Атомная энергия 6, 630 (1959)

Резонансные процессы в магнитных ловушках

Б. В. Чириков

Рассмотрены резонансы между ларморовским вращением заряженной частицы в магнитном поле и медленными колебаниями ее вдоль силовых линий. Показано, что эти резонансы могут при определенных условиях привести к полному обмену энергией между степенями свободы частицы и выходу ее из ловушки. Рассмотрено также влияние резонансов на адиабатические процессы, связанные с изменением магнитного поля во времени.

Одним из методов термоизоляции плазмы для осуществления управляемой термоядерной реакции является применение так называемых адиабатических ловушек, или ловушек с магнитными пробками, предложенных и рассчитанных Г. И. Будкером [1]. Аналогичные системы были предложены Х. Йорком [2] и рассчитаны в работе [3]. В последнее время это направление получило значительное развитие [4, 5], и поэтому представляет интерес дальнейшее изучение подобных систем.

Действие адиабатических ловушек основано [1] на сохранении орбитального магнитного момента заряженной частицы в магнитном поле $\left(\mu = \frac{Mv_\perp^2}{2H};\ v_\perp\text{ — составляющая}\right.$ скорости частицы в направлении, перпендикулярном магнитному полю H). Необходимым, но, конечно, далеко не достаточным условием пригодности ловушки является возможность удержания в ней отдельной заряженной частицы. Время жизни такой частицы в ловушке, вообще говоря, не бесконечно, так как магнитный момент является лишь адиабатическим инвариантом, т. е. может медленно изменяться, что приводит к перераспределению энергии между продольной и поперечными степенями свободы частицы и к выходу ее из ловушки.

Вопрос об изменении адиабатического инварианта рассматривался в ряде работ (см., например, [6—8]), однако лишь в работе [7] вычисления доведены до конкретного результата для гармонического осциллятора, а именно:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{2\Delta^{(q)}}{(2\omega_0)^{q+1}}\cdot\cos\left(2\theta_0 - \frac{\pi q}{2}\right), \qquad (1)$$

где I — адиабатический инвариант; $\Delta^{(q)}$ — разрыв q-й производной $\omega(t)$; θ_0, ω_0 — фаза и частота осциллятора в момент разрыва производной. Основным недостатком приведенного выражения является его асимптотический характер. Это означает, что оно справедливо лишь при $1/\omega T \to 0$ (T — характерное время изменения $\omega(t)$). При конечных значениях параметра адиабатичности $1/\omega T$ формула (1) не всегда правильна (условия ее применимости даны в Приложении). В частном случае, когда $\omega(t)$ является аналитической функцией, формула (1) дает $\Delta I/I = 0$. Это означает, что при $1/\omega T \to 0$ $\Delta I/I$ стремится к нулю быстрее любой степени параметра $1/\omega T$ (например, как $e^{-\omega T}$), но как именно, остается неизвестным. Таким образом, применяемый обычно метод асимптотического разложения по степеням малого параметра типа $1/\omega T$ в данном случае непригоден.

В настоящей работе рассматривается другой подход к задаче. Он основан на простой физической модели резонансов между ларморовским вращением заряженной частицы и медленными колебаниями ее вдоль магнитных силовых линий[1]. Такие резо-

[1] На роль резонансов в изменении адиабатического инварианта указано в работе [9].

нансы возможны, несмотря на различие частот, если медленные колебания частицы ангармоничны (содержат высокие гармоники основной частоты). Действие резонансов приводит, в частности, к изменению магнитного момента отдельной частицы (без столкновений).

1. Исходные уравнения

Настоящая работа не ставит своей целью получить расчетные формулы; основное внимание обращено на физические процессы, происходящие при движении заряженной частицы в магнитной ловушке. Поэтому мы ограничимся рассмотрением простого гамильтониана, использованного в работе [6] ($M=1$):

$$\mathscr{H}=\frac{p_x^2+p_y^2+\omega^2(x)\,y^2}{2};\; p_x=\dot{x};\; p_y=\dot{y}. \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты вдоль и поперек магнитной силовой линии соответственно; ω — ларморовская частота.

Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{y}=-\omega^2 y;\;\; \ddot{x}=-\omega\frac{d\omega}{dx}y^2. \quad (1.2)$$

Так как колебания вдоль оси x являются медленными ($\Omega \ll \omega$), то решение для y представляем в виде

$$y=\rho\cos\theta;\;\; \theta=\int\omega\,dt+\varphi, \quad (1.3)$$

(ρ — ларморовский радиус частицы) и

$$\ddot{x}=-\omega\frac{d\omega}{dx}\frac{\rho^2}{2}(1+\cos 2\theta).$$

Поскольку $\frac{\omega\rho^2}{2}=I$, где I — интересующий нас адиабатический инвариант, связанный с магнитным моментом соотношением $I=c\mu/e$, получаем

$$\ddot{x}+I\frac{d\omega}{dx}=-I\frac{d\omega}{dx}\cos 2\theta. \quad (1.4)$$

Таким образом, движение вдоль оси x является колебательным с потенциальной энергией $I\omega(x)=\mu H(x)$ и на него накладывается быстропериодическое возмущение с частотой 2ω. Обычно этим возмущением пренебрегают из-за того, что $\omega \gg \Omega$. Однако, если колебания вдоль оси x содержат высокие гармоники основной частоты, то возможен резонанс быстропериодического возмущения $I\frac{d\omega}{dx}\cos 2\theta$ с одной из таких гармоник.

К описанному эффекту можно подойти и с другой стороны. Рассмотрим уравнение $\ddot{y}+\omega^2(t)\,y=0$, в котором зависимость ω от времени связана с колебаниями вдоль оси x. Период изменения функции $\omega(t)$ много больше $1/\omega$, но если $\omega(t)$ содержит высокие частоты вплоть до ω, то одна из них может вызвать параметрический резонанс.

Поскольку полная энергия частицы $\mathscr{H}$ сохраняется, оба рассмотренные резонанса приводят к перераспределению энергии частицы между степенями свободы.

Для исследования указанных резонансных явлений воспользуемся методом, описанным в работе [10]. Прежде всего введем гамильтониан $\mathscr{H}_y$, описывающий движение вдоль оси y:

$$\mathscr{H}_y=\frac{p_y^2+\omega^2(t)\,y^2}{2}. \quad (1.5)$$

Тогда $\frac{d}{dt}\mathscr{H}_y=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{H}_y=\omega\dot{\omega}y^2$. Для изменения адиабатического инварианта $I=\mathscr{H}_y/\omega$ найдем

$$\frac{dI}{dt}=\dot{\mathscr{H}}_y/\omega-\mathscr{H}_y\dot{\omega}/\omega^2=\dot{\omega}\,(y^2-\overline{y^2}), \quad (1.6)$$

где черта означает усреднение по фазе, изменяющейся с частотой ω. Рассматривая ω как параметр, получим поправку к частоте $\dot{\varphi}$ (1.3) [10]:

$$\dot{\varphi}=-\frac{\omega\dot{\omega}}{\dot{y}}\left[\omega y^2\left(\frac{\partial y}{\partial I}\right)_{\omega,\,\theta}+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)_{I,\,\theta}\right]=$$

$$=-\frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2\theta. \quad (1.7)$$

Введем также гамильтониан $\mathscr{H}_x$, описывающий движение вдоль оси x (1.4):

$$\mathscr{H}_x=\frac{p_x^2}{2}+I\omega\,(1+\cos 2\theta). \quad (1.8)$$

Полагая

$$x=x(I,\vartheta);\;\; \vartheta=\int\Omega(I)\,dt+\psi \quad (1.9)$$

и учитывая, что величина $W_x=p_x^2/2+I\omega$, равная полному гамильтониану $\mathscr{H}$, сохраняется, получим

$$\dot{W}_x=\frac{\partial W_x}{\partial t}+[W_x,\mathscr{H}_x]=\dot{I}\omega-\dot{x}\frac{d\omega}{dx}I\cos 2\theta=0,$$

где [,] — скобки Пуассона. Отсюда

$$\dot{I} = I\,\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2\theta, \qquad (1.10)$$

что совпадает с (1.6). Аналогично уравнению (1.7) получим для $\dot{\psi}$ (1.9) [10]:

$$\dot{\psi} = \frac{\Omega}{x}\left(\frac{\partial x}{\partial I}\right)_{\vartheta}\dot{I} = I\left(\frac{\partial x}{\partial I}\right)_{\vartheta}\frac{\Omega}{\omega}\frac{d\omega}{dx}\cos 2\theta. \qquad (1.11)$$

Отметим, что уравнения (1.7), (1.10), (1.11) являются точными для принятого гамильтониана (1.1).

2. Резонансы первого порядка

Будем интегрировать (1.10), разлагая правую часть в ряд Фурье. Функция $\cos 2\theta$ выражает частотно-модулированное колебание:

$$\dot{\theta} = \omega + \dot{\varphi} = \overline{\omega} + \dot{\varphi} + \sum_{n}\omega_n\cos 2n\vartheta,$$

$$\theta = \varphi + \overline{\omega}t + \sum_{n}\frac{\omega_n}{2n\Omega}\sin 2n\vartheta. \qquad (2.1)$$

Черта здесь и дальше обозначает усреднение по фазам, изменяющимся с частотой Ω. Произведя несложные преобразования, найдем

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\sum_{n}(F_{1n} \pm F_{2n})\cos 2(\overline{\omega}t + \varphi \pm n\vartheta), \qquad (2.2)$$

где производится суммирование по обоим знакам, причем оба знака изменяются одновременно. Разложение $\omega(t)$ только по косинусам связано с симметрией относительно момента поворота $(\dot{x} = 0)$; множитель 2 в (2.1) характеризует симметрию $\omega(x)$ относительно медианной плоскости магнитного поля. Коэффициенты Фурье F_{1n} и F_{2n} определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\sum_{n}\frac{\omega_n}{n\Omega}\sin 2n\vartheta\right) &= \sum_{n}F_{1n}\cos 2n\vartheta,\\ \sin\left(\sum_{n}\frac{\omega_n}{n\Omega}\sin 2n\vartheta\right) &= \sum_{n}F_{2n}\sin 2n\vartheta.\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Пусть теперь

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \sum_{m}\Omega_{1m}\sin 2m\vartheta. \qquad (2.4)$$

Перемножая (2.2) и (2.4), получим уравнение

$$\frac{dI}{dt} = I\sum_{\overline{\omega}\approx l\Omega}P_l\cos\psi_l. \qquad (2.5)$$

Условие $\overline{\omega} \approx l\Omega$ показывает, что из всей суммы нужно сохранить лишь один член, частота изменения которого близка к нулю. Это и есть резонансный член, дающий наибольший вклад в изменение I.

$$\psi_l = 2(\overline{\omega}t + \varphi_1 - l\vartheta);\quad \varphi_1 = \varphi - \pi/4, \qquad (2.6)$$

$$4P_l = -\sum_{m-n=l}\Omega_{1m}(F_{1n} + F_{2n}) + \sum_{n-m=l}\Omega_{1m}(F_{1n} - F_{2n}) - \sum_{m+n=l}\Omega_{1m}(F_{1n} - F_{2n}). \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.5) должно быть дополнено уравнением для $\dot{\psi}_l$ (1.7); (1.11):

$$\dot{\psi}_l = 2\left(\overline{\omega} - l\Omega - \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2\theta - I\,\frac{\partial x}{\partial I}\frac{\Omega}{\omega}\frac{d\omega}{dx}\cos 2\theta\right).$$

Принимая

$$2I\,\frac{\partial x}{\partial I}\frac{d\omega}{dx}\frac{\Omega}{\omega} = \sum_{m}\Omega_{2m}\cos 2m\vartheta, \qquad (2.8)$$

получим

$$\frac{d\psi_l}{dt} = 2(\overline{\omega} - l\Omega) - \sum_{\overline{\omega}\approx p\Omega}Q_p\sin\psi_p, \qquad (2.9)$$

где Q_p определяется выражением

$$-4Q_p = \sum_{m-n=p}(F_{1n} + F_{2n})(\Omega_{2m} + \Omega_{1m}) + \sum_{n-m=p}(F_{1n} - F_{2n})(\Omega_{2m} - \Omega_{1m}) + \sum_{m+n=p}(F_{1n} - F_{2n})(\Omega_{2m} + \Omega_{1m}). \qquad (2.10)$$

3. Резонансы высших порядков

Уравнения (2.5), (2.9), которые мы будем исследовать ниже, являются приближенными не только потому, что в них отброшены нерезонансные члены (последние приводят лишь к малым колебаниям I), но главным образом потому, что в них учтены не все резонансы. Действительно, при выводе (2.5), (2.9) мы исходили из (2.1), (2.2), считая φ и ψ постоянными, тогда как они содержат малые периодические компоненты в соответствии с (1.7), (1.11). Это приводит, как можно показать, к появлению дополнительных резонансов, определяемых условием $k\overline{\omega}=l\Omega\,(k\geqslant 2)$. (Коэффициент k будем называть порядком резонанса.) Существуют и другие эффекты, приводящие к резонансам высших порядков. Точный учет их не производился. Рассмотрение же частных случаев показало, что резонансы высших порядков описываются уравнениями, аналогичными (2.5), (2.9), с заменой $\overline{\omega}\longrightarrow k\overline{\omega}$; $P_l\longrightarrow P_l^{(k)}\simeq P_l\alpha_k$; $Q_l\longrightarrow Q_l^{(k)}\simeq Q_l\alpha_k$, где α_k принимается равным наибольшей из величин $(\rho/R)^{2(k-1)}$; $(Q_l/\Omega)^{k-1}$ (R — радиус кривизны магнитной силовой линии). При этом в первом случае (ρ/R) возможны как целые, так и полуцелые значения k, а во втором (Q_l/Ω) — только целые. Разумеется, сформулированное правило годится лишь для грубых оценок, а вопрос в целом требует дальнейшего изучения.

4. Стационарный случай

Под стационарностью будем понимать отсутствие явной зависимости ω в (1.1) от времени $\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}=0\right)$ в противоположность нестационарному случаю, когда $\omega=\omega(x,t)$[1]. Стационарный случай соответствует постоянному во времени аксиально-симметричному магнитному полю. Нестационарность возникает как вследствие азимутальных неоднородностей[2] (из-за дрейфа частиц), так и при явной зависимости магнитного поля от времени.

Хорошо известно (см., например, [11]), что уравнения (2.5), (2.9) в рассматриваемом случае определяют ряд областей неустойчивости при $\overline{\omega}=l\Omega$, ширина которых $\Delta_p(\overline{\omega}-l\Omega)\sim Q_l$. Как будет видно из дальнейшего, нет необходимости подробно исследовать эти области, важно лишь отметить, что они не перекрываются между собой, т. е. их ширина Q_l меньше расстояния между ними 2Ω. Это следует непосредственно из оценки для Q_l (I.2)[1]: $Q/\Omega\leqslant\sqrt{\Omega/\overline{\omega}}\leqslant 1$.

Резонансы высших порядков не изменят последнее неравенство, поскольку полная ширина резонансов $\sim\sum_k kQ_l^{(k)}\sim Q_l\sum_k k\alpha_k\sim Q_l$, $(\alpha_k\ll 1)$ (см. раздел 3).

Но в таком случае области неустойчивости вообще не играют роли из-за нелинейности колебаний, точнее, из-за зависимости частот $\overline{\omega}$, Ω от I. Даже у частиц, попавших в неустойчивые области, I вовсе не будет монотонно изменяться, а будет совершать колебания вокруг резонансного значения [10]. Эти колебания мы будем называть в дальнейшем фазовыми по аналогии с колебаниями заряженных частиц в ускорителях. Их можно исследовать с помощью уравнения, получающегося из (2.5), (2.9) исключением $\dot{I}$:

$$\frac{d^2\psi_l}{dt^2}=2\,\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega}-l\Omega)+2IP_l\,\frac{\partial}{\partial I}(\overline{\omega}-l\Omega)\cos\psi_l. \tag{4.1}$$

Здесь и дальше мы пренебрегаем членом с Q_l, что допустимо при условии $Q_l^2\ll\left|IP_l\,\frac{\partial}{\partial I}(\overline{\omega}-l\Omega)\right|$ [10], которое всегда выполняется. Амплитуда изменения частоты при фазовых колебаниях

$$\Delta_\varphi(\overline{\omega}-l\Omega)\simeq 2\sqrt{\left|IP_l\,\frac{\partial}{\partial I}(\overline{\omega}-l\Omega)\right|}, \tag{4.2}$$

а частота фазовых колебаний

$$\Omega_\varphi^2\simeq\left|2IP_l\,\frac{\partial}{\partial I}(\overline{\omega}-l\Omega)\right|. \tag{4.3}$$

Особого рассмотрения требует случай, когда амплитуда (4.2) становится сравнимой или превышает расстояние между резонансами 2Ω (см. раздел 6).

5. Нестационарный случай (быстрое прохождение через резонансы)

Если частоты $\overline{\omega}$, Ω зависят от времени явно и разность $\overline{\omega}-l\Omega$ изменяется, то происходит прохождение через резонансы и изменение I. Рассмотрим вначале случай быстрого прохождения, когда можно пренебречь скоростью изменения частот $\overline{\omega}$, Ω из-за

---

[1] Зависимость $\omega(t)$, встречавшаяся выше, является неявной (через x).

[2] Строго говоря, гамильтониан (1.1) справедлив в аксиально-симметричном поле. Однако, если магнитное поле мало изменяется при дрейфе частиц за время $\sim 1/\Omega$, то можно сохранить вид (1.1), введя явную зависимость ω от t.

[1] (I.1)—(I.3)—формулы Приложения.

изменения I по сравнению со скоростью изменения их вследствие явной зависимости от времени:

$$A = \left| \frac{IP_l \frac{\partial}{\partial I}(\overline{\omega} - l\Omega)}{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega} - l\Omega)} \right| \ll 1. \quad (5.1)$$

В этом случае уравнения (2.5), (2.9) непосредственно интегрируются и в первом приближении (по $\Delta I/I$):

$$\Delta I = \sqrt{\pi} I \sum_{\overline{\omega} \approx l\Omega} \frac{P_l \cos(\psi_{0l} + \pi/4)}{\sqrt{\left| \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega} - l\Omega) \right|}}. \quad (5.2)$$

Здесь ψ_{0l} — значение фаз ψ_l в моменты резонансов ($\dot{\psi}_l = 0$). При случайном распределении фаз ψ_{0l} для различных прохождений через резонансы $\overline{\Delta I} = 0$, а

$$\overline{(\Delta I)^2} = \frac{\pi}{2} I^2 \sum_l \frac{P_l^2}{\left| \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega} - l\Omega) \right|}, \quad (5.3)$$

где суммирование распространяется на все пройденные резонансы, а черта означает усреднение по фазам ψ_{0l}. В следующем приближении

$$\overline{\Delta I} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \overline{(\Delta I)^2} + \frac{\pi}{4} \sum_l \frac{IP_l}{\left| \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega} - l\Omega) \right|} \left[Q_l - \frac{\partial}{\partial I}(P_l I) \right]. \quad (5.4)$$

Первый момент (5.4) характеризует систематическое изменение I, а второй (5.3) — «рассеяние» по I. Знания обоих моментов достаточно для составления уравнения типа Фоккера — Планка, решив которое, можно найти поток частиц на запретный конус [1]. Однако, как видно из выражений для моментов, это уравнение получится весьма сложным. Поэтому мы рассмотрим более простой способ оценки изменения I.

Из (5.4) следует, что $\overline{\Delta I}/I \sim \overline{(\Delta I)^2}/I^2$. Если $\Delta I/I \ll 1$, то влиянием первого момента можно полностью пренебречь $((\overline{(\Delta I)^2}/I^2)^{1/2} \gg \overline{\Delta I}/I)$; если $\Delta I \gtrsim I$, то влияние обоих моментов одинаково по порядку величины. Поэтому для оценки достаточно исследовать изменение только $\overline{(\Delta I)^2}$. Условие выхода частиц из ловушки имеет при этом вид $\overline{(\Delta I)^2} \simeq (I_0 - I_k)^2$, где I_0 — начальное значение I, а I_k — его значение на поверхности запретного конуса.

Так как в единицу времени проходится $\frac{k}{\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega} - l\Omega)\right|$ резонансов, то с учетом (5.3) имеем

$$\frac{d}{dt}\overline{(\Delta I)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{kI^2 (P^{(k)})^2}{\Omega}. \quad (5.5)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение уже нетрудно решить численно или приближенными методами. Для справедливости (5.5) необходимо, конечно, чтобы изменение I при прохождении одного резонанса было мало по сравнению с I.

Индекс k в (5.5) обозначает порядок проходимых резонансов, который определяется интервалом изменения $\overline{\omega} - l\Omega$ из-за явной зависимости от времени:

$$k = \Omega / \Delta_t (\overline{\omega} - l\Omega). \quad (5.6)$$

В частности, при азимутальной неоднородности магнитного поля мы будем оценивать k по формуле $k \approx (\Omega/\overline{\omega})/(\Delta H/H)$, которая получается из $\Delta_t(\overline{\omega} - l\Omega)/\overline{\omega} \simeq \Delta H/H$ [1].

В качестве примера проведем сравнение полученных оценок с точной асимптотической формулой (1) [7]. Из выражения (1.3) для P и уравнения (5.5) найдем $\Delta I/I \simeq \simeq \frac{\Delta^{(q)}\sqrt{l\Omega}}{\sqrt{\pi}(2\omega)^{q+1}}$ или за время $\Delta t = \pi/2\Omega$, соответствующее монотонному изменению $\omega(t)$ в одну сторону, как принималось в работе [7]: $(\Delta I/I)_1 \simeq \frac{\Delta^{(q)}}{\sqrt{2}\,(2\omega)^{q+1}}$, что совпадает с (1) по порядку величины.

6. Критерий стохастичности

Формулы (5.3) — (5.5) основаны на предположении о стохастичности, т. е. случайности фаз ψ_{0l}. Постараемся выяснить условия, при которых оно может выполняться.

Рассмотрим для простоты периодическое прохождение единственного резонанса пер-

[1] Может показаться, что азимутальная неоднородность не приводит к изменению частот $\overline{\omega}$, Ω, так как дрейф частиц происходит перпендикулярно ∇H. Однако, если учесть движение частиц вдоль силовой линии, то нетрудно проследить, что H на орбите частицы будет изменяться и притом так, что в качестве $\Delta H/H$ нужно брать максимальное значение неоднородности вдоль силовой линии.

вого порядка через один и тот же промежуток времени $T/2$. Согласно (5.2) $\Delta I \sim \sum_n \cos\psi_n$, где ψ_n — фазы в моменты резонансов. Если частоты $\bar{\omega}$, Ω не зависят от I, то $\psi_{n+1} - \psi_n = \psi_0 = 2 \int_{t_n}^{t_n+T/2} (\bar{\omega} - l\Omega)\, dt = \mathrm{const}$ и, следовательно,

$$\Delta I \sim \sum_n \cos n\psi_0 \leqslant 1/\sin\psi_0/2. \qquad (6.1)$$

В этом случае ΔI ограничено и стохастичность отсутствует. Учтем теперь нелинейность колебаний. После каждого прохождения через резонанс частота $\bar{\omega} - l\Omega$ будет изменяться на величину $(\Delta\omega)_n = (\Delta I)_n \times \frac{\partial}{\partial I}(\bar{\omega} - l\Omega)$, что при следующем прохождении приведет к дополнительному изменению фазы на величину $\psi_{1n} = T(\Delta\omega)_n$. При $\psi \ll 1$ мы возвращаемся к предыдущему случаю. Если же $\psi_1 \gg 1$, то именно ψ_1 и определяет изменение фазы ψ_n. Это изменение в отличие от (6.1) не является равномерным ,а зависит от предыдущей фазы $(\psi_{1n} \sim (\Delta\omega)_n \sim (\Delta I_n) \sim \cos\psi_n)$, причем незначительное изменение предыдущей фазы вызывает изменение последующей на 2π. Представляется очевидным, что в этом случае последовательность фаз ψ_n будет близка к случайной. Строгое доказательство этого утверждения, однако, отсутствует, и мы примем его пока как гипотезу. Тогда критерий стохастичности имеет вид

$$\nu_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{IP_l T \frac{\partial}{\partial I}(\bar{\omega} - l\Omega)}{\sqrt{\left|\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\omega} - l\Omega)\right|}} \right| \gg 1. \qquad (6.2)$$

Аналогичный критерий получен в работах [12,13] в результате численных расчетов движения нелинейного осциллятора под действием коротких периодических толчков. Авторы вводят ν_1 как критерий неустойчивости; связь его со стохастичностью не рассматривается. Согласно данным этих работ неустойчивость начинается при $\nu_1 = \pi$.

Придадим полученному критерию несколько иной физический смысл. Если $\omega(x, t)$ периодична по t, то каждая гармоника выражений (2.5), (2.9) окажется модулированной с некоторой частотой $\Omega_д = 2\pi/T$ и ее можно разложить на новые гармонические составляющие с частотами $2(\bar{\bar{\omega}} - l\bar{\Omega}) \pm p\Omega_д$ ($\bar{\bar{\omega}}$ обозначает усреднение по фазам, изменяющимся с частотами Ω, $\Omega_д$, а $\bar{\Omega}$ — по фазам, изменяющимся с частотой $\Omega_д$) и коэффициентами $P_{lp} \simeq P_l \sqrt{\frac{\Omega_д}{2\Delta_l(\bar{\omega} - l\Omega)}}$ (см. Приложение, п. 1).

Подставляя последнее выражение в (6.2) и полагая

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\omega} - l\Omega)\right| \simeq \frac{\Delta_l(\bar{\omega} - l\Omega)}{2}\,\Omega_д, \text{ получим}$$

$$\nu_2 = 4\sqrt{\pi}\,\frac{\Omega_ф^2}{\Omega_д^2} \gg 1, \qquad (6.3)$$

где $\Omega_ф^2 = \left|2IP_{lp}\frac{\partial}{\partial I}\left(\bar{\bar{\omega}} - l\bar{\Omega} \pm \frac{p\Omega_д}{2}\right)\right|$ — квадрат частоты фазовых колебаний для новой системы резонансов (4.3), а $\Omega_д$ — расстояние между ними.

Применим критерий (6.3) к стационарному случаю (см. раздел 4). Используя (4.3) и учитывая, что расстояние между резонансами равно 2Ω, получим

$$\varkappa = \frac{\left|2\sqrt{\pi}\,IP_l\frac{\partial}{\partial I}(\bar{\omega} - l\Omega)\right|}{\Omega^2} \gg 1. \qquad (6.4)$$

При выполнении (6.4) происходит стохастическое изменение I.

По-видимому, этот эффект и наблюдался в работе [14], авторы которой с помощью численных методов изучали движение заряженной частицы в адиабатической ловушке. Ими обнаружено, что вблизи запретного конуса существует область «нестабильных» орбит, стохастически выходящих из ловушки. Применим к данным работы [14] критерий (6.4). Определим P_l из (2.5) аналогично тому, как это делалось в примере раздела 5:

$$(\Delta I/I)_{1/2} \simeq \pi P_l/\Omega,$$

где $(\Delta I/I)_{1/2}$ — относительное изменение I за полупериод медленного колебания (π/Ω). Эта величина также вычислялась в работе [14]. Полагая $\left|\frac{\partial}{\partial I}(\bar{\omega} - l\Omega)\right| \simeq \bar{\omega}/I$, найдем из (6.4), что нестабильность начинается при $(\Delta I/I)_{1/2} \geqslant 0{,}1$, тогда как из данных работы [14] следует, что $(\Delta I/I)_{1/2} \geqslant 0{,}02$. Расхождение не следует считать слишком большим, если учесть, что полученные оценки являются весьма грубыми.

7. Нестационарный случай (медленное прохождение через резонансы)

Условием медленного прохождения через резонанс является, очевидно, $A \gg 1$ (5.1). Как показано в работе [10], имеются два основных режима медленного прохождения: захват и однократное прохождение. Важной особенностью второго режима являются независимость ΔI от фазы колебаний и связанная с этим обратимость процесса даже при выполнении условия стохастичности (6.2). Поэтому при периодическом медленном прохождении одних и тех же резонансов в обе стороны I будет испытывать лишь малые колебания.

Режим захвата означает, что при изменении частот $\overline{\omega}$, Ω из-за явной зависимости от времени I автоматически изменяется таким образом, что все время сохраняется условие резонанса $\overline{\omega} \approx l\Omega$. Очевидно, что при периодическом изменении частот $\overline{\omega}$, Ω процесс будет также полностью обратимым.

Однако захват может оказать существенное влияние на адиабатические процессы, связанные со значительным изменением магнитного поля во времени, так как при этом должно выполняться дополнительное условие $\overline{\omega}/\Omega = \mathrm{const}$. Основная трудность использования этого влияния связана с тем, что область захвата мала. Ширина ее вокруг каждого резонанса примерно равна [10] $2\Delta_\phi(\overline{\omega} - l\Omega) \sim \Omega_\phi$ (4.2). При равномерном распределении частиц по I, а следовательно, и по частотам доля захваченных частиц $\sim \frac{\Omega_\phi}{\Omega}$. Но это отношение как раз и должно быть малым согласно критерию стохастичности (6.4).

8. Сравнение с экспериментом

Насколько нам известно, единственной работой, в которой получены количественные данные об изменении адиабатического инварианта, являются опыты С. Н. Родионова [15]. Сравнение его экспериментальных данных с полученными выше теоретическими результатами проводилось для трех конфигураций магнитного поля (см. таблицу). Для нахождения коэффициентов Фурье Ω_{1m} магнитное поле на оси системы ($H(x) \sim \omega(x)$) аппроксимировалось функцией вида $1/(x+b)^2$, где x — расстояние до точки поворота ($\dot{x}=0$), а b выбиралось, так, чтобы получить наилучшее согласие. Точность аппроксимации составляла $20 \div 50\%$. Были приняты следующие числовые значения: среднее расстояние от частиц до оси системы в медианной плоскости магнитного поля $r_1 = 2$ *см*; радиус кривизны магнитной силовой линии $R = \frac{2}{n}$ *см*; показатель спада магнитного поля $n = (\gamma - 1)/640$; $\gamma = H_{\text{пр}}/H_0$, где $H_{\text{пр}}$ — максимальное поле на оси системы (магнитные пробки), а H_0 — минимальное поле на оси системы [1].

Изменение I находилось из уравнения (5.5). I_0 выбиралось так, чтобы $v_\perp \sim v_\parallel$. Вначале (при $I \sim I_0$) I изменялось наиболее медленно как из-за более высокого порядка проходимых резонансов (большое Ω, см. (5.6)), так и из-за малости P_l (более гладкая функция $\dot{\omega}/\omega$, меньшие Ω_{1m}). Считалось, что достаточно определить число отражений от магнитных пробок N, приводящее к такому изменению $I\,(\Delta I_{1/2})$, чтобы порядок проходимых резонансов уменьшился на 1/2 [2], так как после этого скорость изменения I возрастает. Принималось, что $\Delta I_{1/2}/I \simeq {}^1/_2 k \ll 1$ (5.6). Учитывая соотношение $dt = dN\,(\pi/\Omega)$, получим из (5.5)

$$N \approx \frac{\Omega^2}{2\pi^2 k^3 (P^{(k)})^2}. \qquad (8.1)$$

Коэффициент P оценивался по формуле (1.1), критерии A, ν и $\varkappa$ — по формулам (5.1), (6.2), (6.4). При этом принималось

$$\left|\frac{\partial}{\partial I}(\overline{\omega} - l\Omega)\right| \simeq \overline{\omega}/I; \quad \left|\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega} - l\Omega)\right| \simeq$$

$$\simeq \frac{\Delta_t(\overline{\omega} - l\Omega)}{2}\,\Omega_{\text{д}} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{H}\right)\Omega_{\text{д}}\overline{\omega}.$$

Частота дрейфа частиц $\Omega_{\text{д}} = v_{\text{д}}/r$ оценивалась по формуле [11]:

$$\frac{\Omega_{\text{д}}}{\Omega} \simeq \frac{n}{2}(\rho_1/r_1)^2\,\frac{\omega_1}{\Omega}\,\frac{v^2}{v_\perp^2}\left(1 + \frac{v_\parallel^2}{v^2}\right). \quad (8.2)$$

---

[1] Более подробное описание эксперимента см. в работе [15].

[2] Разумеется, в общем случае может быть как $^1/_2$, так и 1 в зависимости от соотношения величин ρ/R и Q/Ω (см. раздел 3).

Результаты расчетов представлены в таблице. Данные последнего столбца взяты из работы [15]. Фактически сравнение может быть проведено только для конфигурации поля № 2[1]. Для $\Delta H/H$, равного 9 и 15%, имеется удовлетворительное согласие с экспериментом. Резкое расхождение для $\Delta H/H<4\%$ объясняется, по-видимому, большим значением $\varkappa$ (для отсутствия стохастического изменения I необходимо, чтобы $\varkappa$ было много меньше 1; при $\varkappa \gg 1$ число колебаний составило бы всего около 1000).

Сравнение теоретических и экспериментальных данных

№	γ	ρ/R	$\frac{\Delta H}{H}$, %	k	A	ν	$\varkappa$	N (расчетное)	N (экспериментальное)
1	13	$6\cdot10^{-3}$	<4	2,5	—	$<2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-8}$	∞	$>6\cdot10^{6}$
			3	3,5	—	$<2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-8}$	∞	$>6\cdot10^{6}$
2	40	$5\cdot10^{-2}$	<4	4	—	$3\cdot10^{-3}$	0,4	∞	$2\cdot10^{5}$
			9	2	10^{-2}	2	0,4	$8\cdot10^{3}$	$2\cdot10^{4}$
			15	1,5	$2\cdot10^{-2}$	2	0,4	$6\cdot10^{3}$	$2\cdot10^{4}$
3	5	$3\cdot10^{-3}$	$<0,5$	13,5	—	$<8\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-7}$	∞	$>3\cdot10^{6}$
			4	2	—	$<8\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-7}$	∞	$>3\cdot10^{6}$

9. Заключение

Рассмотренный в настоящей работе резонансный обмен энергией между степенями свободы заряженной частицы происходит, разумеется, в любой магнитной ловушке. Однако он представляет опасность (в смысле выхода частиц из ловушки) лишь в системах, имеющих «запрещенные» направления для скорости частиц. Кроме ловушек с магнитными пробками, к таковым относятся также некоторые системы с компенсацией тороидального дрейфа [4]. Наиболее неблагоприятные условия с точки зрения резонансного обмена энергией имеют место в ловушках с «гофрированным» магнитным полем [16]. В таком поле амплитуды резонансных гармоник медленных колебаний (Ω_m) значительно больше, чем в монотонно изменяющемся поле.

Отметим, наконец, что аналогичные резонансные явления могут иметь место при попытках удержать плазму с помощью высокочастотного поля [17, 18]. В этом случае будет происходить уже не обмен энергией, а изменение энергии под действием высокочастотных колебаний.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Г. И. Будкеру за ценные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценки коэффициентов P и Q

1. Примем, что $\Omega_{1m} \sim \Omega_{2m}$, а их знаки случайны. Примем также, что F_n одного порядка для $\frac{\omega_1}{\Omega} < n < \frac{\omega_2}{\Omega}$ и $F_n = 0$ вне этого интервала, а знаки F_n случайны ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ — интервал изменения частоты ω). Такой вид спектра является

[1] Специальные эксперименты для проверки данной теории не проводились, поскольку к началу расчетов (осень 1958 г.) опыты С. Н. Родионова были уже закончены и установка разобрана.

хорошим приближением при гармонической частотной модуляции и может быть использован для оценок в других случаях. Тогда на основании равенства Парсеваля $|F_n| \simeq \sqrt{\Omega/\Delta\omega}$ и

$$|P_l| \simeq \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{\Omega}{\Delta\omega}}\left(\sum_{m=\omega_1/\Omega}^{m=\omega_2/\Omega} \Omega_{1m}^2\right)^{1/2};$$

$$|Q_l| \simeq \sqrt{2}\,|P_l|. \qquad (1.1)$$

Применяя равенство Парсеваля к сумме под корнем, найдем, что она не превосходит Ω^2 (см. (2.4); $\dot{\omega}/\omega \sim \Omega$). Полагая, кроме того, $\Delta\omega \sim \overline{\omega}$, получим из (1.1):

$$Q/\Omega \lesssim \sqrt{\Omega/\overline{\omega}}. \qquad (1.2)$$

2. Если $\omega(t)$ терпит разрыв $\Delta^{(q)}$ в q-й производной, и, следовательно, $(q+1)$-я производная содержит δ-функцию, то непосредственное вычисление дает

$$\Omega_{1m} \to \frac{2}{\pi}\frac{\Omega\Delta^{(q)}}{\omega\,(2m\Omega)^q} \text{ при } m \to \infty.$$

Подставляя это выражение в (1.1), получим

$$P \simeq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\Omega\Delta^{(q)}}{(2\omega)^{q+1}}. \qquad (1.3)$$

Нетрудно проследить, что для справедливости (1.3) вовсе не требуется, чтобы разрыв $\omega(t)$ носил математический характер. Необходимо лишь, чтобы а) производная $\omega(t)$ изменялась в какой-то момент на величину $\Delta^{(q)}$ за время $\ll 1/\omega$; б) в остальные моменты изменения совершались за времена $\gg 1/\omega$. Это и есть условия применимости формулы (1).

Поступила в Редакцию 11/IV 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. III. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3.
2. A. Bishop. Project Sherwood, U.S.A, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1958.
3. D. Judd, W. McDonald, M. Rosenbluth. Conference on Controlled Thermonuclear Reactions. Berkeley, California, February 1955.
4. Л. А. Арцимович. Тр. Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958). Т. I — Ядерная физика. Атомиздат, 1959, стр. 5.
5. R. Post. Summary of UCRL Pyrotron (Mirror Machine) Program. Доклад № 377, представленный США на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958).
6. О. Б. Фирсов. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. III. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 259.
7. R. Kulsrud. Phys. Rev., 106, 205 (1957).
8. В. М. Волосов. Докл. АН СССР, 121, 22 (1958).
9. А. А. Андронов, М. А. Леонтович, Л. И. Мандельштам. Ж. русского физ.-хим. общества, 60, № 5, 413 (1928).
10. Б. В. Чириков. Докл. АН СССР, 125 № 5 (1959).
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физ.-мат. изд-во, 1958.
12. Ф. Говард. Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону на 20—25 *Бэв* с сильной фокусировкой (октябрь 1953).
13. М. Хайн. Там же.
14. A. Garren, R. Riddell, L. Smith, G. Bing, L. Henrich, T. Northrop, J. Roberts. Individual Particle Motion and the Effect of Scattering in an Axially Symmetric Magnetic Field. Доклад № 383, представленный США на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958).
15. С. Н. Родионов. Атомная энергия, 6, № 6, 623 (1959).
16. Б. Б. Кадомцев. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. III. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 285.
17. Р. З. Сагдеев. Там же, стр. 346.
18. А. В. Гапонов, М. А. Миллер. Ж. техн. физ., 34, 242 (1958).