

# ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТОМ XXXV

ВЫП. 12

ДЕКАБРЬ

5887/2



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

*Н. П. Богородицкий, А. М. Бонч-Бруевич, С. Е. Бреслер, В. Е. Голант,  
Г. А. Гринберг, В. М. Дукельский, А. П. Комар, Б. П. Константинов,  
А. Г. Лойцянский, Г. В. Скорняков, Н. В. Федоренко*

Адрес редакции: Ленинград, В-164, Менделеевская лин., 1. Редакция „Журнала технической физики“.

**СОДЕРЖАНИЕ**

**CONTENTS**

|  | Стр. |   | Page |
|--|------|---|------|
| <b>Г. М. Малышев.</b> Диагностика плазмы по рассеянию света на электронах . . . . .  | 2129 | <b>G. M. Malyshev.</b> Plasma Diagnostics by means of Light Scattering by Electrons . . . . .   | 2129 |
| <b>А. Б. Михайловский и А. А. Рухадзе.</b> О неустойчивости электронных волн в неоднородных плазменных потоках . . . . .   | 2143 | <b>A. B. Mikhailovskii a. A. A. Rukhadze.</b> On the Instability of Electron Waves in Inhomogeneous Plasma Streams . . . . .  | 2143 |
| <b>О. А. Колпаков и В. И. Котов.</b> Излучение магнитного диполя, пролетающего через цилиндрический резонатор и структурные волноводы . . . . .                                  | 2150 | <b>O. A. Kalpakov a. V. I. Kotov.</b> Radiation from the Magnetic Dipole Flying through a Cylindrical Resonator and Structural Waveguides . . . . .   | 2150 |
| <b>А. Н. Ковдратенко и В. И. Мирониченко.</b> Кинетическая теория прохождения электромагнитных волн через плазменный слой. I . . . . .   | 2154 | <b>A. N. Kondratenko a. V. I. Miroshnichenko.</b> Kinetical Theory about the Magnetic Wave Travelling through a Plasma Layer. I . . . . .   | 2154 |
| <b>Д. Б. Гурвич и Е. А. Свядощ.</b> Расчет низкочастотного электромагнитного поля в координатах, разделяющих уравнение Лапласа . . . . .   | 2160 | <b>D. B. Gurvich a. E. A. Svyadosch.</b> The Calculation of a Low Frequency Magnetic Field in Coordinates Separating Laplas Equation . . . . .  | 2160 |
| <b>М. С. Бережецкий, С. Е. Гребенщиков, А. П. Попрядухин и И. С. Шпигель.</b> Исследование структуры магнитных поверхностей стелларатора с двухзаходным винтовым полем . . . . . | 2167 | <b>M. S. Berezhetskii, S. E. Grebentschikov, A. P. Popryadukhin a. I. S. Shpigel.</b> Structural Investigation of the Magnetic Surfaces in Stellarotor with the n-2 Helical Field . . . . . | 2167 |
| <b>В. Е. Голант, М. Г. Каганский, В. А. Овсянников, А. Д. Пилия.</b> Тороидальная установка для адиабатического сжатия плазмы . . . . .  | 2176 | <b>V. E. Golant, M. G. Kaganskii, V. A. Ovsyannikov a. A. D. Piliya.</b> Toroidal Mashine for the Adiabatical Plasma Compression („Tuman“) . . . . .  | 2176 |
| <b>О. М. Швец, С. С. Овчинников, В. Ф. Тарасенко, О. С. Павличенко и В. Т. Толок.</b> Высоко-частотный метод создания плотной плазмы в металлической камере . . . . .            | 2185 | <b>O. M. Shwets, S. S. Ovchinnikov, V. F. Tarasenko, O. S. Pavlichenko a. V. T. Tolok.</b> High-frequency Method for the Dense Plasma Production in a Metal Chamber . . . . .               | 2185 |
| <b>И. А. Косый.</b> Радиальный поток заряженных частиц в разряде, возбуждаемом высокочастотной бегущей <i>H</i> -волной . . . . .  | 2189 | <b>I. A. Kossyi.</b> Radial Stream of Charged Particles in a Discharge Produced by a High-frequency Travelling <i>H</i> -Wave . . . . .   | 2189 |
| <b>Н. А. Кервалишвили и А. В. Жаринов.</b> Характеристики разряда низкого давления в поперечном магнитном поле . . . . .   | 2194 | <b>N. A. Kervalishvili a. A. V. Zharinov.</b> Characteristics of a Low Pressure Discharge in the Transversal Magnetic Field . . . . .   | 2194 |
| <b>И. Н. Мешков и Б. В. Чириков.</b> Фокусировка интенсивного электронного пучка в ускорительной трубке . . . . .  | 2202 | <b>I. N. Meshkov a. B. V. Chirikov.</b> Focussing of an Intensive Electron Beam in an Accelerating Tube . . . . .   | 2202 |

|   |      |
|---|------|
| <b>Р. М. Кушнир, Б. М. Палюх и Л. С. Савчик.</b> Резонансная перезарядка в парах цинка и кадмия . . . . .               | 2212 |
| <b>Л. С. Котоусов.</b> Диффузионный термоэффект. I . . . . .  | 2215 |
| <b>Л. С. Котоусов.</b> Диффузионный термоэффект. II . . . . .   | 2221 |
| <b>В. И. Остроумов и М. В. Стабников.</b> Об использовании ядерных эмульсий совместно с пузырьковыми камерами . . . . . | 2227 |

|  |      |
|--|------|
| <b>R. M. Kushnir, B. M. Palyukh a. L. S. Savchik.</b> Resonant Charge Exchange in Zincum and Cadmium Steam . . . . .       | 2212 |
| <b>L. S. Kotousov.</b> Diffusion Thermoeffect. I . . . . .   | 2215 |
| <b>L. S. Kotousov.</b> Diffusion Thermoeffect. II . . . . .  | 2221 |
| <b>V. I. Ostroumov a. M. V. Stabnikov.</b> On the Use of the Nuclear Emulsions Together with the Bubble Chambers . . . . . | 2227 |

*Краткие сообщения**Short Notes*

|   |      |
|---|------|
| <b>В. И. Раховский.</b> К вопросу о механизме эмиссии катода дугового разряда . . . . .   | 2228 |
| <b>Б. С. Акшанов, В. Г. Маринин, А. И. Стрельцов и К. Д. Синельников.</b> К вопросу инжекции заряженных частиц в ловушку зеркального типа . . . . . | 2232 |
| <b>Г. А. Шнеерсон.</b> Проникновение сильного импульсного магнитного поля в тонкостенный цилиндр, нагреваемый индуктированным током . . . . .       | 2234 |
| <b>Г. И. Жилейко.</b> О решении уравнений движения в электронных ускорителях с бегущей волной . . . . .   | 2239 |
| <b>А. И. Адонина.</b> О режиме скольжения гармоник на плоских решетках . . . . .  | 2242 |

|   |      |
|---|------|
| <b>V. I. Rakhovskii.</b> On the Mechanism of Emission from the Cathode in the Arc Discharge . . . . .   | 2228 |
| <b>B. S. Akshanov, V. G. Marinin, A. I. Streltsov a. K. D. Sinelnikov.</b> On the Charged Particles Injection into the Magnetic Mirror System . . . . . | 2232 |
| <b>G. A. Shneerson.</b> The Penetration of a Strong Pulse Magnetic Field into a Thin Wool Cylinder Heated by the Induction Current . . . . .            | 2234 |
| <b>G. I. Zhileiko.</b> On the Solution of Motion Equations in Traveling Wave Electron Accelerators . . . . .  | 2239 |
| <b>A. I. Adonina.</b> On the Sliding Regime of Harmonics on Flat Grates . . . . .   | 2242 |

*Письма в Редакцию**Letters to the Editor*

|   |      |
|---|------|
| <b>Д. М. Уманский.</b> Влияние магнитного поля на диэлектрическую проницаемость технической воды . . . . .                      | 2245 |
| <b>Н. К. Абросимов, В. А. Николаева и С. Г. Шерман.</b> Относительно вычисления эффективности $\mu$ -мезонного канала . . . . . | 2248 |
| <b>В. С. Коломойцев.</b> К теории столба электрической дуги . . . . .   | 2249 |
| <b>И. А. Кринберг.</b> О письме В. С. Коломойцева „К теории столба электрической дуги“ . . . . .                                | 2251 |
| Именной указатель т. XXXV „Журнала технической физики“ за 1965 г. . . . .   | 2253 |
| Содержание т. XXXV „Журнала технической физики“ за 1965 г. . . . .  | 2273 |

|  |      |
|--|------|
| <b>D. M. Umanskii.</b> The Influence of Magnetic Field on the Dielectric Constant of Technical Water . . . . .                   | 2245 |
| <b>N. K. Abrosimov, V. A. Nikolaeva a. S. G. Sherman.</b> About the Calculation of the $\mu$ -Meson Channel Efficiency . . . . . | 2248 |
| <b>V. S. Kolomoitsev.</b> On the Theory of the Electrical Arc Column . . . . .   | 2249 |
| <b>I. A. Krinberg.</b> About Doctor V. S. Kolomoitsev's Letter „On the Theory of the Electrical Arc Column“ . . . . .            | 2251 |
| Author Index of Vol. XXXV of the Journal of Technical Physics, 1965 . . . . .  | 2285 |
| Contents of Vol. XXXV of the Journal of Technical Physics, 1965 . . . . .  | 2303 |

## ФОКУСИРОВКА ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЬНОЙ ТРУБКЕ

И. Н. Мешков и Б. В. Чириков

В настоящей работе рассмотрено прохождение интенсивного электронного пучка через прямолинейную ускорительную трубку. Одной из основных задач при этом является фокусировка пучка, т. е. обеспечение небольших поперечных размеров пучка и малой угловой расходимости. Вопросам фокусировки электронных пучков посвящено большое количество работ (см., например<sup>[1]</sup>); однако, насколько нам известно, до сих пор не рассматривалась динамика релятивистского пучка с учетом собственного поля и при наличии продольного ускоряющего поля.

### § 1. Уравнения движения

Исходим из уравнений движения ( $e = m = c = 1$ )<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dz}{dt} \right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \\ \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dy}{dt} \right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f; \quad \beta^2 = \dot{z}^2 + \dot{y}^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $y$  — поперечная координата (рис. 1);  $\varphi$  — электростатический потенциал внешнего поля (с обратным знаком), подчиняющийся уравнению  $\Delta\varphi = 0$  и определяемый граничными условиями на ускоряющих электродах;  $f$  — сила, связанная с объемным зарядом и равная разности электростатического расталкивания  $f_E$  и магнитного стягивания  $f_H = -f_E \dot{z}^2$ . Результирующая сила

$$f = f_E (1 - \dot{z}^2) \simeq \frac{f_E}{\gamma^2}. \quad (1.2)$$

Заметим, что обычно используемое последнее приближенное выражение справедливо лишь при  $\dot{y}^2 \ll 1 - \dot{z}^2$ , т. е. при  $\theta \ll \frac{1}{\gamma}$ , где  $\theta$  — угол наклона траекторий электрона к оси пучка.

В дальнейшем будем рассматривать два случая: аксиально-симметричную (I) и ленточную (II) геометрию. Как обычно<sup>[1]</sup>, будем считать пучок „ламинарным“ (отсутствуют пересечения траекторий) и достаточно резко ограниченным в поперечном направлении. Тогда можно рассмотреть движение только граничного электрона, для которого

$$f_E = \frac{2J}{y\beta} \text{ (I); } f_E = \frac{2\pi J}{b\beta}, \text{ (II)} \quad (1.3)$$

где  $J$  — полный ток пучка, а  $b$  — ширина ленточного пучка.

<sup>1</sup> Приводим перевод некоторых единиц из системы ( $e = m = c = 1$ ) в практическую:  $\varphi_1 = \frac{mc^2}{e} \simeq 5 \cdot 10^5$  в;  $J_1 = \frac{mc^3}{e} \simeq 17\,000$  а;  $W_1 = mc^2 \simeq 5 \cdot 10^5$  эв.

В уравнениях (1.1), мы не учитываем продольной составляющей сил пространственного заряда. Это допустимо при условии, что разность потенциалов за счет объемного заряда ( $\varphi^*$ ) много меньше кинетической энергии электронов  $W = \gamma - 1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi^*}{W} \sim \frac{J}{W\beta} \sim \frac{W+1}{\sqrt{W+2}} \frac{J}{W^{3/2}} \ll 1 \text{ (I),} \\ \frac{\varphi^*}{W} \sim \frac{W+1}{\sqrt{W+2}} \frac{J}{W^{3/2}} \frac{y_0}{b} \ll 1 \text{ (II),} \end{aligned} \right\}$$

где  $y_0$  — апертура ускорительной трубки (рис. 1).

Уравнение траекторий следует из (1.1) и имеет вид [для случая (I)]

$$\frac{\varphi(\varphi+2)}{\varphi+1} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dy}{dz} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2J}{y(\varphi+1)\sqrt{\varphi(\varphi+2)}}, \quad (1.4)$$

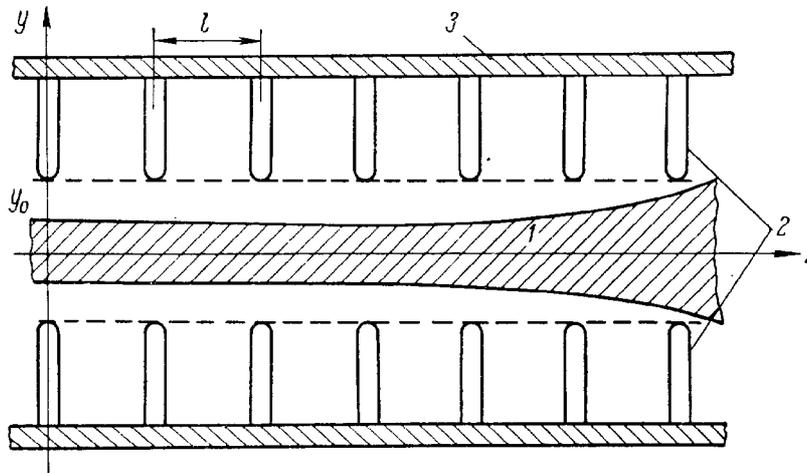


Рис. 1. Схема ускорительной трубки.

1 — электронный пучок; 2 — ускоряющие электроды; 3 — изолятор;  $y_0$  — половина апертуры трубки;  $l$  — расстояние между электродами.

где  $\varphi$  выбрано равным кинетической энергии. В случае (II) в правой части (1.4) нужно произвести замену  $y \rightarrow \frac{b}{\pi}$ .

Вместо  $z$  вводим независимую переменную  $u$  по формуле

$$\varphi(z) = \text{ch } u - 1. \quad (1.5)$$

Пересчет от  $\varphi$  к  $u$  и обратно удобно производить, пользуясь графиком на рис. 6.

Уравнение (1.4) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \frac{d^2y}{du^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \frac{dy}{du} \text{sh } u - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ch } u = \frac{2J}{y \text{sh } u}. \quad (1.6)$$

Заметим, что замена переменных (1.5) применима только при дополнительном условии взаимно-однозначного соответствия между  $z$  и  $u$ , которое может нарушаться, если потенциал  $\varphi(z)$  содержит большую переменную составляющую (см. § 4). Преобразование (1.5) полезно, если ускоряющее поле является почти однородным, так что  $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \approx \text{const}$ , а  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$  мало.

## § 2. Пучок без ускорения

В уравнении (1.4)  $\varphi = \gamma - 1 = \text{const}$

$$y \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{2J}{[\varphi(\varphi+2)]^{3/2}} = 2A^2. \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид<sup>[1]</sup>

$$A \frac{z-z^*}{y^*} = \int_0^{\sqrt{\ln \frac{y}{y^*}}} e^{t^2} dt, \quad (2.2)$$

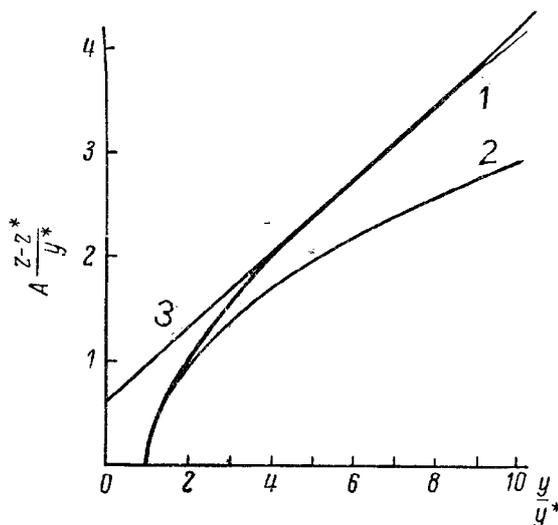


Рис. 2. Расширение пучка без ускорения.

1 — точное решение (2.2); 2 — решение в линейном приближении (2.3); 3 — приближенное решение (2.4).

где  $y^*$  — значение  $y(z)$ , при котором  $y' = 0$ . Оказывается, что в практически интересных случаях решение (2.2) может быть аппроксимировано с хорошей точностью решением линеаризованного уравнения

$\eta'' = \frac{2A^2}{y_n}$ , где  $y_n$  — начальное значение  $y = y(0)$ ;  $\eta = y - y_n \ll y_n$ . Решение имеет вид

$$y \approx y_n + \left(\frac{dy}{dz}\right)_n z + \frac{A^2 z^2}{y_n}. \quad (2.3)$$

На рис. 2 представлены оба решения для случая  $y'_n = 0$ . Если нас удовлетворяет точность в 10%, то формулу (2.3) можно применять до  $y = 2.5y^*$ . При больших  $\frac{y}{y^*}$  точное решение (2.2) можно аппроксимировать линейной зависимостью (прямая на рис. 2)

$$\frac{A}{y^*} z = 0.60 + 0.37 \left(\frac{y}{y^*}\right). \quad (2.4)$$

Наибольшая ошибка в месте перехода от (2.3) к (2.4) при  $\left(\frac{y}{y^*}\right) \approx 3$  составляет около 15%.

Для ленточного пучка [случай (II)] уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{2\pi A^2}{b}; \quad A = \frac{\sqrt{J}}{[\varphi(\varphi+2)]^{3/4}}. \quad (2.5)$$

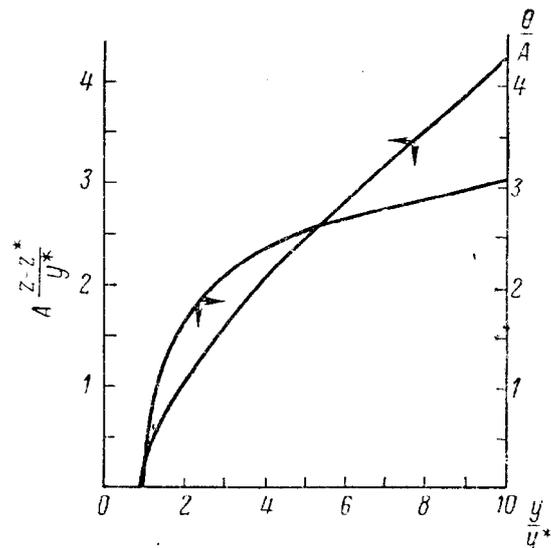


Рис. 3. Универсальные кривые для расчета движения пучка без ускорения с учетом пространственного заряда.

$y^*$  — наименьший размер пучка;  $z^*$  — положение  $y^*$ ;  $\theta = \frac{dy}{dz}$ ;  $A = \sqrt{J} [\varphi(\varphi+2)]^{-3/4}$  (см. рис. 4). Шкалы для кривых указаны стрелками. Подробное описание использования кривых дано в § 2.

Отсюда

$$y = y_{н.} + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{н.} z + \frac{\pi A^2 z^2}{b}. \quad (2.6)$$

По кривой  $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$  на рис. 2 можно рассчитывать расширение пучка для частного случая, когда вначале пучок является параллельным. В общем случае для расчета движения пучка необходимо знать угол наклона траектории крайнего электрона

$$\theta \approx \frac{dy}{dz} = 2A \sqrt{\ln \frac{y}{y^*}}.$$

Эта зависимость представлена на рис. 3 вместе с функцией  $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$ . ( $A=f(\varphi)$  представлена на рис. 4). Порядок расчета следующий: по начальному углу наклона траектории и начальному размеру пучка определяем из кривой  $\theta\left(\frac{y}{y^*}\right)$  наименьший размер пучка для данного случая, а из кривой  $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$  его положение ( $z^*$ ). Затем, пользуясь кривой  $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$ , вычисляем дальнейшее расширение пучка. Напомним, что пучок является симметричным относительно  $z^*$ .

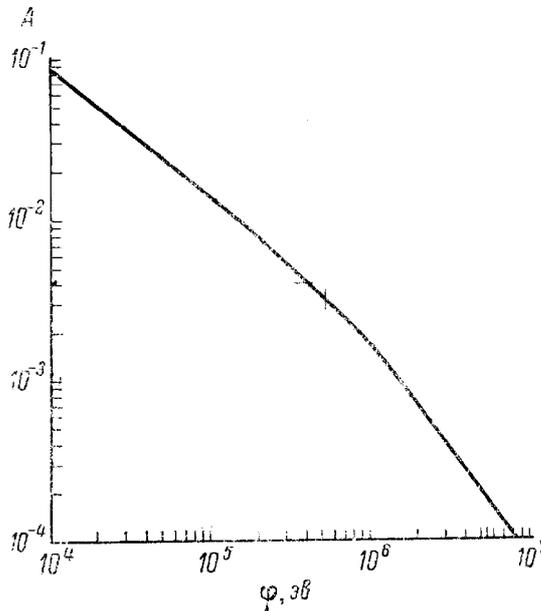


Рис. 4. График зависимости  $A(\varphi)$  для  $J=1$  а.

$$A = \sqrt{J} [\varphi(\varphi + 2)]^{-3/4}.$$

### § 3. Ускорение в однородном поле

Уравнение (1.6) принимает в этом случае вид  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_0 = \text{const}\right)$

$$y \frac{d^2 y}{du^2} = \frac{2J}{E_0^2 \text{sh } u} = \frac{2B}{\text{sh } u}. \quad (3.1)$$

Линеаризуя это уравнение, получаем

$$\frac{d^2 \eta}{du^2} = \frac{2B}{y_{н.} \text{sh } u}, \quad (3.2)$$

откуда

$$y \approx y_{н.} + \left(\frac{dy}{du}\right)_{н.} (u - u_{н.}) + \frac{2B}{y_{н.}} \int_{u_{н.}}^u \ln \text{th} \frac{u}{2} du - \frac{2B}{y_{н.}} (u - u_{н.}) \ln \text{th} \frac{u_{н.}}{2}, \quad (3.3)$$

где  $\frac{dy}{du} = \frac{\theta}{E_0} \sqrt{\varphi(\varphi + 2)}$ .

Графики функций  $-\ln \text{th} \frac{u}{2}$  и  $-\int_0^u \ln \text{th} \frac{x}{2} dx$  приведены на рис. 5. При  $u, u_{н.} \ll 1$  приближенно получаем

$$y - y_{н.} \approx \frac{2B}{y_{н.}} u_{н.} \ln \frac{u}{u_{н.}} + (u - u_{н.}) \left\{ \left(\frac{dy}{du}\right)_{н.} + \frac{2B}{y_{н.}} \left(\ln \frac{u}{u_{н.}} - 1\right) \right\}. \quad (3.4)$$

При  $u \gg 1$ , но  $u_{н.} \ll 1$ , (рис. 6) имеем

$$y - y_{н.} \approx 4.91 \frac{B}{y_{н.}} + (u - u_{н.}) \left\{ \left(\frac{dy}{du}\right)_{н.} + \frac{2B}{y_{н.}} \ln \frac{2}{u_{н.}} \right\}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) видно, что эффект пространственного заряда выражается в виде добавки к начальному углу расходимости

$$\delta\theta \approx \frac{2J}{E_0 y_{\text{н.}}} \left[ \sqrt{\varphi_{\text{н.}} (\varphi_{\text{н.}} + 2)} \right]^{-1/2} \times \begin{cases} \ln \frac{u}{u_{\text{н.}}} - 1; & u \ll 1, \\ \ln \frac{2}{u_{\text{н.}}}; & u \gg 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

и начальному размеру пучка

$$\delta y_{\text{н.}} \approx \frac{2J}{E_0^2 y_{\text{н.}}} \times \begin{cases} u_{\text{н.}} \ln \frac{u}{u_{\text{н.}}}; & u \ll 1, \\ 4.91 \frac{R}{\varphi_{\text{н.}}}; & u \gg 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

*2,455*

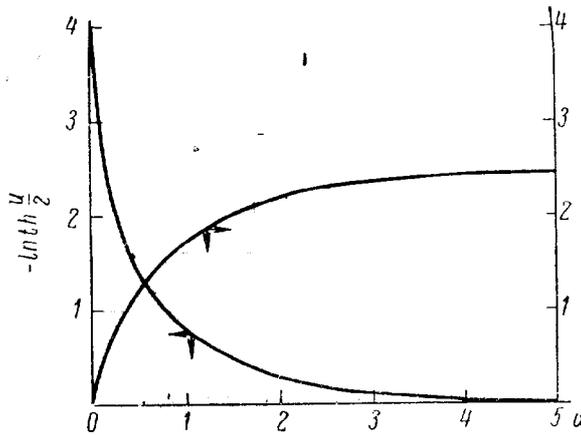


Рис. 5. К расчету движения пучка в однородном ускоряющем поле с учетом пространственного заряда в линейном приближении по формуле (3.3).

Шкалы для кривых указаны стрелками.

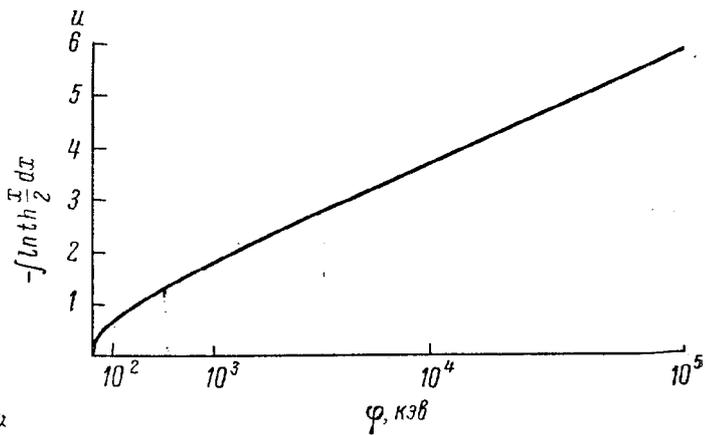


Рис. 6. Зависимость  $u(\varphi)$  (1.5):  $u \approx \sqrt{2\varphi}$  при  $\varphi \ll 1$  (500 кэВ) и  $u \approx \ln 2\varphi$  при  $\varphi \gg 1$ .

Для ленточного пучка (случай (II), § 1) решение (3.3) является точным, причем в правых частях формул (3.2) ÷ (3.7) вместо  $y_{\text{н.}}$  необходимо подставить величину  $\frac{b}{\pi}$ .

#### § 4. Фокусировка пучка периодическим полем

Будем исходить из уравнения (1.6). Примем, что вблизи оси ( $ky \ll 1$ ) электростатический потенциал имеет вид (см. § 5)

$$\varphi(z) = E_0 z + \varepsilon \left( 1 + \frac{k^2 y^2}{4} \right) \cos kz. \quad (4.1)$$

В соответствии с выбором потенциала в § 1 точка  $z = 0$  выбирается таким образом, чтобы  $E_0 z = \gamma - 1$  (см. также § 5). Постоянная  $\varepsilon$  считается малой ( $\varepsilon \ll \varphi$ ) и определяется граничными условиями (см. § 5). Уравнение (1.6) с точностью до  $\varepsilon^2$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{du^2} - \frac{dy}{du} \frac{\varepsilon k^2 \cos kz}{E_0^2 \left( 1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz \right)} \operatorname{sh} u - y \frac{\varepsilon k^2 \cos kz}{2E_0^2 \left( 1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz \right)} \operatorname{ch} u = \\ = \frac{2J}{y E_0^2 \left( 1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz \right) \operatorname{sh} u}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Связь  $z$  и  $u$  дается выражением (1.5)

$$\operatorname{ch} u = 1 + E_0 z + \varepsilon \cos kz. \quad (4.3)$$

Для взаимно-однозначного соответствия переменных  $z$ ,  $u$  необходимо, чтобы  $E_0 > \epsilon k$ . Иными словами, формулы этого параграфа не применимы при очень слабом ускоряющем поле (см. § 2). Примем, что  $k \gg E_0$ , т. е. переменная  $u$  мало изменяется на расстоянии  $\sim k^{-1}$ . В этом случае уравнение (4.2) можно решать методом усреднения<sup>[2]</sup>. Для этого представляем величину  $y$  в виде суммы двух слагаемых: медленно изменяющегося ( $y$ ) и малого, но быстро (так как  $k \gg E_0$ ) осциллирующего ( $\eta$ ), т. е.  $y \rightarrow y + \eta$  ( $\eta \ll y$ ). Подставляя это выражение в (4.2), производим разделение уравнения на медленную (4.4) и осциллирующую (4.5) части, которые должны равняться нулю независимо. Первое уравнение получается усреднением (4.2) по быстрым осцилляциям

$$y'' - \frac{\epsilon k^2}{E_0^2} \left( y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \overline{\cos kz}^u - \frac{4\epsilon k J}{y E_0^3 \operatorname{sh} u} \overline{\sin kz}^u - \frac{\epsilon k^2}{E_0^2} \left( \operatorname{sh} u \overline{\eta' \cos kz}^u + \frac{\operatorname{ch} u}{2} \overline{\eta \cos kz}^u \right) = \frac{2J}{y E_0^2 \operatorname{sh} u}. \quad (4.4)$$

Это уравнение написано с точностью до членов  $\sim \epsilon^2$ . Черта означает усреднение по переменной  $u$ . Уравнение для  $\eta$  содержит все осциллирующие слагаемые (4.2) после подстановки в него  $y + \eta$ . С точностью до членов  $\sim \epsilon$  уравнение имеет вид

$$\eta'' + \frac{2J}{y^2 E_0^2 \operatorname{sh} u} \eta = \frac{\epsilon k^2}{E_0^2} \left( y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \cos kz. \quad (4.5)$$

В соответствии с принятым выше условием  $k \gg E_0$  величины  $\operatorname{sh} u$  и  $\operatorname{ch} u$  в уравнениях (4.4), (4.5) считаются постоянными. Частота функции  $\cos kz$  по переменной  $u$  равна (4.3)

$$\frac{d(kz)}{du} = \frac{k \operatorname{sh} u}{E_0 - \epsilon k \sin kz} \approx \frac{k \operatorname{sh} u}{E_0} \equiv k \left( \frac{dz}{du} \right)_0. \quad (4.6)$$

С точностью  $\sim \epsilon$  решение уравнения (4.5) есть

$$\eta = - \frac{\epsilon \left( y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \cos kz}{\operatorname{sh}^2 u \left( 1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)}. \quad (4.7)$$

Это выражение необходимо подставить в (4.4) и произвести усреднение, тогда имеем

$$\overline{\eta' \cos kz} \sim \overline{\sin kz \cos kz} = 0,$$

$$\overline{\eta \cos kz} = - \frac{\epsilon \left( y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \overline{\cos^2 kz}}{\operatorname{sh}^2 u \left( 1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)} = - \frac{\epsilon \left( y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right)}{2 \operatorname{sh}^2 u \left( 1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)}. \quad (4.8)$$

Так как уравнение (4.4) написано с точностью  $\sim \epsilon^2$  а  $\eta \sim \epsilon$ , то усреднение в (4.8) достаточно провести в нулевом приближении по  $\epsilon$ , тогда усреднение по  $z$  или по  $u$  приводит к одинаковому результату.

Однако при вычислении  $\overline{\cos kz}^u$  это уже не так: чтобы получить общую точность  $\sim \epsilon^2$ , усреднение необходимо провести с точностью  $\sim \epsilon$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\cos kz}^u &= \frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} \cos kz \frac{du}{dz} dz = \frac{T_z}{T_u} \overline{\cos kz} \frac{du}{dz} = \\ &= \frac{T_z}{T_u} \left( \frac{du}{dz} \right)_0 \overline{\cos kz \left( 1 - \frac{\epsilon k}{E_0} \sin kz - \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} \epsilon \cos kz \right)} = - \frac{\epsilon \operatorname{ch} u}{2 \operatorname{sh}^2 u}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Здесь  $T_z$ ,  $T_u$  — периоды быстрых осцилляций по  $z$  и  $u$  соответственно. Ввиду неравенства  $k \gg E_0 \frac{T_z}{T_u} \approx \left(\frac{du}{dz}\right)_0$  с точностью  $\sim \varepsilon^0$ . Аналогично

$$\overline{\sin kz}^u = -\frac{\varepsilon k}{2E_0}. \quad (4.10)$$

Из (4.4)—(4.10) получаем

$$\begin{aligned} y'' + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2 \operatorname{cth} u (2y' + y \operatorname{cth} u) \frac{1 - \frac{4J}{3k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u}}{1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u}} = \\ = \frac{2J}{yE_0^2 \operatorname{sh} u} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 k^2}{E_0^2}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для сравнения полученного уравнения с работами<sup>[3, 4]</sup> необходимо перейти к случаю,  $E_0 = 0$ . Как было отмечено выше, прямой переход невозможен ввиду условия  $E_0 > \varepsilon k$ . Однако можно показать, что, применяя аналогичную процедуру усреднения непосредственно к (1.1), получим при  $E_0 = 0$  уравнение

$$\ddot{y} + \frac{3}{8} \frac{(\varepsilon k)^2}{\gamma^2 \beta^2} y \frac{1 - \left(\frac{4J}{3k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)}{1 - \left(\frac{2J}{k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)} = \frac{2J}{y \beta \gamma^3}. \quad (4.12)$$

В этом уравнении член  $\sim y$  характеризует среднюю фокусирующую силу в периодическом поле. Полученное для нее выражение совпадает (за исключением резонансного множителя)

$$\frac{\left(1 - \frac{4J}{3k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)}{\left(1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)}$$

с результатом работы<sup>[3, 4]</sup> (при переходе к нерелятивистскому случаю). Что касается резонансного множителя, то он практически несуществен. Действительно, для пучка без ускорения резонанс был бы существен лишь в том случае, если пучок не расплывается, так как в противном случае изменение  $y$  нарушает условие резонанса. Это значит, что расплывание пучка должно компенсироваться фокусирующей силой, т. е. должно быть

$$\varepsilon^2 = \frac{16}{3} \frac{J}{(ky)^2} \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4.13)$$

Отсюда резонансный знаменатель

$$1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3} = 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma \beta^2}\right)^2 \approx 1,$$

так как  $\gamma \beta^2 \sim \varphi \gg \varepsilon$  (см. выше).

Член  $\sim y'$  в (4.11) характеризует затухание колебаний пучка, связанное с ускорением электронов; при переходе к случаю  $E_0 = 0$  затухание исчезает [см. также (1.4)]. Уменьшение действия объемного заряда (множитель  $\left[1 - \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2\right]$ ) в (4.11) также связано с ускорением [см. (4.12)]. Этот эффект мал в силу неравенства  $\varepsilon k \ll E_0$ , которое необходимо для преобразования знаменателя в (4.2), и в дальнейшем не учитывается.

В силу сделанных выше замечаний уравнение (4.11) принимает вид

$$y'' + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2 \operatorname{cth} u (2y' + y \operatorname{cth} u) = \frac{2J}{yE_0^2 \operatorname{sh} u}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим квазистационарный случай ( $y'' \approx y' \approx 0$ ), когда имеет место соотношение (4.13). При заданном  $\varepsilon$  это соотношение определяет зависимость размера пучка  $y$  от энергии электронов. Максимальный размер пучка соответствует  $\gamma = \sqrt{2}$  ( $W = (\gamma - 1)mc^2 \approx 200$  кэВ) и равен

$$(ky)_{\max}^2 = \frac{8}{3} \frac{J}{\varepsilon^2}. \quad (4.15)$$

Для квазистационарности необходимо, чтобы период колебаний пучка из (4.14) был бы много меньше времени ускорения ( $\Delta u \sim 1$ ), т. е. должно быть

$$\frac{\varepsilon k}{E_0} \operatorname{cth} u \gg 1. \quad (4.16)$$

Это условие может выполняться лишь в нерелятивистском случае ( $u \ll 1$ ). Невыполнение неравенства (4.16) означает наличие колебаний пучка вокруг равновесного значения (4.13). Эти колебания затухают из-за своеобразного „трения“ (член  $\sim y'$  в (4.14)), связанного с ускорением электронов. С другой стороны, в нерелятивистском случае амплитуда колебаний растет в связи с уменьшением частоты:  $y \sim \sqrt{u}$ . Последний процесс оказывается более сильным, чем затухание, декремент которого  $\sim \frac{(\frac{\varepsilon k}{E_0})^2}{u} \ll 1$ , если не выполнено условие (4.16).

Нетрудно видеть, что для перехода к ленточной геометрии необходимо произвести замену  $\frac{J}{y} \rightarrow \frac{\pi J}{b}$ , а также положить резонансный множитель и множитель  $\left[1 - \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2\right]$  равными единице.

## § 5. Расчет периодического поля в ускорительной трубке

Коэффициент  $\varepsilon$ , характеризующий фокусировку периодическим полем, определяется граничными условиями, заданными на электродах ускорительной трубки. Мы ограничимся простейшим случаем одинаковых электродов, расположенных на равном расстоянии друг от друга и с одинаковой разностью потенциалов между ними (рис. 1). В соответствии с этими условиями электрическое поле в трубке представим в виде суперпозиции однородного ускоряющего поля и периодического

$$\varphi(y, z) = E_0 z + \varphi_{\sim}(y, z). \quad (5.1)$$

Решение уравнения  $\Delta \varphi_{\sim} = 0$  в случае цилиндрической геометрии есть [4] (см. (5.3))

$$\varphi_{\sim}(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0((2n+1)k_0 y) \cos(2n+1)k_0 z, \quad (5.2)$$

где  $I_0(x) = J(ix)$  — функция Бесселя мнимого аргумента;  $k_0 = \frac{\pi}{l}$ . Коэффициенты  $C_n$  определяются из граничных условий, которые наиболее удобно рассмотреть при  $y = y_0$  (рис. 1). Наиболее простым способом создания переменного поля в ускорительной трубке является попарное замыкание соседних ускоряющих электродов; ход потенциала при  $y = y_0$  показан для этого случая на рис. 7, а. Граничные условия для периодической части потенциала показаны на рис. 7, б. При малой толщине

электродов по сравнению с  $l$  функцию  $\varphi_{\sim}(y_0, z)$  можно считать пилообразной с наклоном  $\pm E_0$ . Разлагая ее в ряд Фурье

$$\varphi_{\sim}(y_0, z) = -\frac{E_0 l}{2} + \frac{4E_0}{\pi k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)k_0 z}{(2n+1)^2} \quad (5.3)$$

и подставляя в (5.2), находим коэффициенты  $C_n$  и решение

$$\varphi_{\sim}(y, z) = -\frac{E_0 l}{2} + \frac{4E_0}{\pi k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0((2n+1)k_0 y) \cos(2n+1)k_0 z}{I_0((2n+1)k_0 y_0) (2n+1)^2}. \quad (5.4)$$

Постоянное слагаемое  $-\frac{E_0 l}{2}$  относим к члену  $E_0 z$ , передвинув соответствующим образом начало отсчета:  $z \rightarrow z - \frac{l}{2}$ . При  $k_0 y_0 \gg 1$  (часто

расположенные электроды с большой апертурой)  $I_0 \approx \exp((2n+1)k_0 y_0) \times \sqrt{2\pi(2n+1)k_0 y_0}$ . Сравнивая (5.4) и (4.1), находим

$$(\varepsilon k)^2 = \frac{16E_0^2}{\pi^2 I_0^2(k_0 y_0)} \approx \frac{32}{\pi} E_0^2 k_0 y_0 e^{-2k_0 y_0}. \quad (5.5)$$

В этом случае существенна только первая гармоника потенциала. Если, наоборот,  $k_0 y_0 \ll 1$ , то потенциал (4.1) будет представлять собою сумму многих гармоник. Нетрудно проследить, что в окончательную формулу (4.14) вместо  $(\varepsilon k)^2$  нужно подставить величину

$$(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2 = \frac{16}{\pi^2} E_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} I_0^{-2}((2n+1)k_0 y_0) = \frac{1}{l} \int_0^{2l} E_{\sim}^2(0, z) dz, \quad (5.6)$$

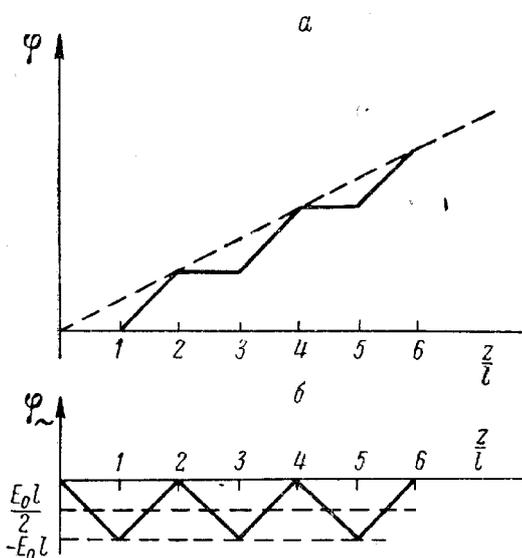


Рис. 7. Граничные условия в ускорительной трубке (§ 5).

где  $E_{\sim}$  — переменное электрическое поле на оси. Выражение  $(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2$  является универсальной функцией безразмерного аргумента  $k_0 y_0$ , которая приведена на рис. 8 (кривая I).

Все проведенные в работе расчеты справедливы при условии  $(nk_0 y_0)^2 \ll 1$ , когда апертура электродов существенно больше размера пучка.

В случае ленточной геометрии поле во всем объеме трубки будем считать двумерным, т. е.  $b \gg y_0$ . В таком случае во всех формулах этого параграфа необходимо произвести замену  $I_0(x) \rightarrow \text{ch } x$ . График зависимости  $(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2$  от  $k_0 y_0$  для этого случая также приведен на рис. 8 (кривая II).

При  $k_0 y_0 \gg 1$  имеем в частности

$$(\varepsilon k)^2 \approx \frac{32}{\pi^2} E_0^2 e^{-2k_0 y_0}. \quad (5.7)$$

Если же  $k_0 y_0 \rightarrow 0$ , то  $\frac{(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2}{E_0^2}$  достигает максимального значения, одинакового для обеих геометрий и равного:

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} \approx 1.95. \quad \text{Такое}$$

большое значение недопустимо ввиду условия  $\epsilon k \ll E_0$ , использованного в § 4. Фактически необходимо, чтобы это неравенство выполнялось для наиболее сильной первой гармоники. На границе применимости ( $\epsilon k \approx E_0$  для  $n=1$ )  $(k_0 y_0)_{\min} \approx 0.72$  и  $\frac{(\epsilon k)_{\text{эф.}}^2}{E_0^2} \approx 1$  для ленточной геометрии; для цилиндрической геометрии  $(k_0 y_0)_{\min} \approx 1.0$  и  $\frac{(\epsilon k)_{\text{эф.}}^2}{E_0^2} \approx 1$ .

Оценим предельное значение  $\epsilon$  с точки зрения устойчивости периодической фокусировки. Согласно формулам (4.4), (4.8), (4.9), фокусирующая сила пропорциональна множителю  $\cos^2 kz$ , для которого в окончатель-

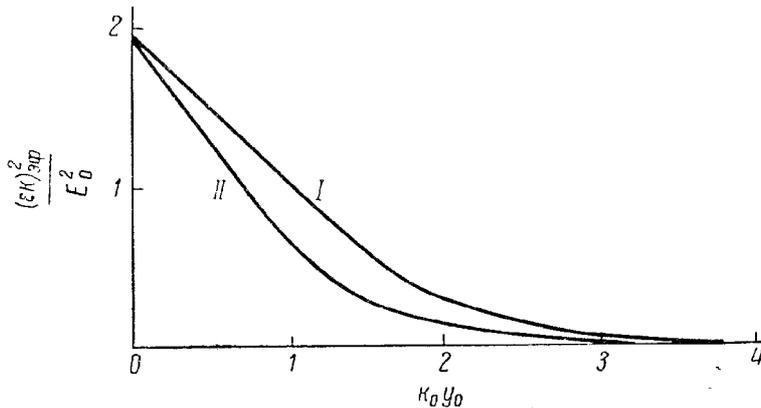


Рис. 8. Зависимость фокусирующей силы от параметров ускорительной трубки (§ 5).

I — цилиндрическая геометрия; II — ленточная геометрия.

ном уравнении принято среднее значение  $1/2$ . Если вместо этого использовать точное значение  $\cos^2 kz = \frac{1}{2} (1 + \cos 2kz)$ , то вместо (4.14) получим уравнение Матье

$$y'' + \frac{3}{8} \left( \frac{\epsilon k}{E_0} \operatorname{cth} u \right)^2 (1 + \cos 2kz) y = 0. \quad (5.8)$$

Члены с  $J$  и  $y'$  для простоты опущены, а  $\operatorname{cth} u$  считается постоянным согласно неравенству  $k \gg E_0$  (§ 4). Принимая во внимание значение частоты (4.6), получим условие устойчивости в 1-й зоне в виде [5]

$$\epsilon < \frac{4 \operatorname{sh}^2 u}{3 \operatorname{ch} u}. \quad (5.9)$$

Из полученных выше максимальных значений  $(\epsilon k)_{\text{эф.}}^2$  и формулы (4.15) следует выражение для предельного тока, который может ускоряться в трубке, не распыляясь

$$J \approx \frac{3}{8} (E_0 y)^2. \quad (5.10)$$

Если принять  $E_0 \sim 10^4$  в/см и  $y \sim 1$  см, получаем  $J \sim 2$  а.

Авторы выражают благодарность Е. А. Абрамяну за ценные дискуссии, И. Д. Багбая и А. Г. Борискину за помощь в работе.

### Литература

[1] Н. С. Зинченко. Курс лекций по электронной оптике. Харьков, 1961. — [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1953. — [3] A. M. Clogston, H. Heffner. J. Appl. Phys., 25, 436, 1954. — [4] Ping King Tien. J. Appl. Phys., 25, 1281, 1954. — [5] Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.

Поступило в Редакцию  
15 марта 1965 г.

В окончательной редакции  
12 июля 1965 г.