. В. В. Бовин, П. А. Крупчицкий, И. И. Першин, Б. В. Чириков. ПТЭ, 1957, 3, 19.
7. J. M. Hammersley. Proc. Camb. Phil. Soc., 1953, 49, 623.
8. W. W. Harper, T. E. Hull, A. H. Morish. Canad. J. Phys., 1952, 30, 699.
9. J. M. Blatt. Aust. J. Phys., 1955, 8, 248.