

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора), акад. А. Л. Курсанов, акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

27-й ГОД ИЗДАНИЯ

1959

ТОМ 125, № 4

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

- Н. У. Аракелян. Уточнение некоторых теорем М. В. Келдыша об асимптотическом приближении целыми функциями 695
- Л. М. Глускин. Полугруппы топологических отображений 699
- Е. Голод. О кольце когомологий конечной p -группы 703
- М. М. Джрбашян. Разложение мероморфных функций в обобщенный ряд Маклорена 707
- И. А. Ибрагимов. Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов 711
- А. И. Каландия. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений 715
- М. Б. Капилевич. К теории вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений класса Бесселя 719
- Е. И. Ким. Об условиях разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений 723
- В. Кузьминов. О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп 727
- Н. А. Лебедев. Об одном способе аналитического продолжения степенных рядов 730
- И. В. Ливартовский. Некоторые критерии устойчивости решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями 733
- С. Г. Михлин. Две теоремы о регуляризаторах 737
- А. А. Нудельман. Об одном обобщении некоторых результатов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова 740
- С. Д. Эйдельман. О поведении решений параболической системы в окрестности изолированной особой точки 743

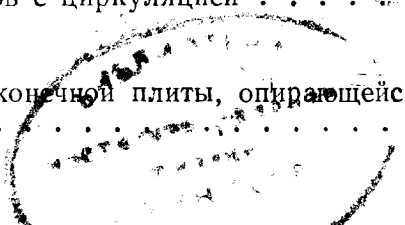
ГИДРОМЕХАНИКА

- А. А. Сергиенко и В. К. Грецов. Переход турбулентного пограничного слоя в ламинарный 746
- П. И. Чушкин. Дозвуковое обтекание эллипсов с циркуляцией 748

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Р. В. Серебряный. Об изгибе тонкой полубесконечной плиты, опирающейся на упругий слой конечной толщины 752

30/4/59
836/н.в.с.



А. А. Веденов. Новый метод в классической статистической физике	757
Го Ци-ди и Б. С. Ратнер. Исследование выхода реакции (γ r) на различных изотопах кадмия	761
Я. Г. Дорфман. Свойства и состояние атомов металла в некоторых металлоорганических соединениях	765
А. А. Шултин. Влияние поля кристаллической решетки на колебания ионов NO_3^- (или CO_3^{--}) по данным инфракрасных спектров нитрата натрия и кальцита	767

ГЕОФИЗИКА

В. Н. Жарков. О физической природе волноводов (слоев с пониженной скоростью) в верхних областях оболочки на глубинах 50—200 км	771
С. В. Пшенин-Северин. О сближении аэрозольных частиц в звуковом поле под действием гидродинамических сил Осеена	775
А. И. Фельзенбаум. Обобщение классической теории установившихся морских течений на случай переменного коэффициента вертикального обмена	779
М. Д. Хаскинд. Промерзание грунта под изолированной поверхностью	782

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Т. Борисов, В. М. Голиков и Г. В. Щербединский. Влияние последствий фазового превращения на диффузию	786
Б. М. Струнин. К статистической теории растяжения металлов	780
В. П. Шестопалов и Б. В. Кондратьев. Пространственный резонанс в спиральном волноводе, помещенном в магнитодиэлектрическую среду	794

ХИМИЯ

В. Л. Вайсер, В. Д. Рябов и А. К. Остроумова. Каталитическая конденсация 9-метил-(1,2), (7,8)-дибензоксанта с аммиаком	799
Г. Я. Ванг и Э. Я. Лукевиц. Взаимодействие 2-бром-2-фенилиндандиона-1,3 с реагентами Гриньяра	801
О. Н. Гришина и В. К. Гоник. Исследование углеводородов ряда циклогексана и декалина в керосине бавлинской (девонской) нефти	803
Л. А. Казицына, Л. Л. Полстянко, Н. Б. Куплетская, Т. Н. Игнатович и А. П. Терентьев. Исследование спектров поглощения алкилиминов о-оксикарбонильных соединений	807
В. К. Кусков и Т. А. Бурцева. Получение алкилфенолов алкилированием трифенилбората	811
Б. И. Лосев и Э. А. Былына. Парамагнитный резонанс в ископаемых углях	
Н. Ф. Орлов и Б. Н. Долгов. Новые методы синтеза органосилоксанов	814
Н. Е. Подклетнов. Индивидуальные циклогексановые углеводороды бензиновых фракций нефтей Сахалина	817
К. И. Портной, Г. В. Самсонов и Л. А. Солонникова. К вопросу о взаимодействии карбида бора с кремнием	821
А. Н. Пудовик и Ф. Н. Ситдикова. Присоединение неполных эфиров кислот фосфора к нитроизоамилену и этилвинилсульфону	823
А. В. Топчиев, В. П. Алания и Г. И. Черный. К вопросу о взаимодействии олефинов и аммиака в присутствии окисных катализаторов	826
	829

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. А. Бакаев, В. Ф. Киселев и К. Г. Красильников. Понижение температуры плавления воды в капиллярах пористого тела	831
И. Б. Боровский и И. Д. Марчукова. Метод определения фазового состояния двойных систем	835
А. А. Зансохова и В. Д. Орехов. Сенсibilизированное окисление лейкооснования метиленового голубого при радиоллизе в водном растворе	838
Ярослав Коутецкий и Антонин Фингерланд. Расчет одноэлектронных квантовомеханических систем, включающих большую подсистему	841
И. В. Мелихов, М. С. Меркулова и Г. Эвальд. Общие закономерности соосаждения микропримесей при росте кристаллов	845
А. С. Черкасов. О влиянии сопряжения антраценового ядра с двойной связью алкенильного заместителя на спектры флуоресценции и поглощения	848

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

В. И. Касаточкин, Г. Г. Петров, З. С. Смуткина и З. Б. Печковская. Физико-химическая природа коксования углей	852
---	-----

- А. А. Пирогов и А. И. Ковалев.** Электронномикроскопическое исследование влияния поверхностно-активных добавок на гидратацию периклаза . . . 856

ГЕОЛОГИЯ

- П. А. Карпов.** К вопросу о возрасте Прикаспийской впадины 859
А. И. Летавин и Н. А. Крылов. О переходном комплексе Предкавказья . . . 862
А. А. Никонов. Восстановление неотектоники и палеогеографии позднеледникового с помощью эпейрогенического спектра в материковой части Кольского полуострова 866
И. А. Резанов. О рифейских отложениях Охотского массива 870
С. К. Самсонов. Несколько слов о ново-каспийской флоре Западной Туркмении 873
М. М. Чарыгин и И. В. Безбородова. К истории геологического развития междуречья Пшеха — Кубань на Северном Кавказе в верхнеюрское время 876
А. Д. Щеглов. Главные особенности металлогении южной части Западного Забайкалья 880

МИНЕРАЛОГИЯ

- И. Д. Зхус и Г. П. Вагина.** Глинистые минералы майкопской свиты района Озек-Суат 884

ГЕОХИМИЯ

- Н. В. Белов и В. И. Симонов.** Об изоморфных соотношениях между цирконием и титаном 888

ОКЕАНОЛОГИЯ

- А. П. Жузе.** Диатомовые в донных отложениях северо-западной части Тихого океана 891

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

- А. Б. Ивановский.** К вопросу о систематическом положении ордовикских и силурийских зафрентонидных кораллов 895

ЦИТОЛОГИЯ

- А. Ф. Чередниченко.** Изменения митотической активности клеток лимфатических узлов собаки в зависимости от сроков действия лейкоцитарной сыворотки 898

ГИСТОЛОГИЯ

- И. Б. Токин.** Ультраструктура щелочной каемки кишечных клеток *Parascaris equorum* 902
Б. Б. Фукс. Гистохимия фосфомоноэстераз при регенерации и дегенерации нерва после повреждения 905

ГИДРОБИОЛОГИЯ

- Л. А. Розенберг, И. Б. Улановский и Ю. М. Коровин.** Влияние бактерий на коррозию нержавеющей стали в узких зазорах 909

МИКРОБИОЛОГИЯ

- Е. П. Фефилова.** О симбиозе молочнокислых бактерий с дрожжами в кефирных зернах 913

БИОФИЗИКА

- Н. Н. Ротт.** Действие колхицина на облученных зародышей вьюна *Misgurnus fossilis* 917
Ф. Б. Шапиро. Плодовитость самок мышей, подвергнутых гамма-облучению в период эмбрионального развития, и жизнеспособность их потомства 921

БИОХИМИЯ

- Д. М. Михлин и А. А. Мутускин.** Немитохондриальное окисление восстановленного дифосфопиридиншуклеотида в корне растения 925
Е. Л. Розенфельд, А. А. Познанская и Н. К. Рудакова. Изучение состава и свойств зимозана 928
Р. А. Рутберг. Получение и свойства полисахарида зимозана, активного в отношении пропердиновой системы 931

- В. М. Эпштейн.** О систематическом положении, образе жизни и происхождении эндемичной байкальской пиявки *Trachelobdella torquata* (Grube) 935

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

- Н. В. Дабагян.** Регуляционные свойства глаз зародышей осетровых рыб . . . 938
А. А. Костомарова. Развитие кишечника культурного карпа при кормлении и голодании на этапе смешанного питания 941
М. Ф. Никитенко. Сравнительная характеристика размеров и строения головного мозга у некоторых видов воробьиных 945

ЭМБРИОЛОГИЯ

- П. Н. Резниченко и Ю. Г. Юровицкий.** Эктодермальные реснички зародышей, личинок и мальков куринаго осетра и их физиологическое значение . 949

CONTENTS

MATHEMATICS

Pages

- N. U. Arakelian.** Refinement of some Keldysh's theorems on asymptotic approximation by integral functions 695
L. M. Gluskin. Semigroups of topological mappings 699
E. Golod. On the ring of cohomologies of a finite p -group 703
M. M. Dzhrbashian. Development of meromorphic functions into a generalized Maclaurin's series 707
I. A. Ibragimov. Some limit theorems for stationary in the strict sense stochastic processes 711
A. I. Kalandia. An approximate solution of a certain class of singular integral equations 715
M. B. Kapilevich. On theory of degenerating elliptical differential equations of Bessel's class 719
E. I. Kim. Conditions for the solvability of a certain class of integrodifferential equations 723
V. Kuzminov. On Alexandrov's hypothesis in the theory of topological groups 727
N. A. Lebedev. A method for the analytic continuation of power series 730
I. V. Livartovskii. Some tests for the stability of the solutions of a system of differential equations with discontinuous right-hand members 733
S. G. Mikhlin. Two theorems on regularizers 737
A. A. Nudel'man. On a generalization of some results obtained by P. L. Chebyshev and A. A. Markov 740
S. D. Eidel'man. The behaviour of the solutions of a parabolic system in the neighbourhood of an isolated singular point 743

FLUID MECHANICS

- A. A. Sergienko and V. K. Gretsov.** Transition from turbulent to laminar boundary layer 746
P. I. Chushkin. Subsonic circulation flow past ellipses 748

THEORY OF ELASTICITY

- R. V. Serebrianyi.** Flexure of a thin semiinfinite plate supported by an elastic layer of finite thickness 752

PHYSICS

- A. A. Vedenov.** A new method in classical statistical physics 757
Go tsi di and B. S. Ratner. A study of (γp) reaction yield on different cadmium isotopes 761
Ia. G. Dorfman. The properties and condition of metal atoms in some organometallic compounds 765
A. A. Shultin. The influence of the crystal lattice field on the vibration of NO_3^- (or CO_3^-) ions, as evidenced by the infrared spectra of sodium nitrate and calcite 767

GEOPHYSICS

- V. N. Zharkov.** Physical nature of wave guides (layers of reduced speed) in the upper regions of the mantle at depths ranging within 50—200 kilometres 771
S. V. Pshenai-Severin. On mutual approach of aerosol particles in a sound field due to Oseen's hydrodynamic forces 775
A. I. Fel'senbaum. An extension of the classical theory of steady sea currents to cover the case of a variable vertical exchange coefficient 779
M. D. Khaskind. Freezing of ground under isolated surface 782

V. T. Borisov, V. M. Golikov and G. V. Shcherbedinskii. Effects of phase transformation on diffusion	786
B. M. Strunin. On statistical theory of the tension of metals	790
V. P. Shestopalov and B. V. Kondratiev. Space resonance in a spiral wave guide placed in a magnetodielectric medium	794

CHEMISTRY

V. L. Vaiser, V. D. Riabov and A. K. Ostroumova. Catalytic condensation of 9-methyl-(1,2), (7,8)-dibenzoxanthene with ammonia	799
G. Ia. Vanag and E. Ia. Lukevits. Reaction between 2-bromo-2-phenylindandione-1,3 and Grignard's reagents	801
O. N. Grishina and V. K. Gonik. An investigation of the hydrocarbons of the cyclohexane and decaline series in the Bavlin (Devonian) oil gasoline	803
L. A. Kazitsyna, L. L. Polstianko, N. B. Kupletskaja, T. N. Ignatovich and A. P. Terentiev. A study of the absorption spectra of the alkylimines of o-oxy-carbonyl compounds	807
V. K. Kuskov and T. A. Burtseva. Production of alkylphenols by the alkylation of triphenylborate	811
B. I. Losev and E. A. Bylyna. Paramagnetic resonance in fossil coals	814
N. F. Orlov and B. N. Dolgov. New methods for the synthesis of organosiloxanes	817
N. E. Podkletnov. Individual cyclohexane hydrocarbons in benzene fractions of the Sakhalin petroleum	821
K. I. Portnoi, G. V. Samsonov and L. A. Solonnikova. On the interaction of boron carbide and silicon	823
A. N. Pudovik and F. N. Sitdikova. Addition of incomplete phosphorus acid esters to nitroisomylene and ethylvinylsulphone	826
A. V. Topchiev, V. P. Alania and G. I. Chernyi. On the reaction between olefines and ammonia in the presence of oxide catalysts	829

PHYSICAL CHEMISTRY

V. A. Bakaev, V. F. Kiselev and K. G. Krasil'nikov. Reduction of the melting point of water in the capillaries of a porous body	831
I. B. Borovskii and I. D. Marchukova. A method for the determination of the phase equilibrium state of binary systems	835
A. A. Zansokhova and V. D. Orekhov. Sensibilized oxidation of the methylene blue leuco basis on radiolysis in aqueous solution	838
Iaroslav Koutetskii and Antonin Fingerland. Design of single-electron quantum mechanical systems containing a large subsystem	841
I. V. Melikhov, M. S. Merkulova and G. Eva'l'd. General regularities in the coprecipitation of microadmixture during the growth of crystals	845
A. S. Cherkasov. The effect of the conjugation of the anthracene nucleus with a double bond of the alkenyl substituent upon the fluorescence and absorption spectra	848

CHEMICAL TECHNOLOGY

V. I. Kasatochkin, G. G. Petrov, Z. S. Smutkina and Z. B. Pechkovskaja. The physico-chemical nature of coal coking	852
A. A. Pirogov and A. I. Kovalev. Electron-microscope study of the influence of surface-active admixtures on the hydration of periclase	856

GEOLOGY

P. A. Karpov. A contribution to the problem as to the age of the Near Caspian depression	859
A. I. Letavin and N. A. Krylov. On the transition complex of Ciscaucasia	862
A. A. Nikonov. The restoration of neotectonic conditions and paleogeography of the Late glacial period with the aid of the epirogenic spectrum in the continental part of the Cola peninsula	866
I. A. Rezanov. On the Rephey deposits of the Okhotsk massive	870
S. K. Samsonov. A few words on the Newcaspien flora of West Turkmenia	873
M. M. Charygin and I. V. Bezborodova. A contribution to the development history of the interfluvial area Pshekha-Kuban in the North Caucasus during the Upper Jurassic	876
A. D. Shcheglov. The main peculiarities of the metallogeny of the southern part of West Transbaikalia	880

MINERALOGY

I. D. Zhus and G. P. Vagina. Argillaceous minerals of the Maikop series in the Ozek-Suat region	884
--	-----

<i>GEOCHEMISTRY</i>	<i>Pages</i>
N. V. Belov and V. I. Simonov. Isomorphism relations between zirconium and titanium	888
<i>OCEANOLOGY</i>	
A. P. Zhuze. Diatomaceae in bottom deposits in the north-western part of the Pacific	891
<i>PALEONTOLOGY</i>	
A. B. Ivanovskii. On the taxonomic position of Ordovician and Silurian Zaphrentis corals	895
<i>CYTOLOGY</i>	
A. F. Cherednichenko. The changes of mitotical activity of cells of lymphatic knots of dogs depending on the time of action of the leucocyte serum . .	898
<i>HISTOLOGY</i>	
I. B. Tokin. Ultrastructure of the striated border of the intestinal epithelium of <i>Parascaris equorum</i>	902
B. B. Fuks. Histochemistry of the phosphomonoesterases under the regeneration and degeneration of the nerve after its injury	905
<i>HYDROBIOLOGY</i>	
L. A. Rosenberg, I. B. Ulanovskii and Iu. M. Korovin. The effect of bacteria upon the corrosion of rustless steels in narrow clearances	909
<i>MICROBIOLOGY</i>	
E. P. Feofilova. On the symbiosis between lactic acid bacteria and yeasts in kephir-grains	913
<i>BIOPHYSICS</i>	
N. N. Rott. The effect of colchicine upon irradiated <i>Misgurnus fossilis</i> embryos	917
F. B. Shapiro. The fertility of mouse females subjected to irradiation at the period of embryonic development, and the viability of their progeny . . .	921
<i>BIOCHEMISTRY</i>	
D. M. Mikhlin and A. A. Mutuskin. Non-mitochondrial oxidation of reduced diphosphopyridinenucleotide in the root of plants	925
E. L. Rosenfeld, A. A. Poznanskaia and N. K. Rudakova. A study of the composition and properties of zymosan	928
R. A. Rutberg. Properties and method of obtaining polisaccharid zymozan active with respect to properdine system	931
<i>ZOOLOGY</i>	
V. M. Epshtein. On the taxonomic position, mode of life and origin of the endemic Baicalian leech <i>Trachelobdella torquata</i> (Grube)	935
<i>EXPERIMENTAL MORPHOLOGY</i>	
N. V. Dabagian. Regulatory properties of the eye in the embryos of <i>Acipenseridae</i>	938
A. A. Kostomarova. The development of intestine in cultural carpio during feeding and starvation in the stage of mixed nourishment	941
M. F. Nikitenko. A comparative description of the dimensions and structure of the encephalon in certain species of <i>Passeriformes</i>	945
<i>EMBRYOLOGY</i>	
P. N. Reznichenko and Iu. G. Iurovitskii. Ectodermal cilia of embryos, larvae and young in the <i>Cura Acipenser</i> , and their physiological rôle	949

Б. В. ЧИРИКОВ

**ПРОХОЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 14 I 1959)

Рассмотрим нелинейный осциллятор с одной степенью свободы, описываемый гамильтонианом

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p^2/2M + U(x, \lambda_1) + \varepsilon U_1(x, \lambda, \vartheta), \\ \lambda_1 &= \lambda_1(\tau), \quad \lambda = \lambda(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots), \quad d\vartheta/dt = \Omega(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Параметр λ_1 характеризует адиабатические процессы в системе; член с U_1 (периодический по ϑ) характеризует внешние возмущения (в частности, прохождение через резонанс), а также диссипативные и автоколебательные процессы; $\tau = \varepsilon t$ — «медленное время»; ε — малый параметр.

Методика исследования таких нелинейных колебаний рассматривалась в работах (1, 2). Прохождение через резонанс для случая слабой нелинейности рассматривалось в работах (1, 3). Кроме того, при исследовании фазового режима в ускорителях релятивистских частиц также фактически изучалось прохождение нелинейного осциллятора через резонанс (см., например, (4-6)). Однако, вследствие применения численных методов в первой группе работ и прикладного характера работ второй группы, это явление не было изучено с достаточной полнотой. Здесь описывается простой метод нахождения решения непосредственно из гамильтониана (1) и исследуется процесс прохождения нелинейного осциллятора через резонанс.

Пусть невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) имеет периодическое решение, зависящее от двух постоянных W и φ и параметра λ_1 :

$$\begin{aligned} x &= x(W, \theta, \lambda_1), \quad \theta = \int \omega(W, \lambda_1) dt + \varphi, \quad dx/dt = \omega \partial x / \partial \theta, \\ W &= p^2/2M + U(x, \lambda_1). \end{aligned} \quad (2)$$

При наличии малых возмущений ($\varepsilon \rightarrow 0$) перейдем к медленно изменяющимся переменным W и φ . Используя соотношение $\dot{W} = \dot{\lambda}_1 \partial W / \partial \lambda_1 + [W, \mathcal{H}]$, где $[,]$ — скобки Пуассона, найдем

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{d\lambda_1}{d\tau} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x} \dot{x}. \quad (3)$$

Далее, $dx/dt = \dot{W} \partial x / \partial W + (\omega + \dot{\varphi}) \partial x / \partial \theta + \dot{\lambda}_1 \partial x / \partial \lambda_1 = \omega \partial x / \partial \theta$. Последнее равенство связано с тем, что $dx/dt = \partial \mathcal{H} / \partial p$ и не зависит от возмущений. Так как $\partial x / \partial \theta = \dot{x} / \omega$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial W} \omega - \frac{\varepsilon \omega}{\dot{x}} \frac{d\lambda_1}{d\tau} \left(\frac{\partial x}{\partial W} \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right). \quad (4)$$

Уравнения (3); (4) являются точными уравнениями в «медленных» переменных W и φ . Применим к ним общий метод усреднения (7), причем конкретизируем вид U_1 : $U_1(x, \lambda, \vartheta) = U_1(x, \vartheta, \tau) + x(\lambda + \lambda')$; $\lambda = \alpha(\tau) \dot{x}$; $\lambda' = -\beta(\tau) \ddot{x}$. Кроме того, не будем рассматривать адиабатические процессы. Разлагая

правые части (3), (4) в ряды Фурье по θ и ϑ и усредняя их по периоду невозмущенного движения, получим уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m\Omega \approx l\omega} P_{ml} \cos \psi_{ml} - \varepsilon P_0; \\ \dot{\psi}_{ml} &= m\Omega(\tau) - l\omega(W) - \frac{\varepsilon}{2} l \sum_{p\Omega \approx q\omega} Q_{pq} \sin \psi_{pq}; \\ P_{ml}(W, \tau) &= l\omega a_l f_{m,0} + \omega \sum_n n a_n (f_{m, |l-n|} - f_{m, l+n}); \\ Q_{ml}(W, \tau) &= \omega \frac{da_l}{dW} f_{m,0} + \omega \sum_n \frac{da_n}{dW} (f_{m, |l-n|} + f_{m, l+n}); \\ P_0(W, \tau) &= \frac{\alpha}{2} \omega^2 \sum_n n^2 a_n^2 + \frac{\beta}{2} \omega^4 \sum_n n^4 a_n^2; \\ \psi_{ml} &= m\vartheta + \gamma_m - l\theta; \quad x = \sum_n a_n(W) \cos n\theta; \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} &= \sum_{m,n} f_{m,n}(W, \tau) \sin(m\vartheta + \gamma_m \pm n\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что сумма в уравнении для $\dot{\psi}_{ml}$, представляющая поправку к частоте осциллятора, приводит к эффектам второго порядка в изменении W и может быть отброшена в первом приближении, если мы интересуемся изменением только W *.

Простейшим случаем является быстрое прохождение через резонанс, когда можно пренебречь скоростью изменения частоты осциллятора ($\dot{W}\omega'$) по сравнению со скоростью изменения частоты внешней силы ($\varepsilon d\Omega/d\tau$) ⁽¹⁰⁾, что справедливо при условии

$$|l\omega' P_{ml} (d\Omega/d\tau + l\omega' P_0)^{-1}| \ll 1. \quad (6)$$

При этом решение уравнений (5) выражается известным образом через интегралы Френеля и асимптотически (если пренебречь затухающими колебаниями) имеет вид ($P_0 = 0$) *:

$$\Delta W = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m\Omega \approx l\Omega} P_{ml} \left| m \frac{d\Omega}{d\tau} \right|^{-1/2} \cos \left(\psi_{ml_0} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (7)$$

Если фазы колебаний в момент прохождения резонанса (ψ_{ml_0}) можно считать случайными, то $\overline{\Delta W} = 0$. Следовательно, в первом приближении имеет место лишь «рассеяние» по энергии — эффект, пропущенный в работах ^(8,9).

При невыполнении условия (6) рассмотрим вначале случай единственного резонанса ($m = l = 1$) **. Дифференцируя второе уравнение (5) по t и подставляя в него первое, получим

$$\psi''(y) = 1 - A \cos \psi, \quad (8)$$

$$A = \omega' P / 2\Omega_s', \quad y = t \sqrt{\varepsilon (d\Omega/d\tau + \omega' P_0)} = t \sqrt{\varepsilon \Omega_s'}, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi(0) = \psi_0.$$

В дальнейшем будем считать Ω_s' и A положительными и постоянными. Если $\Omega_s' < 0$, то в решении нужно изменить знак у времени. Если $A < 0$,

* Строго говоря, это справедливо при условии $AP_{ml} \ll lW^2\omega'$, которое может нарушаться в случае слабой нелинейности ($\omega' = d\omega/dW \rightarrow 0$).

** Нелинейность осциллятора ($\omega' \neq 0$) не обязательно связана с ангармоничностью. Вращение релятивистской частицы в магнитном поле дает пример нелинейного, но гармонического осциллятора. Наоборот, бетатронные колебания в ускорителе с жесткой фокусировкой могут быть линейными, но не гармоническими.

достаточно изменить все фазы на π . Первый интеграл (8) имеет вид

$$\frac{1}{2}(\psi')^2 = \psi - \psi_0 - A(\sin \psi - \sin \psi_0). \quad (9)$$

Исследование уравнения (9) удобно производить графически, построив функции $\psi/A + B$ и $\sin \psi$ (рис. 1). Разность между ними дает величину $(\psi')^2/2A$, а точки пересечения соответствуют прохождению резонанса. Так как для действительного движения должно быть всегда $\psi/A + B > \sin \psi$ ($\psi'^2 > 0$), то после пересечения знак ψ' изменяется на обратный. Из рис. 1 видно, что существуют два качественно различных режима прохождения

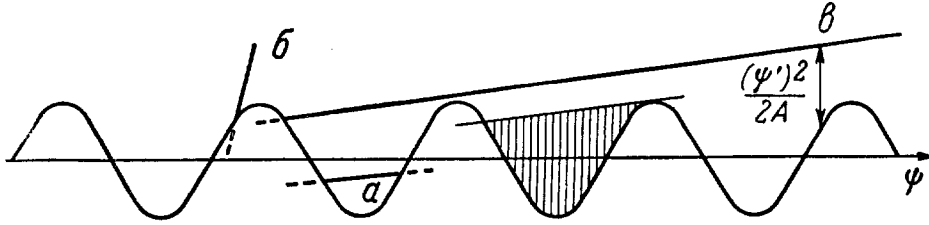


Рис. 1

через резонанс. Первый из них (представленный прямой a , имеющей две точки пересечения) характеризуется ограниченным колебанием фазы ψ и многократным прохождением через резонанс ($\psi' = 0$). Этот режим хорошо изучен (4-6) для специального случая (ускорители релятивистских частиц), где он известен под названием захвата или автофазировки. Захват возможен лишь при $A > 1$ и при определенных начальных условиях, показанных на рис. 1 штриховкой. Отметим, что в случае $A \gg 1$ захват происходит практически при любой фазе колебаний.

Другой режим (представленный прямыми b и $в$) характеризуется однократным прохождением осциллятора через резонанс. Рассмотрим его подробнее. Интегрируя (9) и используя соотношение $\omega' \Delta W = \Delta \omega = \omega_H + \dot{\psi} - \Omega$ (5), найдем асимптотическое (пренебрегая затухающими колебаниями) изменение энергии осциллятора:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{V \sqrt{2\varepsilon\Omega_3'}}{\omega'} C(A, \psi_0) = \\ &= \frac{V \sqrt{2\varepsilon\Omega_3'}}{\omega'} \int_0^\infty \{[\psi - A[\sin(\psi + \psi_0) - \sin \psi_0]]^{-1/2} - \psi^{-1/2}\} d\psi, \end{aligned} \quad (10)$$

где произведена замена $\psi - \psi_0 \rightarrow \psi$. При быстром прохождении через резонанс ($A \ll 1$) интеграл в (10) равен

$$C = \sqrt{\pi} A \cos \varphi + (\sqrt{\pi}/2) A^2 (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sqrt{2} \sin^2 \varphi - \sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi), \quad (11)$$

$$\varphi = \psi_0 + \pi/4.$$

Первый член приводит к (7), второй представляет малую нелинейную добавку. Его среднее значение (при равномерности фаз φ) отлично от нуля:

$$\bar{C} = \sqrt{\pi/2} A^2/2, \quad \overline{\Delta W} = \sqrt{\varepsilon} (V \sqrt{\pi}/8) \omega' P^2 / \Omega_3'^{3/2}, \quad (12)$$

что приводит к замедлению прохождения осциллятора через резонанс. Знак ΔW совпадает со знаком $\omega' \Omega_3'$.

В обратном предельном случае ($A \gg 1$)

$$C(A, \xi) = \sqrt{\frac{2}{A}} \ln \frac{64}{(1/A + \xi)(4\pi/A - \xi^2)} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{A \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) + 2\pi}, \quad (13)$$

причем фаза $\xi = \psi_0 - \pi/2$ в момент резонанса заключена в узких пределах (рис. 1)

$$-1/A < \xi < \sqrt{4\pi/A}. \quad (14)$$

Для большинства фаз (исключая экспоненциально малые области на границах (14)) результат прохождения резонанса не зависит от фазы. Знак ΔW противоположен знаку $\omega' \Omega_3'$.

При $A \rightarrow \infty$

$$\Delta W = - (4/\pi) \sqrt{2P/\omega'} \quad (15)$$

и не зависит от Ω_3' . Это означает, что в рассматриваемом режиме нет непрерывного перехода к стационарному случаю при $\Omega_3' \rightarrow 0$. Такой переход имеет место лишь при наличии захвата. Заметим, что под стационарностью понимается в данном случае не только постоянство частоты внешнего возмущения, но и консервативность колебательной системы ($P_0 \ll P$, см. (8)).

Если колебания осциллятора и внешнее возмущение не являются гармоническими, то одновременно проходит целый ряд резонансов ($km\Omega = kl\omega$; k — любое целое положительное число). Уравнения (5) принимают в этом случае вид

$$\dot{W} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_k P_{km, kl} \cos k \psi_{ml}, \quad \dot{\psi}_{ml} = m\Omega - l\omega. \quad (16)$$

Но стоящая справа сумма есть некоторая периодическая функция фазы ψ_{ml} . Поэтому все отличие решения (16) от решения (8) сведется к замене гармонических функций на другие периодические, т. е., по существу, к изменению числовых коэффициентов.

В настоящей заметке задача о прохождении нелинейного осциллятора через резонанс решена в первом приближении. Эффекты второго порядка: поправка к частоте, медленное изменение A , действие не учтенных в (16) резонансов могут, вообще говоря, качественно изменить решение. Так, в режиме захвата может произойти постепенный выход из резонанса, а при однократном прохождении резонанса может, наоборот, произойти захват.

Устойчивость обоих режимов по отношению к действию неучтенных факторов определяется адиабатическим изменением амплитуды фазовых колебаний после захвата. При возрастании амплитуды устойчивым является режим однократного прохождения через резонанс, при уменьшении — режим захвата. Кроме того, можно показать, что в случае отсутствия явной зависимости A от времени и при выполнении условия* $\varepsilon^2 Q^2 \ll \varepsilon P \omega' \ll (\Delta\Omega)^2$ действие перечисленных выше факторов незначительно; в частности, мала вероятность захвата при однократном прохождении через резонанс.

Подчеркнем, что наиболее интересной и важной особенностью нелинейных эффектов при медленном прохождении через резонанс ($A \gg 1$) является их независимость от начальной фазы колебаний. Это приводит, в частности, к обратимости процесса даже при наличии «размешивания» по фазе.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Г. И. Будкеру и Ю. Ф. Орлову за интересные дискуссии и полезные советы.

Поступило
19 XII 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, АН УССР, 1955. ² В. М. Волосов, ДАН, **121**, № 1, 22 (1958). ³ Ю. Ф. Орлов, ЖЭТФ, **32**, в. 2, 316 (1957). ⁴ В. И. Векслер, ДАН, **44**, № 9, 393 (1944). ⁵ E. M. McMillan, Phys. Rev., **68**, № 5—6, 143 (1945). ⁶ E. M. Мороз, Кандидатская диссертация, ФИАН, 1958. ⁷ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958. ⁸ N. M. Blachman, Rev. Sci. Inst., **21**, № 11, 908 (1950). ⁹ Л. Л. Гольдин, Д. Г. Кошкарев, ЖЭТФ, **31**, в. 5, 803 (1956). ¹⁰ Ю. Ф. Орлов, ЖЭТФ, **32**, в. 1, 130 (1957).

* Это условие имеет простой физический смысл: частота фазовых колебаний $\sqrt{\varepsilon P \omega'}$ должна быть много больше ширины резонансной кривой εQ , но много меньше интервала между резонансами $\Delta\Omega$, равного наименьшей из частот Ω , ω .