

Д О К Л А Д Ы
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1967

т. 174, № 6

Б. В. ЧИРИКОВ

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
СТЕЛЛАРАТОРА**

(Представлено академиком Г. И. Будкером 24 VIII 1966)

§ 1. Основной особенностью стеллараторных полей является наличие среднего угла прокручивания силовых линий $\omega(r)$, который обычно зависит от (малого) радиуса. Поэтому «поведение» силовых линий в стеллараторе аналогично движению нелинейного осциллятора. Вследствие замкнутости стелларатора возмущения имеют период L (периметр стелларатора). Наиболее опасными являются резонансные возмущения. Из многочисленных работ по исследованию таких возмущений (см., например, (1-3)) может создаться впечатление, что увеличение нелинейности ($d\omega/dr$) всегда ведет к повышению устойчивости. Подобные надежды существовали и на начальной стадии разработки сильнофокусирующих ускорителей. Хотя нелинейность и стабилизирует резонансы, она приводит одновременно к появлению новых неустойчивостей. Наиболее опасной из них является, по-видимому, так называемая стохастическая неустойчивость (4-5). При возникновении ее силовые линии располагаются квазислучайным образом и относительно быстро выходят за пределы сепаратрисы.

Применительно к стелларатору стохастические процессы впервые рассмотрены Сагдеевым и Заславским. В настоящей работе основное внимание уделено критерию стохастичности, а также использованию этой неустойчивости для создания ловушки Скорнякова (2).

§ 2. Будем исходить из гамильтоновых уравнений «движения» магнитных силовых линий (6):

$$\begin{aligned} ds/dz &= 2\epsilon ns^{n/2} \sin n\theta, & \theta &= \varphi - az, & s &= (r/a)^2, \\ d\varphi/dz &= \epsilon ns^{n/2-1} \cos n\theta, & \epsilon a &= 4I/caH_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь n — число заходов винтового поля с шагом $2\pi/a$; a — радиус цилиндра, на котором расположены $2n$ проводников с током I в каждом; H_z — продольное поле; r, φ, z — цилиндрические координаты. Уравнения справедливы при $\epsilon a, s \ll 1$. Однако оценки по порядку величины, которые составляют основное содержания работы, справедливы в более широкой области, фактически везде за исключением непосредственной окрестности сепаратрисы. То же замечание относится и к другим сильным неравенствам в этой работе.

Уравнения (1) описывают как основное поле стелларатора ($\epsilon = \text{const}$), так и (постоянные во времени) возмущения (с параметрами ϵ_1, n_1, a_1). Предположим, что имеется набор коротких ($a \ll l \ll (n_1 a_1)^{-1}$) некоррелированных возмущений, т. е. параметры возмущения ϵ_1, n_1, a_1 постоянны на длине l (длина корреляции) и независимы на соседних участках.

Рассмотрим вначале действие одного такого участка. Вследствие периодичности возмущения система может быть описана разностными уравнениями

$$\begin{aligned} s_{N+1} &= s_N \left(1 + \frac{2}{n_1} \xi_N \sin \psi_N \right), \\ \psi_{N+1} &= \psi_N + \alpha L_1 \omega(s_{N+1}) + \xi_N \cos \psi_N, \\ L_1 &= n_1 L, \quad \psi_N = n_1 \varphi_N, \quad \xi_N = \epsilon_1 n_1^2 l s_N^{n_1/2-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где N — номер оборота вокруг стелларатора; s_N, ψ_N — координаты силовой линии в зоне возмущения, причем магнитная поверхность считается цилиндрической ($s = \text{const}$). Уравнения (2) получены непосредственным интегрированием (1) для короткого возмущения, член $\alpha L_1 \omega$ описывает среднее прокручивание силовой линии в невозмущенной области.

§ 3. Поведение решения (2) качественно зависит от параметра растяжения фазы ($\xi \ll 1$):

$$\begin{aligned} K &= d(\psi_{N+1} - \psi_N) / d\psi_N = \Omega_\phi^2 \cos \psi_N, \\ \Omega_\phi^2 &= 2\alpha L s \omega' \xi, \quad \omega' \equiv d\omega(s) / ds, \\ \omega' &\equiv d\omega(s) / ds. \end{aligned} \quad (3)$$

При $|K| \ll 1$ разностные уравнения (2) могут быть заменены дифференциальными

$$\dot{s} = \frac{2}{n_1} s \xi \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \alpha L_1 (\omega - \omega_p) + \xi \cos \psi, \quad (4)$$

где $\omega_p = 2\pi m / \alpha L_1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) — резонансные значения ω (3)*; точка обозначает дифференцирование по N .

Уравнения (4) описывают нелинейный резонанс. При достаточно малом ξ (6) s совершает колебания с амплитудой (8)

$$\Delta s / s \sim \sqrt{\xi / \alpha L s \omega'}. \quad (5)$$

Для стабилизации периферического резонанса ($\omega_p \neq 0$) необходимо, чтобы нелинейная расстройка (4) $\alpha L_1 (\omega - \omega_p) \sim \Omega_\phi$ (8) превышала ширину резонанса ξ :

$$\xi \lesssim 2\alpha L s \omega' = 2(n-2)\alpha L \omega = 4\pi(n-2)N_\pi(L), \quad (6)$$

где $N_\pi(L)$ — число оборотов силовой линии при обходе вокруг стелларатора (число вращения).

Условие стабилизации центрального резонанса ($\omega_p = 0$) получается из (4) аналогичным образом и имеет вид**

$$\xi \lesssim \alpha L_1 \omega = 2\pi n_1 N_\pi(L). \quad (7)$$

Оценка (7) совпадает с результатами исследования аналогичных резонансов в теории ускорителей (7, 14).

§ 4. В обратном предельном случае $\Omega_\phi^2 \gg 1$ переход от разностных уравнений (2) к дифференциальным (4) невозможен, а преобразование (2) является теперь (по отношению к фазе) растяжением почти всюду за исключением узких областей вблизи $\cos \psi = 0$ ($\Delta\psi \sim \Omega_\phi^{-2}$). Если пренебречь этими областями, что с физической точки зрения кажется вполне оправданным, то можно применить результаты работы (9), согласно которой динамическая система с растяжением является так называемой К-системой (10); последняя обладает всеми известными в настоящий момент атрибутами стохастичности: эргодичностью, перемешиванием и положительной колмогоровской энтропией.

Можно подойти к вопросу и несколько иначе. Легко показать, что решение (2) локально неустойчиво в каждой точке при условии:

$$|K| > 4. \quad (8)$$

* Резонансы высшего порядка $\omega^{(p)} = [(2\pi m / \alpha L) \pm pn] / (n_1 \pm pn)$; $p = 1, 2, \dots$ (1), содержат дополнительно малый множитель вида $(\frac{\epsilon}{\alpha} s^{n/2-1})^p$ и могут быть существенны лишь вблизи сепаратрисы.

** Заметим, что центральный резонанс наиболее опасен, так как приводит к разрушению области размером $r \sim \epsilon_1^{1/(2n-3)}$ (при $n_1 = 1$), в то время как для периферического резонанса $\Delta r \sim \sqrt{\epsilon_1}$ (5). Это является доводом в пользу выбора двухзаходного винтового поля, для которого $\omega(0) \neq 0$ и может быть выбрано между резонансами.

Термин «локально неустойчиво» означает в данном случае, что характеристические числа матрицы линеаризованного преобразования (2) $|\lambda_i| \neq 1$ ($\lambda_1 \lambda_2 = 1$). При $\Omega_{\Phi}^2 \gg 1$ это условие выполняется везде кроме тех же узких областей $\cos \psi \approx 0$. Если опять-таки пренебречь ими, то из результатов работ ^(11, 12) приходим к прежнему выводу.

Наконец, еще один подход, связанный с вычислением временных корреляций, использован в ⁽¹³⁾ для системы, похожей на (2). В ⁽¹³⁾ приведены также результаты численного интегрирования разностных уравнений, из которых следует, что граница стохастичности соответствует $|K| = 4$ в согласии с (8).

На основании сказанного определим границу стохастичности оценкой $\Omega_{\Phi}^2 \sim 4$ или

$$\xi \sim 2 / \alpha L s \omega' = 1 / \pi(n-2) N_{\pi}(L). \quad (9)$$

Сравнивая (6) и (9), видим, что допустимое возмущение проходит через максимум в районе

$$N_{\pi}(L) \sim 1 / 2\pi(n-2), \quad \xi_{\max} \sim 1. \quad (10)$$

В стохастической области закон «движения» силовых линий носит обычный диффузионный характер и описывается некоторым кинетическим уравнением. Простая оценка диффузии может быть получена непосредственно из (2)

$$\overline{(\Delta s)^2} \sim \frac{\xi^2}{n_1^2} s^2 N. \quad (11)$$

§ 5. Возвращаясь к более общему случаю непрерывного возмущения, с короткой длиной корреляции l (§ 2), можем сделать обычную среднеквадратичную оценку ⁽¹⁴⁾

$$\xi \sim \varepsilon_1 n_1^2 s^{n_1/2-1} \sqrt{lL}. \quad (12)$$

В качестве примера приведем параметры возмущения от смещения проводников винтового поля на величину $\delta: n_1 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \varepsilon_1 \sim \frac{\varepsilon \delta}{2a} \sqrt{2n}$.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что некоррелированность возмущений на соседних участках не имеет никакого отношения к стохастической неустойчивости, поскольку возмущение точно повторяется через период L .

§ 6. Стохастическая неустойчивость силовых линий может быть использована для создания ловушки Скорнякова ⁽²⁾, внутри которой имеется «турбулентная» (стохастическая) область, окруженная «ламинарной» областью регулярных магнитных поверхностей. Для обычных возмущений (§ 2) величина Ω_{Φ}^2 быстро растет с радиусом, так что стохастическая область простирается до сепаратрисы, что приводит к нарушению термоизоляции. Эту трудность можно обойти, введя специальную резонансную обмотку длины $l (\ll L)$, шаг винта которой совпадает с шагом силовой линии на некотором радиусе: $\alpha_1 = \alpha \omega(s_1)$. В результате возмущение будет действовать эффективно лишь в некоторой полосе Δs :

$$\Omega = n_1 \alpha l \omega' \Delta s = 2\pi n_1 (n-2) N_{\pi}(l) \Delta s / s \sim 1. \quad (13)$$

Все прежние соотношения останутся без изменения с новым ξ :

$$\xi = \varepsilon_1 n_1^2 s^{n_1/2-1} l f(\Omega), \quad (14)$$

где $f(\Omega)$ — резонансный множитель, который при определенной конструкции обмотки может убывать с Ω достаточно быстро, например, $f(\Omega) = \exp\{-|\Omega|\}$. Это позволяет надеяться, что внешний «ламинарный» слой будет достаточно надежным.

Анализ оптимальных параметров резонансной обмотки показывает, что $\Omega_{\Phi}^2 \lesssim 2L/l$; вместе с оценкой (13) это приводит к необходимости иметь относительно длинный стелларатор, по крайней мере $\pi(n-2) N_{\pi}(L) \gtrsim 1$.

Регулировка положения и размера стохастической области может производиться путем изменения токов в основной и резонансной обмотках стелларатора.

§ 7. Смысл ловушки Скорнякова состоит в надежде, что «турбулентная» (стохастическая) область магнитного поля поможет подавить плазменные неустойчивости. Исследование этой проблемы выходит за рамки настоящей работы. Приведем лишь некоторые оценки структуры магнитного поля в стохастической области, которые могут понадобиться в будущих исследованиях плазменных неустойчивостей.

Имеется по меньшей мере три фактора, способствующих подавлению плазменных неустойчивостей в стохастической области:

1. Близкие силовые линии расходятся экспоненциально: $\Delta(z) \sim \exp(hz/L)$ вдоль направления собственного вектора линеаризованного преобразования (2) с $\lambda > 1$. Угол этого направления с азимутом φ равен $\theta_p \approx \xi/\Omega_\phi^2$ и слабо зависит от ψ ($\Delta\theta_p \sim \theta_p/K$). Скорость расходимости определяется оценкой

$$h = |\overline{\Delta_{N+1}/\Delta_N}| \approx \Omega_\phi^2 |\overline{\cos \psi}| \sim \Omega_\phi^2. \quad (15)$$

2. При достаточно большом расстоянии между линиями ($\Delta \geq r$) они начинают «перемешиваться». Это приводит к экспоненциальной релаксации всякой неоднородности по φ и неоднородности по r с размером $\Delta r/r \lesssim \xi$, причем характерное «время» (длина) релаксации $\sim L/h$. На больших расстояниях (по r) идет диффузия с коэффициентом $D \sim (\xi r)^2/L$ (11), что эквивалентно затуханию на длине $\sim L/(\xi k_\perp r)^2$; k_\perp — радиальная проекция волнового вектора возмущения плазмы.

3. В результате релаксации и диффузии по r могут существенно уменьшаться градиенты плотности и температуры невозмущенной плазмы.

Приношу искреннюю благодарность М. С. Рабиновичу и Р. З. Сагдееву, которые привлекли внимание автора к рассматриваемой проблеме; В. И. Волосову, Г. М. Заславскому, С. С. Моисееву и Ф. А. Цельнику за многочисленные полезные дискуссии и советы, а также В. К. Мельникову за критику.

Поступило
6 IV 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. М. Коврижных, ЖТФ, 32, 526 (1962). ² Г. В. Скорняков, ЖТФ, 32, 261, 777 (1962). ³ А. П. Попрядухин, Атомная энергия, 18, 96 (1965). ⁴ М. Ниле, Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону, октябрь, 1953. ⁵ Б. В. Чириков, Атомная энергия, 6, 630 (1959). ⁶ А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, Геометрия магнитного поля, Вопросы теории плазмы, в. 2, 1963. ⁷ A. Schoss, CERN Report, 57—21 (1958). ⁸ Б. В. Чириков, ДАН, 125, 1015 (1959). ⁹ В. А. Рошлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 499 (1961). ¹⁰ А. Н. Колмогоров, ДАН, 119, № 5, 861 (1958). ¹¹ Д. В. Аносов, ДАН, 151, 1250 (1963). ¹² Я. Г. Синай, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, 15 (1966). ¹³ Г. М. Заславский, Б. Г. Чириков, ДАН, 159, 306 (1964). ¹⁴ А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей, М., 1962.