

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 267

Б.В.ЧИРИКОВ

**ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО
РЕЗОНАНСА И СТОХАСТИЧНОСТИ**

НОВОСИБИРСК
1969

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Сибирское отделение

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Б.В.Чириков

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО
РЕЗОНАНСА И СТОХАСТИЧНОСТИ

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск

1969

Николаю Сергеевичу
К Р Ы Л О В У

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
ВВЕДЕНИЕ	УП
Список основных безразмерных параметров и специальных обозначений	ХІІІ
Глава 1 НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС	1
§ 1.1 Постановка задачи	1
§ 1.2 Переход к медленным переменным	3
§ 1.3 Изолированный резонанс	5
§ 1.4 Фазовые колебания	9
§ 1.5 Прохождение резонанса	12
§ 1.6 Эффекты второго приближения	18
Глава II СТОХАСТИЧНОСТЬ	27
§ 2.1 Основная модель	27
§ 2.2 Колмогоровская устойчивость	33
§ 2.3 Элементарный пример стохастичности	39
§ 2.4 Стохастичность основной модели	46
§ 2.5 Граница стохастичности	56
§ 2.6 Стохастический слой в окрестности сепаратрисы	60
§ 2.7 Полная система резонансов	70
§ 2.8 Квази-резонансы	80
§ 2.9 Периодическое прохождение резонанса	91
§ 2.10 Кинетическое уравнение	98
§ 2.11 Переход к непрерывному времени или общий случай взаимодействия резонансов	110
§ 2.12 Многомерный нелинейный осциллятор. Диффузия Арнольда	130

§ 2.13 Замечания о природе статистических законов	149
Глава III ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ	162
§ 3.1 Общие замечания	162
§ 3.2 Выбор моделей и обработка результатов счета	167
§ 3.3 Колмогоровская устойчивость	169
§ 3.4 Стохастичность	188
§ 3.5 Промежуточная зона системы с разделенным фазовым пространством	185
§ 3.6 Пример слабой неустойчивости многомерной системы	202
Глава IV НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ	226
§ 4.1 Стохастическое ускорение Ферми	226
§ 4.2 Динамика силовых линий магнитного поля в стеллараторе	235
§ 4.3 Диффузия Арнольда при взаимодействии встречных пучков	243
§ 4.4 Ловушки с магнитными пробками. Сохранение адиабатического инварианта	253
§ 4.5 Устойчивость Солнечной системы	265
§ 4.6 Нелинейные волны. Турбулентность	280
§ 4.7 Датчики псевдослучайных чисел	299
Литература	307

В В Е Д Е Н И Е

Предлагаемая монография посвящена, главным образом, исследованию многомерных нелинейных колебаний консервативной механической системы в целом, т.е. на неограниченном временном интервале и для произвольных начальных условий. Эта проблема, частным примером которой может служить знаменитая задача трех тел в астрономии, является, вероятно, самой сложной и в то же время наиболее красивой в классической механике. Дело в том, что в случае финитного движения (которое эквивалентно колебаниям в широком смысле слова) и при отсутствии затухания взаимодействия в системе многократно повторяются, так что становятся существенными очень тонкие накапливающиеся эффекты (§2.12). Полное решение рассматриваемой проблемы еще далеко впереди. Тем не менее уже сейчас, особенно в результате многочисленных работ последних 10 – 15 лет, общая картина движения подобной системы начинает все явственнее вырисовываться сквозь густой туман бесчисленных деталей и особенностей конкретных задач.

Важность построения общей теории нелинейных колебаний определяется двумя факторами. С одной стороны, в практически интересных случаях не всегда удается остаться в области линейных колебаний, т.е. ограничиться достаточно малыми амплитудами. С другой стороны, линейная область является слишком узкой и потому относительно бедной явлениями. Конечно, трудно поручиться, что в этой области не будут открыты качественно новые процессы, особенно если вспомнить, что совсем недавно

здесь были обнаружены такие любопытные и важные явления как маятник Капицы /172/ или жесткая фокусировка частиц в ускорителе /173/. Тем не менее можно утверждать, как нам кажется, что область линейных колебаний в основном исчерпана, и для дальнейшего существенного прогресса как в отношении понимания колебательных процессов, так и в отношении приложений необходимо переходить в нелинейную область. Стремление ограничиться линейными колебаниями является часто очень искусственным, неоправданно суживает возможности практических приложений и напоминает пресловутую попытку искать "под фонарем". Последний метод безусловно имеет определенный смысл, поскольку прекрасно разработанная всеохватывающая теория линейных колебаний находится в резком контрасте с разрозненными описаниями отдельных нелинейных процессов. Однако находить "под фонарем" что-нибудь новое становится все труднее и труднее, и развитие теории нелинейных колебаний можно рассматривать как стремление хотя бы слабо осветить основную массу улиц большого города в дополнение к ярко освещенному главному проспекту.

В настоящее время имеется два основных подхода к рассматриваемой проблеме. Первый из них связан с отысканием устойчивых периодических или почти-периодических движений. Сюда относится классическая теория нелинейных колебаний (Пуанкаре, Ляпунов, Мандельштам и др.), основной недостаток которой — слишком частные случаи движения — был преодолен в последнее время в знаменитых работах Колмогорова, Арнольда и Мозера (теория КАМ, §2.2). При другом подходе, в так называемой эргодической теории, исследуется, наоборот, случай предельно неустойчивого движения, приводящий к статистическому описанию (Биркгоф, Хопф, Аносов, Синай и др., §§2.1,3,4). Оба подхода дали, особенно в последнее время, ряд блестящих результатов, которые служат надежным основанием любых дальнейших исследований в этой области. Однако в силу чрезвычайной математической сложности задачи они остаются, тем не менее, лишь частными, или лучше сказать, крайними случаями движения. Неизвестно даже, при каких условиях происходит переход от одного подхода к другому, т.е. от устойчивого движения к неустойчивому.

В этой ситуации представляется целесообразным отказаться от обязательного для математика чисто дедуктивного метода и перейти к более привычному для физика полуэмпирическому методу, который в данном случае означает систему моделей, аналитические оценки и эксперименты, численные или "настоящие" (§3.1). До известной степени такими были исследования школы Мандельштама в плане сочетания теории и эксперимента применительно к частным задачам нелинейных колебаний. Аналогичный подход к сформулированной выше общей проблеме был начат Крыловым /30/, многие идеи которого используются и развиваются в настоящей работе. Основное отличие нашего подхода состоит в том, что мы интересуемся не столько макроскопическими молекулярными системами статистической физики, характер движения которых так или иначе надежно установлен, сколько системами с небольшим числом степеней свободы, где эта проблема далеко не тривиальна и представляет не только принципиальный интерес. Имея в виду указанный подход, мы будем говорить в дальнейшем о конструктивной физике, поскольку главной задачей здесь является конструирование приближенной системы понятий и законов в области, где в принципе (но не практически!) известны точные законы. Отметим, что в настоящее время к конструктивной физике относятся помимо теории колебаний такие крупные разделы науки как например, статистическая физика и химия, а в недалеком будущем, вероятно, и биология. Подчеркнем, что центр тяжести конструктивной теории колебаний (это же относится в известной мере и к другим областям конструктивной физики) лежит не в формулировке каких-либо новых законов природы, а в применении хорошо известных и твердо установленных законов механики к объяснению (анализу) и конструированию (синтезу) новых механических систем и процессов с желательными свойствами (§3.1).

Основой нашего анализа нелинейных колебаний является понятие нелинейного резонанса (глава 1), впервые возникшее, повидимому, в небесной механике в связи с так называемым либрационным движением планет (Лагранж) и, в более явной форме, в теории ускорителей в связи с механизмом автофазировки (Векслер, Мак-Миллан). Наиболее существенным и, насколько нам известно, новым процессом оказыва-

ется взаимодействие нескольких резонансов, всегда имеющее место в нелинейной системе. Исследованию этого взаимодействия и посвящена большая часть работы (главы II, III).

Мы строим систему моделей (см. схему на следующей странице), начиная с одномерного нелинейного осциллятора. Нисходящие стрелки указывают на упрощение модели вплоть до элементарной, которая детально исследуется аналитически (глава II) и с помощью численных экспериментов (глава III). Полученные результаты применяются к цепочке все более и более сложных моделей вплоть до многомерного нелинейного осциллятора (восходящие стрелки). Для аналитических исследований широко применяется асимптотический метод усреднения Крылова - Боголюбова - Митропольского (теория КБМ /3/) на основе гамильтонова формализма. При этом мы вынуждены, естественно, ограничиться случаем малого (или медленного) возмущения (параметр $\varepsilon \ll 1$), считая движение невоизмущенной системы известным в той или иной форме. Поскольку, однако, основные результаты работы представляют собой оценки по порядку величины, область их применимости может быть продолжена до $\varepsilon \sim 1$.

Отметим здесь два наиболее интересных, на наш взгляд, полученных результата. Во-первых, исследована так называемая стохастическая неустойчивость, которая с практической точки зрения является наиболее опасной неустойчивостью нелинейных колебаний (§2.5) (и в то же время своеобразным методом ускорения частиц, §4.1), а с принципиальной точки зрения дает модель статистических законов, применимую, в отличие от модели современной статистической механики, к системам с малым числом степеней свободы $N \geq 2$ (§2.13)^x. Во-вторых, исследована так называемая диффузия Арнольда, которая оказалась своеобразной универсальной неустойчивостью нелинейных колебаний в тех случаях, когда стохастическая неустойчивость отсутствует (§2.12).

Кроме того, проведенные исследования позволяют, как нам кажется, предста-

^x Повидливому, первое наблюдение стохастической неустойчивости было сделано Говардом и Хайном /114/.

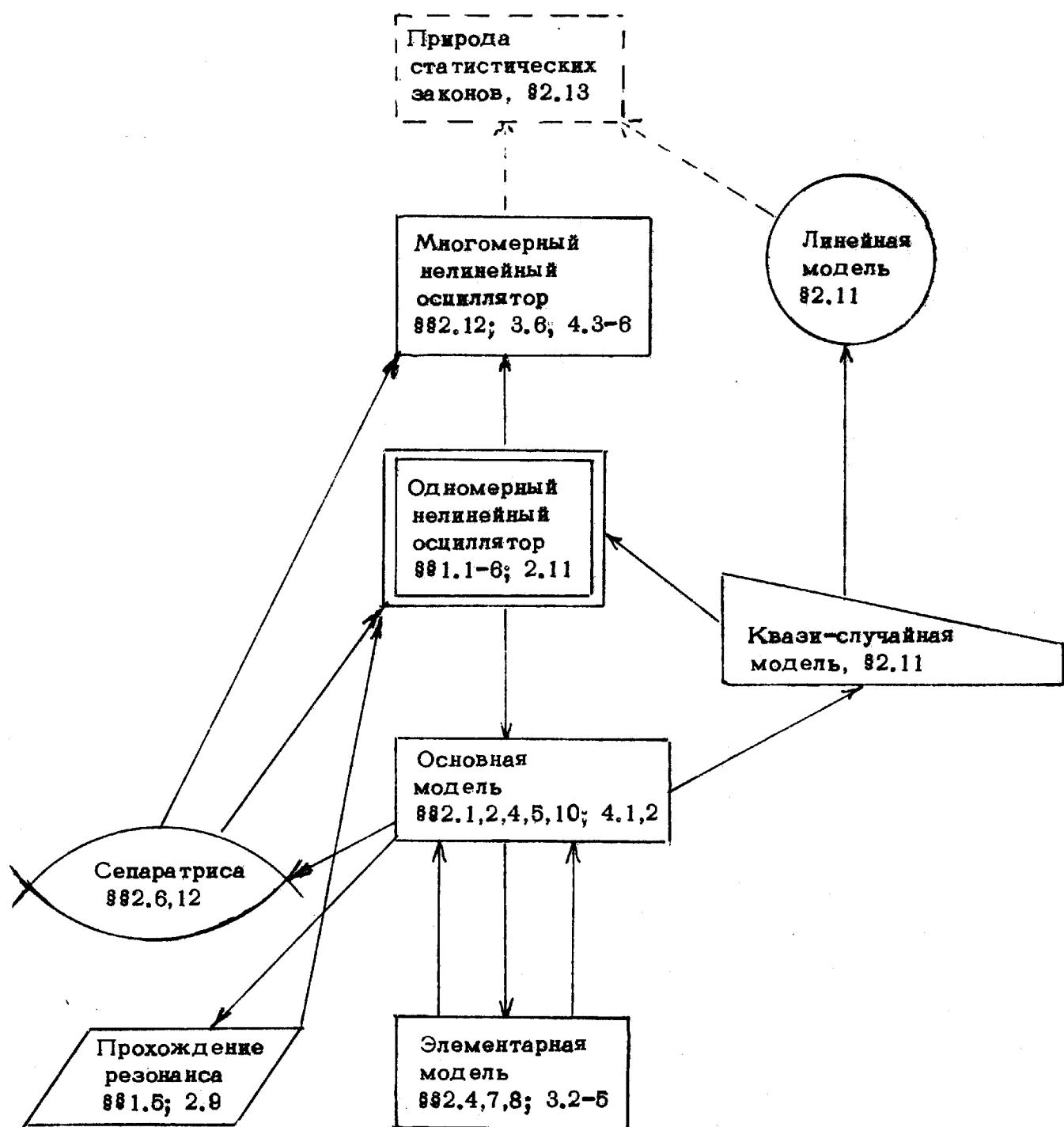


Схема моделей взаимодействия резонансов нелинейных колебаний

вить себе весьма детально общую картину многомерных нелинейных колебаний, в частности, довольно сложную структуру их фазового пространства. С указанным выше ограничением на величину возмущения удается проследить переход от колмогоровской области максимальной устойчивости к области предельной неустойчивости эргодической теории и показать, что в общем случае обе области глубоко и довольно сложным образом проникают друг в друга, образуя так называемую систему с разделенным фазовым пространством. Последнее обстоятельство и является главным препятствием на пути построения строгой математической теории.

Несмотря на известную расплывчатость этой картины и сомнения в некоторых ее деталях, вызывающие естественную неудовлетворенность, она может тем не менее служить некоторым ориентиром для будущих исследований и современных приложений в этой неизведанной области. Проделанную работу можно поэтому рассматривать как своеобразную глубокую разведку (хотя, быть может, и с несколько поверхностью рекогносировкой), призванную способствовать дальнейшим более аккуратным исследованиям.

х х х

Автор выражает свою искреннюю признательность и благодарность всем принимавшим участие в обсуждении затронутых в монографии вопросов и, в первую очередь: Г.М.Заславскому, Ф.М.Израйлеву, Э.Кайлу, А.Сесслеру - соавторам основных работ, использованных в монографии: Д.В.Аносову, В.И.Арнольду, В.К.Мельникову, Я.Г.Синаю - без постоянных дискуссий с которыми настоящая работа не могла бы быть выполнена; Г.И.Будкеру, В.М.Галицкому, А.М.Дыхне, К.Енсену, Н.Забускому, М.Крускалу, Е.М.Крушкаль, Дж.Ласлету, М.А.Леонтовичу, В.Н.Мелехину, Ю.Ф.Орлову, В.Л.Покровскому, М.С.Рабиновичу, В.А.Рохлину, Ю.Б.Румеру, Р.З.Сагдееву, С.Уламу, Дж.Форду, М.Г.Н.Хайну, Ф.А.Цельнику - за обсуждение отдельных вопросов и ценные замечания; Р.И.Будяновой, Ю.М.Волошину, В.П.Минаеву, М.Хэнни. Э. фон Эйкену - за большую помощь при проведении численных экспериментов.

С П И С О К

основных безразмерных параметров и специальных обозначений

1. ϵ — малый параметр возмущения (§1.1)
2. $\alpha \sim \left| \frac{I}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dI} \right|$ — параметр нелинейности (§1.3)
3. $S \sim (\Delta\omega)_n / \Delta$ параметр перекрытия резонансов: $(\Delta\omega)_n$ — нелинейная ширина резонанса; Δ — расстояние между резонансами (§2.1)
4. $s_1 \sim \Omega_f/\omega_1 (\sim S)$ — параметр разрушения сепаратрисы нелинейного резонанса (§2.6). Ω_f — частота фазовых колебаний (§1.4); ω_1 — частота возмущения (§2.8)
5. S' — параметр стохастичности (S, s_1) для перенормированного резонанса (§2.6)
6. $\mu \sim e^{-c/s}$ — экспоненциально малый параметр разрушения сепаратрисы нелинейного резонанса. $c \sim 1$ — константа (§2.6)
7. $\delta \sim s \mu$ — доля стохастической компоненты в области колмогоровской устойчивости (§2.6)
8. N — число степеней свободы (§2.12)
9. \bar{m} — кратность взаимодействия (§2.12)
10. \sim — знак равенства по порядку величины (с правильной размерностью)
11. \propto — знак пропорциональности (размерность не соблюдается)

Примечание: принятые выше обозначения справедливы на протяжении всего текста за исключением особых случаев, в которых изменение обозначений специально оговаривается.

ГЛАВА 1

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС

Эта небольшая глава является вводной. В ней формируются основные понятия, связанные с изолированным резонансом нелинейных колебаний, или, короче, нелинейным резонансом. Хотя, как мы увидим ниже, отличие резонансного движения от нерезонансного для нелинейной системы не так велико как для линейной, основные особенности движения определяются тем не менее именно нелинейным резонансом, который является своеобразным "элементарным" процессом нелинейных колебаний.

§ 1.1. Постановка задачи

Начнём наше исследование с одномерного нелинейного осциллятора, находящегося под действием различных возмущений. Гамильтониан системы примем в виде:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(p, q, \lambda) + \varepsilon \mathcal{H}_1(p, q, \lambda, \vartheta, \varepsilon)$$
$$\lambda = \lambda(\tau); \Lambda = \Lambda(\tau, p, q, \dot{p}, \dot{q}, \dots); \frac{d\vartheta}{dt} = \Omega(\tau) \quad (1.1.1)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ - "медленное" время, а параметры характеризуют: λ - адиабатические процессы, ϑ - резонансные, в том числе с переменной частотой, Λ - возмущение, зависящее от динамических переменных p, q и их производных; \mathcal{H}_0 - невозмущенный гамильтониан; $\varepsilon \mathcal{H}_1$ - малое возмущение ($\varepsilon \ll 1$).

Поясним на примере смысл введения параметра Λ . Пусть мы хотим учесть силу трения $-k\dot{q}$. Непосредственное введение в гамильтониан члена $kq/p/m$ "испортил" нам второе уравнение: $\dot{q} \neq \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} + kq/m$. Если же мы сделаем то же самое через параметр: $q\Lambda(q); \Lambda(p) = kp/m$, то уравнения останутся каноническими, поскольку дифференцирование по p, q производится при постоянном Λ . Зависимость Λ от p должна пониматься в этом

случае как явная зависимость от времени, так что гамильтониан не сохраняется. Этот простой приём учёта необычных возмущений в рамках гамильтонова формализма эквивалентен, по существу, применению обобщенного принципа Гамильтона для получения уравнений Лагранжа /1/x). Аналогичная задача рассмотрена Волосовым /2/.

Несмотря на кажущуюся ограниченность задачи, гамильтониан вида (1.1.1) охватывает довольно широкий круг нелинейных колебательных процессов, главным образом за счёт разнообразия возмущений. В некотором смысле можно назвать систему (1.1.1) "элементарным" нелинейным осциллятором, позволяющим ввести, исследовать и "прочувствовать" основные понятия к закономерности этой области. В частности, некоторые многомерные задачи (см. § 4.5) могут быть приведены к виду (1.1.1).

Пусть, например, имеется многомерная система, которая в нулевом приближении ($\Sigma = 0$) распадается на независимые одномерные осцилляторы. Возмущенный гамильтониан такой системы зависит, вообще говоря, от переменных всех степеней свободы. Однако вычисляя в нулевом приближении эти переменные как явные функции времени и подставляя их в возмущение, мы снова можем (в первом приближении) разбить систему на отдельные осцилляторы вида (1.1.1), для которых зависимость от переменных других степеней свободы заменена явной зависимостью от времени. Следует тем не менее подчеркнуть, что одномерность исходной модели (1.1.1) может иногда приводить к качественным особенностям (см. § 2.12).

Мы считаем, что параметр Σ достаточно мал, т.е. возмущение является слабым (или медленным). Это допущение выполняется в ряде случаев и связано с практической необходимостью применения какого-либо варианта теории возмущения для

x) Следует, однако, иметь в виду, что применение описанного приёма должно производиться с известной осторожностью. Так, например, силы трения приводят к изменению фазового объёма системы (нарушение теоремы Лиувилля), в то время как в случае "настоящей" явной зависимости гамильтониана от времени фазовый объём сохраняется.

аналитического исследования. При условии малости возмущения наиболее существенным для колебательной системы процессом является резонанс, т.е. накапливающееся возмущение. Поэтому можно сформулировать нашу задачу, как изучение нелинейного резонанса в одномерной системе вида (1.1.1).

§ 1.2. Переход к медленным переменным

Поскольку возмущение является малым, целесообразно выбрать такие динамические переменные, в которых эта малость была бы выражена явно. Иначе говоря, полезно исключить из уравнений "быстрое" невозмущенное движение. Пусть решение невозмущенных уравнений имеет вид:

$$q = q^0(I, \theta, \lambda); \quad \theta = \int \omega(I, \lambda) dt + \varphi \\ \dot{q} = \omega \frac{\partial q^0}{\partial \theta}; \quad I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (1.2.1)$$

где $2\pi/\omega$ — период движения, а I — действие, канонически сопряженное угловой переменной θ . Хотя частота невозмущенного движения постоянна, мы поместили её под интеграл, чтобы сохранить функциональный вид решения и для возмущенного движения. В последнем случае постоянные невозмущенного движения (I, φ) будут изменяться со временем, но медленно. Выберем их в качестве новых переменных.

В переменных I, θ гамильтониан (1.1.1) принимает вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \dot{\lambda} \tilde{\mathcal{H}}(I, \theta, \lambda) + \varepsilon \mathcal{H}_1(I, \theta, \lambda, \vartheta, \varepsilon) \quad (1.2.2)$$

где $\dot{\lambda} \tilde{\mathcal{H}}$ — добавка к невозмущенному гамильтониану из-за явной зависимости его от времени. Чтобы найти $\tilde{\mathcal{H}}$, запишем полную производную от I :

$$\dot{I} = \dot{\lambda} \frac{\partial I(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) (\mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1) \quad (1.2.3)$$

и учтем, что оператор в скобках зависит только от функции $I(p, q, \lambda)$ и, значит, равен $-\partial \mathcal{H}/\partial \theta$. Но из (1.2.2): $\dot{I} = -\partial \mathcal{H}/\partial \theta$; сравнивая с (1.2.3) ма-

ходим:

$$\tilde{\mathcal{H}} = - \int d\theta \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right)_{p,q} = \int dI \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)_{p,q} \quad (1.2.4)$$

Последнее выражение получается, если проделать аналогичную процедуру с функцией $\theta(p,q,\lambda)$ ^{x)}. При вычислении интеграла необходимо выразить p,q через I,θ согласно (1.2.1).

В медленных переменных (I,φ) уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta} \\ \dot{\varphi} &= \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial I} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Поскольку дифференцирование по $\theta = \varphi$ эквивалентно (1.2.1), система (1.2.5) является канонической.

Преобразуем — $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right)_{p,q}$, используя соотношения:

$$\frac{\partial I(w,\lambda)}{\partial w} = \frac{1}{\omega}; \quad \frac{\partial I(w,\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\omega} \cdot \overline{\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \lambda}} \quad (1.2.6)$$

где $W = \mathcal{H}_0(p,q,\lambda)$, а черта означает усреднение по невозмущенному движению при постоянном λ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(p,q,\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial I(w,\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial I(w,\lambda)}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(p,q,\lambda)}{\partial \lambda} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \lambda} - \overline{\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \lambda}} \right) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Отсюда

$$\dot{I} = \frac{\dot{\lambda}}{\omega} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \lambda} - \overline{\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \lambda}} \right) - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta} \quad (1.2.8)$$

Это уравнение наглядно демонстрирует адиабатическую инвариантность действия и очень удобно для построения различных приближенных выражений. Похожее, но приближенное уравнение было получено Волосовым /2/. Подчеркнем в связи с этим, что все уравнения этого параграфа являются точными.

Приведем без вывода другую форму уравнения для $\dot{\varphi}$ /6/:

$$\dot{\varphi} = -\dot{\lambda} \left(\frac{\partial q^o}{\partial w} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial q^o}{\partial \lambda} \right) / \frac{\partial q^o}{\partial \theta} \quad (1.2.9)$$

^{x)} Из (1.2.4) вытекает любопытное тождество:

$$\left(\frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right)_{p,q} \right)_{\theta,\lambda} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)_{p,q} \right)_{I,\lambda} = 0$$

Неприятной на первый взгляд особенностью этого выражения является наличие в знаменателе скорости, которая может обращаться в нуль. На практике, однако, это обстоятельство можно использовать для проверки правильности выражения для , так как числитель тоже, конечно, должен обращаться в нуль вместе со знаменателем.

При решении конкретных задач можно использовать любую пару равноправных уравнений (1.2.5,8,9).

Иногда бывает удобно выбрать вместо действия энергии невозмущенной системы \dot{W} . Вычисляя полную производную аналогично (1.2.3) и используя (1.2.1), найдем:

$$\dot{W} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{H}_0(p, q, t)}{\partial \lambda} - \varepsilon \omega \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta} \quad (1.2.10)$$

Следует, однако, иметь в виду, что это уравнение уже не является канонически сопряженным уравнению для $\dot{\varphi}$.

§ 1.3. Изолированный резонанс

При условии малости возмущения наиболее существенным процессом для осциллятора является резонанс. Обычно резонанс имеет место для нескольких значений частоты осциллятора $\omega = \omega_c$. В этой главе мы будем считать, что ω_c достаточно далеки друг от друга, так что вблизи одного резонанса можно полностью пренебречь влиянием остальных. Такой изолированный резонанс является своего рода "элементарным" процессом для неавтономного осциллятора. Взаимодействие нескольких резонансов будет подробно рассмотрено в следующей главе.

Зависимость невозмущенного гамильтонiana от времени предполагается медленной (но не обязательно малой): $\dot{\lambda} \sim \varepsilon$ (1.1.1).

Произведем переобозначение:

$$\dot{\lambda} \tilde{\mathcal{H}} + \varepsilon \mathcal{H}_1 \rightarrow \varepsilon \mathcal{H}_1$$

и используем параметр Λ для описания потерь в системе (например, силы трения).

Уравнения движения принимают вид:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1(I, \theta, \varphi)}{\partial \theta} - \varepsilon \Lambda(I, \theta) \quad (1.3.1)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1(I, \theta, \varphi)}{\partial I}$$

В соответствии с (1.1.1) и (1.2.1) функция \mathcal{H}_1 является периодической по θ, φ с периодом 2π :

$$\mathcal{H}_1(I, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} \mathcal{H}_{1mn}(I) \cdot e^{i(m\theta + n\varphi)} \quad (1.3.2)$$

Условие резонанса имеет вид:

$$m\omega \approx n\Omega \quad (1.3.3)$$

Здесь m, n любые целые положительные числа (мы принимаем $\omega, \Omega > 0$); в отличие от этого в (1.3.2) m, n могут быть как положительными, так и отрицательными.

Вклад в резонанс дают все гармоники, кратные основным:

$$nk; nl; n=1, 2, \dots; k/l \propto \Omega/\omega$$

Отбрасывая в соответствии с методом усреднения нерезонансные гармоники, получим из (1.3.1,2) так называемый усредненный гамильтониан первого приближения /15/:

$$\begin{aligned} \overline{(\mathcal{H}_1)}_{kl} &= \sum_n \mathcal{H}_{1, nk, -nl} \cdot e^{i(nk - nl)\psi} - \Lambda(I)\psi = \\ &= -\frac{1}{k} U(I, \psi) + \Lambda\psi; \quad \psi = k\theta - l\varphi; \quad \Lambda(I) = \overline{\Lambda(I, \theta)} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где U периодична по ψ с периодом 2π .

Физический смысл пренебрежения нерезонансными гармониками вполне понятен, подробное математическое обоснование законности такого приближения, а также его точность, границы применимости и построение следующих приближений составляют предмет теории Крылова-Боголюбова-Митропольского (теории КБМ) /3/. Наиболее существенный эффект от нерезонансных гармоник связан с появлением в системе новых частот, а следовательно, и новых резонансов. При изучении изолированного резонанса это не имеет значения по определению, что же касается роли резонансов

высшего порядка в случае взаимодействия нескольких резонансов, этот вопрос будет обсуждаться в § 2.7.

Из (1.3.4) получаем уравнения первого приближения ($\sim \varepsilon$) метода усреднения в виде:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \psi} - \varepsilon \Lambda(I) \\ \dot{\psi} &= k_\omega(I) - \ell \Omega + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial I} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Напомним, что зависимость $\Lambda(I)$ рассматривается как явная зависимость от времени и поэтому при получении уравнения для $\dot{\psi}$ по I не дифференцируется. Параметр Λ связан с более привычной величиной — мощностью потерь (ϵP) соотношением:

$$\Lambda = \frac{P}{\omega} \quad (1.3.6)$$

Система уравнений (1.3.5) является канонической с резонансным гамильтонианом:

$$H_p = \int (k_\omega - \ell \Omega) dI + \varepsilon U(I, \psi) + \varepsilon \Lambda \psi \quad (1.3.7)$$

При постоянном Λ ($d\Lambda/dI = 0$) H_p является интегралом движения и, если его можно вычислить в явном виде, даёт возможность полностью исследовать поведение осциллятора вблизи резонанса. Такой метод широко применяется (см., например, /4,5/) и особенно удобен (и необходим) при малой нелинейности ($\alpha \ll 1$). Обычно исследуется случай именно малой нелинейности, часто в на-дежде на упрощение уравнений. Оказывается, однако, что дело обстоит как раз наоборот /6/. В случае сильной (но не очень сильной, умеренной, как мы будем говорить в дальнейшем) нелинейности

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon \quad (1.3.8)$$

гамильтониан (1.3.7) существенно упрощается, так как изменение I в этом случае оказывается всегда малым. Поэтому можно пренебречь зависимостью U от I , по-ложив

$$\mathcal{U}(I, \varphi) \approx \mathcal{U}(I_p, \varphi) \rightarrow \mathcal{U}(\varphi) \quad (1.3.9)$$

и учесть зависимость $\omega(I)$ лишь в первом приближении:

$$k\omega - \ell\Omega \approx \omega'_k \cdot (I - I_p); \quad \omega'_k = k \cdot \frac{\partial \omega(I, \lambda)}{\partial I} \\ k\omega(I_p) = \ell\Omega \quad (1.3.10)$$

где $\omega'_k(I_p)$ - постоянная, характеризующая нелинейность осциллятора.

В рассматриваемом приближении, условия применимости которого будут обсуждаться в следующем параграфе, резонансный гамильтониан (1.3.7) принимает вид:

$$\mathcal{H}_y = \omega'_k \cdot \frac{(I - I_p)^2}{2} + \varepsilon \mathcal{U}(\varphi) \quad (1.3.11)$$

а уравнения движения:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{d\mathcal{U}}{d\varphi} \\ \dot{\varphi} = \omega'_k \cdot (I - I_p) \quad (1.3.12)$$

Вообще говоря можно было бы учесть в этом же приближении и потери, добавив к гамильтониану (1.3.11) член $\varepsilon \Lambda(I_p)\varphi$, однако, нам будет удобнее сделать это позднее. (§§ 1.5, 6).

Систему (1.3.12) можно привести к так называемому фазовому уравнению /5/, исключив I :

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon \omega'_k \cdot \frac{d\mathcal{U}}{d\varphi} = 0 \quad (1.3.13)$$

Гамильтониан (1.3.11) описывает колебания некоторой "частицы" с массой $1/\omega'_k$ в периодическом потенциальном поле $\varepsilon \mathcal{U}(\varphi)$. Таким образом при умеренной нелинейности (1.3.8) поведение осциллятора вблизи резонанса оказывается в первом приближении универсальным (с точностью до формы "потенциальной ямы" и, соответственно, формы колебаний). Напомним, что при слабой нелинейности ($d \ll \varepsilon$) поведение системы качественно изменяется в зависимости от типа резонанса (внешний, параметрический и др.) /4, 14, 5/.

Поскольку форма колебаний, вообще говоря, несущественна при исследовании

общих закономерностей нелинейного резонанса, мы будем иногда конкретизировать ее, чтобы не усложнять понапрасну написание формул. Положим:

$$U(I, \varphi) = U_0(I) \cdot \sin \varphi \quad (1.3.14)$$

Тогда исходная система (1.3.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon U_0 \cos \varphi - \varepsilon I \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 - \varepsilon I - \varepsilon U'_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

а универсальный гамильтониан становится равным:

$$H_y = \frac{\omega'_k}{2} (I - I_p)^2 + \varepsilon U_0 \sin \varphi \quad (1.3.16)$$

Мы рассмотрели периодическую зависимость возмущения от фазы φ . Обобщение на случай квазипериодического возмущения не представляет труда, но и не приводит к каким-либо новым эффектам. Апериодическое нестационарное (действующее на конечном интервале времени) возмущение не представляет большого интереса с точки зрения резонансных процессов. Остается еще стационарное апериодическое (с непрерывным спектром) возмущение, которое приводит к совершенно иной картине движения. Обсуждение этого случая будет дано позднее (§ 2.11).

§ 1.4. Фазовые колебания

Упомянутая в предыдущем параграфе аналогия с движением "частицы" в периодическом потенциале даёт возможность очень наглядно представить себе процесс нелинейного резонанса при умеренной нелинейности. Ограничимся случаем гармонического потенциала (1.3.14).

Система (1.3.12) имеет два положения равновесия: $I = I_p$; $\varphi = \pm \pi/2$, одно из которых неустойчиво (в зависимости от знака $U_0 \cdot \omega'_k$, см. (1.3.13)). Картинка на фазовой плоскости периодична по φ и имеет характерный вид "ожерелья" (рис. 1.4.1). Фазовые траектории определяются из условия $H_y = \text{const}$. При $|H_y| < |\varepsilon U_0|$ (внутри "потенциальной ямы") фазовые траектории замк-

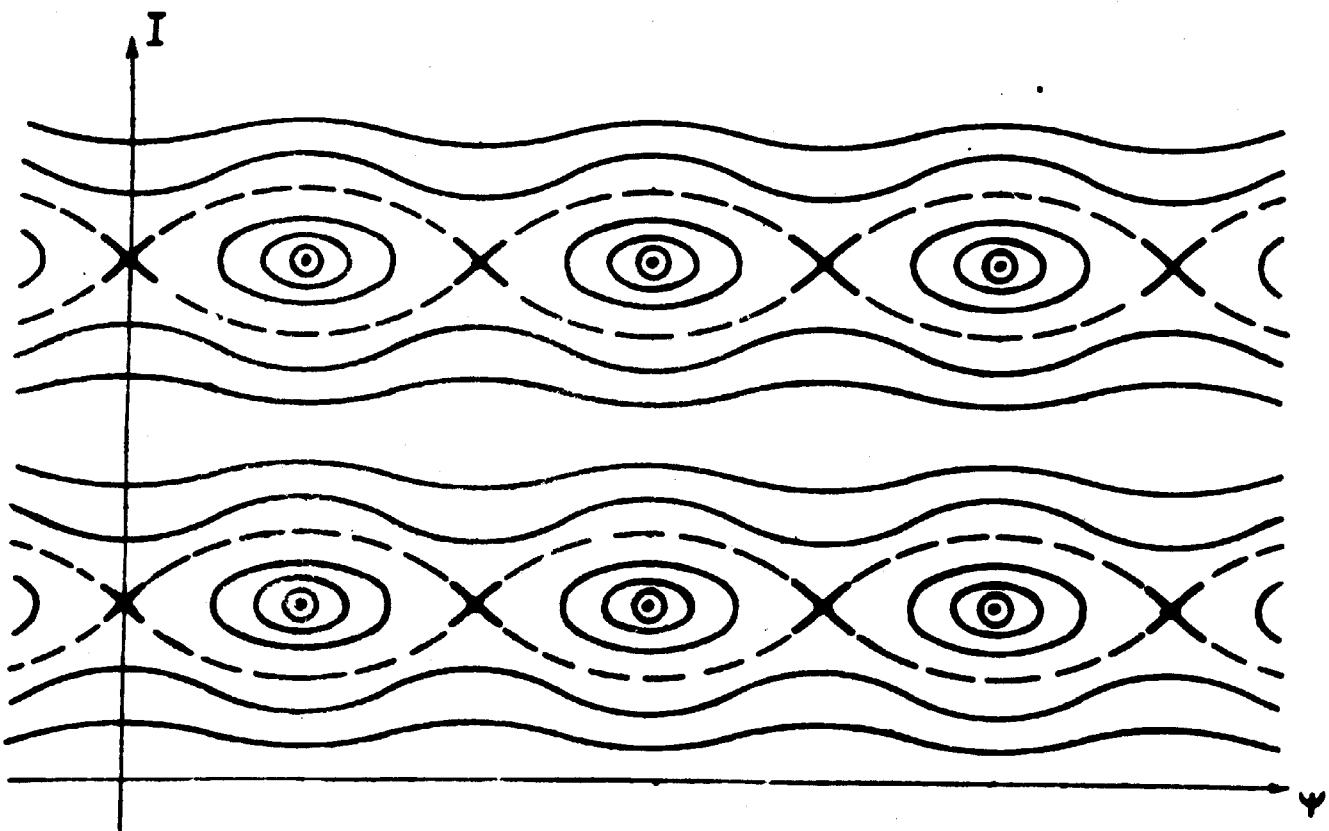


Рис.1.4.1. Фазовые траектории в окрестности резонансов при умеренной нелинейности:
 ◎ - устойчивые, или эллиптические, точки; ✕ - неустойчивые или гиперболические, точки. Пунктиром показаны сепаратрисы первого приближения; в следующих приближениях они разрушаются и на их месте образуются стохастические слои (§ 2.6).

нуты, т.е. фаза (I и энергия ψ^x) осциллятора колебается в ограниченных пределах. Эти колебания называются обычно фазовыми. Такое название вполне оправдано, так как поведение осциллятора вблизи резонанса определяется его фазовым режимом, т.е. законом изменения фазы. Частота малых фазовых колебаний равна (1.3.13):

$$\Omega_\phi^2 = \varepsilon U_0 \omega'_k \quad (1.4.1)$$

При $|\mathcal{H}_y| > |\varepsilon U_0|$ (вне "потенциальной ямы") фаза изменяется не ограниченно, а колебания энергии уменьшаются по мере удаления от резонанса (увеличения $|\mathcal{H}_y|$). Уравнение сепаратрисы (верхний край "потенциальной ямы") имеем. Мы будем говорить иногда об энергии осциллятора, которая связана монотонной зависимостью с переменной действия $dW/dI = \omega > 0$. Это короче и привычнее.

ет вид: $|\mathcal{H}_y| = |\varepsilon K_0|$ или:

$$(I - I_p)^2 = \frac{2\varepsilon K_0}{\omega'_k} (\sin \varphi \pm 1) \quad (1.4.2)$$

где знак в скобках совпадает со знаком $K_0 \omega'_k$.

Физический смысл фазовых колебаний состоит в том, что нелинейный осциллятор отходит от точного резонанса ($k\omega = L\Omega$) вследствие изменения его частоты ω (I). Иначе можно сказать, что нелинейность стабилизирует резонанс, так как неограниченное возрастание энергии при линейном резонансе сменяется ограниченными колебаниями. Умеренная нелинейность, таким образом, всегда стабилизирует резонанс.

Область внутри сепаратрисы называется обычно областью захвата или автофазировки. Это означает, что хотя осциллятор и отходит от точного резонанса вследствие нелинейности, он отходит недалеко. Более того, если, скажем, частота внешней силы медленно изменяется, то энергия осциллятора тоже изменяется, причём таким образом, чтобы все время выполнялось приближенное равенство: $k\omega \approx L\Omega$.

Размер области захвата характеризуется шириной сепаратрисы в направлении I (рис.1.4.1):

$$(\Delta I)_H = 4 \sqrt{\left| \frac{\varepsilon K_0}{\omega'_k} \right|}; \quad k(\Delta\omega)_H = 4 \sqrt{\left| \varepsilon K_0 \omega'_k \right|} = 4\Omega_\varphi \quad (1.4.3)$$

Эти соотношения определяют нелинейную ширину резонанса.

Из приведенного анализа резонанса видно, что существенной характеристикой нелинейного осциллятора является производная ω' , т.е. зависимость частоты от I (или энергии). В дальнейшем поэтому термин "нелинейный осциллятор" будет эквивалентен термину "осциллятор с частотой зависящей от энергии", или - "неизохронный осциллятор". Что касается формы колебаний, то она может быть любой и не связана, вообще говоря, с нелинейностью. Так вращение релятивистской частицы в магнитном поле даёт пример нелинейного, но гармонического осциллятора, а ультрарелятивистская частица в прямоугольной потенциальной яме представляет ангармоничный осциллятор с постоянной частотой.

Условия применимости универсального гамильтониана связаны с требованием малости изменения его параметров $U_0(I)$, $\omega'_k(I)$ и зависят от конкретного вида этих функций. Для получения общей оценки предположим, что в типичном случае: $U_0' \sim U_0/I$ и $\omega'' \sim d\omega'/I$. При этом достаточно потребовать малости изменения величин I, ω :

$$\left(\frac{\Delta I}{I}\right)_H = 4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{d} \cdot \frac{U_0}{K\omega I}} \ll 1; \quad \left(\frac{\Delta \omega}{\omega}\right)_H = 4 \sqrt{\varepsilon d \cdot \frac{U_0}{K\omega I}} \ll 1 \quad (1.4.4)$$

Отсюда получаются условия (1.3.8), если параметр ε выбран таким образом, что $U_0 \sim \omega I$ x).

Обратим внимание, что при умеренной нелинейности действительным параметром разложения является не ε , а $\sqrt{\varepsilon}$. Универсальные уравнения (1.3.12) оказываются при этом первого порядка по $\sqrt{\varepsilon}$, а исходные (1.3.5) – второго. Этим и объясняется возможность упрощения исходных уравнений.

Отметим, что поведение нелинейной системы вблизи резонанса изучалось много раз еще со времен Пуанкаре /36/. Простая картина фазовых колебаний и автоФазировки была выяснена в классических работах Векслера /7/ и Мак-Миллана /8/, оказавших такое значительное влияние на современную ускорительную технику. Тем не менее нам кажется, что до сих пор не обращалось должного внимания на универсальность процесса фазовых колебаний и его решающую роль для понимания нелинейных явлений.

§ 1.5. Прохождение резонанса

Предположим, что величина I_p явно зависит от времени, причём таким образом, что разность $I - I_p$, а значит и $K\omega - \ell\Omega$ изменяет знак. Это может происходить как вследствие действия возмущения с переменной частотой $\Omega(\tau)$.

x) Иначе говоря, все безразмерные параметры задачи, кроме ε, d порядка единицы.

так и в результате изменения частоты осциллятора ω , если невозмущенный гаммилтониан зависит от параметра λ (1.1.1). В отличие от других более обычных адиабатических процессов, в которых можно использовать сохранение адиабатического инварианта $J = \frac{1}{2\pi} \oint I d\psi$ прохождение резонанса является более сложным процессом, поскольку при этом J , вообще говоря, существенно изменяется независимо от скорости прохождения (см. § 1.6).

Исследование прохождения резонанса удобно производить графически, используя аналогично с движением "частицы" в периодическом потенциале, упомянутую в конце § 1.3 / 6/. Найдем прежде всего изменение полной энергии "частицы" (1.3.11):

$$\frac{dJ_{\psi}}{dt} = \frac{\partial J_{\psi}}{\partial t} = -\omega'_k (I - I_p) \cdot \dot{I}_p = -\dot{\varphi} \dot{I}_p \quad (1.5.1)$$

При малом возмущении ширина резонансной зоны относительно мала ($\sim \sqrt{\epsilon}$, (1.4.3)); поэтому \dot{I}_p можно считать постоянной, и мы получаем:

$$J_{\psi} = -I_p (\varphi - \varphi_0) \quad (1.5.2)$$

Подставляя это выражение в (1.3.16), найдем^{x)}:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2\Omega_p^2} = V(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi \quad (1.5.3)$$

где коэффициент V характеризует скорость прохождения резонанса:

$$V = \frac{\dot{\varphi}_1}{\Omega_p^2} = \frac{k \frac{\partial \omega}{\partial t} - \ell \frac{\partial \Omega}{\partial t}}{\Omega_p^2} \quad (1.5.4)$$

а фаза берется в момент точного резонанса ($k\omega = \ell\Omega$).

Если теперь графически изобразить величину, пропорциональную потенциальной энергии "частицы": $\sin \varphi$, то анализ движения производится обычным образом по пересечению её с линией полной энергии, т.е. с горизонтальной прямой в стационарном случае ($\dot{I}_p = 0$, § 1.4), с наклонной прямой $V(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0$ при постоянной \dot{I}_p и с некоторой кривой $f(\varphi)$, получаемой из (1.5.1), в общем случае (рис. 1.5.1).

^{x)} Мы ограничиваемся частным случаем (1.3.14).

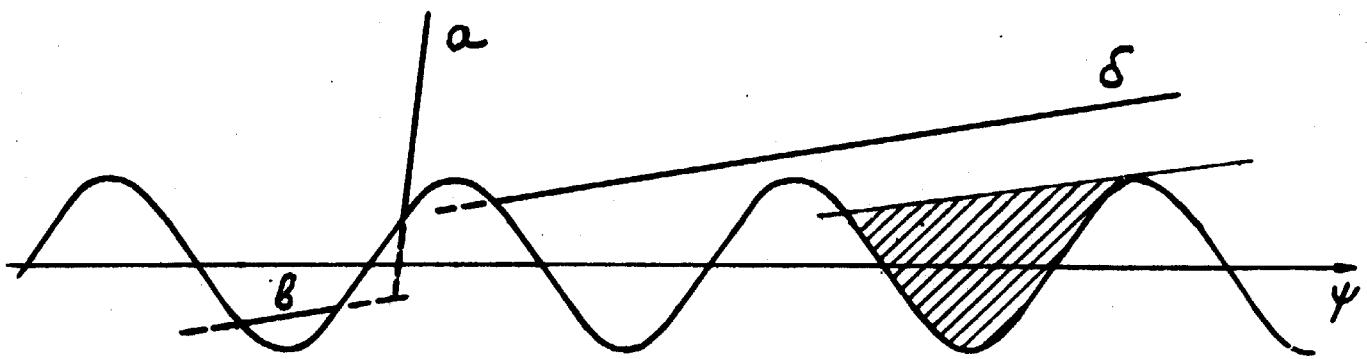


Рис.1.5.1. Графическое исследование прохождения резонанса:

α - быстрое прохождение;

β - медленное прохождение;

γ - автофазировка, область которой заштрихована и ограничена сепаратрисой (тонкая линия).

На рисунке видно, что существует два качественно различных режима прохождения резонанса. Первый из них характеризуется наличием двух точек пересечения (остановки "частицы"), ограниченными колебаниями фазы и, следовательно, многократным прохождением резонанса (линия *β*). Этот режим хорошо изучен для специального случая (ускорители заряженных частиц) и называется обычно захватом или автофазировкой /7,8/. Захват возможен лишь при $|V| < 1$ и для определенных начальных условий, отмеченных на рисунке штриховкой. При $|V| \ll 1$ захват происходит почти для любой начальной фазы колебаний (при достаточно малой расстройке). В режиме захвата энергия осциллятора автоматически изменяется таким образом, что $k\omega_x \approx \ell\Omega$. Точность этого равенства определяется глубиной "потенциальной ямы" и равна $\sim \Omega_\phi$ (1.4.3).

Другой режим (линии *α*, *δ* на рис.1.5.1) характеризуется однократным прохождением резонанса. При $|V| > 1$ прохождение возможно для любой фазы ψ_0 , а при $|V| < 1$ - лишь для некоторых ψ_0 . Этот режим и является собственно прохождением резонанса, так как при $t \rightarrow \pm \infty$ система уходит далеко от резонанса и её энергия стремится к постоянным значениям.

Рассмотрим два крайних случая, в которых решение (1.5.3) в этом режиме можно представить аналитически /6/. Будем считать величины $\dot{\Omega}_1$, ω'_k и U_0 положительными. Если $\dot{\Omega}_1 < 0$, в решении необходимо изменить знак времени (резонанс проходится в обратном направлении), а также произвести замену фазы ($\varphi_0 \rightarrow \pi - \varphi_0$) из-за изменения знака V , как это легко усмотреть из рис. 1.5.1. Если $U_0 \omega'_k < 0$, необходимо изменить фазы на π ($\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 + \pi$) (1.5.3). Наконец, если обе величины $\dot{\Omega}_1$; $U_0 \omega'_k < 0$, необходимо выполнить последовательно оба преобразования, что эквивалентно изменению знака времени и преобразованию $\varphi_0 \rightarrow -\varphi_0$.

1. Быстрое, или линейное, прохождение резонанса ($V \gg 1$)

В этом случае можно пренебречь в первом приближении нелинейностью, тогда уравнение для фазы (1.5.3) или (1.3.12) сразу интегрируется:

$$\varphi = \varphi_0 + \dot{\Omega}_1 \frac{t^2}{2} \quad (1.5.5)$$

а уравнение для I (1.3.12) сводится к интегралу Френеля (см., например, /9/):

$$\Delta(k\omega) = -\sqrt{\frac{2\pi}{V}} \cdot \Omega_F \cdot \cos(\varphi_0 + \pi/4) \quad (1.5.6)$$

$$\Delta I = -\sqrt{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{\sqrt{\dot{\Omega}_1}} \cdot \cos(\varphi_0 + \pi/4)$$

Приведем следующий член разложения по степеням малого параметра V^{-1} , характеризующий слабое влияние нелинейности при быстром прохождении резонанса /6/:

$$\Delta(k\omega) = -\sqrt{\frac{2\pi}{V}} \cdot \Omega_F \cdot \left\{ \cos \varphi + \frac{V^{-1}}{2\sqrt{2}} [1 + (\sqrt{2}-1)(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi)] \right\} \\ \varphi = \varphi_0 + \frac{\dot{\Omega}_1}{2} \left(t \mp \frac{\Delta(k\omega)}{2\dot{\Omega}_1} \right)^2; \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{4} \quad (1.5.7)$$

Верхний знак соответствует движению после резонанса, нижний — до резонанса. Так как выражение в квадратных скобках > 0 , то знак нелинейной добавки к $\Delta(k\omega)$ противоположен знаку $\dot{\Omega}_1$. Иными словами нелинейное изменение частоты при

быстрым прохождении резонанса направлено в обратную сторону по отношению к внешнему изменению частоты аналогично режиму захвата; нелинейность как бы несколько замедляет прохождение резонанса.

Изменение частоты и энергии при прохождении резонанса растет с уменьшением скорости прохождения, но в отличие от чисто линейного случая, ограничено условием $V \gg 1$ и не превосходит: $|\Delta(k\omega)| \leq \Omega_+ \ll \omega$; $|\alpha I| \leq \Omega_+ / \omega' k \sim \sqrt{\frac{\epsilon H_0}{\omega' k}} \ll I$ (1.4.4).

11. Медленное, или обратимое, прохождение резонанса ($V \ll 1$)

Из рис. 1.5.1 (линия δ) видно, что в этом случае фаза в момент точного резонанса заключена в узком интервале около $\frac{\pi}{2}$:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \xi; \quad -V < \xi < \sqrt{4\pi V} \quad (1.5.8)$$

Остальные фазы соответствуют захвату.

Приближенное интегрирование уравнения (1.5.3) даёт /6/:

$$\begin{aligned} \Delta(k\omega) = & 2V\Omega_+ \cdot \ln(V+\xi)(V-\xi^2) + \\ & + \frac{8}{\pi} \Omega_+ \sqrt{1+2\pi V - \xi^2/4} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Первое слагаемое существует лишь в экспоненциально малой области на краях интервала (1.5.8), где оно приводит к неограниченному изменению ω (и I). Физический смысл этого изменения связан с очень медленным движением (почти остановкой) фазы вблизи значения $\frac{\pi}{2} - V$ (1.3.12). Знак $\Delta(k\omega)$ противоположен знаку Ω_+ , аналогично режиму захвата, т.е. прохождение резонанса замедляется. Этот результат вполне понятен, так как края интервала (1.5.8) непосредственно примыкают к сепаратрисе.

Основным членом в (1.5.9) является второй. В пределе $V \rightarrow 0$ он не зависит ни от фазы ψ_0 (а, следовательно, и от начальных условий), ни от скорости прохождения резонанса Ω_+ :

$$\Delta I = \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon U_0}{\omega' k}} \quad (1.5.10)$$

В этом режиме, таким образом, нет непрерывного перехода к стационарному случаю ($\dot{\Omega}_1 = 0$); такой переход имеет место лишь в области захвата.

Знак $\Delta(k\omega)$ при медленном прохождении совпадает со знаком $\dot{\Omega}_1$, т.е. нелинейность ускоряет прохождения резонанса. В силу независимости (1.5.10) от фазы процесс медленного прохождения является обратимым. В частности, при периодическом прохождении резонанса в обе стороны энергия осциллятора испытывает лишь ограниченные (и малые (1.4.4)) колебания в приближении (1.5.10). Более точное выражение (1.5.9) уже зависит от ψ_0 и поэтому может приводить к некоторым накапливющимся эффектам. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 2.8.

Заметим, что постоянное изменение (1.5.10) совпадает по порядку величины с максимально возможным при быстром прохождении резонанса.

Режим медленного прохождения резонанса известен относительно мало. Повидимому, первое упоминание о нем содержится в работе Саймона и Сесслера /11/, где он называется механизмом фазового смещения^{x)} и предлагается в качестве метода ускорения в дополнение к обычной автофазировке. Качественное рассмотрение медленного прохождения резонанса дано Старроуком /9/, однако, критерий медленности в этой работе неправильный:

$$\frac{(\omega - \Omega)^2}{\dot{\Omega}_1} \gg 1 \quad (1.5.11)$$

В таком виде он вообще не имеет смысла, так как зависит от произвольной расстройки ($\omega - \Omega$). Однако, насколько можно понять из текста /9/, автор берет в качестве ширины резонанса линейное значение: $\omega - \Omega \sim \varepsilon U_0'$ (см. (1.6.17)), тогда как для получения правильного критерия нужно брать нелинейное: $\omega - \Omega \sim \sim \dot{\Omega}_4$ (1.5.4).

x) смещения в фазовом пространстве.

Учтем теперь влияние потерь. В первом приближении по $\sqrt{\epsilon}$ нужно добавить к универсальному гамильтониану (1.3.11) член $\epsilon \Lambda \Psi$, где $\Lambda = \Lambda(I_p) = \text{const}$ так же, как и другие коэффициенты. Результат можно представить себе либо как изменение "потенциальной ямы" $\mathcal{U}(\Psi)$ (ее "наклон"), либо как некоторое эффективное изменение скорости прохождения прежнего резонанса на величину (1.5.1):

$$\Delta \dot{\Omega}_1 = -\epsilon \Lambda \omega'_k \quad (1.5.12)$$

В последнем случае параметр скорости "прохождения" резонанса принимает вид

(1.3.6):

$$V = \frac{\dot{\Omega}_1 - \epsilon \Lambda \omega'_k}{\Omega_+^2} = \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega_+^2} - \frac{P}{\omega \mathcal{U}_0} \quad (1.5.13)$$

В частности, при постоянных частотах ($\dot{\Omega}_1 = 0$) захват возможен лишь при условии $P < \omega \mathcal{U}_0$. В области захвата энергия осциллятора при этом в среднем не изменяется, так как потери компенсируются действием возмущения. вне сепаратрисы энергия осциллятора уменьшается, и он отходит от резонанса.

Если $\dot{\Omega}_1 = \epsilon \Lambda \omega'_k$, имеет место любопытный "стационарный" случай ($V = 0$) с переменными частотами. В отличие от истинного стационарного случая ($\dot{\Omega}_1 = \Lambda = 0$) амплитуда фазовых колебаний может при этом изменяться (§ 1.6).

§ 1.6 Эффекты второго приближения

К эффектам второго приближения (т.е. $\sim \sqrt{\epsilon}$, § 1.4) в нелинейном резонансе относятся эффекты, связанные с изменением коэффициентов универсального гамильтониана (§ 1.3): $\mathcal{U}_0(I)$, $\omega'_k(I)$, $\Lambda(I)$, которые в первом приближении по $\sqrt{\epsilon}$ считались постоянными. Эти эффекты можно разбить на две категории: осциллирующие (с частотой фазовых колебаний) и накапливающиеся. Согласно оценкам § 1.4 осциллирующие эффекты в области умеренной нелинейности всегда малы ($\sim \sqrt{\epsilon}$), и мы не будем выписывать соответствующие поправки в явном виде. С другой стороны накапливающиеся эффекты можно считать медленными; для их исследования проще всего воспользоваться адабатическим инвариантом фазовых колебаний:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint I d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint (I - I_p) d\varphi \quad (1.6.1)$$

Последнее выражение справедливо для ограниченных фазовых колебаний, когда $\oint d\varphi = 0$. Вдали от резонанса $J \rightarrow I$, т.е. адиабатический инвариант фазовых колебаний переходит в адиабатический инвариант собственных колебаний осциллятора.

Для вычисления изменения J обратимся к резонансному гамильтониану (1.3.7) и применим общую формулу (1.2.8). Переменными параметрами здесь являются частоты $\omega_1(t)$ и параметр потерь $\Lambda(t)$. Имеем:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{T_\Phi}{2\pi} \left(\frac{\partial H_p}{\partial t} - \frac{\partial H_p}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \varepsilon \frac{\Lambda'(\varphi - \bar{\varphi}) \cdot i}{\omega_\Phi} \quad (1.6.2)$$

где T_Φ - период фазовых колебаний, а явная зависимость от времени связана с изменением частот (ω_1) .

При достаточно медленном и плавном изменении частот первый член даёт, как известно (§ 4.4), экспоненциально малый вклад в dJ т.е. практически не изменяет J , так что достаточно рассмотреть лишь второй член, связанный с потерями.

При интегрировании (1.6.2) ограничимся малыми фазовыми колебаниями:

$$|\varphi| = |\varphi - \bar{\varphi}| \leq \varphi_0 \ll 1 \quad (1.6.3)$$

где φ_0 - амплитуда фазовых колебаний. В этом случае можно положить

$$\dot{\varphi} \approx \omega'_K (I - I_p); \quad i \approx i_p + \frac{\ddot{\varphi}}{\omega'_K} = i_p - \frac{\varphi \omega_p^2}{\omega'_K} \quad (1.4.8)$$

Легко проверить, что относительная точность этих выражений $\sim \varphi_0 \sqrt{\varepsilon}$.

Для получения J с той же точностью достаточно воспользоваться универсальным гамильтонианом:

$$J = \frac{\omega_\Phi \varphi_0^2}{2\omega'_K} \quad (1.6.5)$$

х) Если только траектория не пересекает сепаратрису стационарных фазовых колебаний, для которой $T_\Phi = \infty$ и адиабатический инвариант всегда изменяется независимо от скорости прохождения, как это фактически вычислено в § 1.5.

Подставляя выражения (1.6.4,5) в (1.6.2) и усредняя по периоду фазовых колебаний, найдем:

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} \approx -\varepsilon \Lambda' \mathcal{I} \quad (1.6.6)$$

или

$$\mathcal{I} = I_0 \cdot e^{-\varepsilon \int_0^t dt \cdot \Lambda'(I_p)} \quad (1.6.7)$$

В общем случае параметр $\Lambda'(I_p)$ может зависеть от времени из-за изменения I_p . Направление изменения \mathcal{I} , а, следовательно, и амплитуды фазовых колебаний (затухание или возрастание) зависит от знака производной $\Lambda' = (\mathcal{P}/\omega)'$ (1.3.6).

Применение метода усреднения к уравнению (1.6.2) для получения (1.6.6) допустимо при условии:

$$\varepsilon \Lambda' \ll \Omega_\phi \quad (1.6.8)$$

В стационарном случае ($\dot{\varphi}_1 = 0$) единственным существенным эффектом второго приближения является затухание (или возрастание) амплитуды фазовых колебаний с постоянным декрементом $- \varepsilon \Lambda'(I_p)$ (1.6.7); остальные эффекты приводят лишь к малым осциллирующим поправкам $\sim \sqrt{\varepsilon}$.

При достаточно медленном прохождении резонанса в режиме захвата амплитуда фазовых колебаний изменяется адиабатически согласно (1.6.5,7). Выражение для адиабатического инварианта фазовых колебаний является универсальным в том же смысле, как и гамильтониан (1.3.11), т.е. оно не зависит от типа резонанса (с точностью до формы колебаний).

Этот результат, отмеченный для частного случая синхротронных колебаний в ускорителе Коломенским и Лебедевым /5/, является вполне естественным, так как выражение для \mathcal{I} с точностью $\sim \sqrt{\varepsilon}$ может быть получено непосредственно из универсального гамильтониана. В случае малых фазовых колебаний выражение (1.6.5) является просто универсальным.

Независимость адиабатических процессов фазовых колебаний от типа возмущения можно рассмотреть с другой точки зрения. Если фаза возмущений ϑ зависит только от времени (1.1.1), то фазовая плоскость резонанса (I, φ) отличается от исходной фазовой плоскости осциллятора (I, θ) лишь поворотом координатных осей и постоянным изменением масштаба ($\varphi = k\theta - \ell\vartheta(t)$). В таком случае интеграл (1.6.1) пропорционален фазовой площади невозмущенного осциллятора, охваченной траекторией фазовых колебаний. Согласно теореме Лиувилля эта площадь (определенная движением совокупности всех точек внутри фазовой траектории) всегда строго сохраняется (в том числе и при наличии возмущения). Это соответствует приближенному сохранению площади, охваченной стационарной траекторией фазовых колебаний, в тех случаях, когда можно пренебречь пересечением её с действительными траекториями соседних частиц. Собственно резонанс определяет только форму области, например, для малых фазовых колебаний: $\Omega_\varphi \cdot a\theta \sim \omega' \cdot aI$ (1.8.12).

В частном случае гармонического потенциала (1.3.14), при условии $V \ll 1$ (1.5.13) и отсутствии потерь получаем:

$$\Phi_0 \sim \left| \frac{\omega'_k}{U_0} \right|^{1/4} \quad (1.6.9)$$

что совпадает с результатом теории синхротронных колебаний в ускорителях /5/. Из последнего выражения видно, что можно обеспечить затухание фазовых колебаний и при увеличении энергии осциллятора, и при её уменьшении, причём как за счёт специальной нелинейной характеристики осциллятора, так и за счёт изменения параметров резонанса во времени. Это даёт возможность использовать нелинейный резонанс для регулировки амплитуды колебаний.

Рассмотрим влияние эффектов второго приближения на медленное прохождение резонанса^{x)}. Наиболее существенное влияние связано с возможностью перехода

x) При быстром прохождении это влияние всегда мало ($\sim \sqrt{\epsilon}$).

из одного режима прохождения в другой, т.е. с захватом (переход к ограниченным фазовым колебаниям) или, наоборот, с выходом из резонанса. Очевидно, что выход из резонанса обязательно произойдет рано или поздно, если амплитуда фазовых колебаний возрастает. В случае затухания фазовых колебаний возможен (но не обязательно происходит) захват. Дело в том, что при медленном прохождении резонанса имеет место всего лишь одно фазовое колебание, пересекающее стационарную сепаратрису (см.рис.1.5.1), линия δ , поэтому затухание может "не успеть" изменить параметры фазовых колебаний настолько, чтобы произошел захват. Однако при $V \rightarrow 0$ захват обязательно произойдет, потому что упомянутое фазовое колебание стремится в этом случае к сепаратрисе, и для захвата достаточно сколь угодно малого изменения. К тому же, как будет показано в § 2.6, вблизи сепаратрисы всегда имеется более или менее широкий стохастический слой, который облегчает процесс захвата.

Оценим критическое значение скорости прохождения. Вернемся к полному уравнению для $\dot{\varphi}$ (1.3.15), которое перепишем в виде:

$$\dot{\varphi} = \omega'_K (I - I_p) + \frac{(I - I_p)^2}{2} \omega''_K - \varepsilon U_0'' \sin \varphi \quad (1.6.10)$$

Первое слагаемое – основное, второе всегда мало при умеренной нелинейности; захват может произойти за счёт последнего члена, если $\dot{\varphi}$ обратится в нуль после прохождения резонанса вблизи $\sin \varphi = 1$, где $\dot{\varphi}$ имеет минимальное значение по первому приближению (рис.1.5.1). Для захвата необходимо также, чтобы до прохождения резонанса $\dot{\varphi} \neq 0$, в противном случае все рассмотрение переносится в другую область фаз (на один период по φ вправо, рис.1.5.1). Это как раз возможно, поскольку первый член (1.6.10) изменяет знак после прохождения резонанса, а последний не изменяет.

Минимальное значение $\dot{\varphi}$ по первому приближению имеет порядок (1.5.3):

$$\dot{\varphi}_{\min} \sim \Omega_\varphi \sqrt{4\pi V} \quad (1.6.11)$$

Захват возможен при условии $\Omega_f \sqrt{4\pi} V' \leq |\varepsilon U'_0|$, или

$$V \leq \varepsilon \frac{(U'_0)^2}{4\pi U_0 \omega'_k} \sim \frac{\varepsilon}{\omega} ; \quad \dot{\Omega}_1, U'_0 > 0 \quad (1.6.12)$$

Последнее неравенство есть условие на знаки членов (1.6.10).

Для устойчивого захвата необходимо, чтобы после захвата амплитуда фазовых колебаний уменьшалась; в противном случае возможен лишь кратковременный захват. При отсутствии явной зависимости от времени и условии $U_0 > 0$ колебания затухают, если:^{x)}

$$\left(\frac{\omega'_k}{U_0} \right)' \cdot \dot{\Omega}_1 > 0 \quad (1.6.13)$$

Это совместимо с условием захвата (1.6.12) при

$$\omega'_k < \frac{\omega''_k}{U'_0} \cdot U_0 \quad (1.6.14)$$

В противном случае устойчивый захват, как правило, невозможен за исключением экспоненциально малой области резонансных фаз на краях интервала (1.5.8), для которых неравенство (1.6.12) изменяет знак (§ 1.5).

Захват возможен также за счёт неравномерной скорости прохождения резонанса ($\ddot{\Omega}_1 \neq 0$), если это приводит к уменьшению V на величину $\Delta V \sim V$ (1.5.3), т.е. при условии:

$$-\frac{\ddot{\Omega}_1}{\dot{\Omega}_1 \Omega_f} \gtrsim 1 \quad (1.6.15)$$

Однако для устойчивости этого захвата необходимо достаточно быстрое затухание фазовых колебаний. Действительно, при условии (1.6.15) V проходит через нуль за время порядка одного фазового колебания и снова начинает увеличиваться по абсолютной величине, что может привести к выходу из резонанса.

Все оценки эффектов второго приближения в этом параграфе делались для

x) В приближении (1.6.9), которое мы используем в качестве примера.

умеренной нелинейности (1.3.8). При очень большой нелинейности $\epsilon\alpha \gg 1$ необходимо учесть следующие члены разложения величины ($k_\omega - \ell_\Omega$) в уравнении для $\dot{\psi}$ (1.6.10). В частности, отношение второго члена к первому имеет порядок $\sqrt{\epsilon\alpha} \cdot \varphi_0$. Отсюда видно, что для достаточно малых колебаний

$$\varphi_0 \ll (\epsilon\alpha)^{-1/2} \quad (1.6.16)$$

все остается неизменным. Однако форма больших колебаний ($\varphi_0 \sim 1$), а также расположение сепаратрисы может существенно измениться в зависимости от конкретного вида $U(I, \psi)$.

При уменьшении нелинейности ($\omega'_K \rightarrow 0$) мы приходим в конце концов к линейному резонансу. В этом случае разность ($k_\omega - \ell_\Omega$) в системе уравнений (1.3.15) является просто постоянной расстройкой. Резонанс соответствует условию $\dot{\psi} = 0$, откуда линейная ширина резонанса (ширина неустойчивой области) равна:

$$k \cdot (\Delta\omega)_r = 2\epsilon U'_0 \quad (1.6.17)$$

Линейное приближение справедливо до тех пор, пока нелинейное изменение частоты ($\omega'_K \cdot \Delta I$) много меньше линейной ширины резонанса (1.6.17). В частности, для $\Delta I \sim I$ получаем:

$$\frac{\epsilon U'_0}{I\omega'_K} \sim \frac{\epsilon}{\alpha} \gg 1 \quad (1.6.18)$$

В промежуточном случае $\epsilon \sim \alpha$ движение осциллятора может быть очень сложным и зависит от типа резонанса. Наиболее существенной чертой этой области является возникновение при определенных условиях области захвата, или, иначе говоря, стабилизация резонанса нелинейностью. Условия такой стабилизации обычно получаются из резонансного гамильтонiana (1.3.7). Оценку по порядку величины можно, однако, получить гораздо проще из следующих соображений. Стабилизация возникает в том случае, когда нелинейное изменение частоты превысит линейную ширину резонанса и, таким образом, осциллятор начнет выходить из резонанса. С другой

стороны нелинейную расстройку можно оценить по формуле фазовых колебаний

(§ 1.4):

$$(k\omega - \ell\omega)_{\text{н}} \sim \omega_2 \sim (\varepsilon \mathcal{U}_0 \omega'_k)^{1/2} \quad (1.6.19)$$

Отсюда получаем условие стабилизации в виде:

$$\omega'_k \gtrsim \varepsilon \frac{(\mathcal{U}'_0)^2}{\mathcal{U}_0} \quad (1.6.20)$$

Рассмотрим в качестве примера резонанс для малых слегка ангармоничных колебаний, описываемых гамильтонианом /5/:

$$\mathcal{H}_p(p, q, t) = \mathcal{H}_0(p, q) + \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} e^{i(k\omega - \ell\omega)t} \cdot \sum_{\tilde{\omega}=1, k_1, k_l}^{\infty} \mathcal{U}_{kk_l\tilde{\omega}} \cdot I^{\frac{\tilde{\omega}}{2}} \quad (1.6.21)$$

где \mathcal{H}_0 — линейная часть, а малость возмущения обеспечивается условием: $I \rightarrow 0$.

Нелинейность определяется здесь первым неравным нулю членом $\mathcal{U}_{00\tilde{\omega}_1}$ с $\tilde{\omega}_1 > 2$ (обычно \mathcal{U}_{004}):

$$\omega'_k = \frac{k}{4} \mathcal{U}_{00\tilde{\omega}_1} \cdot \tilde{\omega}_1 (\tilde{\omega}_1 - 2) \cdot I^{\frac{\tilde{\omega}_1 - 2}{2}} \quad (1.6.22)$$

а величина возмущения для резонанса k -й гармоники ($k > 0$) есть (см. 1.3.4)):

$$|\mathcal{U}_0| \approx 2k \cdot |\mathcal{U}_{kk_1}| \cdot I^{k/2} \quad (1.6.23)$$

Условие стабилизации (1.6.20) принимает вид:

$$\lambda \leq I^{\frac{\tilde{\omega}_1 - k}{2}} ; \quad \lambda = \frac{8}{\tilde{\omega}_1(\tilde{\omega}_1 - 2)} \left| \frac{\mathcal{U}_{kk_1}}{\mathcal{U}_{00\tilde{\omega}_1}} \right| \quad (1.6.24)$$

Для $I \rightarrow 0$, это неравенство всегда выполняется при $k > \tilde{\omega}_1$ (стабилизация при малых амплитудах) и не выполняется при $k < \tilde{\omega}_1$. В последнем случае стабилизация возможна только для $\lambda \ll 1$, причём граница стабилизации даётся оценкой^{x)}:

$$I_1 \sim \lambda^{\frac{2}{\tilde{\omega}_1 - k}} \quad (1.6.25)$$

x) Значение $I = 1$ соответствует допустимой амплитуде колебаний.

Область устойчивости соответствует достаточно большой амплитуде: $I > I_1$.

Заметим, что при $\lambda \gg 1$ эта область ($I \geq I_1$) становится неустойчивой для $k > \bar{k}_1$. При $k = \bar{k}_1$ условие стабилизации не зависит от I : $\lambda \leq 1$.

Для частного случая $\bar{k}_1 = 4$ полученные оценки совпадают с результатами детальных расчётов аналогичной задачи, выполненных Шохом /14/ (см.также /5/) и Мельниковым /37/.

ГЛАВА 11

СТОХАСТИЧНОСТЬ

Эта глава является основной в работе. В ней исследуется взаимодействие нескольких резонансов, связанное с нелинейностью системы. Взаимодействие резонансов служит источником неустойчивости колебаний, которая приводит в свою очередь к той или иной форме стохастичности, т.е. к появлению статистических законов в динамической системе. В этом пункте классическая теория колебаний сливается со статистической механикой, причём нас будет интересовать главным образом пограничная область на стыке обоих наук. В отличие от более элементарных исследований предыдущей главы, мы вынуждены ниже обратиться к системе простых моделей и в большей степени использовать аналитические сценки по порядку величины. Естественная неудовлетворенность от такого "нестрого" подхода может быть до известной степени компенсирована численными экспериментами, которые будут описаны в следующей главе.

§ 2.1. Основная модель

Центральной проблемой настоящей работы является проблема взаимодействия нескольких резонансов. Согласно результатам предыдущей главы размер области влияния каждого резонанса (по частоте) имеет порядок (§ 1.4)^{x)}:

$$(\Delta\omega)_n \sim \Omega_f \quad (2.1.1)$$

вокруг резонансного значения $\omega = \omega_p$. Если имеется несколько резонансных значений частоты (ω_1, \dots) (несколько резонансов, как мы будем говорить для краткости), то очевидно, что характер движения будет существенно зависеть,

x) Для случая умеренной нелинейности (1.3.8), который будет всегда подразумеваться, если не сделано специальной оговорки.

вообще говоря, от отношения:

$$S = \frac{(\Delta\omega)_H}{\Delta} \sim \frac{\Omega_\phi}{\Delta} \quad (2.1.2)$$

где $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$ - частотное расстояние между соседними резонансами.

Случай изолированного резонанса, подробно исследованный в предыдущей главе, соответствует условию

$$S \ll 1 \quad (2.1.3)$$

Асимптотическая справедливость этого условия вполне очевидна^{x)}. Обсуждение более аккуратного критерия применимости приближения изолированного резонанса будет дано ниже (§ 2.2.7).

В обратном случае

$$S \gtrsim 1 \quad (2.1.4)$$

необходимо учитывать взаимодействие резонансов, т.е. одновременное влияние на нелинейный осциллятор нескольких возмущений с различными частотами.

Нетрудно обобщить универсальный гамильтониан (1.3.11) на случай нескольких резонансов. Выберем один из них за основной (начало отсчета) и обозначим относящиеся к нему величины индексом нуль. Введем фазы $\psi = \theta - \vartheta_0$; $\varphi_i = \vartheta_0 - \vartheta_i$ (см. § 1.3, $k = l = 1$). Универсальный гамильтониан можно записать теперь в виде:

$$\mathcal{H}_y = \frac{\omega'_0}{2} (I - I_0)^2 + \varepsilon \sum_i U_i \sin (\psi + \varphi_i) \quad (2.1.5)$$

откуда уравнения движения в первом приближении есть

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon \sum_i U_i \cos (\psi + \varphi_i) \\ \dot{\psi} &= \omega'_0 (I - I_0); \quad \dot{\varphi}_i = \Omega_0 - \Omega_i \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Можно высказать следующие качественные соображения о поведении этой системы в условиях взаимодействия резонансов (2.1.6). Каждое слагаемое определяет свой "центр притяжения", вокруг которого могут происходить фазовые ко-

x) См. впрочем § 2.7.

лебания нашей "частицы" (см. § 1.3). Иными словами на фазовой плоскости осциллятора (I , θ) вместо одной "потенциальной ямы" (точнее, одного "ожерелья", рис. 1.4.1) имеется целый ряд "потенциальных ям" вокруг I_c . При условии (2.1.4) эти "ямы" перекрываются, что даёт возможность "частице" переходить из одной "ямы" в другую. Условия перехода зависят от соотношения фаз $\psi + \psi_c$ и, вообще говоря, непрерывно изменяются, так как "ямы" смещаются друг относительно друга по θ из-за различия частот Ω_c .

Закон блуждания "частицы" по "ямам" зависит от конкретного вида возмущения и, в частности, от фазовых соотношений. В дальнейшем мы приведем примеры различных типов блуждания (§ 2.4). Однако можно думать, что в предельном случае очень сильного перекрытия резонансных зон

$$S \gg 1 \quad (2.1.7)$$

закон блуждания будет близок к случайному. Основанием служит очень сложный характер изменения I в этом случае (2.1.6), в особенности если учесть, что фазы $\psi + \psi_c$, определяющие это изменение, сами зависят от I в силу нелинейности осциллятора^{x)}.

Казалось бы, движение не может быть "полностью" случайным, так как оно подчиняется динамическим уравнением. Однако возможна имитация всех известных свойств случного процесса, иногда столь хорошая, что возникает вопрос, не является ли и "настоящий" случайный процесс всего лишь искусственной "имитацией". Обсуждение этого вопроса мы отложим до § 2.13.

Движение такого квазислучайного типа мы будем называть в дальнейшем стochastic, понимая под этим все известные в настоящее время особенности случного процесса (§ 2.3). Изучение стохастического движения механической системы, начатое главным образом в связи с проблемой обоснования статистической ме-

x) Это заключение не тривиально, см. § 2.8.

ники (§ 2.13; см., например, /16/) превратилось сейчас в целый новый раздел математики — метрическую теорию динамических систем, которую мы будем называть в дальнейшем более кратким, хотя и менее удачным термином — эргодическая теория^{x)}. К сожалению, эта теория является, как правило, слишком абстрактной и её нелегко применить к конкретным физическим задачам. Следует сразу же говорить, что самые последние, и самые важные, результаты теории /19,20,31,17/ выгодно отличаются в этом смысле и будут широко использоваться в настоящей работе.

Нашей основной задачей является обоснование неравенства (2.1.4) как критерия стохастичности, т.е. как границы, разделяющей устойчивую и стохастическую области, для частного случая механической системы вида (1.1.1), а также вычисление конкретных параметров стохастического движения.

Исследование общего случая взаимодействия резонансов (2.1.6) наталкивается на значительные трудности, смысл которых будет ясен в дальнейшем. Поэтому мы упростим вначале модель (1.2.5), выбранную в предыдущей главе, предположив, что возмущение действует на осциллятор периодически (период $T = 2\pi/\Omega$), причём каждый раз в течение очень короткого промежутка времени $\tilde{\tau} \rightarrow 0$ (приближение коротких толчков). Уравнения (1.2.5) принимают в этом случае вид:

$$\dot{I} = -\varepsilon h_\theta(I, \theta) \quad (2.1.8)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon h_I(I, \theta)$$

Зависимость от фазы возмущения ϑ ($\dot{\vartheta} = \Omega$) проявляется в том, что гамильтониан $h(I, \theta)$ отличен от нуля лишь на интервалах $\tilde{\tau}$; индексы θ, I обозначают частное дифференцирование по соответствующему аргументу.

Интегрируя систему на интервале $\tilde{\tau}$, получим в первом приближении:

x) Современное состояние теории изложено достаточно полно в работе Синай /17/, см. также /41,42/.

$$\Delta I = -(\varepsilon \tilde{\omega}) \cdot h_\theta(I_0, \theta_0) + O(\varepsilon^2, (\tilde{\omega} \omega)^2)$$

$$\Delta \varphi = (\varepsilon \tilde{\omega}) \cdot h_I(I_0, \theta_0) + O(\varepsilon^2, (\tilde{\omega} \omega)^2)$$

(2.1.9)

где I_0, θ_0 - начальные значения. В промежутке между толчками $I = \text{const}$, а фаза изменяется на величину $\Delta \theta = (T - \tilde{\omega}) \cdot \omega(I_1)$, где I_1 - значение после толчка. Полное изменение фазы за период равно:

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= (T - \tilde{\omega}) \cdot \omega(I_1) + \int_0^{\tilde{\omega}} \omega dt + (\varepsilon \tilde{\omega}) \cdot h_I(I_0, \theta_0) = \\ &= T \cdot \omega(I_1) + (\varepsilon \tilde{\omega}) \cdot h_I(I_0, \theta_0) + O(\varepsilon^2, (\tilde{\omega} \omega)^2) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Мы можем теперь описать движение модели с помощью системы разностных уравнений:

$$I_{n+1} = I_n - \varepsilon h_\theta(I_n, \theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + T \omega(I_{n+1}) + \varepsilon h_I(I_n, \theta_n)$$

(2.1.11)

где принято $\tilde{\omega} = 1$, а индекс "n" обозначает номер толчка (шага), новое дискретное время нашей динамической системы. Напомним, что гамильтониан $h(I, \theta)$ является периодическим по θ с периодом 2π .

Уравнения (2.1.11) написаны в первом приближении по ε и могут быть при необходимости уточнены, исходя из (2.1.8). Выпишем, в частности, выражение для ΔI с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$, которое потребуется нам в дальнейшем:

$$\Delta I = -(\varepsilon \tilde{\omega}) h_\theta + \frac{(\varepsilon \tilde{\omega})^2}{2} \cdot [h_{\theta I} \cdot h_\theta - h_{\theta \theta} \cdot h_I] -$$

$$- \frac{\varepsilon \tilde{\omega}^2}{2} \cdot \omega_0 \cdot h_{\theta \theta} + O(\varepsilon^3, (\tilde{\omega} \omega)^3)$$

(2.1.12)

Поскольку исходная система (2.1.8) является канонической, якобиан перехода (2.1.11) равен единице с соответствующей точностью:

$$\left| \frac{\partial(I_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(I_n, \theta_n)} \right| = 1 + O(\varepsilon^2) \quad (2.1.13)$$

что легко проверить и непосредственным вычислением.

Уравнения (2.1.11) определяют основную модель взаимодействия резонансов.

Иногда нам будет удобно еще более упростить ее. Как и в случае изолированного резонанса поведение системы до известной степени не зависит от конкретного вида функции $h(I, \theta)^x$, поэтому мы выберем два простейших случая (2.1.14, 15).

Далее, можно пренебречь в первом приближении по $\sqrt{\varepsilon}$ (см. § 1.4) последним членом во втором уравнении (2.1.11), который представляет собой линейную поправку к частоте (§ 1.6, (1.6.17)). Наконец, вместо переменной действия I можно использовать непосредственно частоту осциллятора ω . В результате получим следующие простейшие модельные уравнения, описывающие феномен взаимодействия резонансов:

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n + \varepsilon (\varphi_n - 1/2) \\ \varphi_{n+1} &= \{ \varphi_n + T \cdot \omega_{n+1} \} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

или

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n + \varepsilon \cdot \cos 2\pi \varphi_n \\ \varphi_{n+1} &= \{ \varphi_n + \frac{T}{2\pi} \omega_{n+1} \} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Здесь фигурные скобки $\{ \dots \}$ означают дробную часть аргумента – удобный способ задания периодической зависимости. Коэффициенты модельных уравнений (2.1.14, 15) подобраны таким образом, чтобы якобиан

$$\underline{|\partial(\omega_{n+1}, \varphi_{n+1})/\partial(\omega_n, \varphi_n)| = 1} \text{ точно. Причины выбора двух видов за-}$$

x) См. § 2.7.

висимости от ψ будут ясны из дальнейшего (см. § 2.4).

Мы выбрали для нашей основной модели (2.1.11) возмущение в виде коротких толчков, по существу, в форме δ -функции. Такой выбор не является очень специальным или исключительным; напротив, он является типичным, поскольку сумма в правой части (2.1.6) при большом числе слагаемых действительно представляет собой либо короткий толчок (или серию толчков), либо частотно-модулированное возмущение. В последнем случае происходит периодическое прохождение резонанса, которое согласно результатам § 1.5 также эквивалентно некоторому толчку (1.5.7, 9). Поэтому можно ожидать, что свойства модели (2.1.11) будут в некотором смысле типичными для проблемы взаимодействия резонансов и стохастичности.

Переход к разностным уравнениям (2.1.11) или, как говорят, к преобразованию означает, по существу, интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений на периоде возмущения, интегрирование, которое становится тривиальным для рассматриваемого частного случая. Мы получаем, таким образом, определенную информацию о поведении системы на конечном, и характерном, интервале времени. В этом, собственно, и состоит смысл упрощения исходной системы.

Истинное значение основной модели выяснится в § 2.6, где будет показано, что она описывает движение вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса и, в частности, стохастический слой. Оказывается, что последний является зародышем любой неустойчивости нелинейных колебаний. Таким образом появляется возможность исследовать общий случай взаимодействия резонансов, опираясь только на основную модель.

§ 2.2 Колмогоровская устойчивость

Вернемся к уравнениям (2.1.11). Если возмущение достаточно мало ($\varepsilon \rightarrow 0$) и $T\omega = 2\pi k$ (k - целое), т.е. система находится вблизи резонанса, разностные уравнения могут быть снова заменены дифференциальными:

$$\begin{aligned}\dot{I} &= -\frac{\epsilon}{T} h_\theta(I, \theta) \\ \dot{\theta} &= (\omega(I) - \omega_p) + \frac{\epsilon}{T} h_I(I, \theta)\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

где ω_p — резонансное значение частоты осциллятора ω .

Исследуем характер движения в этом случае. Прежде всего заметим, что уравнения (2.2.1), конечно, не тождественны исходным (2.1.8), несмотря на некоторое сходство. Производные (2.1.8) относятся к промежутку времени $\ll T$ (время действия возмущения), тогда как характерное время для производных (2.2.1) должно быть $\gg T$ (период действия возмущения). Это значит, что дифференциальные уравнения (2.2.1), так же, как и разностные (2.1.11), содержат определенную информацию о решении исходной системы (2.1.8) на периоде возмущения, как это было отмечено выше.

Обратим внимание далее, что уравнения (2.2.1) в точности совпадают с уравнениями (1.3.5) в § 1.3, описывающими изолированный резонанс. Следовательно, в рассматриваемом приближении взаимодействие резонансов отсутствует, и движение имеет характер ограниченных фазовых колебаний (§ 1.4).

Рассмотрим эти фазовые колебания подробнее для модели (2.1.15). Дифференциальные уравнения принимают в этом случае вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\omega} &= \frac{\epsilon}{T} \cos 2\pi\varphi \\ \dot{\varphi} &= \frac{\omega}{2\pi} - \frac{k}{T}\end{aligned}\quad (2.2.2)$$

где k — некоторое целое число. Универсальный гамильтониан (см. § 1.3) равен:

$$H_y = \frac{1}{4\pi} \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right)^2 - \frac{\epsilon}{2\pi T} \cdot \sin 2\pi\varphi \quad (2.2.3)$$

Наиболее важной характеристикой нелинейного резонанса является ширина сепаратрисы, определяющая область влияния резонанса. В данном случае она равна (§ 1.4):

$$(\Delta\omega)_H = 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{T}} \quad (2.2.4)$$

Приближенная замена разностных уравнений дифференциальными (2.2.1) эквивалентна, таким образом, учёту одного изолированного резонанса. Покажем это непосредственно. Для этого вернемся к исходным уравнениям (2.1.8), которые для модели (2.1.15) принимают вид:

$$\ddot{\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \cdot \cos 2\pi \theta \quad (2.2.5)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Разлагая теперь периодическую δ -функцию в ряд Фурье, выделяя обычным образом резонансную гармонику, для которой $T\omega \approx 2\pi k$ и вводя $\psi = \theta - kt/T$, получим в точности систему (2.2.2).

Рассмотрим более аккуратно условия, при которых разностные уравнения (2.1.11) можно заменить дифференциальными (2.2.1). Для этого, очевидно, должны выполняться неравенства:

$$I_{n+1} - I_n = \Delta I \ll I; \quad \Delta\psi \ll 1 \quad (2.2.6)$$

Для выполнения этих неравенств необходимо прежде всего, чтобы параметр $\epsilon \ll 1$. Это не является, однако, дополнительным ограничением, поскольку возмущение мы всегда считаем малым. Далее, величина $T\omega$ должна быть близка к целому кратному 2π :

$$|T\omega - 2\pi k| \ll 1 \quad (2.2.7)$$

Это условие в свою очередь распадается на два условия: во-первых, должна быть мала начальная расстройка:

$$|T\omega_0 - 2\pi k| \ll 1 \quad (2.2.7)$$

во-вторых, изменение ω в процессе движения должно быть также достаточно малым:

$$T \cdot (\Delta\omega)_H \ll 1 \quad (2.2.8)$$

Покажем на примере (2.1.15), что условие (2.2.7) несущественно. Так как оно не связано с нелинейностью, предположим, что система линейна, т.е. $\omega = \omega_0 = \text{const}$. В этом случае второе уравнение (2.1.15) даёт $\dot{\psi}_n = \psi_0 + n\theta_0/2\pi$; $\theta_0 = T\omega_0$, откуда:

$$\omega_n = \omega_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \cos(2\pi\psi_0 + k\theta_0) \quad (2.2.9)$$

Последняя сумма допускает простую оценку:

$$|\omega_n - \omega_0| = \varepsilon \left| \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\pi i \psi_0 + ik\theta_0} \right| \leq \varepsilon \left| \frac{1 - e^{-i(n-1)\theta_0}}{1 - e^{-i\theta_0}} \right| \quad (2.2.10)$$

Её величина всегда мала за исключением резонансных областей, где условие (2.2.7) выполняется.

В общем случае сила $f(\psi)$ в преобразовании типа (2.1.15) имеет все гармоники: $f(\psi) = \sum_q e^{2\pi i q \psi}$ и тогда сумма (2.2.10) расходится для любого рационального $\theta_0/2\pi$. Но это означает просто, что кроме основных резонансов $\frac{\omega T}{2\pi} = k$ (целое) в (2.2.2) нужно учитывать, вообще говоря, и резонансы высших гармоник $\frac{\omega T}{2\pi} = \frac{r}{q}$ (рациональное). Этот вопрос будет рассмотрен в § 2.7. Забегая вперед, отметим, что при достаточно быстром убывании амплитуды гармоник f_q с ростом q резонансами высших гармоник можно пренебречь.

Таким образом, остается одно существенное условие справедливости приближения изолированного резонанса, а именно условие (2.2.8), которое совпадает по порядку величины с неравенством (2.1.3), поскольку в данном случае расстояние между резонансами $\Delta = \frac{2\pi}{T}$.

До сих пор мы ограничивались лишь первым приближением с учётом некоторых грубых эффектов второго приближения. Естественно возникает вопрос, не могут ли некоторые тонкие эффекты высших приближений качественно изменить ре-

шение за достаточно большое время, иначе говоря, нет ли каких-то накапливающихся поправок высших приближений,

Теория КБМ позволяет построить решение в форме асимптотического ряда по степеням малого параметра ϵ , остаточный член которого имеет порядок

$R_n \sim \epsilon^{n+1} t^{1/3}$. Такие ряды, как известно, расходятся и поэтому мы не гарантированы от экспоненциально малой ошибки, скажем $\sim t \cdot e^{-A/\epsilon}$. Правда, если система обладает конечным затуханием, то асимптотическое решение остается справедливым для любого ζ при достаточно малом фиксированном $\epsilon^{1/3}$. Однако для консервативных систем вопрос остается открытым.^{x)}

Практическое построение асимптотических рядов является весьма трудоемкой задачей. По-видимому, наилучшая техника такого построения разработана Крускалом /18/.

Только сравнительно недавно в работах Колмогорова /19/, Арнольда /20/ и Мозера /28/ была разработана новая техника построения сходящихся рядов, которая даёт возможность в некоторых случаях решить вопрос об устойчивости движения консервативной системы на бесконечном интервале времени^{xx)}. Такой прогресс оказался возможным благодаря иной постановке задачи. Обычно возмущенная траектория вычисляется для заданных начальных условий. При этом в методе усреднения /3/ важную роль играет вычисление изменения частот движения в каждом следующем приближении; это даёт возможность избежать тривиальных секулярных членов /3/. Вместо этого в теории КАМ возмущенная траектория, точнее, инвариантная поверхность (тор), вычисляется для заданных частот, причём тор слегка смещается и деформируется в фазовом пространстве в каждом следующем приближении. Другими словами, в теории КАМ применяется иной принцип расслоения фазового простран-

x) В случае малого затухания также могут быть упущены некоторые эффекты, см. § 2.10.

xx) В дальнейшем мы будем называть эти работы теорией КАМ.

ства на траектории. Оказывается, что для сохранения таких торов при наличии возмущения необходимо, во-первых, чтобы система была нелинейной и, во-вторых, чтобы частоты движения на торе обладали некоторыми специальными арифметическими свойствами, грубо говоря, необходимо, чтобы их отношения не были слишком близки к рациональным числам. Именно с последним условием и связано изменение постановки задачи и успех в её решении. Однако, это условие имеет весьма специфическую природу, оно не является физическим. Хотя с вероятностью единицы (по мере) инвариантная поверхность невозмущенной системы имеет "хорошие" частоты, сколь угодно близко к ней имеются поверхности с "плохими" частотами, которые разрушаются под действием возмущения. В реальной системе нет возможности различить эти два класса инвариантных торов. Поэтому реальные заключения об устойчивости движения можно сделать лишь для двумерной автономной или одномерной неавтономной системы. В этом случае инвариантные торы вложены друг в друга и поэтому "плохие" торы оказываются зажатыми между "хорошими", что обеспечивает общую устойчивость движения, независимо от мифических арифметических свойств частот.^{x)} В многомерном случае вопрос остается пока открытым, имеется лишь пример неустойчивости сконструированный Арнольдом /21/. Более подробное обсуждение этого вопроса будет дано в § 2.12.

Таким образом, в предельном случае $S \rightarrow O$ (2.1.3) движение системы вида (1.1.1) действительно имеет характер ограниченных устойчивых фазовых колебаний. Однако в современном состоянии теория КАМ не даёт возможности эффективно определить критическое значение ε_{kp} . Существующие оценки /20/ явно занижены на много порядков. Численные эксперименты (глава 111) показывают, что ε_{kp} совпадает по порядку величины с границей стохастичности $S \sim 1$.

x) Мы будем называть этот случай одномерным,

§ 2.3 Элементарный пример стохастичности

Перейдем к решению системы разностных уравнений (2.1.11) в случае, когда нарушено условие (2.2.8), или эквивалентное ему неравенство (2.1.3).

Начнем с элементарного примера. Рассмотрим модель (2.1.14), переписав уравнения в виде:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon (\varphi_n - 1/2)$$

$$\varphi_{n+1} = \{ \varphi_n + T\omega_n + \varepsilon T(\varphi_n - 1/2) \} \quad (2.3.1)$$

Условие (2.2.8) можно записать в данном случае в форме (см.(2.2.4)):

$$\varepsilon T \gg 1 \quad (2.3.2)$$

При этом второе из уравнений принимает, в основном, характер растяжения фазы с коэффициентом εT . Поэтому его можно заменить в свою очередь модельным преобразованием вида:

$$\varphi_{n+1} = \{ k \varphi_n \} \quad (2.3.3)$$

Трудно представить себе более простую (и более грубую) модель динамической системы. Тем не менее она позволяет проследить явление стохастичности в его наиболее существенных чертах. Кроме того, это – единственная модель, свойства которой полностью известны и притом в форме строгих математических теорем со всеми всеми необходимыми условиями и оговорками^{x)}. Поэтому она может служить надежной отправной точкой, откуда мы постараемся продвинуться дальше с помощью менее строгих методов качественных оценок, физических (модельных) соображений и численного эксперимента.

При $k > 1$ движении системы (2.3.3) обладает всеми известными до настоящего времени атрибутами случайного процесса – эргодичностью, перемешиванием и положительной энтропией /22/. Как упоминалось выше, мы будем называть та-

x) Основные результаты содержатся в работах Рохлина /22/ и Постникова /33/.

кие системы стохастическими.^{x)}

Эргодичность системы (2.3.3) означает равномерное распределение последовательности φ_n на отрезке $(0,1)$. Перемешивание тесно связано с корреляциями в системе. Рассмотрим несколько различных траекторий с начальными условиями:

$\varphi_0^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, \dots, \varphi_0^{(\Gamma)}$. Объединим их в одну траекторию Γ -мерной точки $(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(\Gamma)})$. Мы будем говорить об отсутствии Γ -кратных корреляций в исходной системе (2.3.3), если объединенная Γ -мерная система обладает эргодичностью, т.е. если траектория точки $(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(\Gamma)})$ равномерно заполняет Γ -мерный гиперкуб при $n \rightarrow \infty$.

Так называемое слабое перемешивание означает отсутствие парных (двукратных) корреляций.^{xx)} Термин слабое указывает, что этого свойства недостаточно для получения стохастичности. Оказывается /26/, что при наличии только слабого перемешивания непрерывная функция распределения (ансамбля систем) в фазовом пространстве даже в стационарном состоянии испытывает сильные, хотя и редкие, изменения, что является неудовлетворительным с точки зрения статистической механики. Напомним для сравнения, что при наличии только эргодичности вообще не существует никакого стационарного состояния, а функция распределения изменяется квази-периодически /26/.

Редкие, но сильные колебания функции распределения при слабом перемешивании происходят, очевидно, за счёт высших корреляций ($\Gamma > 2$). Если имеет место релаксация функции распределения к стационарной функции (константе), т.е. если колебания функции распределения неограниченно уменьшаются при $t \rightarrow \infty$, то говорят о сильном перемешивании или просто о перемешивании. Естественно предполо-

x) Другой принятый в эргодической теории термин: K-системы, в честь открывшего их Колмогорова /25/.

xx) Другие определения перемешивания и связь между ними см. в книге Халмоса /26/.

жить, что (сильное) перемешивание эквивалентно отсутствию корреляций любой кратности.^{x)} Для полноты картины упомянем, забегая несколько вперед, что в том частном, но очень важном случае, когда процесс релаксации происходит по экспоненциальному закону, говорят о положительной энтропии системы.

В силу эргодичности корреляции нескольких траекторий эквивалентны корреляциям нескольких последовательно взятых точек на одной и той же траектории:

$(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(r)}) \rightarrow (\varphi_n, \varphi_{n+k_1}, \dots, \varphi_{n+k_{r-1}})$. Однако в этом случае все сдвиги по времени между точками ($|k_i - k_j|$) должны неограниченно возрастать с ростом n . Корреляции при постоянных сдвигах носят название автокорреляций. Последние всегда существуют для механической системы, поскольку её движение однозначно определяется обратимыми динамическими уравнениями. Таким образом, перемешивание означает асимптотическое (т.е. при $|k_i - k_j| \rightarrow \infty$) затухание автокорреляций.

Понятие перемешивания связано также с понятием вполне равномерно распределенной последовательности, введенным Коробовым /23/ (см. также /24/). Последний термин означает отсутствие автокорреляций любой кратности при произвольных ненулевых сдвигах ($k_i \neq k_j \neq 0$). Такая последовательность, очевидно, не может быть задана динамическими уравнениями. Однако динамическая последовательность с перемешиванием является асимптотически вполне равномерно распределенной.

Рассмотрим подробнее парную автокорреляцию. Коэффициент корреляции определим посредством:

$$\rho_n^{(2)}(q) = \langle e^{2\pi i(\varphi_n + q\varphi_0)} \rangle \quad (2.3.4)$$

где усреднение в силу эргодичности можно производить по φ_0 , а q — целое.

Преимуществом такого определения коэффициента корреляции для системы типа

x) Это предположение остается пока лишь более или менее правдоподобной гипотезой.

(2.3.3) по сравнению с обычным

$$\rho_n = \frac{\langle (\psi_n - \langle \psi_n \rangle)(\psi_0 - \langle \psi_0 \rangle) \rangle}{\langle (\psi_0 - \langle \psi_0 \rangle)^2 \rangle} \quad (2.3.5)$$

является автоматическое исключение целой части ψ , что существенно упрощает вычисления. В то же время $|\rho_n^{(2)}(q)|$ обладает свойствами обычного коэффициента корреляции.^{x)}

Из (2.3.3,4) имеем:

$$\rho_n^{(2)}(q) = \frac{e^{2\pi i(k^n + q)} - 1}{2\pi i(k^n + q)} \quad (2.3.6)$$

При целых k коэффициент корреляции обращается в нуль в силу особенности его определения^{xx)} для всех q кроме $q = -k^n$, в остальных случаях он имеет порядок:

$$|\rho_n^{(2)}(q)| \sim \frac{1}{|k^n + q|} \rightarrow e^{-n \ln k} \quad (2.3.7)$$

и асимптотически убывает экспоненциально.

Из последней оценки можно сделать также интересные заключения о пространственной структуре перемешивания, которая характеризуется параметром q . Фактически, выражение (2.3.4) представляет q -ю Фурье-компоненту корреляции, т.е. характеризует корреляции в области масштаба $1/q$. Из оценки (2.3.7) следует, что коэффициент корреляции для заданного q убывает не сразу, а лишь спустя некоторое время (число шагов), когда $k^n > q$. Иначе говоря, процесс перемешивания распространяется постепенно на все более и более мелкие области. Полагая $k^n \sim q$, можно получить оценку для размера области, до которой доходит перемешивание, в зависимости от времени:

x) Идея такого определения возникает из критерия Вейля /12/ для равномерного распределения последовательности (см. также /24/). Заметим, что (2.3.4) есть обычный коэффициент корреляции величин $e^{2\pi i \psi_n}$ и $e^{2\pi i q \psi_0}$.

xx) См. также § 2.11.

$$(1/q)_n \sim e^{-n \ln k} \quad (2.3.8)$$

Таким образом размер областей, еще не захваченных перемешиванием, также убывает со временем экспоненциально.

Рассмотрим, наконец, еще одно, вероятно самое важное, свойство стохастической системы — локальную неустойчивость движения. Это значит, что близкие вначале траектории быстро расходятся. Для модели (2.3.3) получаем непосредственно:

$$(\delta\varphi)_n = (\delta\varphi)_0 \cdot k^n = (\delta\varphi)_0 \cdot e^{n \ln k} \quad (2.3.9)$$

т.е. неустойчивость развивается лишь таки экспоненциально, причём с той же скоростью, с какой убывают корреляции (2.3.7) и уменьшается корреляционная длина (2.3.8).

Локальная неустойчивость движения является тем конкретным механизмом, который обеспечивает перемешивание и затухание корреляций в механических системах.

Связь между локальной неустойчивостью и стохастичностью была впервые отмечена, по-видимому, Хэнфом /28/ и Хедлундом /35/, детально проанализирована применительно к механическим системам. Крыловым /30/ и строго доказана в недавних работах Аносова /31/ и Синай /34, 17/. Локальная неустойчивость оказывается очень удобным практическим критерием стохастичности, поскольку можно ограничиться исследованием линеаризованных уравнений. Не исключено также, что она играет решающую роль в понимании природы статистических законов (см. § 2.13).

Соотношение (2.3.9) позволяет наглядно проследить весь процесс перемешивания для нашей модели. Вначале ($n \leq \ln(1/\delta\varphi_0)/\ln k$) участок $\delta\varphi_0$ просто растягивается пока не достигнет размера всей области ($\delta\varphi_n \sim 1$). После этого начинается перемешивание траекторий, вышедших из $(\delta\varphi)_0$, по всей области (0,1). В тот момент, когда $(\delta\varphi)_n \sim 1$ корреляционная длина $\sim (\delta\varphi)_0$, так как траектории этого участка ($\delta\varphi_0$) как раз начинают перемешиваться. Это условие приводит, конечно, к прежней оцен-

ке (2.3.8).

Характерной особенностью стохастической системы является именно экспоненциальное развитие локальной неустойчивости и вытекающее из неё развитие процесса перемешивания и затухания корреляций. Экспоненциальный закон обеспечивает быстрый переход в "случайному" движению с большой степенью точности. Поэтому понятно, что характеристика скорости этого экспоненциального процесса является важнейшей для стохастической системы. Она была введена в работе /25/ и называется обычно энтропией. В нашем случае:

$$h = \ln k \quad (2.3.10)$$

Эквивалентность такого определения энтропии первоначальному /25/, более сложному, была установлена Синаем /34,17/. Эта величина широко использовалась фактически уже Крыловым /30/, поэтому её можно назвать энтропией Крылова-Колмогорова.

Термин энтропия для величины (2.3.10) /25/ нельзя признать удачным, поскольку возникает путаница с обычной термодинамической энтропией. В действительности это совершенно различные величины, даже по размерности.

Термодинамическая энтропия характеризует статистическое состояние системы и зависит только от функции распределения /27/:

$$H = - \int f \ln f d\mu \quad (2.3.11)$$

где μ — инвариантная мера области (объём фазового пространства для гамильтоновых систем). В частности, термодинамическая энтропия постоянна в стационарном состоянии ($f = \text{const}$). Для классической системы она определяется с точностью до константы, значение которой связано с квантованием фазового пространства /27/, а именно, с тем фактом, что квантовая система не может занимать в фазовом пространстве область, меньше некоторой $\Delta \mu_{\text{кр}}$. Это условие приводит к обычному выражению /27/:

$$H = - \int f \ln (f \cdot \Delta \mu_{\text{кр}}) d\mu \quad (2.3.12)$$

Для чисто классической системы также можно ввести некоторый минимальный допустимый фазовый объём ($\Delta\mu_{\text{кл}}$) из следующих соображений. По своему физическому смыслу энтропия характеризует именно стохастическое движение системы. С другой стороны, хотя классическая система и может занимать в принципе сколь угодно малый объём, движение её не будет стохастическим в областях меньше корреляционного объёма $\Delta\mu_c(t)$, аналогичного корреляционной длине l_q (2.3.8) для модели (2.3.3). Естественно поэтому выбрать $\Delta\mu_c$ в качестве минимального допустимого объёма при вычислении энтропии: $\Delta\mu_{\text{кл}} \sim \Delta\mu_c$. В результате получаем соотношение:

$$H(t) = - \int f \cdot \ln(f \cdot \Delta\mu_c(t)) d\mu \quad (2.3.13)$$

определенное некоторую новую энтропию, которая зависит теперь уже не только от статистического состояния (f), но и от динамики перемешивания ($\Delta\mu_c(t)$). В таком виде её трудно использовать как в статистической, так и в динамической теории. Однако, из нее легко получить величину, характеризующую только динамику перемешивания. Для этого выберем какое-нибудь определенное, например, равновесное статистическое состояние, т.е. положим $f = \text{const}$. Определенная таким образом динамическая энтропия монотонно возрастает со временем (в состоянии статистического равновесия!) для любой системы с перемешиванием. В случае же систем с экспоненциально убывающей корреляционной длиной энтропия (2.3.13) оказывается асимптотически пропорциональной времени. Поэтому в качестве характеристики естественно ввести среднюю скорость её изменения:

$$h = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(- \frac{\int \ln(\Delta\mu_c(t)) d\mu}{t} \right) \quad (2.3.14)$$

Это и есть энтропия Крылова-Колмогорова, она имеет размерность частоты; поэтому её называют иногда энтропией на единицу времени (или на один шаг). Мы будем называть её в дальнейшем просто энтропией.

§ 2.4 Стохастичность основной модели

Вернемся к более реальной модели нелинейного резонанса, заданной разностными уравнениями (2.1.11). Для изучения стохастичности наиболее удобно исследовать локальную устойчивость решения.

Для этого напишем линеаризованные уравнения в вариациях:^{x)}

$$\begin{aligned}\delta I_{n+1} &= (1 - \varepsilon h_{\theta I}) \cdot \delta I_n - \varepsilon h_{\theta\theta} \cdot \delta \theta_n \\ \delta \theta_{n+1} &= [T\omega' (1 - \varepsilon h_{\theta I}) + \varepsilon h_{II}] \cdot \delta I_n + (1 - \varepsilon h_{\theta\theta} \cdot T\omega' + \varepsilon h_{I\theta}) \delta \theta_n\end{aligned}\quad (2.4.1)$$

Приравнивая правые части полученных уравнений, соответственно, $\lambda \cdot \delta I_n$ и $\lambda \cdot \delta \theta_n$, найдем характеристическое уравнение для λ :

$$\lambda^2 - (2 + K) \lambda + 1 = 0 \quad (2.4.2)$$

где коэффициент

$$K \approx -\varepsilon T\omega' h_{\theta\theta} \quad (2.4.3)$$

Мы положили свободный член характеристического уравнения равным единице, так как он равен якобиану преобразования (2.1.11), полученного в свою очередь из точных гамильтоновых уравнений (2.1.8). Фактически для этого нужно учесть следующие члены разложения по ε (§ 2.1). При этом в выражении для K также появятся дополнительные члены порядка $\varepsilon^2, \varepsilon^2 T\omega', \varepsilon^3 T\omega', \dots$. Существенно, однако, что множитель $T\omega'$, который может принимать большие значения, всегда будет входить только в первой степени, поэтому указанные дополнительные члены малы по сравнению с основным (2.4.3).

Единственный коэффициент характеристического уравнения K тесно связан с растяжением фазы:

$$\frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_n} \approx 1 + K + \varepsilon h_{I\theta} \quad (2.4.4)$$

^{x)} Другое название для (2.4.1), распространенное в эргодической теории — касательное преобразование.

Условие справедливости приближения изолированного резонанса (2.2.8) или (2.1.3) для системы (2.1.11) принимает вид:

$$K \ll 1 \quad (2.4.5)$$

В этом параграфе мы будем интересоваться противоположным случаем $K \gtrsim 1$.

Поэтому в (2.4.4) можно пренебречь последним членом.

Корни характеристического уравнения даются выражением:

$$\lambda = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{K(1 + \frac{K}{4})} \quad (2.4.6)$$

В зависимости от значения λ решение может быть двух качественно различных типов. Первый соответствует комплексно-сопряженным корням, что имеет место при условии

$$-4 < K < 0 \quad (2.4.7)$$

Легко проверить, что в этом случае $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, следовательно, линеаризованное преобразование (2.4.1) представляет собой поворот на угол φ_0 :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \pm \frac{\sqrt{-K(1 + K/4)}}{1 + K/2} \quad (2.4.8)$$

что соответствует колебательному характеру решения (2.4.1) с частотой φ_0 / T . Это — случай локальной устойчивости движения.

Величина K является периодической функцией θ , введем амплитуду:

$$K_0 = \max |K| \quad (2.4.9)$$

При $K_0 \ll 1$ решение (2.4.8) даёт хорошо известные фазовые колебания (§ 2.2) вблизи положения устойчивого равновесия ($h_0 = 0 : h_{00}; \omega' > 0$). Существенно, однако, что такие колебательные решения возможны, вообще говоря, при любых K_0 , в том числе и при $K_0 \gg 1$, вблизи точек слабого растяжения фазы ($h_{00} \approx 0 : K \approx 0 ; \frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_n} \approx 1$). Остановимся на этом немного подробнее.

Прежде всего оценим размер области локальной устойчивости в фазовом пространстве системы ($\Delta\Gamma, \Delta\theta$). Это можно сделать из условия, чтобы параметр

K не выходил за пределы интервала (2.4.7). Размер устойчивости области по фазе получаем непосредственно (2.4.7):

$$\Delta\theta \lesssim \zeta \left| \frac{\partial K}{\partial \theta} \right|^{-1} \sim K_0^{-1} \quad (2.4.10)$$

Последняя оценка справедлива в предположении достаточной гладкости функции $K(\theta)$. Допустимое значение ΔI получим из второго уравнения (2.1.11), потребовав, чтобы изменение фазы $\theta_{n+1} - \theta_n$ не превосходило значения (2.4.10):

$$\Delta I \lesssim \frac{\epsilon}{K_0^2} \quad (2.4.11)$$

Таким образом, фазовый объём областей локальной устойчивости оказывается $\lesssim \epsilon K_0^{-3}$.

Далее заметим, что при $K_0 \gg 1$ условия устойчивости ($h_{\theta} \approx 0$) и стационарности I ($h_{\theta} \approx 0$, см. (2.1.11)), как правило, несовместимы.

Поэтому даже в области устойчивости I изменяется. Это значит, что система выходит из устойчивой области за один шаг из-за изменения члена T_{ω} в (2.1.11) и, таким образом, фактический размер областей устойчивости оказывается еще значительно меньше (см. § 2.8; 3.5).

Возможен однако особый случай, когда изменение T_{ω} равно целому кратному 2π :

$$\epsilon T_{\omega}' h_{\theta} = \pm 2\pi k ; \quad k \geq 1 \quad (2.4.12)$$

При этом может иметь место устойчивый процесс увеличения или уменьшения энергии осциллятора. Такой процесс используется для ускорения заряженных частиц в микротроне, исторически это был первый вариант использования явления автофазировки в ускорителях /7/.

Так как левая часть последнего равенства $\sim K_0$, а размер устойчивой области резко сокращается с ростом K_0 , то практически микротронные режимы существенны в области $K_0 \sim 1$. Возможны также и более сложные периодические режимы, при которых величины I , θ пробегают несколько различных зна-

чений прежде чем вернуться к исходным. Такие режимы подробно изучены в диссертации Мороза, где они называются обобщенными микротронными режимами. Обсуждение роли всех таких областей устойчивости и соответствующие оценки будут даны в § 2.8.

Перейдем теперь к решению (2.4.1) в случае действительных корней характеристического уравнения, что имеет место для значений K вне интервала (2.4.7). На границах интервала $\lambda = \pm 1$. Исключая этот тривиальный случай, один из действительных корней всегда по модулю больше единицы, а другой - меньше, ввиду условия $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда корни $\lambda_{1,2}$ и собственные вектора преобразования \vec{e}_z, \vec{e}_η постоянны (не зависят от θ). Тогда решение (2.4.1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \xi_n &= \xi_0 \cdot \lambda^{-n}; & \eta_n &= \eta_0 \cdot \lambda^n \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

где ξ, η - координаты вдоль собственных векторов; $\lambda = \lambda_1 = 1/\lambda_2 > 1$. Именно таким свойством обладает модель (2.1.14), которая является в этом смысле исключением (см. ниже).

Описание движения в переменных ξ, η , т.е. описание относительного смещения точек фазовой плоскости (не обязательно близких), называется трансверсальным потоком /34,17/. В простейшем случае, о котором идет речь, структура трансверсального потока очень проста: все траектории асимптотически приближаются (стягиваются) к оси η при $n \rightarrow \infty$ и к оси ξ при $n \rightarrow -\infty$. Поток такой структуры будем называть асимптотическим. Заметим, что асимптотами являются две особые траектории трансверсального потока, вдоль которых происходит либо монотонное растяжение ($\xi = 0$), либо монотонное сжатие ($\eta = 0$). Согласно результатам уже упоминавшихся работ Аносова /31/ и Синая /34,17/ сто-хастичность гамильтоновой системы эквивалента существованию асимптотического трансверсального потока в окрестности любой точки фазового пространства, или ина-

Че говоря, расслоению всего фазового пространства на асимптотические траектории.

Регулярный характер трансверсального потока обязательно приводит к остаточным автокорреляциям, исчезающим лишь при $\lambda \rightarrow \infty$. Любая начальная область фазовой плоскости растягивается экспоненциально в направлении γ и сжимается по ζ . Процесс перемешивания начинается после того, как длина растянутой области по γ достигает максимального размера, допустимого для данной системы.^{x)} Начальная область преобразуется при этом в набор все более тонких (но ζ) слоев, пересекающих фазовую плоскость вдоль оси γ и равномерно заполняющих её наподобие "слоёного пирога". Начальная стадия процесса перемешивания для модели (2.1.16) показана схематически на рис.2.4.1.

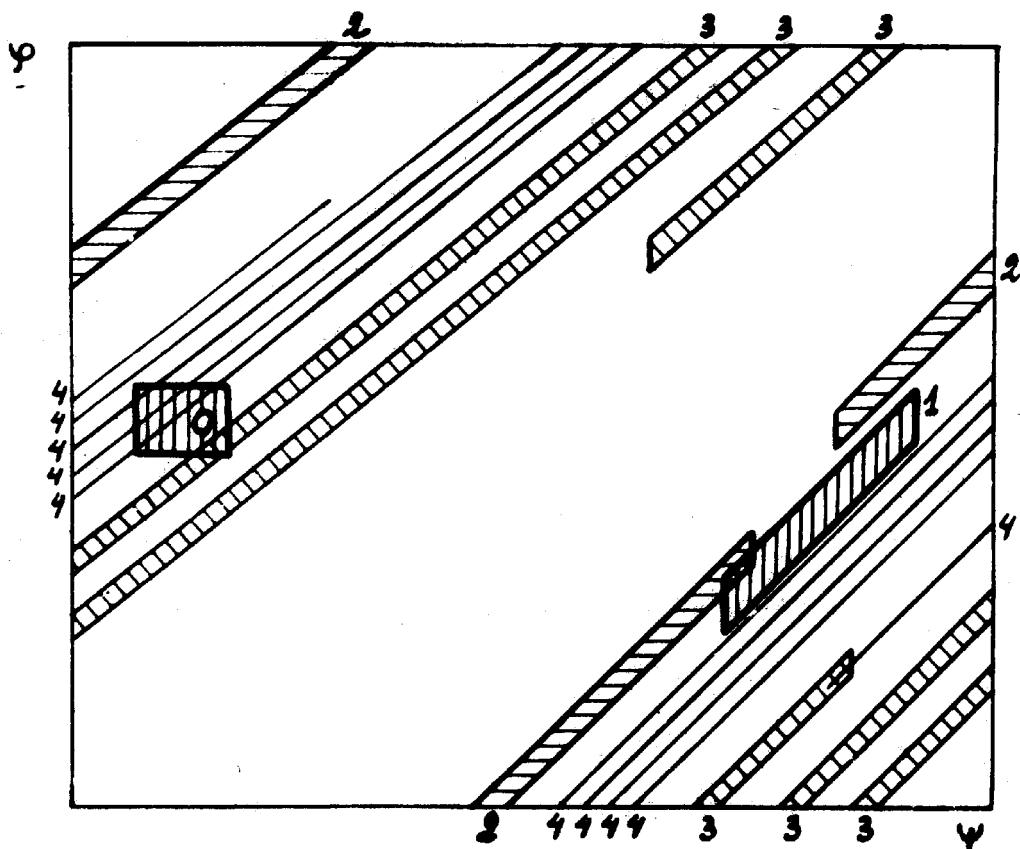


Рис.2.4.1. Схематическое изображение процесса перемешивания для модели (2.4.16) с $f(\varphi) = \varphi - 1/2$. Начальная область — квадрат; цифры указывают номер шага. Направление растяжения совпадает приблизительно с диагональю фазового квадрата, а направление сжатия — с осью φ .

x) Это ограничение всегда выполняется для систем типа осциллятора, которые рассматриваются в настоящей работе, по крайней мере, для части переменных(фазы). Заметим,что растяжение в таких системах происходит в основном именно по фазе (см.ниже).

Общий характер процесса перемешивания здесь такой же, как и для модели § 2.3. Однако есть и существенные отличия, связанные с тем, что теперь мы рассматриваем гамильтонову систему, движение которой обратимо во времени в противоположность модели предыдущего параграфа.

Первое отличие связано с тем, что время перемешивания (n , τ) зависит теперь только от ширины начальной области по γ ($\Delta\gamma_0$) и неограниченно возрастает при $\Delta\gamma_0 \rightarrow 0$, в то время как размер области по ζ может быть любым: $n, \tau \sim -\ln(\Delta\gamma_0)/\ln\lambda \rightarrow \infty$. Заметим, однако, что площадь начальной области также стремится при этом к нулю вместе с $\Delta\gamma_0$ для любого конечного $\Delta\zeta_0$.

Другое, более существенное, отличие состоит в том, что всегда можно выбрать такую начальную область, вообще говоря, весьма сложной структуры, типа большого количества тонких слоев, равномерно покрывающих фазовую плоскость, которая в процессе движения будет стягиваться в область простой формы. Иными словами будет происходить процесс противоположный перемешиванию. Для этого достаточно просто изменить знак времени и проследить обратный процесс. Возможность такого процесса кажется противоречащей статистической необратимости, что приводит к так называемому парадоксу Лошмидта /32/. Обсуждение (в который раз!) этого парадокса мы отложим до § 2.13. Заметим только, что для любой начальной области, состоящей из слоёв конечной толщины или что то же самое, для любой несингулярной начальной функции распределения, процесс стягивания продолжается лишь конечное время, неминуемо переходя затем в процесс растяжения (вдоль другого собственного вектора (2.4.13)) и перемешивания. В этом легко убедиться, если проследить опять таки за обратным (по времени) процессом.

Таким образом в стохастической системе асимптотически ($t \rightarrow t \infty$) всегда имеет место процесс перемешивания, причём для любого направления времени (!). Однако с другой стороны, всегда можно подобрать такое начальное состоя-

ние, чтобы имел место обратный процесс в течение любого конечного интервала времени.

Вернемся к общему случаю, когда величины λ , также как и собственные вектора изменяются от шага к шагу. Направление собственных векторов может быть получено из (2.4.1) в виде отношения:

$$\frac{\delta I}{\delta \theta} = \frac{\varepsilon h_{\theta\theta}}{1 - \lambda - \varepsilon h_{\theta\zeta}} \quad (2.4.14)$$

При малых K_0 ($\lambda \approx 1 + \sqrt{K}$) собственные вектора всегда можно ортогонализовать, а неустойчивость имеет место только для $K > 0$, т.е. грубо говоря, для половины области по фазе. Легко видеть, что эта область соответствует неустойчивому положению равновесия.

Для больших K_0 ($\lambda \approx K$) вектора $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta$, вообще говоря, неортогональны (при $K < 0$). Направление вектора \vec{e}_ζ (растяжение) почти постоянно ($\delta I / \delta \theta \approx 1 / T \omega'$) и составляет малый угол с осью θ . Последнее показывает, что растяжение, а значит и развитие неустойчивости (и перемещение) идет главным образом по фазе.

Направление вектора \vec{e}_ζ (сжатие), вообще говоря, существенно изменяется вследствие зависимости $h_{\theta\theta}$ от θ . Последнее может приводить в принципе к тому, что решение будет попадать попаременно то в область растяжения, то в область сжатия, что приведет к ограниченным колебаниям вместе неустойчивости. Такая ситуация может возникнуть при почти параллельных $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta$, что соответствует значением фазы θ вблизи устойчивой области ($h_{\theta\theta} \approx 0$). Размер этой области убывает по крайней мере $1/K_0$. Поэтому при $K_0 \gg 1$ попадание в эту область будет происходить достаточно редко, так что даже в случае попадания в область сжатия система успеет снова перейти в область растяжения. При $K_0 \gg 1$ такой переход происходит относительно быстро (2.4.13) за исключением экспоненциально малой области вблизи вектора \vec{e}_ξ . Можно думать, что частое попадание

в последнюю область возможно лишь для очень специальной динамической системы или очень специальных начальных условий^{x)}.

Другой существенный вопрос касается возможности захвата в устойчивые или прилегающие к ним области, где вектора \vec{e}_ξ , \vec{e}_η близки к параллельным. Для автономной системы это невозможно в силу возвратной теоремы Пуанкаре, справедливой для любой гамильтоновой системы с ограниченным движением. Для неавтономной системы, которую мы сейчас непосредственно исследуем, в принципе возможен захват в микротронный режим с неограниченным изменением энергии. Однако размер области начальных условий, соответствующих такому захвату, всегда мал, так как по теореме Лиувилля он не может превосходить размера устойчивой области ($\sim \varepsilon K_0^{-3}$, (2.4.10,11)).

Таким образом, мы приходим к выводу, что при $K_0 \gg 1$ наша модельная система локально неустойчива почти всюду. Термин почти означает здесь исключение областей малой, но конечной меры в отличие от эргодической теории, где он относится к множествам нулевой меры. Это "незначительное" различие не даёт возможности, к сожалению, строго применить последние результаты эргодической теории /17,31/ к рассматриваемой задаче. Исключением являются системы типа (2.1.14), не имеющие в силу специальной зависимости $K(\theta)$ устойчивых областей.

Для модели (2.1.14) с её постоянными λ , \vec{e}_ξ , \vec{e}_η основные теоремы /17,31/ непосредственно приводят к выводу о стохастичности движения, если только параметр K лежит в неустойчивой области. Фактически, доказательство стохастичности может быть распространено и на более общий случай переменных λ , \vec{e}_ξ , \vec{e}_η при том, однако, непременном условии, чтобы $K(\theta)$ пеликом (для всех θ) лежало вне интервала устойчивости (2.4.7). Это показали в последнее время Оседец и Синай /150/ (см. § 2.8). Доказательство основано на существовании

x) Более подробное исследование этого вопроса проведено в § 2.8.

асимптотического трансверсального потока (см. выше). Однако направление асимптот теперь уже не совпадает, вообще говоря, с локальным направлением собственных векторов \vec{e}_ξ , \vec{e}_η (сравни (2.4.13)).

Поскольку $K(\theta)$ является периодической функцией, необходимое для доказательства стохастичности отсутствие устойчивых областей возможно лишь в случае разрыва $K(\theta)$ или её производной. Если это условие не выполняется, то согласно работе Синая /17/ для доказательства стохастичности требуется независимое доказательство эргодичности или хотя бы существования эргодической компоненты. Таким образом, в общем случае вопрос о стохастичности основной модели остается пока открытым в смысле строгого математического доказательства.

Другая трудность в использовании результатов эргодической теории состоит в иной постановке задачи. Обычно рассматривается перемешивание по всей доступной для динамической системы области (например, по всей энергетической поверхности для автономной системы). Результатом такого перемешивания с точки зрения статистического описания является стационарное (статистически равновесное) состояние. В настоящей работе мы, однако, хотим получить большее, а именно, мы хотим получить кинетическое уравнение, с помощью которого можно было бы проследить эволюцию статистического состояния системы (§ 2.10). Для этого нужно разделить движение на "быстрое", которое и представляет из себя процесс перемешивания, и "медленное", описываемое кинетическим уравнением. Для нашей модельной системы быстрым является движение по фазе θ . Следовательно, нам нужно перемешивание только по фазе.

Покажем как можно обойти последнюю трудность с помощью новой модели, которую мы будем называть элементарной. Будем исходить из модели (2.1.15), в которой заменим $\cos 2\pi\varphi$ произвольной функцией $f(\varphi)$. Далее, умножим первое уравнение (2.1.15) на $T/2\pi$ и введем новую переменную:

$$\varphi_n = \left\{ \frac{T\omega_n}{2\pi} \right\} \quad (2.4.15)$$

Смысл этой переменной состоит в том, что изменение ω_n интересует нас лишь в той мере, в которой это приводит к изменению фазы φ_n . В результате получим новое преобразование, описывающее элементарную модель:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \{\varphi_n + k \cdot f(\varphi_n)\} \\ \varphi_{n+1} &= \{\varphi_n + \varphi_{n+1}\}\end{aligned}\quad (2.4.16)$$

с единственным параметром

$$k = \frac{\varepsilon T}{2\pi} \quad (2.4.17)$$

Существенное отличие новой модели от предыдущей состоит в том, что обе переменные (φ , ψ) теперь периодические, фазовая плоскость ограничена (система на квадрате или на торе) и при $k \geq 1$ вся область по φ , так же, как и по ψ проходит за один шаг, т.е. можно рассматривать классическую задачу о перемешивании во всей доступной области фазового пространства системы.

Модель (2.4.16) является простейшей нетривиальной моделью стохастичности в гамильтоновой системе. С её помощью возможен уже более или менее прямой переход к реальным физическим задачам. Поэтому в следующих параграфах мы подробно изучим поведение элементарной модели аналитически (§§ 2.7,8) и с помощью численных экспериментов (глава 111).

Переходя к вопросу об энтропии гамильтоновой системы, рассмотрим вначале опять таки простейший случай (2.1.14). Поскольку энтропия является асимптотической (по времени) величиной (2.3.14), как впрочем и все другие величины эргодической теории, то существенно лишь асимптотическое поведение трансверсального потока, т.е. по существу, только его асимптота с растяжением, к которой стремятся все остальные траектории при $t \rightarrow \infty$. Для модели (2.1.14) согласно (2.4.13) асимптота характеризуется постоянным растяжением с коэффициентом λ^+ , где индекс + указывает, что выбрано собственное значение > 1 , соответствующее растяжению. Движение по асимптоте в этом случае совпадает, таким образом, с дви-

жением модели § 2.3, а значит и энтропия будет такой же (2.3.10):

$$h = \ln \lambda^+ \quad (2.4.18)$$

В общем случае переменных λ , \vec{e}_ξ , \vec{e}_η энтропия зависит от коэффициента растяжения на асимптоте трансверсального потока λ_a^+ . Этот коэффициент будет, вообще говоря, переменным, так как расположение асимптоты относительно векторов \vec{e}_ξ , \vec{e}_η изменяется. Согласно работе Синая [17] энтропия равна в этом случае

$$h = \langle \ln \lambda_a^+ \rangle \quad (2.4.19)$$

где усреднение производится либо вдоль траектории системы, либо в силу эргодичности по фазовому пространству или, точнее говоря, по эргодической компоненте при наличии областей устойчивости.

Для нашей основной модели (2.1.11) выражение для энтропии может быть упрощено при $K_0 \gg 1$. Согласно (2.4.6) в этом случае:

$$\lambda^+ \approx K = K_0 \cdot F(\theta) \quad (2.4.20)$$

Далее заметим, что λ_a^+ отличается от λ^+ лишь множителем, зависящим от углов между направлением асимптоты и векторами \vec{e}_ξ , \vec{e}_η . Из (2.4.19) получаем в этом случае:

$$h = \ln K_0 + C \rightarrow \ln K_0 \quad (2.4.21)$$

где C - некоторая константа ~ 1 , зависящая от конкретного вида системы. Последнее выражение становится справедливым при $\ln K_0 \gg 1$. Более точные оценки энтропии для некоторых случаев будут приведены в § 3.4.

§ 2.5 Граница стохастичности

В предыдущих параграфах мы рассмотрели подробно два крайних случая очень малых (по сравнению с единицей) и очень больших значений параметра стохастичности K_0 . С некоторыми оговорками в первом случае движение является устойчивым, а во втором - стохастическим. Естественно возникает вопрос о положении

границы стохастичности, разделяющей оба случая. Иначе говоря, речь идет об условиях, при которых в системе возникает стохастичность или наоборот движение становится устойчивым.

Обратим внимание, что стохастичность является наиболее опасной неустойчивостью нелинейного осциллятора. Действительно, стохастичность означает некоторый диффузионный процесс, при котором энергия колебаний изменяется, грубо говоря, $\propto \sqrt{t}$ (см. § 2.10). При этом коэффициент пропорциональности является в некотором смысле максимальным для заданного возмущения (§ 2.12). Единственный более быстрый процесс – это линейный резонанс, при котором энергия изменяется пропорционально t . Однако для нелинейного осциллятора такой резонанс невозможен из-за изменения частоты колебаний с энергией. Исключение составляют микротронные режимы, рассмотренные в предыдущем параграфе, при которых энергия также может изменяться $\propto t$. Но такие режимы требуют весьма специальных начальных условий, во всяком случае при $K_0 \gg 1$. Стохастичность же имеет место в широкой области параметров ($K_0 > 1$). Вот почему граница стохастичности есть одновременно критерий возникновения наиболее опасной неустойчивости нелинейных колебаний.

Постановка вопроса о границе стохастичности является необычной в эргодической теории. Хотя в теории и существует термин "эргодическая компонента", подразумевающий интересующую нас ситуацию, вопрос обычно ставится так: является ли данная система стохастической? В нашем случае, т.е. для систем типа нелинейного осциллятора (1.1.1) вопрос должен быть поставлен иначе: какова область стохастичности данной системы? При этом прежде всего имеется в виду область значений параметров системы таких, как параметры возмущения ϵ , нелинейности α (§ 1.3) и т.д. Граница стохастичности определяет критические значения таких параметров, соответствующие переходу из области устойчивости в область стохастичности. Если эти параметры суть константы, т.е. не зависят от динамических переменных, то возмож-

на классическая постановка задачи: является ли система стохастической (во всем до-
ступном ей фазовом пространстве) при заданных значениях параметров? Заметим, что
для автономной системы достаточно потребовать постоянство параметров на энерге-
тической поверхности, причем энергию системы также можно рассматривать как один
из параметров.

В общем случае параметры, определяющие границу стохастичности или, как мы
будем говорить для краткости, параметры стохастичности зависят также и от дина-
мических переменных. Например, параметр K зависит от фазы (2.4.3). Это приво-
дит к тому, что граница стохастичности разделяет фазовое пространство системы.
Для автономных систем имеется в виду разделение энергетической поверхности, од-
нако для краткости мы будем говорить просто о системах с разделенным фазовым
пространством.

В приведенном выше примере (2.4.3) устойчивые области малы при $K_0 > 1$,
и в каком-то смысле ими можно просто пренебречь. Однако возможны случаи (см.,
например, § 4.1), когда граница стохастичности разделяет фазовое пространство на
равные по порядку величины области, так что ни одной из них нельзя пренебречь.
Эта ситуация похожа на действия некоторого слабого дополнительного закона сохра-
нения; в отличие от обычного он выделяет не подпространство меньшей размерности,
а часть фазового пространства той же размерности. С физической точки зрения ка-
жется совершенно неоправданным отказываться в таких случаях от статистического
описания. Следовательно, возникает задача распространения эргодической теории на
системы с разделенным фазовым пространством. Трудности этой задачи видны из
следующей весьма правдоподобной гипотезы Синая^{x)}: для систем рассматриваемого
типа устойчивые области фазового пространства образуют всюду плотное множество,
которое как бы пронизывает (насыщает) эргодическую компоненту. Поэтому в стро-
гой постановке задачи форма и даже топология границы стохастичности может быть

x) Более подробное обсуждение этой гипотезы см. в § 2.8.

очень сложной. С физической точки зрения, однако, такие вкрапления областей устойчивости в эргодическую компоненту не имеют существенного значения при условии, что их размеры и общий объём достаточно малы. Поэтому можно определить границу стохастичности (по необходимости приближенно) как некоторую промежуточную зону фазового пространства конечной толщины, приближенно отделяющую область квазистойчивости, т.е. устойчивости для большинства начальных условий, от области квазистохастичности. Вероятно можно ввести такую границу и строго математически, т.е. со всеми необходимыми условиями и оговорками. Примером "квазистойчивости" является рассмотренная в § 2.2 так называемая "колмогоровская устойчивость", область которой пронизана всюду плотной системой неустойчивых участков малой, но конечной меры (см./35/, более подробное обсуждение структуры этой области будет дано в §§ 2.6,7). Термин "квази" опять таки означает здесь исключение областей малой, но конечной меры в отличие от классической эргодической теории.

Возвращаясь к основной модели (2.1.11), можно утверждать, что граница стохастичности лежит где-то в районе

$$K_0 \sim 1 \quad (2.5.1)$$

Эта граница, полученная для преобразования (2.1.11), соответствует по порядку величины критерию стохастичности (2.1.4) для дифференциальных уравнений движения, т.е. для непрерывного времени. Действительно, согласно (2.4.8) при $K_0 \leq 1$ величина

$$\Omega_\phi^2 \sim K_0 / T^2 ; \text{ с другой стороны ясно, что } \Delta \sim 1/T \quad \text{откуда:}$$

$$K_0 \sim \Delta^2 \quad (2.5.2)$$

Таким образом, критерий стохастичности (2.1.4) подтверждён для частного случая модели (2.1.11). Распространение его на общий случай исходной модели (1.1.1) будет произведено в следующем параграфе.

Определенная выше физическая граница стохастичности представляет из себя фактически целую промежуточную зону весьма сложной структуры, как это было подробно описано выше. В зависимости от начальных условий в ней возможны самые

разные типы движения: устойчивые ограниченные колебания (§ 2.2), изолированные эргодические компоненты, не связанные, вообще говоря, с основной областью квазистохастичности (§ 2.6) и даже систематическое изменение энергии колебаний, аналогичное линейному резонансу (микротронные режимы, § 2.4). Промежуточная область проникает глубоко в обе стороны, как в область стохастичности в виде узких участков устойчивости (§ 2.8), так и в область колмогоровской устойчивости в форме тонких стохастических слоёв (§ 2.6). Тем не менее можно утверждать, что оценка (2.5.1) определяет некоторую реальную физическую границу, границу сильной стохастической неустойчивости нелинейных колебаний.

Этот вывод является основным в данной работе. Он полностью подтверждается численными экспериментами, т.е. численным интегрированием уравнений движения самых различных систем (гл. III, IV).

§ 2.6 Стохастический слой в окрестности сепаратрисы

В этом параграфе мы рассмотрим подробнее структуру области колмогоровской устойчивости (§ 2.2) и одновременно обобщим критерий стохастичности для основной модели (2.5.1) на общий случай перекрытия резонансов (2.1.4). Как отмечалось выше, теория КАМ (§ 2.2) устанавливает устойчивость лишь для "хороших" инвариантных торов. "Хороший" тор значит нерезонансный, расположенный "вдали" от всех "плохих", т.е. резонансных, ^{x)} торов. Термин "вдали" может вызвать недоумение, поскольку система резонансных торов образует в фазовом пространстве, вообще говоря, всюду плотное множество. Ответ состоит в том, что "вдали" означает - по отношению к ширине резонанса. Основной результат теории КАМ как раз и состоит, грубо говоря, в доказательстве того, что полная ширина всех резонансов становится сколь угодно малой при достаточно малом возмущении.

x) С резонансным соотношением частот колебаний: $\sum_k n_k \omega_k = 0$,
 n_k - целые (см. § 2.12).

Хотя теория КАМ и не рассматривает поведение системы в окрестности резонансных торов (она просто исключает эти окрестности), она позволяет прийти к выводу о неустойчивости движения в этих окрестностях. Такой вывод может быть сделан из сравнения её результатов с теоремой Пуанкаре /36/^{x)}. Последняя утверждает, что при весьма общих условиях ^{xx)} гамильтонова система не имеет никаких других аналитических интегралов движения, кроме энергии (точнее, кроме всех аддитивных интегралов: энергии, импульса и момента). Из сравнения вытекает, что могут существовать не-аналитические (по динамическим переменным) интегралы движения, разрушающиеся в окрестности резонансных торов.

Такой вывод может показаться странным, так как мы видели (§ 1.4; 2.2), что именно вблизи резонанса существуют устойчивые фазовые колебания. Действительно, область вблизи резонанса можно исследовать с помощью той же теории КАМ ^{xxx)}, применяя её к уравнениям фазовых колебаний. В результате оказывается, что большая часть этой области является устойчивой. Где же тогда расположены неустойчивые области? Еще Пуанкаре отметил ^{xxxx)}, что подозрительным местом являются окрестности сепаратрис (§ 1.4). По-видимому, первым детальным исследованием окрестности сепаратрис были работы В.К.Мельникова /37/, который, однако, не смог дать оценку ширины неустойчивой области. Такая оценка для специальной динамической системы была впервые получена Заславским, Сагдеевым и Филоненко /38/.

Ниже даётся оценка ширины стохастического слоя в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса при весьма общих условиях. Фактически, единственное существенное условие состоит в том, чтобы сепаратриса проходила через гиперболическую точку, т.е. точку неустойчивого равновесия, в которой как скорость, так и ускорение обращаются в нуль. Это условие может нарушаться лишь для сингулярного потенциала.

x) См. также /48/ (гл.XIУ, § 2).

xx) Исключением являются, например, системы с разделяющимися переменными.

xxx) С некоторой модификацией /20/.

xxxx) /36/, см. также примечание на стр.179 обзора Аркольда /20/.

ла фазовых колебаний $\mathcal{U}(4)$. При выполнении вышесказанного условия частота фазовых колебаний $\Omega \rightarrow 0$ по мере приближения к сепаратрисе, а колебания становятся ангармоничными и нелинейными. В частности, скорость движения в течение большей части периода близка к нулю (система почти стоит около точки неустойчивого равновесия) и существенно возрастает лишь на интервале времени $\sim \Omega_\phi^{-1}$, где Ω_ϕ — частота малых фазовых колебаний. Это значит, что эффективное воздействие возмущения на такие колебания также будет ограничено интервалом $\sim \Omega_\phi^{-1}$ и, следовательно, при $\Omega \rightarrow 0$ возмущение может быть представлено как δ -функция. Таким образом колебания вблизи сепаратрисы описываются нашей основной моделью (2.1.11) с тем лишь отличием, что теперь в качестве одного шага преобразования нужно взять переменный полупериод колебаний π/Ω . Значит, мы можем непосредственно использовать критерий стохастичности (2.5.1) или, что более удобно, эквивалентный ему (2.1.4).

Предположим, что возмущение характеризуется силой μf_ω с частотой ω . Система резонансов будет определяться теперь спектром самих колебаний. Последний содержит частоты $k\Omega$ и имеет вид спектра δ -функции до частот $\sim \Omega_\phi$, а затем убывает экспоненциально^{x)}. Это следует непосредственно из соотношения неопределенности для частоты и времени: $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$. Амплитуду гармоник скорости проще всего оценить из условия нормировки (равенство Парсевеля):

$$v_k \sim v_\phi \cdot \frac{\Omega}{\Omega_\phi} \cdot e^{-C_0 \frac{k\Omega}{\Omega_\phi}} \quad (2.6.1)$$

где v_ϕ — максимальное значение скорости, которое приблизительно постоянно в окрестности сепаратрисы а параметр $C_0 \sim 1$ зависит от формы сепаратрисы; например, для гармонической сепаратрисы (1.3.16) имеем:

$$v_k = \left(4v_\phi \cdot \frac{\Omega}{\Omega_\phi} \right) e^{-\frac{\pi k \Omega}{2\Omega_\phi}} / 21.$$

Рассмотрим вначале случай, когда частота возмущения лежит в основной части спектра (2.6.1), т.е. $\omega \sim \Omega_\phi$. Условие резонанса имеет вид:

x) для аналитической $\mathcal{U}(4)$, см., например, /20/.

$$\Omega_k = \frac{\omega}{k} \quad (2.6.2)$$

Существенное отличие этой системы резонансов от рассматриваемой ранее, например, для основной модели (2.1.11), состоит в том, что теперь расстояние между частотами спектра (Ω) не равно расстоянию между резонансными значениями частоты ($\Delta = \Omega_k - \Omega_{k-1} \approx d\Omega / dk$), которое входит в критерий стохастичности и которое мы по-прежнему будем называть расстоянием между резонансами (см. (2.1.2)). Последнее оказывается существенно меньше:

$$\Delta \approx \frac{\omega}{k^2} \approx \frac{\Omega^2}{\omega} \quad (2.6.3)$$

Нам остается рассмотреть фазовые колебания второго порядка, которые возникают за счёт действия возмущения μf_ω на основные фазовые колебания (первого порядка), и оценить размер их сепаратрисы. Проще всего воспользоваться соотношением (1.4.3), где $\varepsilon \mathcal{U}_0$ теперь $\sim \mu f_\omega k v_k / \Omega$, что вытекает из определения \mathcal{U} (1.3.4) и из того факта, что возмущение гамильтониана в нашем случае равно: $H_{ik} \sim \mu f_\omega v_k / \Omega$. В результате получаем оценку границы стохастичности ($\Omega \sim \Omega_\phi \sim \omega$):

$$s^2 \sim \left| \frac{\mu f_\omega v_\phi \Omega' \omega^2}{\Omega_\phi \Omega^4} \right| \sim 1 \quad (2.6.4)$$

где производная Ω' берется по действию. Мы видим, что вблизи сепаратрисы всегда имеется область стохастичности, так как $\Omega \rightarrow 0$, а $\Omega' \rightarrow \infty$ (см. ниже). Эта область расположена практически симметрично по обе стороны сепаратрисы, поскольку в силу периодичности потенциала $\mathcal{U}(4)$ "внешние" и "внутренние" фазовые колебания почти совпадают вблизи сепаратрисы. В силу указанной приближенной симметрии резонансы второго порядка лежат не только внутри резонансов первого порядка, т.е. внутри их сепаратрисы, но и снаружи, в непосредственной окрестности резонанса. В дальнейшем для краткости мы оставим термин "внутри", подразумевая вышеописанную ситуацию. Аналогично, резонансы третьего порядка лежат внутри резонансов второго порядка и т.д. Мы получаем таким образом иерархию резонансов, описанную также Грином /47/.

Образование стохастического слоя в окрестности сепаратрисы происходит, таким образом, за счёт перекрытия резонансов второго порядка, хотя в окончательных формулах фигурируют параметры резонансов только первого порядка (2.6.12-17). Параметры резонансов высших порядков могут оказаться существенными при вычислении скорости диффузии (см. § 2.10).

Для получения более определенной оценки сделаем естественное предположение, что потенциальная энергия фазовых колебаний вблизи гиперболической точки ($\psi = 0$) имеет вид $U(\psi) = -\bar{m}\Omega_1^2\psi^2/2$, где \bar{m} — некоторая масса, а Ω_1 — константа, имеющая смысл обратного времени экспоненциального ухода системы от точки неустойчивого равновесия. Легко получается асимптотическое выражение ($W \rightarrow 0$): $\Omega \approx \pi\Omega_1 / \ln |A/W|$ ^{x)}. Постоянную A удобно выбрать таким образом, чтобы $\Omega(W_\phi) = \Omega_\phi$:

$$\Omega \approx \frac{\pi\Omega_1}{\ln |\frac{W_\phi}{W}| + \frac{\pi\Omega_1}{\Omega_\phi}} \quad (2.6.5)$$

Здесь W — энергия колебаний вблизи сепаратрисы, а W_ϕ — энергия малых колебаний, причём обе энергии отсчитываются от сепаратрисы. Для нелинейности колебаний находим:

$$\Omega' \approx \frac{\Omega^3}{\pi\Omega_1 W_\phi} \cdot e^{\pi\Omega_1 \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega_\phi} \right)} \quad (2.6.6)$$

Определим теперь малый параметр возмущения μ таким образом, чтобы $f_\omega v_\phi \sim \Omega_\phi W_\phi$ ^{xx)}. Это значит, что при $\mu \sim 1$ энергия колебаний существенно изменяется за один период ($\Omega \sim \Omega_\phi$). Подставляя выражение (2.6.6) в (2.6.4), получим следующую оценку ширины стохастического слоя вдоль

x) Мы предполагаем, что имеются две одинаковые гиперболические точки. В противном случае следует положить: $1/\Omega_1 \rightarrow (1/\Omega_1 + 1/\Omega_2)/2$; негиперболическая точка остановки соответствует $\Omega_2 = \infty$.

xx) Здесь и ниже мы принимаем амплитуду фазовых колебаний $\psi_0 \sim 1$.

сепаратрисы в единицах частоты фазовых колебаний ($\mu \ll 1$)^{x)}

$$\Omega_c \approx \frac{\pi \Omega_1}{\ln \frac{1}{\mu} + \frac{\pi \Omega_1}{\Omega_\phi}} \quad (2.6.7)$$

Мы сохранили здесь знак приближенного равенства (вместо оценки), так как неопределенный множитель (~ 1) в критерии стохастичности (2.6.4) оказывается в (2.6.7) под логарифмом.

Более естественной является, пожалуй, энергетическая ширина стохастического слоя, равная (2.6.7):

$$\left| \frac{W_c}{W_\phi} \right| \sim \mu \quad (2.6.8)$$

Такого же порядка и ширина стохастического слоя по действию I . Мы пренебрегаем здесь разницей частот $\Omega \sim \Omega_\phi \sim \Omega_1 \sim \omega$. По поводу случая $\omega \ll \Omega_\phi$ см. ниже.

Разумеется, полученные оценки остаются справедливыми для любого осциллятора, обладающего сепаратрисой. Сейчас нас интересует, однако, сепаратриса нелинейного резонанса, для которой мы можем еще более конкретизировать вышеприведенные оценки.

Если имеется всего один резонанс, то единственным возмущением будет нерезонансная гармоника (§ 1.3) с частотой $\omega \sim \Omega_\phi / \sqrt{\epsilon}$ (§ 1.4). Эта частота лежит далеко на "хвосте" спектра (2.6.1) и поэтому в (2.6.4) появляется дополнительный множитель $\sim e^{-c/\sqrt{\epsilon}}$ ($c \sim 1$), который можно отнести к параметру

μ , положив:

$$\mu \sim e^{-c/\sqrt{\epsilon}} \quad (2.6.9)$$

Предэкспоненциальный множитель оказывается здесь ~ 1 , так как параметр определен посредством (см. выше): $\mu \sim f_\omega v_\phi / \Omega_\phi W_\phi \sim \sim f_\omega / \Omega_\phi^2 \sim 1$; $f_\omega \sim \epsilon$; $\Omega_\phi \sim \sqrt{\epsilon}$.

x) Сравнение с работой /38/ и с результатами численного счёта дано в § 4.2.

В результате получаем следующую оценку размера стохастического слоя, вызванного, если так можно выразиться, самовозмущением, т.е. тем самым возмущением, которое ответственно за образование сепаратрисы ($\Sigma \ll 1$):

$$\delta_{\Omega} = \frac{\Omega_c}{\Omega_+} \approx \frac{\pi \Omega_1 / \Omega_+}{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\pi \Omega_1}{\Omega_+}} \approx \frac{\pi \Omega_1 \cdot \sqrt{\varepsilon}}{\Omega_+ \cdot c}; \quad \frac{\Omega_c}{\omega} \sim \varepsilon \quad (2.6.10)$$

в частотном выражении или:

$$\delta_w = \left| \frac{w_c}{w_+} \right| \sim e^{-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}} \quad (2.6.11)$$

в энергетическом.

Эта ширина очень мала и совпадает по порядку величины с расщеплением сепаратрисы (вдали от гиперболических точек), полученным В.К.Мельниковым /37/ (см. также /21/). Отсюда следует, что языки расщепленной сепаратрисы, длина которых неограниченно возрастает по мере приближения к гиперболической точке, вытягиваются вдоль невозмущенной сепаратрисы, причём стохастическая область дробится на все более и более тонкие слои. Это типичный процесс перемешивания, аналогичный по своей структуре описанному в § 2.4 для элементарной модели (см. рис. 2.4.1).

Наш результат (2.6.11) согласуется с работой /37/ в том смысле, что из /37/ можно вывести заключение, что ширина стохастического слоя во всяком случае не меньше (2.6.11). Из наших оценок следует, что она и не больше.

Обратимся теперь к более интересному случаю, когда имеется несколько резонансов. Пусть сначала система резонансов определяется возмущением, причём расстояние между резонансами равно $\Delta\omega$, а их ширина одного порядка. Из общего разложения (1.3.2) видно, что ближайшее нерезонансное возмущение имеет в этом случае частоту $\omega_1 = 4\omega$. Так как в оценке (2.6.11) $\sqrt{\varepsilon} \sim \Omega_+/\omega$, то теперь мы получим новую оценку (см. (2.6.1)):

$$\delta_w \sim \mu \sim e^{-\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\omega_1}{\Omega_+}} \quad (2.6.12)$$

Но отсюда непосредственно вытекает критерий стохастичности (2.1.4). Существенно, однако, что это два различных критерия. Оценка (2.6.12) показывает, что при выполнении условия $\Omega_\phi \sim \omega_1$ происходит почти полное разрушение резонансной области, внутри и снаружи от сепаратрисы, т.е. ширина стохастического слоя становится порядка ширины резонанса. Критерий (2.1.4) характеризует перекрытие соседних резонансов. То, что оба критерия выполняются одновременно, обеспечивает образование широкой стохастической области, определяемой всеми резонансами.

Пусть теперь система резонансов определяется самим осциллятором как в только что рассмотренном движении около сепаратрисы. Учитывая, что $\omega_1 = \Omega$ (1.3.2); $\Delta \approx \Omega/k$ (2.6.3) и $(\Delta\omega)_n \sim \Omega_\phi/k$ ((2.1.2), § 1.4), получим, что оба критерия (2.1.4; 2.6.12) снова совпадают: $(\Delta\omega)_n/\Delta \sim \Omega_\phi/\omega_1$.

Два крайних случая, рассмотренные выше, характеризуются наличием одной единственной гармоники возмущения или колебания. Разумеется, сама по себе гармоническая (синусоидальная) форма в известных пределах несущественна (подробнее см. §§ 2.7,8). Имеет значение структура спектра резонансов, который в обоих случаях можно назвать локально эквидистантным. Существенным свойством такой структуры является конечное (ненулевое) расстояние между резонансами. Общий случай дискретного всюду плотного спектра резонансов будет рассмотрен в следующем параграфе.

Таким образом, опираясь на свойства специальной модели (2.1.11), мы обосновали критерий стохастичности (2.1.4) для системы с локально эквидистантным спектром резонансов. Простейшим случаем такого спектра является пара резонансов одного порядка по ширине. Согласно критерию (2.6.12) этого уже достаточно для получения стохастического слоя внутри резонансной области, т.е. шириной $\sim \sqrt{\epsilon}$ ^{x)}.

Теперь мы можем дать оценку относительной доли (δ) стохастической компоненты в области колмогоровской устойчивости. Так как (2.6.12) даёт ширину сто-

^{x)} Этот вывод был подтверждён недавно с помощью численного эксперимента /48/.

хастического слоя по отношению к ширине резонанса, то для получения искомой оценки достаточно умножить (2.6.12) на $S = (\Delta\omega)_n / A$; в обоих рассмотренных выше крайних случаях получаем:

$$\delta \sim S \cdot e^{-c/S} \quad (2.6.13)$$

где параметр стохастичности (2.1.2) $S < 1$ в области колмогоровской устойчивости.

Рассмотрим более подробно упомянутый выше простейший случай двух резонансов. Выясним, прежде всего, как изменится взаимное разрушение резонансов, если их ширина существенно различна. Параметр возмущения M будет содержать в этом случае дополнительный множитель (см.стр.65) $f_p/f_q \sim (\Omega_p/\Omega_q)^2$, где индекс p относится к разрушающему резонансу, а индекс q — к разрушающему. Частота фазовых колебаний в оценке (2.6.12) характеризует разрушаемый резонанс: $\Omega_p \rightarrow \Omega_q$, а минимальная частота возмущения

$$\omega_1 = \max(\Omega_p, \Omega_q) \quad (2.6.14)$$

на границе перекрытия. Особый случай, когда более слабый резонанс находится целиком внутри более сильного, так что ω_1 существенно меньше чем (2.6.14), будет рассмотрен ниже. Оценка (2.6.12) принимает теперь вид:

$$\delta_{pq} \sim \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_q}\right)^2 \cdot e^{-c \cdot \frac{\omega_1}{\Omega_q}} \quad (2.6.15)$$

С учётом (2.6.14) видно, что более устойчивым оказывается слабый резонанс, для которого (абсолютная) ширина стохастического слоя экспоненциально мала: $\Omega_q \cdot \delta_w \sim (\Omega_p^2/\Omega_q) \cdot e^{-c \Omega_p/\Omega_q}$; $\Omega_p \gg \Omega_q$, в то время как для сильного резонанса ($\Omega_p \ll \Omega_q$): $(\Omega_q \delta_w) \sim \Omega_p^2 / \Omega_q$. Существенно, однако, что и сильный резонанс разрушается лишь незначительно. Поэтому в рассматриваемом случае относительная доля стохастической компоненты оказывается малой ($\sim \Omega_p/\Omega_q$) даже в условиях перекрытия резонансов. Тем не менее благодаря перекрытию стохастических слоёв соседних резонансов возможна некоторая диффузия от одного резонанса к другому, хотя скорость её может быть весьма незначительной (§ 2.7; 3.3).

На этом примере особенно ясно видно различие двух критерий стохастичности —

ти: критерия перекрытия резонансов (2.1.4), который определяет возможность некоторой диффузии для части начальных условий, и критерия разрушения резонансов (2.6.15), который определяет образование сплошной или, точнее, почти сплошной (§ 2.8) стохастической области с максимальной скоростью диффузии (§ 2.10).

Пусть теперь несколько соседних резонансов почти совпадают: $\omega_1 \ll \Omega_p \sim \Omega_q$.

Тогда мы можем рассматривать их как один резонанс с медленно изменяющимися параметрами: $\mathcal{U}(\psi, \lambda)$, причём характерное время изменения λ составляет $\sim 1/\omega_1$. Эффективность такого возмущения определяется точностью сохранения адиабатического инварианта; это приводит к следующей оценке для параметра возмущения (см., например, /45/ и § 4.4):

$$\mu \sim e^{-C \frac{\Omega(\bar{w}, \lambda)}{\omega_1}} \quad (2.6.16)$$

где $\Omega(\bar{w}, \lambda)$ - частота фазовых колебаний, не обязательно малых^{x)}. Воспользуемся теперь оценкой (2.6.8) и асимптотикой частоты фазовых колебаний (2.6.5); решая (2.6.16) относительно \bar{w} , найдем:

$$\delta_w \sim e^{-\frac{C}{2} \cdot \frac{\Omega_\phi}{\omega_1}} \quad (2.6.17)$$

где Ω_ϕ - частота малых фазовых колебаний. Таким образом, ширина стохастического слоя существенно расширяется по сравнению с (2.6.16), но остается все же экспоненциально малой.

Образование единого резонанса из группы почти совпадающих резонансов мы будем называть перенормировкой резонансов. Нетрудно видеть, что имеет место непрерывный предельный переход при $\omega_1 \rightarrow 0$. Стохастическое разрушение узкой группы резонансов как функция возмущения проходит через максимум (полное разрушение) при $S \sim 1$. В то же время при сильном перекрытии широкой группы резонансов (много шире перенормированного резонанса) образуется система перенорми-

x) Предполагается, что частота фазовых колебаний не проходит через нуль:

$\Omega(\bar{w}, \lambda) \neq 0$.

рованных резонансов, для которой автоматически выполняется условие: $S' \sim 1$.

Применение полученных выше простых оценок ширины стохастического слоя (2.6.12, 13, 15) требует известной осторожности. Фактически они основаны на оценках для μ типа (2.6.9, 16), которые учитывают только частотный спектр возмущения. Это безусловно правильно, если имеется всего одна гармоника возмущения (два резонанса). В случае нескольких гармоник необходимо учитывать их фазовые соотношения, которые, в частности, могут существенно уменьшить значение μ по сравнению с вышеприведенными оценками. Простейшим примером является основная модель (2.1.11) при $T \rightarrow \infty$. Несмотря на сильное перекрытие резонансов в этом случае ($S \gg 1$) движение будет устойчивым в течение каждого из интервалов T между толчками. Это происходит как раз благодаря специальному соотношению фаз резонансов. Более сложный пример влияния фазовых соотношений будет рассмотрен в § 2.9.

§ 2.7 Полная система резонансов

До сих пор мы рассматривали взаимодействие приблизительно эквидистантной системы резонансов, образованной за счёт ангармоничности либо только возмущения (основная модель), либо только собственных колебаний (сепаратриса, § 2.6). В обоих случаях критерий стохастичности (2.1.4) имел вполне определенный смысл, так как среднее расстояние между резонансами Δ оставалось конечным (2.1.2).

В общем случае полная система резонансов является всюду плотной по частоте, так что формально $\Delta = 0$. Физически ясно, что амплитуды высоких гармоник, вообще говоря, быстро убывают с ростом номера гармоники (для аналитической функции — экспоненциально). Поэтому эффективно работает конечное число гармоник, а значит, и конечное число резонансов. Более точный результат состоит в том, что суммарная ширина всех резонансов конечна и мала (при достаточно малом возмущении). Как уже отмечалось выше, это и есть основной результат теории КАМ. Однако технические трудности построения сходящихся рядов в этой теории приводят к чрезмер-

ным требованиям на гладкость функций, входящих в уравнения движения (гладкость силы, как мы будем говорить дальше для краткости). Первоначально предполагалось даже аналитичность силы /19,20/, хотя было совершенно ясно, что это чисто техническое требование /39/.

В последнее время Мозер развел технику "сглаживания" неаналитических функций, т.е. приближения их последовательностью аналитических /28/; в результате оказалось достаточным потребовать существование некоторого количества (L_c) непрерывных производных силы. Минимальное значение L_c , полученное Мозером, составляет /28/:

$$L_c > 2N + 2 \quad (2.7.1)$$

где N - число степеней свободы автономной гамильтоновой системы. Для неавтономной системы, а также для преобразований, оценки отсутствуют; насколько можно понять из работы /28/, надо положить в этом случае: $N \rightarrow N+1$. Результат Мозера даёт, по существу, верхнюю (достаточную) границу гладкости силы, так как он определяется техникой сглаживания.

В этом параграфе мы попытаемся дать некоторые оценки нижней границы гладкости силы, необходимой для колмогоровской устойчивости. Именно, мы предположим, что эффективная оценка условий устойчивости с учётом полной системы резонансов может быть дана по первому приближению (см. ниже). Забегая вперед скажем, что мы принимаем эту гипотезу не только ради упрощения задачи, но и опираясь на результаты численных экспериментов (см. § 3.3).

Значение этой гипотезы для получения практических оценок очевидно, она просто устраняет необходимость вычисления высших приближений, не говоря уже о вопросах сходимости. Заметим, что оценки этого параграфа не эквивалентны полностью первому приближению теории КАМ /20/, так как мы учитываем размер и другие характеристики резонансов, а не просто исключаем их.

Мы ограничимся, главным образом элементарной моделью (2.4.16), которую за-

пишем в виде:

$$\begin{aligned}\omega_{n+1} &= \{\omega_n + \varepsilon \cdot f(\varphi_n)\} \\ \varphi_{n+1} &= \{\varphi_n + \omega_{n+1}\}\end{aligned}\quad (2.7.2)$$

где $f(\varphi)$ - некоторая функция ("сила"), мы уточним её в дальнейшем, а ε - малый параметр.

Основные резонансы, которыми мы до сих пор ограничивались, лежат при $\omega = \Gamma$ (Γ - целое) и соответствуют неподвижной точке преобразования (2.7.2). Нетрудно видеть, что в общем случае резонанс имеет место для любого рационального значения ω :

$$\omega = \frac{\Gamma}{q} \quad (2.7.3)$$

Действительно, при этом условии фаза φ изменяется точно на Γ периодов за q шагов. Эти резонансы высших гармоник ($q > 1$), как мы их будем называть, соответствуют, таким образом, периодическому движению системы (2.7.2) с периодом q .

Условие резонанса (2.7.3) становится особенно наглядным, если перейти от преобразования (2.7.2) к дифференциальным уравнениям, т.е. к непрерывному времени:

$$q\omega = \Gamma \Omega \quad (2.7.4)$$

где Ω - основная частота возмущения. Тогда резонанс (Γ, q) есть резонанс Γ -й гармоники возмущения с q -й гармоникой колебаний осциллятора.

Для дальнейшего важно понять, что появление высоких гармоник происходит по двум совершенно различным причинам. Прежде всего - за счёт ангармоничности силы как функции координаты:

$$f(\varphi) = \sum_q f_q \cdot e^{2\pi i q \varphi} \quad (2.7.5)$$

Возникающие таким образом резонансы мы будем называть резонансами первого при-

ближения или резонансами высших гармоник. Их ширина определяется коэффициентами f_q , получение которых не представляет принципиальных трудностей.

Существует, однако, и другая причина появления высших резонансов, даже для $f(\varphi) = \lim 2\pi\varphi$, когда $f_q = 0 (q > 1)$. Смысл её состоит в следующем. Резонансные частоты (2.6.4) получаются из Фурье-разложения по времени, тогда как мы можем легко получить лишь Фурье-разложение по координате (2.6.5). Но фаза φ изменяется не строго пропорционально времени, так как частота ω , в свою очередь, изменяется под действием возмущения, в частности, под действием нерезонансных гармоник (§ 1.3). Легко видеть, что в первом приближении появляются частоты модуляции $\omega + \Gamma\Omega$. Это приводит к резонансам второго приближения вида: $2\omega = \Gamma\Omega$, причём амплитуда таких резонансных членов оказывается $\sim \varepsilon^2$. Аналогично можно показать /3/, что резонансы $q\omega = \Gamma\Omega$ определяются членами $\sim \varepsilon^q$, убывающими с q экспоненциально. Это позволяет надеяться, что влияние резонансов высших приближений будет несущественным.

В действительности, однако, вопрос оказывается весьма сложным. Более аккуратное рассмотрение /20/ показывает, что члены q -го приближения $\sim q^{1/q} \cdot \varepsilon^q$. В случае неаналитической силы со степенным спектром типа (2.7.6) это может приводить к расходимости для очень высоких гармоник. Фактически, однако, расходимости не происходит, как это было показано Мозером /28/.

Так или иначе, мы будем предполагать, что полная (действительная) ширина резонанса может быть оценена по первому приближению. Во всяком случае мы можем рассчитывать получить таким образом нижнюю границу гладкости силы, необходимой для колмогоровской устойчивости.

Имея в виду сравнение с результатом Мозера /28/, выберем в качестве $f(\varphi)$ функцию, $(\ell+1)$ -я производная которой терпит разрыв порядка единицы. Легко видеть, что асимптотический (при $q \gg 1$) спектр такой функции даётся выражением:

$$f_q \sim q^{-(\ell+2)} \quad (2.7.6)$$

Рассмотрим некоторый резонанс (Γ, q) . Пренебрегая нерезонансными членами, можно записать преобразование (2.7.2) вблизи резонанса (Γ, q) в виде:

$$\omega'_{n+1} = \left\{ \omega'_n + \varepsilon q^{-(\ell+1)} \cdot e^{2\pi i \varphi'_n} \right\} \quad (2.7.7)$$

$$\varphi'_{n+1} = \left\{ \varphi'_n + \omega'_{n+1} \right\}$$

где мы произвели замену $\omega' = q\omega$; $\varphi' = q\varphi$. В первом приближении преобразование (2.7.7) имеет единственный резонанс (основной, $q' = 1$), ширина которого согласно (2.2.4) равна $(\Delta\omega')_n \sim \sqrt{\varepsilon} \cdot q^{-(\ell+1)/2}$ или, в переменной

ω :

$$(\Delta\omega)_q \sim \sqrt{\varepsilon} \cdot q^{-\frac{\ell+3}{2}} \quad (2.7.8)$$

При заданной величине q имеется q различных резонансов, соответствующих $\Gamma = 1, 2, \dots, q$ (2.7.3). Простое суммирование ширины всех резонансов даёт:

$$(\Delta\omega)_{\Sigma} \sim \sqrt{\varepsilon} \cdot \sum_{q=1}^{\infty} q^{-\frac{\ell+1}{2}} \quad (2.7.9)$$

Эта сумма сходится, если $\ell > 1$ ^{x)}.

Однако даже в рамках первого приближения простое суммирование ширины резонансов не очень оправдано. Дело в том, что многие резонансы совпадают или почти совпадают, точнее попадают один внутрь другого. Суммарная (перенормированная, см. § 2.6) ширина таких совпадающих резонансов будет, вообще говоря, меньше суммы ширины отдельных резонансов. Закон сложения (перенормировки) зависит от фазовых соотношений. Если все резонансы находятся "в фазе", то складываются

$(\Delta\omega)_q^2$, пропорциональные амплитуде гармоники возмущения; при "случайных" фазах нужно суммировать $(\Delta\omega)_q^4$. По-видимому, последний случай ближе к дей-

x) Аналогичная оценка получена в /46/.

ствительности, так как большинство резонансов не совпадают точно и фазовые соотношения изменяются с течением времени. Оказывается, что сходимость резонансной суммы не зависит от степени перенормировки, которую мы обозначим посредством ℓ и оставим пока произвольной (см. ниже).

Итак, опеним суммарную ширину всех резонансов с $q' > q$, совпадающих с одним из резонансов q , т.е. попадающих внутрь резонансной области $(\Delta\omega)_q$ (2.7.8). Ясно, что из q' резонансов q' -й гармоники только $q'_1 = (\Delta\omega)_q \cdot q'$ будет совпадать, в среднем, с резонансом q . Имеем:

$$(\Delta\omega)_{q\sum}^n = (\Delta\omega)_q^n + \sum_{q'=q+1}^{\infty} q'_1 \cdot (\Delta\omega)_{q'}^n \approx \\ \approx (\Delta\omega)_q^n \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon} \cdot q^{(1-\ell)/2}}{n\ell + 3n - 4} \right) \quad (2.7.10)$$

где $(\Delta\omega)_{q\sum}$ — перенормированная ширина. Сумма сходится, если:

$$\ell > \frac{4}{n} - 3 \quad (2.7.11)$$

Перенормировка несущественна при $\varepsilon \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$, если:

$$\ell \geq 1 \quad (2.7.12)$$

В случае $\ell < 1$ $(\Delta\omega)_{q\sum} \gg (\Delta\omega)_q$, так что вместо $(\Delta\omega)_q$ при определении q'_1 естественно взять $(\Delta\omega)_{q\sum}$ и пренебречь величиной $(\Delta\omega)_q^n$ в правой части (2.7.10). Получаем:

$$(\Delta\omega)_{q\sum} \approx \left(\sum_{q'=q+1}^{\infty} q' (\Delta\omega)_{q'}^n \right)^{\frac{1}{n-1}} \approx \\ \approx (\varepsilon q)^{\frac{n}{2(n-1)}} \cdot q^{-2} \cdot \left(\frac{2}{n\ell + 3n - 4} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.7.13)$$

При суммировании выражения (2.7.13) по всем резонансам нужно исключить совпадающие. Для этого введем величину $G(q)$ — суммарную длину всех зазоров (по частоте) между резонансами с $q' < q$. Предполагая взаимное распределение зазоров и резонансов некоррелированным ("случайным"), можем написать уравнение:

$$G(q+1) = G(q) \cdot \left(1 - q \cdot (\Delta\omega)_{q\sum} \right) \quad (2.7.14)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение имеет вид:

$$G(q) = \exp \left\{ - \sum_{q'=1}^{q-1} q' \cdot (\omega)_{q', \varepsilon} \right\} \quad (2.7.15)$$

где мы положили $G(1) = 1$. Таким образом условия перекрытия резонансов определяются все таки прямой суммой (2.7.13) по всем резонансам. Последняя сходится при

$$\ell > 1 \quad (2.7.16)$$

Это и есть необходимое условие существования колмогоровской устойчивости или, иначе, нижняя граница требуемой гладкости силы. С учётом условия (2.7.12) эта граница получается из самой простой суммы (2.7.9).

Значение (2.7.16) существенно меньше верхней границы (2.7.1), которая в данном случае ($N=2$) есть: $\ell_c > 6$. Численные эксперименты как будто бы свидетельствуют в пользу нижней границы (см. § 3.3).

Рассмотрим случай $\ell \leq 1$, когда сумма в (2.7.15) расходится и $G \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$. Тем не менее при любом конечном q остаются экспоненциально малые щели. Реальность их существования вызывает сомнение по двум причинам. Во-первых, для этого должен быть очень резкий край резонансной области (разрушенной сепаратрисы (§ 2.6)). Согласно теории КАМ действительно существует граница абсолютной устойчивости. Однако в окрестности этой границы (со стороны сепаратрисы) имеется в общем случае весьма сложный переходной слой, который характеризуется, в частности, очень медленным развитием неустойчивости (§ 3.3). Во-вторых, решение (2.7.15) существенно связано с принятым выше предположением о "случайности" расположения зазоров. Это предположение заведомо нарушается в двух случаях: если $\varepsilon \sim 1$, так что экспоненциально малые зазоры появляются уже при $q \sim 1$, или если перекрываются резонансы одной гармоники. В первом случае возможно полное перекрытие небольшого числа низших резонансов, условия которого могут быть легко получены (при $\varepsilon \sim 1$) из (2.7.13). Во втором случае

полное перекрытие возможно при любом Σ , если $q \cdot (\Delta\omega)_{q\Sigma} \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$,
т.е. если:

$$\ell < -1 + \frac{2}{n} = -\frac{1}{2} \quad (2.7.18)$$

Это условие уже зависит от n , которое мы приняли здесь равным 4 (см. выше).

Полагая $q \cdot (\Delta\omega)_{q\Sigma} \sim 1$, можно оценить минимальный номер гармоники, которая уже обеспечивает перекрытие и определяет скорость диффузии; имеем ($n=4$):

$$q_1 \sim \Sigma^{\frac{2}{1+2\ell}} \quad (2.7.17)$$

Мы использовали перенормированную ширину резонансов (2.7.13). Из выражений (2.7.10) видно, что это справедливо лишь для достаточно высоких гармоник $q > q_\Sigma$,

где

$$q_\Sigma \sim \Sigma^{\frac{1}{\ell-1}} \quad (2.7.18)$$

Легко видеть, что действительно $q_1 > q_\Sigma$ в области применимости (2.7.16) выражения (2.7.17).

Исключая два рассмотренных выше специальных случая, можно ожидать все же, что распределение щелей $G(q)$ будет близко к "случайному". Это вытекает, главным образом, из того факта, что асимптотически ($q \rightarrow \infty$) положение щелей зависит существенно от ширины резонансов, определяющих щель, причём, как правило, это будут резонансы различных гармоник, имеющие различную ширину. Существенно также, что распределение резонансов (2.7.8) является асимптотически равномерным (см. ниже).

Подводя итоги, мы приходим к выводу, что, по-видимому, нельзя полностью исключить существование на фазовой плоскости щелей при любом q , если

$$-\frac{1}{2} < \ell \leq 1 \quad (2.7.19)$$

Эти щели могут в принципе полностью остановить диффузию несмотря на отсутствие колмогоровской устойчивости. Результаты соответствующих численных экспериментов и дальнейшая дискуссия приведены в § 3.3.

Проверим теперь критерий разрушения резонансной области, который в общем

случае резонансов разной ширины может быть получена из оценки (2.6.15). Прежде всего несколько уточним эту оценку, приняв во внимание, что для резонансов разных гармоник p и q имеет место соотношение: $f_p/f_q \sim (q/p)(\Omega_p/\Omega_q)^2$, откуда:

$$\delta_{pq} \sim \frac{1}{p} \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_q} \right)^2 e^{-\frac{\omega_1}{\Omega_q}} \quad (2.7.20)$$

Заметим, что при $\ell > -3/2$, т.е. практически во всех интересующих нас случаях, это уточнение не меняет характера оценки (2.7.20). Напомним, что индекс p относится к разрушающему резонансу, q — к разрушаемому, а Ω_q — ширина резонанса, равная $q \cdot (\Delta\omega)_q$, причем в качестве ($\Delta\omega$) нужно использовать выражение (2.7.8) или (2.7.13) в зависимости от значения ℓ .

Из оценки (2.7.20) видно, что взаимное разрушение возможно только для резонансов близких гармоник, как это было подробно описано в § 2.6. В частности, для степенного спектра (2.7.6) должно выполняться условие:

$$|p - q| \ll q \quad (2.7.21)$$

При выполнении этого условия критерий взаимного разрушения резонансов можно записать в виде^{x)}:

$$S_1 = \frac{\Omega_q}{\omega_1} = \frac{\Omega_q}{|p\omega - k|} \gtrsim 1 \quad (2.7.22)$$

Здесь ω — частота системы вблизи разрушаемого резонанса (Γ, q), но не обязательно точно равная Γ/q , так как мы интересуемся сильным разрушением резонанса и стохастичностью; (k, p) — разрушающий резонанс, удовлетворяющий условию (2.7.21).

Оценим знаменатель (2.7.22). Нижнюю оценку можно взять из работы Мозера /28/:

$$|p\omega - k| > \frac{C_1}{p^2}; \quad \varepsilon > 1 \quad (2.7.23)$$

x) В соответствии с замечанием предыдущего параграфа (стр. 70) для перенормированной системы резонансов всегда $S'_1 \leq 1$.

Замечая далее, что интересующее нас минимальное значение $\omega_1 = p\omega - k_1 = \{p\omega\}$ образуют при $p = 1, 2, \dots$ последовательность, эргодическую для любого иррационального числа $\omega / 331$, получаем верхнюю оценку:

$$|p\omega - k_1| < \frac{C_2}{p^\gamma}; \quad \gamma < 1 \quad (2.7.24)$$

Сравнивая (2.7.23, 24), мы видим, что имеет место эффективная оценка:

$$|p\omega - k_1| \sim \frac{1}{p} \quad (2.7.25)$$

причём числа p, q могут быть выбраны близкими, если они достаточно велики; эта близость входит в константу $C_2 \sim P / |p-q|$.

Выполнение критерия (2.7.22) зависит теперь от асимптотики Ω_q при $q \rightarrow \infty$. Для обоих случаев (2.7.8, 13) $S_1 \sim q^2 \cdot (\Delta\omega)_q \rightarrow \infty$, если:

$$\ell < 1 \quad (2.7.26)$$

Таким образом и для полной системы резонансов критерий разрушения резонансных областей совпадает по порядку величины с критерием их перекрытия, если отвлечься от возможного образования целей, рассмотренных выше. Для критерия (2.7.22) такие щели совершенно несущественны, так как значение ω_1 определяется, грубо говоря, расстоянием между центрами резонансов, а не между сепаратрисами.

Единственный случай существенного различия условий (2.7.26) и (2.7.16) соответствует $\ell = 1$. В этом пограничном случае резонансы перекрываются, но ширина стохастических слоев экспоненциально мала. Следовательно, полная площадь стохастической компоненты, а также скорость диффузии пренебрежению малы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Полагая $q^2 \cdot (\Delta\omega)_{q_\Sigma} \sim 1$, мы можем найти границу разрушения резонансов по q , которая оказывается совпадающей с границей перенормировки q_Σ (2.7.18). Из оценки (2.7.20) вытекает, что сепаратрисы низших резонансов ($q < q_\Sigma$) разрушены незначительно. Поскольку суммарная ширина неразрушенных резонансов ($q < q_\Sigma$) как раз ~ 1 , устойчивые области занимают значительную часть фазовой плоскости. Однако они разделены между собой густой сеткой переплетающихся стохастических слоев. Масштаб ячеек этой сетки определяется средним рас-

стоянием между разрушенными резонансами и составляет:

$$(\delta\omega) \sim q_{\Sigma}^{-2} \sim \varepsilon^{\frac{2}{l-\ell}} \quad (2.7.27)$$

Полученные в этом параграфе оценки имеют значение и для аналитической силы $f(\psi)$ специальной формы с резким (на участке $\Delta\psi \ll 1$) изменением $(l+1)$ -й производной. В этом случае спектр $f(\psi)$ является степенным (2.7.6) до $q_{\omega} \sim 1/\Delta\psi$. При $l < 1$ прежний критерий стохастичности $\varepsilon \sim 1$ (2.5.1) заменяется на

$$\varepsilon \sim q_{\omega}^{l-1} \quad (2.7.28)$$

который получается из условия: $q_{\Sigma} \sim q_{\omega}$.

Перейдем в заключение к непрерывному времени, т.е. к дифференциальным уравнениям вместо преобразования. Амплитуда резонансной гармоники будет зависеть в этом случае не только от q , но и от r (2.7.3). Положим (ср. с (2.7.6)):

$$f_{qr} \sim q^{-(l+2)} \cdot r^{-(l_e+2)} \quad (2.7.29)$$

при $q, r \gg 1$. Резонансная сумма (2.7.9) принимает теперь вид:

$$(\Delta\omega)_{\Sigma} \sim \sqrt{\varepsilon} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} q^{-\frac{l+3}{2}} \cdot r^{-\frac{l_e+2}{2}} \quad (2.7.30)$$

Сходимость, а значит и колмогоровская устойчивость, имеет место при условии:

$$l > -1; \quad l + l_e > -1 \quad (2.7.31)$$

В частности, для аналитической зависимости от t ($l_e \rightarrow \infty$) существенно только первое условие, которое значительно слабее прежнего (2.7.16) для преобразования. Последнее получается из второго условия (2.7.31), если положить: $l_e = -2$ (δ — функция).

§ 2.8 Квази-резонансы

Перейдем теперь к более детальному изучению стохастической области. Неприятной особенностью этой области для систем типа нашей основной модели (2.1.11),

особенностью, ставящей под сомнение возможность возникновения "настоящей" стохастичности, является наличие "островков" устойчивости, не исчезающих ни при каких значениях параметра стохастичности $K \rightarrow \infty$ (2.5.1). По причинам, которые выясняются ниже, мы будем называть эти "островки" квази-резонансами. Нашей задачей поэтому является оценка размера и общей площади этих "островков". Мы ограничимся опять элементарной моделью (2.4.16):

$$\varphi_{n+1} = \{ \varphi_n + k \cdot f(\varphi_n) \} \quad (2.8.1)$$

$$\varphi_{n+1} = \{ \varphi_n + \varphi_{n+1} \}$$

которая была использована также для численных экспериментов (§ 3.5).

Области устойчивости расположены вблизи периодических траекторий системы. Простейшее периодическое решение преобразования (2.8.1) - неподвижная точка (период $T = 1$ шаг) - может быть устойчивой лишь для специальных значений k (см. ниже и § 2.4). Однако существует, вообще говоря, бесчисленное множество других периодических решений с $T \rightarrow \infty$. Более точно, Синай показал /40/, что стохастическая система имеет всюду плотное в фазовом пространстве множество периодических траекторий. Конечно, мера этого множества равна нулю и все периодические траектории неустойчивы. Из работы /40/ вытекает оценка:

$$v(T) \sim e^{h(T-1)} \quad (2.8.2)$$

где $v(T)$ - число периодических траекторий с периодом $\leq T$; h - энтропия x .

Наша система не является стохастической в полном (классическом) смысле этого слова из-за наличия областей устойчивости вокруг части периодических траек-

т.) При $h > 1$ выражение (2.8.2) даёт также число периодических траекторий с периодом T , как это легко проверить непосредственно. Отметим, что мы несколько изменили оценку (2.8.2) по сравнению с /40/ ($T \rightarrow T-1$) для получения правильной асимптотики при $T=1$; $h \rightarrow \infty$.

торий (2.8.2). Однако можно предположить, что оценка (2.8.2) существенно не изменится, по крайней мере, если доля устойчивых областей достаточно мала.

Прежде чем приступить к оценкам выясним механизм устойчивости вблизи периодических решений. Как было подробно описано в § 2.4 для стохастичности требуется существование так называемого асимптотического трансверсального потока.

Это значит, что в окрестности каждой точки фазовой плоскости траектории трансверсального потока должны стремиться асимптотически к особой траектории (асимптоте), любой отрезок которой будет растягиваться экспоненциально в процессе движения, по крайней мере в среднем. Нетрудно видеть, что для выполнения этого условия легко проверяемое свойство локальной неустойчивости движения не является достаточным. Действительно, в силу сохранения фазового объёма трансверсальное преобразование характеризуется двумя собственными векторами (направлениями), один из которых соответствует сжатию, а другой – растяжению. Вследствие этого в пространстве направлений трансверсального потока существуют два конуса (для одномерной системы типа (2.8.1) – два сектора на фазовой плоскости): конус растяжения и конус сжатия в зависимости от изменения длины трансверсального вектора ($\Delta\varphi$, $\Delta\psi$). В процессе движения эти конусы могут перекрываться, т.е. переходить друг в друга, частично или полностью, что может приводить к ограниченным колебаниям трансверсального вектора вместо непрерывного растяжения. Это может приводить, в свою очередь, к появлению устойчивых областей.

Покажем прежде всего, что для модели (2.8.1) конуса сжатия и растяжения не перекрываются в специальном случае, когда устойчивые области отсутствуют. Последнее условие можно записать в виде:

$$|f'(\varphi)| > c > 0 \quad (2.8.3)$$

При этом даже минимальное значение параметра стохастичности

$$K_1 =$$

$$= |k \cdot f'_{\min}| > k_c \quad \text{неограниченно возрастает вместе с } k .$$

Используя выражение (2.4.14), найдем для направления собственных векторов

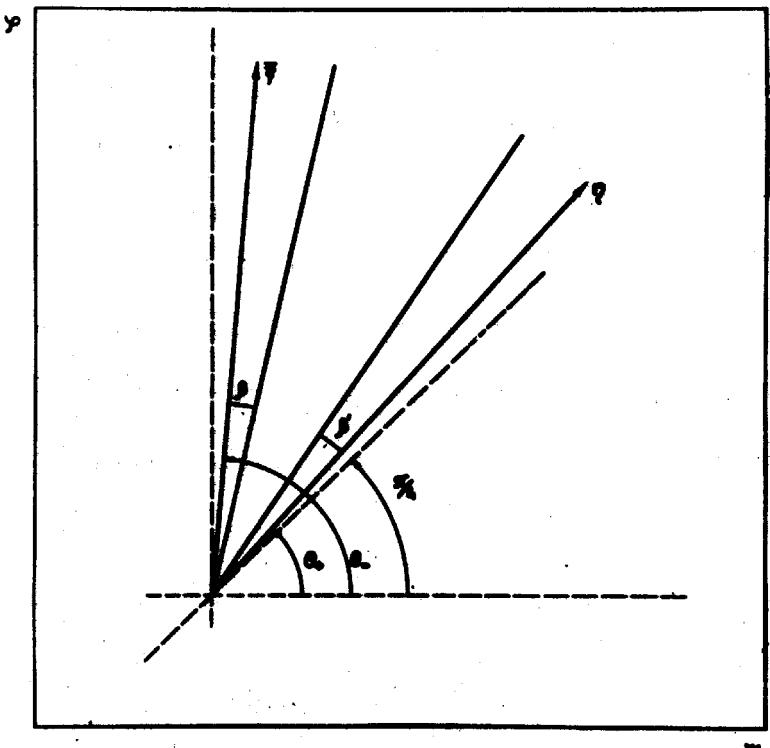


Рис.2.8.1. Структура трансверсального преобразования для элементарной модели (2.8.1) при отсутствии устойчивых областей (2.8.3): θ_{\pm} - направление собственных векторов растяжения и сжатия; β, β' - граница между конусами (секторами) сжатия и растяжения до и после преобразования.

(см.рис.2.8.1):

$$\operatorname{tg} \theta_{\pm} = \frac{K}{\lambda_{\pm} - 1} \quad (2.8.4)$$

где собственные значения λ_{\pm} определяются формулой (2.4.6). При $K_1 \gg 1$ направление вектора \vec{e}_y заключено в секторе $\pi/4 \pm 2/K_1$, а вектора \vec{e}_z в секторе: $\pi/2 \pm 1/K_1$. Для дальнейшего важно минимальное значение угла между \vec{e}_z, \vec{e}_y , которое составляет, очевидно: $\alpha_{\min} = \pi/4 - 3/K_1$.

С другой стороны, нетрудно показать, что при принятом условии $K_1 \gg 1$ граница между конусами сжатия и растяжения, т.е. направление, при котором длина трансверсального вектора не изменяется, проходит под углом $\beta \leq 1/\sqrt{2} K_1$ к оси сжатия. Под действием преобразования граничный трансверсальный вектор по-

ворачивается (без изменения длины) к оси растяжения и составляет с ней угол $\beta' \leq 1/\sqrt{2} K_1$ (см.рисунок). Минимальное угловое расстояние между последним направлением и новой границей составляет:

$$\alpha_{\text{н.н}} - \beta - \beta' = \frac{\pi}{4} - \frac{3 + \sqrt{2}}{K_1} > 0 \quad (2.8.5)$$

Это и есть, очевидно, условие того, что конуса не перекрываются в процессе движения. Значит, любая трансверсальная траектория в конусе растяжения никогда уже не сможет попасть в конус сжатия. Отсюда следует, что трансверсальный поток является асимптотическим, а движение системы стохастическим (§ 2.4).

Критерий стохастичности, использующий условие перекрытия конусов был сформулирован и применен к модели (2.1.14) Оседецем и Синаем (см.также /42/).

Исследуем теперь влияние областей устойчивости, не накладывая более ограничения (2.8.3) на функцию $f(\varphi)$. В этом случае часть периодических решений (2.8.2) может стать устойчивой, что приведет к образованию областей ("островков") устойчивости на фазовой плоскости, т.е. к появлению неэргодической компоненты.

Рассмотрим вначале специальные значения параметра k для элементарной модели (2.8.1). Мы ограничимся случаем $T=1$ (неподвижная точка), который приводит к наиболее крупным островкам устойчивости.

Для неподвижной точки преобразования (2.8.1) имеем:

$$\varphi_0 = 0; \quad k \cdot f(\varphi_0) = \gamma \quad (2.8.6)$$

где γ – любое целое число. Устойчивость неподвижной точки имеет место при (§ 2.4):

$$-\gamma < k \cdot f'(\varphi) < 0 \quad (2.8.7)$$

Специальные значения k определяются из условия совместности (2.8.6,7). Этому условию удовлетворяет интервал

$$\Delta k \approx \frac{8}{k \cdot f(\varphi_1) \cdot f''(\varphi_1)}; \quad f'(\varphi_1) = 0 \quad (2.8.8)$$

вокруг значения k , соответствующего центру области устойчивости (2.8.7), и рав-

ного:

$$k_r = \frac{\Gamma}{f(\varphi_1)} - \frac{2}{\Gamma \cdot f''(\varphi_1)} \quad (2.8.9)$$

Фазовая площадь области устойчивости составляет:

$$S(k) \sim \Delta\varphi \cdot \Delta\psi \sim \left(\frac{4}{kf''}\right)^2; \Delta\varphi \sim \Delta\psi \sim \frac{4}{kf''} \quad (2.8.10)$$

Существенно, что любой размер этой области становится сколь угодно малым при $k \gg 1$.

Заметим, что при переходе к основной модели (2.1.11) появляется дополнительный множитель $\Delta\varphi / \Delta\psi = 1/\tau\omega' = \varepsilon/k$, так что площадь неэргодической компоненты становится еще меньше (см. § 2.4):

$$\Gamma(k) \sim \varepsilon / k^3 \quad (2.8.11)$$

Перейдем теперь к произвольным значениям k . Пусть:

$$w_o = \frac{8}{k \cdot f''(\varphi_1)} \quad (2.8.12)$$

есть вероятность попадания в область устойчивых фаз (2.8.7); мы предполагаем здесь, что имеются две устойчивые области с одинаковыми значениями f'' . Предположим, далее, что при $T, k \gg 1$ периодические траектории расположены на фазовой плоскости "случайно". Это предположение очень существенно для нас, так как в противном случае весьма затруднительно получить какие-либо количественные оценки. Оно оправдывается интуитивно тем, что мы рассматриваем почти - стохастическую систему.

Дополнительные соображения в пользу высказанного предположения можно получить, рассматривая механизм образования большого числа (2.8.2) периодических траекторий. При $k \ll 1$ система резонансов первого порядка образует множество периодических решений $v(T) \sim T^2$ (по числу резонансов $\varphi = \frac{\Gamma}{q}; q \leq T$). Что же касается периодических решений, связанных с резонансами высших порядков (см. § 2.6), то они лежат внутри резонансов первого порядка. Поэтому их можно не

вплоть
учитывать до границы стохастичности. В частности, критерий стохастичности определяется только резонансами первого порядка. Если же $k >> 1$, то резонансы различных порядков перемешиваются между собой и распределяются более или менее равномерно по фазовой плоскости.

Возможно несколько механизмов образования устойчивых периодических траекторий в стохастической области. Наиболее простой из них (будем называть его первым) соответствует такому случаю, когда все T точек траектории попадают в область устойчивых фаз (2.8.7). Вероятность этого равна ω_0^T , а число таких траекторий есть (2.8.2):

$$v_s^{(1)}(T) \sim \omega_0^T \cdot v(T) \sim \omega_0 (\omega_0 e^k)^{T-1} \quad (2.8.13)$$

Эта оценка очень чувствительная к значению параметра $\gamma = \omega_0 e^k$. Для "силы" $f(\psi) = (1/2\pi) \cdot \sin 2\pi\psi$ (2.1.15), например, $\gamma = 2/\pi < 1$. Однако легко можно сконструировать такую $f(\psi)$, чтобы $\gamma > 1$ (см. § 3.2.5). С первого взгляда может показаться, что в последнем случае доля устойчивых областей будет весьма значительной, так как выражение (2.8.13) расходится при $T \rightarrow \infty$. Однако эксперимент показывает, что это не так; более того, оказывается, что при больших γ доля устойчивых областей даже сокращается (§ 3.5).

Существует два эффекта, которые могут приводить к такому странному, на первый взгляд, результату. Один из них, по-видимому, второстепенный, состоит в том, что оценка (2.8.13) является в действительности верхней границей. Это связано с тем, что периодическая траектория преобразования, все точки которой эллиптические, не обязательно является устойчивой. Возможная неустойчивость объясняется переменной, вообще говоря, частотой фазовых колебаний вокруг периодической траектории, что может привести к параметрическому резонансу.

Основной эффект состоит, вероятно, в том, что при $\gamma > 1$ имеет место существенное перекрытие устойчивых областей как раз в силу расходимости выражения (2.8.13). Но в таком случае мы можем применить общий критерий стохастичности по

перекрытию резонансов (§ 2.1). Действительно, резонансная область нелинейной системы означает, по существу, устойчивую область квази-периодического движения в окрестности периодической траектории. Смысл перекрытия резонансов как критерия стохастичности заключается при этом в следующем. Прежде всего при перекрытии резонансов траектория движения получает возможность переходить из одной резонансной области в другую, т.е. она не локализована больше в окрестности исходного периодического решения. Эта черта сохраняется и в случае перекрытия квази-резонансов, как мы будем называть устойчивые области при $k \gg 1$.

С другой стороны взаимодействие соседних резонансов приводит к образованию стохастического слоя в окрестности резонансной сепаратрисы, ширина которого растет по мере сближения резонансов и захватывает всю резонансную область к моменту перекрытия (§ 2.6). Нечто подобное имеет место, вероятно, и для квази-резонансов, хотя в настоящий момент неясно, каков точный вид второго критерия стохастичности (2.6.12) и, в частности, чему соответствует величина ω_1 в случае квази-резонансов. Особенность системы квази-резонансов состоит в том, что между ними расположена стохастическая компонента, а не инвариантные колмогоровские торы, как в случае обычных резонансов. Это, очевидно, облегчает разрушение квази-резонансов.

Другой механизм устойчивости (образования квази-резонансов) связан с переменным попаданием трансверсального вектора ($\Delta\varphi$, $\Delta\psi$) то в конус растяжения, то в конус сжатия. Напомним, что устойчивый случай соответствует повороту трансверсального вектора, а неустойчивый (стохастический) – его растяжению или сжатию.

Как было показано выше, конуса растяжения и сжатия элементарной модели (2.8.1) не перекрываются, пока траектория движения остается в неустойчивой области. Отсюда вытекает невозможность попаременного попадания трансверсали то в конус растяжения, то в конус сжатия. Однако такая возможность появляется в том случае, когда среди точек периодической траектории имеется хотя бы одна, лежащая

в области устойчивых фаз (2.8.7). В этой области трансверсальный вектор поворачивается и поэтому возможен переброс его в область сжатия.

Трансверсальное движение разбивается при этом на три фазы: растяжение, сжатие и поворот. Если период основного движения равен T , то длительность сжатия и растяжения составляют по $(T - 1)/2$. За время растяжения угол трансверсали с асимптотой уменьшается до значения:

$$\beta \sim \beta_0 e^{-2h(T-1)/2} \sim e^{-h(T-1)} \quad (2.8.14)$$

где $\beta_0 \sim 1$. Очевидно, что поворот должен быть осуществлен с такой же по порядку величины, точностью, так как движение вдоль сжимающей асимптоты симметрично. Вероятность такого поворота $\sim \omega_0 \beta T$, откуда число квази-резонансов второго типа равно:^{x)}

$$v_s^{(2)}(T) \sim \omega_0 \beta T \cdot v(T) \sim \omega_0 T \quad (2.8.15)$$

Полное число квази-резонансов оказывается теперь бесконечным независимо от вида силы, а из работы /40/ следует, что они расположены всюду плотно.

Размер квази-резонанса можно оценить как $\Delta S \sim \Delta\varphi (\Delta r)^2$, где φ, r – полярные трансверсальные координаты, причём $\Delta\varphi \sim \beta$, а Δr определяется из условия необходимой точности поворота: $\Delta r \sim \beta$. Следовательно, даже самый максимальный размер устойчивой области:

$$\Delta r \sim e^{-h(T-1)} \quad (2.8.16)$$

убывает экспоненциально. Полная площадь всех T устойчивых областей квази-резонанса равна:

$$S_1^{(2)} \sim T \cdot e^{-3h(T-1)} \quad (2.8.17)$$

а для всех квази-резонансов рассматриваемого типа:

x) Эта оценка не очень надежна ввиду некоторой неопределенности в оценке (2.8.2) для числа периодических траекторий: в частности, возможно, что экспоненты v и β не компенсируются полностью. Тем не менее численные эксперименты подтверждают, по порядку величины, оценку (2.8.20), вытекающую из (2.8.15) (см. § 3.5).

$$S^{(2)}(k) \sim \sum_{T=T_1}^{\infty} \omega_0 T^2 e^{-3h(T-1)} \quad (2.8.18)$$

Нижний предел суммирования для произвольного k определяется из условия, чтобы

$$v_s^{(2)}(T_1) \sim 1, \text{ т.е. чтобы квази-резонансы реально существовали:}$$

$$T_1 \sim (2/\omega_0)^{1/2} \quad (2.8.19)$$

Откуда:

$$S^{(2)}(k) \sim \frac{1}{h} e^{-3h(\sqrt{2/\omega_0} - 1)} \quad (2.8.20)$$

Для только что рассмотренных квази-резонансов период фазовых колебаний совпадал с периодом основного движения: $T_\phi = T$. Это условие не является обязательным, траектория может попадать в область устойчивых фаз (2.8.7) несколько раз за период T , скажем, $N = T/T_\phi$ раз. В общем случае длина каждого периода фазовых колебаний может быть различна: $T_i = \langle T_i \rangle$;

$\sum_{i=1}^N T_i = T$. Если T_i не слишком сильно отличаются друг от друга, то можно считать, что точность каждого поворота будет определяться длиной своего периода (2.8.14): $\beta_i \sim e^{-h(T_i-1)}$. Вероятность определенной последовательности устойчивых областей $\sim \prod_{i=1}^N (\omega_0 e^h) \cdot e^{-h T_i}$, а число устойчивых траекторий этого (третьего) типа равно:

$$v_s^{(3)}(T) \sim \gamma^N e^{-h} \cdot C(T, N) \quad (2.8.21)$$

где $C(T, N)$ - число различных комбинаций T_i . Поскольку наши оценки справедливы при $T_i \approx T_\phi$, можно положить: $C(T, N) \sim n_0^N$, где $n_0 = \alpha T_\phi \lesssim T/N$ ($T \gg 1; \alpha \lesssim 1$). Следовательно ($N \gg 1$):

$$v_s^{(3)}(T) \sim (\alpha T_\phi \gamma)^N \quad (2.8.22)$$

Полное число таких траекторий, а также площадь устойчивых областей расходится при любых γ . Однако, минимальный период, с которого начинается расходимость, зависит от γ :

х) Эта оценка является верхней, так же, как и (2.8.13) для квази-резонансов первого типа, см. пояснение на стр. 86.

$$T_{\text{раз}} \sim (\alpha \gamma)^{-1} \quad (2.8.23)$$

По аналогии с обычными резонансами можно предположить, что полное взаимное разрушение квази-резонансов происходит только при близких частотах фазовых колебаний (см. § 2.6). Отсюда следует, что остаются нераэрушенными квази-резонансы всех типов с $T_\phi < T_{\text{раз}}$; их число уменьшается с ростом γ .

Фазовая площадь устойчивой области вокруг периодической траектории в предположении $T_i \approx T_\phi$ даётся оценкой, аналогичной (2.8.17):

$$S_1^{(3)} \sim T \cdot e^{-3k(T_\phi - 1)} \quad (2.8.24)$$

а полная площадь всех квази-резонансов третьего типа равна:

$$S^{(3)}(k) \sim \sum_{T=T_1}^{\infty} T \cdot (\alpha \gamma T_\phi)^N \cdot e^{-3k(T_\phi - 1)} \quad (2.8.25)$$

где T_1 определяется опять-таки из условия существования квази-резонансов этого типа для произвольного k : $\sum_{T=1}^{T_1} v_s^{(3)}(T) \sim 1$. При $T_\phi = \text{const}$; $N = T/T_\phi \rightarrow \infty$ сумма расходится, если $T_\phi > T_{\text{раз}}$ (2.8.23).

Напомним, что вывод о расходимости суммы (2.8.25), из которого вытекает разрушение подавляющего большинства квази-резонансов, не является строгим, так как мы можем получить лишь верхнюю оценку для $S^{(3)}(k)$ (см. примечание на стр. 86). Однако любопытная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что основной вывод о стохастичности движения модели (2.8.1) при $k \gg 1$ не зависит даже от предположения о расходимости суммы (2.8.25). В самом деле, если сумма площадей квази-резонансов сходится, то она стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, так как размер каждой устойчивой области убывает с ростом k (2.8.24); если же вышеупомянутая сумма расходится, то происходит взаимное разрушение квази-резонансов за исключением конечного числа, определяемого условием (2.8.23), общая устойчивая площадь которых опять-таки стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Конечно, в принципе, нельзя исключить такой весьма специальный случай, когда все времена

$S(k) \sim 1$ при $k \rightarrow \infty$ несмотря на $S_1 \rightarrow 0$, однако, такая ситуация представляется нам весьма маловероятной. Численные эксперименты подтверждают этот вывод (§ 3.5).

Таким образом мы можем теперь добавить к двум прежним эффектам перекрытия резонансов первого порядка (объединение устойчивых областей и разрушение сепаратрис) еще и третий эффект — образование большого числа квази-резонансов, которые окончательно подавляют последние очаги устойчивости.

§ 2.9 Периодическое прохождение резонанса

Прежде чем перейти к заключительным параграфам этой главы, посвященным общему случаю взаимодействия резонансов, рассмотрим еще одну сравнительно простую систему, которая может быть сведена к основной модели (2.1.11) с дискретным временем. Речь идет о периодическом прохождении нелинейного осциллятора через резонанс.

Если амплитуда колебаний частоты значительно превосходит ширину резонанса

$$\Delta\Omega \gg (\Delta\omega)_K \sim \Omega_f \quad (2.9.1)$$

то действие резонанса можно рассматривать как короткий толчок; мы имеем, следовательно, систему типа основной модели, граница стохастичности которой определяется условием (2.5.1). С другой стороны, как это следует из результатов § 2.6, должен выполняться общий критерий стохастичности (2.1.4).

Рассматриваемая в этом параграфе система представляет особый интерес еще и потому, что в одной из ранних работ автора по стохастичности /10/ было сделано ошибочное заключение о наличии двух независимых условий стохастичности, которые должны выполняться одновременно. Такое заключение было сделано как раз на основе разбираемого процесса.

Пусть частота, скажем, возмущения изменяется по закону:

$$\Omega = \bar{\Omega} + \frac{\Delta\Omega}{2} \cdot \cos \Omega_0 t \quad (2.9.2)$$

При условии $\Omega_0 \ll \Delta\Omega$ возмущение имеет локально эквидистантный спектр с расстоянием между резонансами $\Delta\Omega$ и числом основных резонансов $\sim \Delta\Omega/\Omega_0$.

На основании равенства Парсеваля (условие нормировки) получаем оценку:

$$\varepsilon f_k \sim \varepsilon f_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Delta\Omega} \right)^{1/2} \quad (2.9.3)$$

где εf_0 , εf_k - амплитуды частотно-модулированной силы и её гармоник, соответственно. Общий критерий стохастичности (2.1.4) даёт:

$$S^2 = \left(\frac{\Omega_k}{\Omega_0} \right)^2 \sim \frac{\varepsilon f_0 v_0 \omega' w}{\Omega_0^2} \cdot \left(\frac{\Omega_0}{\Delta\Omega} \right)^{1/2} \sim 1 \quad (2.9.4)$$

независимо от скорости прохождения резонанса. Здесь v_0 - амплитуда скорости, а $\Omega_k \sim \sqrt{\varepsilon f_k v_0 \omega' w}$ - частота фазовых колебаний на одной из гармоник силы, в отличие от $\Omega_\phi \sim \sqrt{\varepsilon f_0 v_0 \omega' w}$ - частоты фазовых колебаний в момент прохождения резонанса (см. § 1.5).

Рассмотрим теперь другой подход к задаче. При быстром прохождении через резонанс ($V \gg 1$, см. ниже) изменение частоты (и энергии) осциллятора даётся выражением (1.5.7), которое приводит к первому из разностных уравнений типа (2.1.11). Уравнение для фазы также можно получить из (1.5.7) следующим образом. Раскрывая скобки, найдем ($k = 1$):

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \frac{\dot{\Omega}t^2}{2} \mp \frac{4\omega}{2} \cdot t + \frac{(4\omega)}{8\dot{\omega}}^2 \quad (2.9.5)$$

Здесь третье слагаемое даёт обычное изменение фазы за счёт изменения частоты осциллятора после прохождения резонанса. Множитель $1/2$ объясняется тем, что в этом члене учитывается только половина изменения частоты после момента точного резонанса (см. § 1.5). Другая половина заключена во втором члене, который при произвольном изменении частоты $\Omega(t)$ заменяется на $\int (\Omega(t) - \omega_0) dt = \int \Omega dt - \omega_0 t$, где ω_0 - значение частоты осциллятора в момент точного резонанса. Последний член (2.9.5) мал при условии (2.9.1). Для получения фазы следующего резонанса необходимо просуммировать выражения (2.9.5) после первого резонанса (верхний знак) и до второго (нижний знак). Учитывая также правила изме-

нения знаков при изменении направления прохождения резонанса (§ 1.5), получим:

$$\psi_1 = \psi_0 + \int_0^{t_{01}} \Omega dt - \omega_1 t_{01} + \frac{(\Delta\omega)_0^2}{\dot{\Omega}_0} + \frac{(\Delta\omega)_1^2}{\dot{\Omega}_1} \quad (2.9.6)$$

где $t_{01} \approx T/2 = \pi/\Omega_0$ есть промежуток времени между двумя последовательными прохождениями резонанса, причём предполагается, что $\omega \approx \bar{\Omega}$ (2.9.2).

Равенство $t_{01} \approx T/2$ нарушается, во-первых, вследствие изменения частоты ω : $\Delta t_{01} \sim (\Delta\omega)^2 / \dot{\Omega}$; этим эффектом можно пренебречь так же, как и двумя последними членами в (2.9.6) при условии (2.9.1). Во-вторых, необходимо учесть конечную амплитуду фазовых колебаний, так что момент резонанса определяется по пересечению прямой и синусоиды на рис. 1.5.1. Это приводит к дополнительному изменению фазы резонанса на $\Delta\psi \sim V^{-1}$. Этот эффект становится существенным при медленном прохождении резонанса (см. ниже).

С учётом упомянутых выше приближений можно описать прохождение резонанса следующим преобразованием:

$$\omega_{n+1} \approx \omega_n - \sqrt{\frac{2\pi}{V}} \cdot \Omega_\phi \cdot \cos(\psi_n \pm \frac{\pi}{4})$$

$$\psi_{n+1} \approx \psi_n + \theta - \frac{\pi \omega_{n+1}}{\Omega_0} \quad (2.9.7)$$

где постоянная фаза $\theta = \int_0^{T/2} \Omega dt$, а знак определяется направлением прохождения через резонанс (см. § 1.5). Параметр стохастичности для (2.9.7) находим аналогично (2.4.8,3):

$$K_0 \approx \pi \sqrt{2\pi} \Omega_\phi^2 / \Omega_0 \sqrt{\dot{\Omega}} \sim 1 \quad (2.9.8)$$

Последняя оценка даёт критерий стохастичности (2.5.1). Поскольку $\dot{\Omega} \sim 4\Omega \cdot \Omega_0$ и $\Omega_\phi^2 \sim \Omega_k^2 (4\Omega / \Omega_0)^{1/2}$ (2.9.3), то $K_0 \sim (\Omega_k / \Omega_0)^2 \sim s^2$

и обе формы критерия стохастичности (2.9.4,8) совпадают.

При медленном прохождении резонанса, когда

$$V = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega_\phi^2} \sim \frac{4\Omega \cdot \Omega_0}{\Omega_\phi^2} \sim \sqrt{\frac{4\Omega}{\Omega_0}} \cdot s^{-2} \ll 1 \quad (2.9.8)$$

изменение частоты осциллятора даётся выражением (1.5.9):

$$\Delta\omega(\omega, \xi) = 2V\Omega_+ \cdot \ln(V+\xi)(4\pi V - \xi^2) + \\ + \frac{8}{\pi}\Omega_+ \sqrt{1 + 2\pi V - \xi^2/4} \quad (2.9.10)$$

Изменение фазы определяется, по-прежнему, соотношением (2.9.6), однако, теперь нужно учесть дополнительную конечную амплитуду фазовых колебаний, как было отмечено выше. Это эквивалентно переходу от непрерывной фазы ψ , которая определяется соотношением (2.9.6), к фазе $\xi = \psi - \pi/2$, ограниченной интервалом: $-V < \xi < \sqrt{4\pi V}$. Поскольку в этом интервале $\cos \xi \approx 1 - \xi^2/2$, то из (1.5.3) находим (см. также рис. 1.5.1):

$$V(\psi - \psi_+) \approx 1 - \xi^2/2 \quad (2.9.11)$$

В дальнейшем нам потребуется производная:

$$\frac{d\xi}{d\psi_+} = \frac{V}{V+\xi} \sim \sqrt{V} \quad (2.9.12)$$

где мы использовали условие $d\psi/d\xi = 1$ (рис. 1.5.1). Последняя оценка легко получается и непосредственно, если учесть, что интервал изменения ψ равен 2π , а ξ около $\sqrt{2\pi V}$.

Теперь мы можем приблизенно описать медленное прохождение резонанса преобразованием:

$$\omega_{n+1} \approx \omega_n \pm \Delta\omega(\omega_n, \xi_n) \quad (2.9.13)$$

$$\psi_{n+1} \approx \psi_n + \theta - \frac{\pi\omega_{n+1}}{\Omega_0}$$

Здесь функция $\Delta\omega(\omega_n, \xi_n)$ даётся выражением (2.9.10), связь между ψ_n, ξ_n — уравнением (2.9.11), а постоянная фаза θ определена выше. Параметр стохастичности равен:

$$K_0 \approx \left| \frac{d\xi_{n+1}}{d\psi_{n+1}} \cdot \frac{d\psi_{n+1}}{d\xi_n} \right| \sim \frac{\dot{\xi}_n}{\Omega_0 \Omega_+} \sim \frac{4\Omega}{\Omega_+} \quad (2.9.14)$$

где первая из производных даётся выражением (2.9.12), а вторая $\sim \sqrt{V} \Omega_+ / \Omega_0$.

Соотношение (2.9.14) показывает, что в приближении коротких толчков (2.9.1)

$K_0 \gg 1$, т.е. медленное прохождение всегда приводит к стохастичности.

На первый взгляд критерий (2.9.14) никак не связан с параметром перекрытия резонансов S . Однако не следует забывать, что должно выполняться условие медленного прохождения (2.9.9), из которого следует, что при $\Delta\Omega > \Omega_0$ всегда $S > 1$. Если же $\Delta\Omega \ll \Omega_0$, то параметр S теряет свой смысл, поскольку в этом случае имеется практически единственный резонанс $\Omega = \bar{\Omega}$, тогда как ширина остальных существенно меньше и ими можно просто пренебречь (см. § 2.7).

Остается рассмотреть случай $\Delta\Omega \lesssim \Omega_\phi$, когда приближение коротких толчков несправедливо. Вместо этого перейдем к фазовому уравнению, исходя из уравнений в медленных переменных вида (1.3.15):

$$\begin{aligned} \dot{I} &\approx -\varepsilon I_0 \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &\approx \omega - \Omega(t) \end{aligned} \quad (2.9.15)$$

где $\Omega(t)$ — периодическая функция (2.9.2). Получаем:

$$\ddot{\varphi} + \Omega_\phi^2 \cos \varphi \approx -\dot{\Omega}(t) \quad (2.9.16)$$

Эта система имеет сепаратрису, в окрестности которой образуется стохастический слой под действием возмущения в правой части (2.9.16). Согласно результатам § 2.6 относительная ширина стохастического слоя по энергии даётся оценкой:

$$\delta \sim \mu \sim \frac{\dot{\Omega}}{\Omega_\phi^2} = V \quad (2.9.17)$$

при условии, что частота возмущения достаточно мала: $\Omega_0 \lesssim \Omega_\phi$. В противном случае ширина слоя экспоненциально мала (2.6.17). Результаты § 2.6 применимы при малом возмущении ($\mu \ll 1$), т.е. только для медленного прохождения резонанса. При быстром прохождении система (2.9.16) просто не имеет сепаратрисы (§ 1.5). Что же касается стохастичности, возможной согласно (2.9.4) и при быстром прохождении, то она связана с совсем другим механизмом, а именно с перемешиванием фазы от одного прохождения резонанса до следующего.

При медленном прохождении резонанса действуют, таким образом, два механизма стохастичности: один такой же, как и при быстром, а другой связан со стохас-

тическим слоем. Влияние последнего механизма зависит от отношения диапазона изменения частоты ($\Delta\Omega$) к ширине слоя: $\Delta\Omega/\Omega_0 \delta \sim \Omega_0 / \Omega_\phi$. Максимальное влияние соответствует условию $\Omega_0 \sim \Omega_\phi$ (при $\Omega_0 > \Omega_\phi$ ширина слоя убывает экспоненциально). В этом случае имеет место стохастичность, что не противоречит общему критерию по параметру S , поскольку $\Delta\Omega \ll \Omega_0 \sim \Omega_\phi$ и этот параметр теряет смысл, как было отмечено выше.

Если же $\Omega_0 \ll \Omega_\phi$ (и $\Delta\Omega \ll \Omega_\phi$), то возможен случай, когда $\Delta\Omega \gg \Omega_0$, так что параметр стохастичности $S \gtrsim 1$ (2.9.9) имеет обычный смысл. С точки зрения уравнения (2.9.16) в этом случае также можно ожидать стохастичности, так как система проходит стохастический слой в течение примерно одного периода фазовых колебаний (1.5.3; 2.9.17). К тому же при медленном прохождении возможны захваты (§ 1.6), которые увеличивают время пребывания системы в стохастическом слое, а, следовательно, и общую стохастичность движения.

Таким образом, общий критерий стохастичности по перекрытию резонансов (2.1.4) работает и для периодического прохождения резонанса, как быстрого, так и медленного. Причём в последнем случае всегда имеет место стохастичность в противоположность работе /10/, где предполагалось, наоборот, что при медленном прохождении стохастичность всегда отсутствует из-за приближенной обратимости процесса (см. § 1.5). Как мы увидим дальше, последний эффект приводит лишь к уменьшению скорости диффузии и энтропии (§ 2.11).

§ 2.10 Кинетическое уравнение

Если движение динамической системы становится стохастическим, описание его в терминах траектории теряет физический смысл из-за локальной неустойчивости. Переход к статистическому описанию, смысл которого и состоит, на наш взгляд, как раз в восстановлении устойчивости описания, производится, обычно, в два ряма. Прежде всего в качестве основной физической величины вводится функция распределения или

фазовая плотность $f(x, t)$ (x - полный набор координат фазового пространства) ансамбля тождественных систем, различающихся лишь начальными условиями. Изменение f определяется уравнением Лиувилля:

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = \hat{L}f \quad (2.10.1)$$

где \hat{L} - некоторый линейный дифференциальный оператор /49/.

Приято подчеркивать эквивалентность уравнения Лиувилля и динамических уравнений. Однако не следует забывать, что их решения физически тождественны только для сингулярных начальных условий: $f(x, 0) = \delta(x - x_0)$, так как, по крайней мере, оставаясь в пределах классической механики, мы имеем дело лишь с одной единственной системой из статистического ансамбля. Этот факт, который часто недефиницивается (см., например, /50/), имеет первостепенное значение при обсуждении природы статистических законов /30/ (см. также § 2.13). Использование непрерывной плотности $f(x, t)$ уже означает введение в механику некоторого вероятностного элемента и, в частности, исключение множества особых траекторий нулевой меры. При этом не следует думать, что эти особые траектории являются совсем уж исключительными. Например, к ним относятся периодические траектории стохастической системы, которые образуют всюду плотное множество /40/ (§ 2.8). Кроме того, введение непрерывной плотности автоматически исключает всякие флюктуации в пределе $t \rightarrow \infty$.

Со сделанными оговорками уравнение Лиувилля эквивалентно динамическим уравнениям, и его решение для стохастической системы также оказывается неустойчивым в следующем смысле. Введем так называемую крупноструктурную фазовую плотность $\bar{f}(x, t, \lambda)$, которая получается путем усреднения $f(x, t)$ по ячейкам фазового пространства размера $\lambda \rightarrow 0$ /32/. Только такая плотность и имеет непосредственный физический смысл. Действительно, мы всегда имеем дело с конечным, хотя возможно, и очень большим числом систем N . Отсюда ясно, что плотность определяется лишь для конечных ячеек фазового пространства, содержа-

ших много систем: $f(x, t) \cdot \lambda^k \gg 1$. Если, с другой стороны, мы имеем все-го одну систему и находим плотность по относительному времени пребывания системы в ячейке фазового пространства, то опять таки система должна попасть в ячейку не-колько раз, т.е. ячейка должна иметь конечный размер для любого конечного време-ни движения.

Очевидно, что свойства и поведение крупноструктурной плотности \bar{f} зависят до известной степени от выбора того или иного набора ячеек фазового пространства. Вот почему понятие разбиения (фазового пространства на ячейки) является одним из основных в эргодической теории. В частности, как показал недавно Синай /52/, мож-но выбрать специальные (марковские) разбиения, с помощью которых можно строго перейти от динамического описания к статистическому (вероятностному) в форме мар-ковского процесса.

Положим

$$\tilde{f}(x, t) = \bar{f}(x, t, \lambda) + \tilde{\bar{f}}(x, t, \lambda) \quad (2.10.2)$$

где $\tilde{\bar{f}}(x, t, \lambda)$ - тонкая структура плотности с длиной волны λ . Оказы-вается, что как бы мало не было $\lambda \rightarrow 0$, тонкая структура $\tilde{\bar{f}}$, вообще говоря, существенно влияет на эволюцию крупноструктурной плотности \bar{f} по уравнению Ли - уилля. Это вытекает непосредственно из качественной картины процесса перемешива-ния, набросанной в § 2.4. Очевидно, что речь идет о той же неустойчивости траекто-рий стохастической системы, выраженной на другом языке. Напомним, что время раз-вития такой неустойчивости очень слабо зависит от масштаба тонкой структуры:

$$\tilde{\tau}_\lambda \sim |\ln \lambda| \quad (\S 2.4).$$

Чтобы окончательно избавиться от этой неустойчивости необходимо перейти от уравнения Лиувилля к другому уравнению, которое автоматически исключало бы тон-кую структуру плотности. Такое уравнение мы будем называть кинетическим^{x)}. Для

x) Это определение не является общепринятым. Иногда, например, кинетическим назы-вают уравнение Лиувилля /32/ или сходное с ним /69/. С другой стороны, начиная с работы Боголюбова /54/, термин "кинетическое уравнение" применяется также в уз-ком смысле и обозначает только уравнение для так называемой одночастичной функ-ции распределения (см. /55, 57/, а также § 2.12).

исключения тонкой структуры естественно добавить к уравнению Лиувилля операцию периодического (через некоторый характерный интервал времени Δt) усреднения уравнения (для \bar{f}) по всевозможным функциям \tilde{f} , точнее, по полной системе таких функций. Если в качестве последних выбрать δ -функции в каждой из ячеек фазового пространства $(f(x, t) = \sum_i f_i \cdot \delta(x - x_i))$, мы придём к наглядной картине усреднения по положению траектории системы в ячейке фазового пространства. При этом распределение траектории внутри ячейки считается равномерным. Последняя гипотеза, необходимая для выполнения операции усреднения, является осно-вой, явной или неявной, всех методов получения кинетического уравнения /30/. Интуи-тивное оправдание этой гипотезы сводится к "сложности" обычных систем статисти-ческой механики и "запутанности" их траекторий. Математическое оформление этих наглядных соображений производится /49/ путем предельного перехода $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = const$, где N - число частиц в системе, V - ее объ-ём (дальнейшие подробности этого метода см в § 2.13). Другое обоснование может быть получено с помощью современной эргодической теории (см. ниже).

Поясним физический смысл усреднения на языке траекторий. Как уже отмеча-лось выше, в действительности, мы всегда имеем дело с единственной траекторией единственной системы (конечное число систем, взаимодействующих или невзаимодей-ствующих, эквивалентно одной системе в объединённом фазовом пространстве - так называемом Γ -пространстве). Движение по этой траектории можно разбить на два процесса: перемещивание на небольшом участке фазового пространства ($\lambda \rightarrow 0$) в непосредственной окрестности данной точки траектории и переход от одного такого участка к другому по всей доступной области фазового пространства. Последний про-цесс как раз и описывается кинетическим уравнением, в то время как первый эквива-лентен усреднению по времени или, в силу эргодичности, по фазовой ячейке. С физи-ческой или, лучше сказать, механической точки зрения исходным (в Γ -пространст-ве, см. § 2.12) является усреднение по времени (первый процесс).

Неустойчивость решений уравнения Лиувилля для стохастической системы обобщает обычное понятие некорректно поставленной задачи для уравнения в частных производных, понятие, введенное Адамаром (см., например, /58/). Последнее означает отсутствие непрерывной зависимости решения от начальных условий.

Задача Коши для уравнения Лиувилля – уравнения волнового типа – всегда корректна в обычном смысле, т.е. для конечного промежутка времени и при определении "расстояния" между функциями через их разность (например, $\rho(f, \varphi) = \max |f(x) - \varphi(x)|$, см. /58/). Однако, в качестве "расстояния" между функциями распределения можно принять параметр тонкой структуры λ (2.10.2). При $\lambda \rightarrow 0$ функции $f(x, t)$, $\varphi(x, t)$ считаются близкими независимо от величины $|\tilde{f}|$, $|\tilde{\varphi}|$, если только $\tilde{f} \rightarrow \tilde{\varphi}$ в обычном смысле. Очевидно, что близкие в указанном смысле функции распределения отличаются бесконечно-малым сдвигом траекторий; в этом и заключается физический смысл нового определения "расстояния" между функциями. Если, далее, рассмотреть асимптотику решения уравнения Лиувилля при $t \rightarrow \infty$, то задача становится некорректной и потому требует особых методов решения. Одним из них является метод кинетического уравнения.

В последнее время совершенно независимо от статистической механики были разработаны различные методы решения некорректно поставленных задач совершенно другого класса. Наиболее полный обзор этих работ можно найти в статье Лаврентьева /59/. Один из них, метод регуляризующего оператора, предложенный Тихоновым /60/, напоминает по своему подходу метод кинетического уравнения. Было бы интересно провести более систематическое сравнение обоих классов некорректных задач.

В связи с операцией усреднения естественно возникает понятие вероятности перехода (между ячейками фазового пространства), которая может быть вычислена, исходя из динамических уравнений и вышеприведенной гипотезы о равномерном "размazyвании" траектории по ячейкам.

С помощью вероятности перехода можно не только получить наиболее общее

кинетическое уравнение интегро-дифференциального типа /51,43/, но и описать флюктуации, игнорируемые обычным кинетическим уравнением. Описание движения системы в терминах вероятностей перехода называется марковским процессом. Его характерной особенностью является независимость от предистории движения. Для произвольного разбиения фазового пространства вероятности перехода между ячейками разбиения, определяемые по мере соответствующих областей, вообще говоря, зависит от предыдущих состояний. Это не позволяло осуществить строгий переход от динамических уравнений к марковскому процессу /30/ несмотря на многочисленные попытки. Только совсем недавно Синаю удалось построить специальные разбиения, для которых такой переход оказывается возможным /52/. Эти, марковские, разбиения имеют, вообще говоря, очень сложную структуру. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся получением только кинетического уравнения как простейшего метода описания стохастического процесса.

Решения кинетического уравнения являются, вообще говоря, устойчивыми и, таким образом, снова обретают обычный физический смысл. Однако эта устойчивость покупается ценой потери части решений исходного уравнения Лиувилля, которые являются неустойчивыми. Последние описывают рост флюктуаций. Заранее совершенно неочевидно, что устойчивые решения кинетического уравнения (типа релаксации к равновесному состоянию) вообще существуют и тем более описывают в некотором смысле подавляющее большинство наблюдаемых процессов. Последнее связано, главным образом, с тем счастливым обстоятельством, что наш мир находится в резко неравновесном состоянии. Вот если бы нам нужно было описывать те жалкие явления, которые еще могут происходить в состоянии статистического равновесия, то наиболее важными были бы, пожалуй, как раз процессы возникновения больших флюктуаций. При этом мы были бы поставлены перед очень трудной дилеммой – либо придумать все же какой-то способ устойчивого описания роста флюктуаций, либо вообще отказаться от требования устойчивости при описании физических процессов. В любом случае статисти-

ческая физика таких процессов выглядела бы довольно необычно с нынешней точки зрения. В качестве примера можно указать на современный метод описания роста больших флуктуаций апостериори, т.е. при условии (после) возникновения флуктуации с заданными параметрами /61, 62/. Такое описание производится с помощью уравнения, аналогичного кинетическому, и является устойчивым. Однако ясно, что при этом теряется, вероятно, самая важная черта физического закона — возможность предсказания. Мы продолжим обсуждение этих вопросов в § 2.13.

Поскольку процессы релаксации и роста флуктуаций являются взаимообратными во времени, кинетическое уравнение, описывающее только релаксацию, оказывается по необходимости необратимым. Ясно, что это вовсе не означает физической неравноправности обоих направлений времени, или существования "стрелы времени", как сейчас принято говорить /70/, а является следствием упомянутого выше добровольного исключении обратных процессов, в принципе возможных, но неустойчивых (подробнее см. § 2.13). Интересно отметить, что такая точка зрения, совершенно естественная для современной эргодической теории (см. § 2.4), не разделяется многими из физиков (см., например, /70/).

Насколько нам известно, до сих пор никто не предпринимал попытки получить кинетическое уравнение с помощью эргодической теории. Обычно статистический элемент при выводе кинетического уравнения просто постулируется в той или иной форме, например, предположение об отсутствии парных корреляций в первой кинетической теории Больцмана, условия ослабления корреляций Боголюбова /54, 55/ или гипотеза случайных фаз в квазилинейной теории плазменных волн /56/.

В этом параграфе мы получим кинетическое уравнение для основной модели (2.1.11) без априорных статистических гипотез, опираясь на результаты эргодической теории (§§ 2.3, 4). Сравнение нашего подхода к задаче и подхода современной статистической механики будет дано в §§ 2.11, 13. Сейчас отметим только, что кинетическое уравнение, которое мы собираемся получить, аналогично основному кинетич-

кому уравнению статистической механики, поскольку оно относится к Γ -пространству. Это - единственная возможность для одномерной системы типа основной модели. В многомерном случае возможно кинетическое уравнение другого типа в так называемом M -пространстве (см. конец § 2.12).

Поскольку для нашей модели возмущение мало ($\varepsilon \rightarrow 0$), кинетическое уравнение должно иметь вид диффузионного уравнения ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова) /43, 44/ (2.10.10). Оно определяется, как известно, двумя первыми моментами $\langle (\Delta I)_1 \rangle$, $\langle (\Delta I)_1^2 \rangle$, где индекс 1 указывает, что берется среднее значение за единицу времени (на один шаг в нашем случае), а усреднение производится с помощью вероятности перехода.

Напомним, что первый момент $\langle (\Delta I)_1 \rangle$ описывает систематическое изменение импульса и равен средней скорости его изменения. Собственно диффузия описывается вторым моментом $\langle (\Delta I)_1^2 \rangle$, который равен средней скорости "рассеяния" по I . Именно с этой величиной связаны все статистические свойства процесса и только благодаря этой величине уравнение ФПК становится кинетическим в указанном выше смысле. Отсюда можно заключить, что для перехода к кинетическому уравнению необходимо, чтобы величина $(\Delta I)^2$ росла (в среднем) $\propto t$.

Как отмечалось выше, усреднение по вероятностям перехода или по ячейкам фазового пространства есть ни что иное, как приближенное описание временной эволюции одной из систем статистического ансамбля, определяемой единственной динамической траекторией. Поэтому при вычислении $\langle (\Delta I)_1^2 \rangle$ исходное усреднение должно производиться по времени. Запишем изменение I_{n+1} для одной из систем ансамбля в виде:

$$I_{n+1} = I_n - \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^n h_\theta(\theta_k) \quad (2.10.3)$$

где мы пренебрегли для простоты зависимостью h_θ от I_n , которая учитывается при вычислении $\langle (\Delta I)_1 \rangle$ (см. ниже). Находим

$$(\Delta I)^2 = \varepsilon^2 \cdot \left[\sum_{k=0}^n h_\theta^2(\theta_k) + \sum_{k \neq \ell} h_\theta(\theta_k) \cdot h_\theta(\theta_\ell) \right] \quad (2.10.4)$$

Для получения кинетического уравнения нужно, чтобы эта величина росла (в среднем) пропорционально времени ($\propto n$), т.е. достаточно пренебречь второй суммой. Именно в ней заключена вся неустойчивость стохастического движения, а также его обратимость (а, значит, и флюктуации), так как эта сумма зависит от корреляции последовательных во времени фаз. Следовательно, нам достаточно потребовать отсутствия парных автокорреляций (§ 2.3). Если к тому же движение эргодично по фазе, то:

$$\overline{(\Delta I)_1^2} = \langle (\Delta I)_1^2 \rangle = \varepsilon^2 \cdot \langle h_\theta^2 \rangle \quad (2.10.5)$$

Заметим, что отбрасывание второй суммы (\sum_2) в (2.10.4) не является три-виальной математической операцией, так как \sum_2 порядка первой суммы ($\sum_k h_\theta(\theta_k) \sim h_\theta \cdot \sqrt{n}$). Отбрасывание возможно лишь в среднем, поскольку \sum_2 осциллирует. В идейном отношении этот приём похож на метод усреднения в нелинейной механике /3/. Кроме того, мы просто отбрасываем такие специальные начальные условия, когда в течение длительного времени вторая сумма много больше первой (флюктуации).

Казалось бы, что эргодическая теория как раз и позволяет обосновать отбрасывание \sum_2 в (2.10.4), причём достаточно даже слабого перемешивания (§ 2.3). Однако в действительности положение оказывается более сложным. Дело в том, что по эргодической теории перемешивание и, в частности, исчезновение парных корреляций имеет место лишь асимптотически при $\zeta \rightarrow \pm \infty$, т.е. происходит параллельно релаксации к статистически равновесному состоянию. Мы же хотим описать сам процесс релаксации. Другая сторона этой трудности связана с тем, что перемешивание по фазе θ , которую мы хотели бы рассматривать как "чисто случайный" ("микроскопический") параметр, обязательно сопровождается, в силу уравнений движения (2.1.11), перемешиванием по импульсу I , который должен был бы играть роль чисто диффузионной ("макроскопической") переменной. Поэтому с первого взгляда кажется, что

вообще невозможно применить кинетическое уравнение к неоднородным распределениям, а значит, оно вообще теряет свой смысл. Все эти трудности были подробно проанализированы Крыловым /30/, который пришел к пессимистическому заключению.

Нам кажется, однако, что выход может быть найден, используя идею Боголюбова /54, 55/ о введении в задачу различных масштабов времени. В случае основной модели речь идет о двух временах — времени динамического перемешивания $\tau_n \sim 1$ (одного шага) и времени диффузии по I: $\tau_d \sim \varepsilon^{-2}$ (шагов, см. ниже). Асимптотически при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы можем, таким образом, отделить оба процесса с любой степенью точности^{x)}.

Сформулируем более аккуратно условия такого отделения перемешивания от диффузии. Для этого вычислим (2.10.4), разбив ее на подсуммы с заданной разностью $\bar{n} = k - l$ ($l = 1, 2, \dots$) и введя коэффициент парной корреляции $\rho(\bar{n}) = \langle h_\theta(\theta_k) \cdot h_\theta(\theta_{k+\bar{n}}) \rangle / \langle h_\theta^2(\theta_k) \rangle$. Интересующая нас сумма оказывается асимптотически ($n \rightarrow \infty$) равной: $\sum_{\bar{n}=2}^{\infty} \approx n \cdot \langle h_\theta^2 \rangle \cdot \sum_{\bar{n}=1}^{\infty} \rho(\bar{n})$, т.е. пропорциональной n так же, как и первая сумма в (2.10.4). Поэтому кинетическое уравнение (ФПК) остается справедливым и при наличии корреляции (с другим коэффициентом диффузии), если только сумма $\sum \rho(\bar{n})$ сходится. В противном случае $\sum_{\bar{n}=2}^{\infty}$ растет быстрее, чем t , и кинетическое уравнение неприменимо.

Условие сходимости суммы можно записать в виде:

$$\rho(\bar{n}) < \bar{n}^{-\alpha}; \alpha > 1; \bar{n} \rightarrow \infty \quad (2.10.5a)$$

Это и есть более аккуратное условие применимости кинетического уравнения для систем рассматриваемого типа. Из этого условия видно, в частности, что слабого перемешивания недостаточно, поскольку при этом нет, вообще говоря, ограничения на скорость убывания корреляций. Достаточным условием является стохастичность, включающая в себя также и требование положительной энтропии (§ 2.3). В последнем случае $\rho(\bar{n}) = e^{-h \cdot \bar{n}} = \beta^{\bar{n}}$ ($\beta < 1$; h — энтропия) и для второго момента

x) Сравнение с теорией Боголюбова, где введены другие масштабы времени, будет дано в § 2.18.

получается следующее выражение, уточняющее (2.10.5):

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \varepsilon^2 \langle h_\theta^2 \rangle (1 - \beta)^{-1} \quad (2.10.56)$$

При достаточно большой энтропии ($h \gg 1$) поправка невелика. Если, однако, $h \ll 1$, то необходимо учитывать не только изменение второго момента, а следовательно, и коэффициента диффузии (2.10.12), но и динамического масштаба времени $\tau_n \sim h^{-1}$.

Заметим, наконец, что экспоненциальное убывание корреляций при $h > 0$, хотя и не является необходимым условием, существенно повышает точность статистического описания с помощью кинетического уравнения.

Как было отмечено выше, процесс перемешивания захватывает не только фазу θ , но и импульс I , который с другой стороны является независимой переменной функции распределения. Для преодоления этой трудности разделим I на две части:

$$I = \bar{I} + \tilde{I} \quad (2.10.6)$$

диффузионную (\bar{I}) и динамическую (\tilde{I}), таким образом, чтобы процесс перемешивания влиял бы только на \tilde{I} , но не на \bar{I} . С другой стороны, диффузия определяется теперь лишь с точностью до величины \tilde{I} , которая должна быть, конечно, достаточно мала, чтобы вся эта процедура имела физический смысл. Величину \tilde{I} проще всего оценить из наклона собственного вектора растяжения, т.е. из наклона растягивающей асимметрии (2.4.14):

$$(\Delta I)_o = \tilde{I} \sim \frac{\varepsilon}{K_o} \ll 1 \quad (2.10.7)$$

Таким образом существует минимальный размер (ΔI_o) ячейки разбиения, внутри которой кинетическое описание, т.е. описание с помощью кинетического уравнения, становится неприменимым. Функция распределения f внутри минимальной ячейки должна считаться постоянной.

Размер ячейки (2.10.7) можно уменьшить, если рассмотреть преобразование на N шагов. Тогда $\varepsilon \rightarrow \varepsilon \sqrt{N}$; $K_o \rightarrow K_o \sqrt{N}$ (см. § 2.11), но при этом уменьшается отношение $\tilde{\tau}_z / \tau_n \sim (N\varepsilon^2)^{-1}$. Условие $\tilde{\tau}_z \sim \tau_n$ определяет

максимально допустимую длительность динамического процесса перемешивания:

$N_{\max} \sim \varepsilon^{-2}$. Отсюда абсолютный минимум размера ячейки:

$$(\Delta I)_{\min} \sim e^{-ch/\varepsilon^2} \quad (2.10.8)$$

где $h \sim \ln K$, — энтропия, а $C \sim 1$ — некоторая постоянная, зависящая от требуемой точности описания.

Подчеркнем, что ограничение на размер ячейки фазового пространства, а, следовательно, и на допустимые разбиения, относится только к описанию процесса релаксации с помощью кинетического уравнения и не распространяется на асимптотические теоремы эргодической теории. В частности, это ограничение отпадает для равновесного состояния. Заметим, однако, что в любом случае статистическая механика имеет дело с конечными, хотя бы и сколько угодно малыми, ячейками фазового пространства, что эквивалентно использованию крупноструктурной функции распределения^{x)}. Часто это не оговаривается специально (см., например, /65/), а просто подразумевается, что кинетическое уравнение даёт неполное описание по части переменных (скажем, по импульсам), в то время как остальные переменные (фазы) определяют вероятности переходов. В некоторых задачах эти "случайные" переменные внешне замаскированы как, например, в кинетическом уравнении типа Больцмана. Иногда недовольки такого рода приводят к прямым недоразумениям, в частности, к ошибочному утверждению, что "точная" энтропия замкнутой системы не возрастает /67/.

Возвращаясь к уравнению ФПК заметим, что первый момент $\langle (\Delta I) \rangle$ необходимо вычислить с той же точностью, что и второй (2.10.5), т.е. с точностью $\sim \varepsilon^2$. Воспользуемся для этого выражением (2.1.12) и учтём, что $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ ($\varepsilon \tilde{\varepsilon} = \text{const}$): $\langle h_\theta \rangle_0 = 0$; $\langle h_{\theta I} \cdot h_\theta - h_{\theta\theta} \cdot h_I \rangle =$
 $= 2 \langle h_{\theta I} \cdot h_\theta \rangle - \langle (h_\theta \cdot h_I) \rangle_\theta = \langle \langle h_\theta^2 \rangle \rangle_I$.

x) С этим связана возрожденная в последнее время так называемая символическая динамика /68/, описанная еще Биркгофом (/16/, гл.УШ, § 11).

где мы предполагаем все функции непрерывными. Получаем:

$$\langle (\Delta I)_1 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial I} \langle (\Delta I)_1^2 \rangle \quad (2.10.9)$$

С учётом этого соотношения уравнение ФПК

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial I} \left(\bar{f} \cdot \langle (\Delta I)_1 \rangle \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} \left(\bar{f} \cdot \langle (\Delta I)_1^2 \rangle \right) \quad (2.10.10)$$

сводится, как известно^{x)}, к обычному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} \left(D(I) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial I} \right) \quad (2.10.11)$$

с коэффициентом диффузии

$$D(I) = \frac{\langle (\Delta I)_1^2 \rangle}{2} = \frac{\varepsilon^2 \langle h_\alpha^2 \rangle}{2} \quad (2.10.12)$$

Из последнего выражения вытекает, в частности, справедливость приведенной выше оценки для диффузионного масштаба времени $\tilde{\tau}_d \sim \varepsilon^{-2}$.

В дальнейшем мы опустим черту над функцией f и будем считать, если не сделано специальной оговорки, что все функции распределения являются крупноструктурными ($\bar{f} \rightarrow f$).

Соотношение (2.10.9) значительно упрощает составление уравнения ФПК, так как для вычисления второго момента достаточно первого приближения. Ландау показал /66/, что соотношение (2.10.9) вытекает непосредственно из принципа детального равновесия, т.е. из симметрии вероятности перехода по отношению к начальному и конечному состояниям. К сожалению, принцип детального равновесия справедлив далеко не всегда даже при условии симметрии по отношению к обращению времени. В последнем случае подразумевается также обращение всех скоростей, что вообще говоря, не предполагается при формулировке принципа детального равновесия.

В общем случае к уравнению диффузии (2.10.11) нужно добавить член $- \frac{\partial}{\partial I} \left(\bar{f} \langle (\Delta I)_a \rangle \right)$, где $\langle (\Delta I)_a \rangle$ — дополнительная (аномальная) скорость изменения импульса I . Общее соотношение между моментами в отсутствии детально-го равновесия было получено Беляевым /65/. Простым примером является прохождение См., например, /65/.

ние нелинейного осциллятора через резонанс (§§ 1.5; 2.9). Впрочем в этом случае можно также сказать, что нет и обратимости во времени, поскольку процесс рассматривается для заданного направления прохождения резонанса. Аналогичная ситуация возникает при движении заряженных частиц в заданном внешнем магнитном поле /65/. Даже при быстром прохождении появляется, вообще говоря, систематическое смещение, которое может быть вычислено из выражения (1.5.7). При этом, однако, нельзя усреднить (1.5.7) просто по фазе ψ , которая уже не является, вообще говоря, канонически сопряженной импульсу I . Последнее обстоятельство связано с тем, что преобразование (2.8.7) относится к переменному интервалу времени, который сам зависит от динамических переменных. Масштаб этого эффекта, приводящего к неравномерному перемешиванию по ψ , характеризуется величиной $V^{-1} \ll 1$ (§ 2.9) и оказывается того же порядка, что и постоянное смещение в (1.5.7). Заметим, что при вычислении коэффициента диффузии этот эффект несущественен.

Еще более простым примером может служить диссипация. Переходим от импульса I к энергии W и положим: $\langle (\delta W)_a \rangle = \dot{W} < 0$. Тогда существует стационарное решение уравнения ФПК, которое может быть записано в виде:

$$f(W) = f(0) \cdot \exp \left\{ - \int_0^W \frac{\dot{W}}{\mathcal{D}} dW \right\} \quad (2.10.13)$$

Оно означает, что существуют стационарные стохастические колебания энергии системы под действием возмущения, которые можно охарактеризовать эффективной "температурой":

$$T_{\varphi}(W) = - \frac{\mathcal{D}}{\dot{W}} \quad (2.10.14)$$

Энергетический спектр системы зависит от вида функций $\mathcal{D}(W)$, $\dot{W}(W)$; в частности, максвелловский спектр получается при "равновесном" (для данной диссипации) возмущении: $-\mathcal{D}(W)/\dot{W}(W) = T = \text{const.}$

Этот простой пример показывает, что даже при наличии затухания в нелинейной колебательной системе возможны процессы, которые не описываются ни классической

теорией возмущения, ни теорией КБМ (ср. § 2.2).

Заметим, в заключение, что при дополнительном условии симметрии импульсов I_i , системы относительно знака скоростей принцип детального равновесия, а вместе с ним и соотношение (2.10.9), которое для нескольких степеней свободы записывается в виде /65/:

$$\langle (\Delta I_i) \rangle = \sum_k \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \langle (\Delta I_i)(\Delta I_k) \rangle \quad (2.10.15)$$

уже непосредственно вытекает из обратимости во времени. Простым примером может служить система слабо связанных осцилляторов, для которых невозмущенные квадратичные импульсы зависят от квадратов скоростей. В частности, для одномерного случая это вытекает непосредственно из результатов работы /38/.

§ 2.11 Переход к непрерывному времени, или общий случай взаимодействия резонансов

В § 1.1 мы начали с изучения движения одномерного нелинейного осциллятора под действием внешних возмущений. В частном, но, пожалуй, наиболее интересном, случае стохастического режима мы вынуждены были упростить задачу и перейти к основной модели (2.1.11). Наиболее существенной особенностью последней является дискретное время. Хотя сам по себе переход к преобразованию вместо дифференциальных уравнений не ограничивает общности задачи, поскольку такой переход всегда может быть произведен с помощью обычного S -оператора^{x)}, конкретный вид основной модели (2.1.11) является несомненно некоторым частным случаем первоначальной проблемы.

В этом параграфе мы попытаемся распространить результаты, касающиеся стохастичности основной модели, на общий случай взаимодействия резонансов (§ 2.1), т.е. на одномерный неавтохронный нелинейный осциллятор типа (1.1.1). Речь идет, главным образом, о трех основных параметрах стохастической системы — критерии стохастичности энтропии и коэффициенте диффузии.

^{x)} См., например, /65/.

Исходным пунктом наших рассуждений служит элементарная модель (2.8.1), которая является почти стохастической при $k \gg 1$. Термин "почти" подразумевает наличие, вообще говоря, небольших "островков" устойчивости при любых $k \rightarrow \infty$ (§ 2.8). Последнее обстоятельство не позволяет до сих пор строго исследовать стохастические свойства элементарной модели (см. § 2.4). Подчеркнем, что наше представление о её стохастичности основано не только на физической интуиции, но и на результатах различных численных экспериментов, которые будут описаны в следующей главе.

Что касается обобщения критерия стохастичности на случай произвольного нелинейного осциллятора (1.1.1), или на случай непрерывного времени, как мы будем говорить в дальнейшем для краткости, то это уже фактически сделано в § 2.6. Напомним лишь кратко, что такое обобщение оказалось возможным благодаря тому, что механизм стохастичности связан с расширением и перекрытием стохастических слоёв резонансов, которые всегда существуют в том или ином виде и движение внутри которых сводится, в конечном счёте, к элементарной модели.

С точки зрения системы резонансов (непрерывного времени), основная модель представляет собой частный случай в том смысле, что между различными резонансами имеются вполне определенные фазовые соотношения. Возможность непосредственного перенесения критерия стохастичности для основной модели (2.5.1,2) на общий случай взаимодействия резонансов показывает, что критерий стохастичности не зависит от фазовых соотношений. Последний вывод подтверждается, в частности, и для весьма специального случая периодического прохождения резонанса (§ 2.9). К сожалению, этого нельзя сказать о двух других характеристиках стохастичности — энтропии и коэффициенте диффузии.

Начнем с энтропии. Рассмотрим преобразование типа основной модели:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi + k \cdot f(\varphi) \\ \psi_1 &= \psi + \varphi + k \cdot f(\varphi)\end{aligned}\tag{2.11.1}$$

где $f(\varphi)$ — некоторая периодическая по φ функция с периодом 1. В дальнейшем будем называть преобразование каскадом, чтобы подчеркнуть этим дискретность времени [31]. Описание движения в терминах непрерывного времени будем называть общепринятым термином — поток. Сейчас нас интересует переход от потока к каскаду, стохастические параметры которого мы умеем вычислять.

Нетрудно убедиться, что в общем случае каскад не будет иметь вид основной модели. Для этого рассмотрим преобразование (2.11.1) на два шага:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi + k f(\varphi) + k f(\varphi + k f(\varphi)) \\ \varphi_2 &= \varphi + 2(k f(\varphi)) + k f(\varphi + k f(\varphi))\end{aligned}\tag{2.11.2}$$

В общем случае оно не сводится к (2.11.1), тем более это касается преобразования на произвольное число шагов — N . В частном случае $k \gg 1$ основную роль в (2.11.2) играет последний член, так что эффективное значение параметра стохастичности $K_2 \sim k^2$. Аналогично, для преобразования на N шагов: $K_N \sim k^N$. Этот результат можно было бы получить и непосредственно из выражения для энтропии основной модели (2.4.19), которая, конечно, не должна зависеть от интервала преобразования: $h \approx \frac{1}{N} \ln K_N \approx \ln k$.

Величина $K_N \sim S_N$ есть параметр стохастичности каскада, который, таким образом, экспоненциально зависит от интервала преобразования. Но если мы имеем поток, то его параметр стохастичности задан: $S \sim Q/\Delta$ и, следовательно, выражение для энтропии каскада (2.4.21) не может быть, в общем случае использовано для потока^{x)}. Однако, в частном случае коротких толчков или периодического прохождения резонанса энтропия действительно определяется выражением (2.4.19) с $K_0 \sim S^2$. Это показывает, что энтропия существенно зависит от фазовых соотношений между резонансами и поэтому общая оценка для неё невозможна.

^{x)} Иначе говоря, неясно, каков характерный интервал времени каскада, которому соответствует параметр $S^2 \sim K_0$ потока.

Заметим, что при определении границы стохастичности такой проблемы не возникает, так как на границе стохастичности $K_n \sim k \sim 1$. Это иллюстрирует сделанное выше замечание о независимости критерия стохастичности от фазовых соотношений резонансов.

Для оценки энтропии потока можно, однако, рассмотреть в некотором смысле "типичный" случай, когда фазы различных резонансов "случайны", т.е. между ними нет никаких специальных соотношений. Тогда единственным интервалом времени, характеризующим нелинейное взаимодействие резонансов, будет обратная частота перенормированных фазовых колебаний (Ω_{Σ}^{-1}), причём перенормировка, в силу принятой случайности фаз, должна производиться со степенью $\kappa = 4$ (§ 2.7). Закон перенормировки системы резонансов одного порядка по ширине легко получается по аналогии с (2.7.13):

$$\Omega_{\Sigma}^{n-1} \sim \Omega_{\phi}^n \cdot \frac{(\Delta\omega)_{\Sigma}}{\Omega_{\Sigma} \cdot \Delta} \sim \frac{\Omega_{\phi}^n}{P \cdot \Delta} \quad (2.11.3a)$$

$$(\Delta\omega)_{\Sigma}^{n-1} \sim \frac{(\Delta\omega)_{\Sigma}^n}{\Delta}$$

где $(\Delta\omega)_{\Sigma}$, $(\Delta\omega)_n$ - перенормированная и неперенормированная ширина резонанса $P\omega = q$, соответственно; Δ - расстояние между резонансными значениями частоты ω . Мы использовали здесь соотношение: $\Omega_{\phi} \sim P(\Delta\omega)_n$ (§ 1.4). В дальнейшем положим для простоты: $P \sim 1$. Очевидно, что в качестве такой грубой оценки энтропии можно положить:

$$h \sim \Omega_{\Sigma} \sim \Omega_{\phi}^{4/3} \cdot \Delta^{-1/3} \quad (2.11.3)$$

Уточнение оценки (2.11.3), которую мы будем называть "типичной", вряд ли имеет смысл из-за сильной зависимости её от фазовых соотношений. В частности, в случае основной модели:

$$h = \frac{\Delta}{\pi} \ln \frac{\Omega_{\phi}}{\Delta} \quad (2.11.4)$$

Локальная неустойчивость, характеризуемая энтропией, определяет процесс перемешивания по фазе (для системы типа основной модели (2.11.1)). Последний можно

описать также с помощью фазовых автокорреляций аналогично тому, как это было сделано в § 2.3 для элементарного примера стохастичности. По причинам, которые выясняются ниже, мы несколько обобщим прежнее определение коэффициента корреляции, положив:

$$\rho_n^{(2)}(p, q) = \langle e^{2\pi i(p\varphi_n + q\psi)} \rangle \quad (2.11.5)$$

Рассмотрим вначале частный случай каскада (2.11.1) с $f(\psi) = (1/2\pi) \sin 2\pi\psi$ и положим $n=1$. Выражая φ_1 через φ , ψ и интегрируя в силу эргодичности ($k \gg 1$) по φ , ψ , найдем:

$$\rho_1^{(2)}(p, q) = \frac{e^{\frac{2\pi ip}{2\pi} - 1}}{2\pi p} \cdot \gamma_{p+q}(kp) \sim \frac{1}{p^{3/2} \sqrt{k}} \quad (2.11.6)$$

Уже отсюда видно, что законы ослабления корреляций и развития локальной неустойчивости не совпадают, как это было в элементарном примере (§ 2.3). Кроме того, зависимость коэффициента корреляции от q , которая имеет место при $k \ll q$ ($p \approx 1$), носит совсем иной характер, чем в § 2.3. Эти особенности объясняются, главным образом, тем, что коэффициент корреляции определяется теперь, в основном, областью вблизи устойчивых фаз (2.8.7): $\psi \sim k^{-1/2}$.

Вычислим теперь $\rho_n^{(2)}(p, q)$. Для этого выразим φ_n через предыдущие фазы $\varphi_{n-1}, \dots, \varphi$ с помощью последовательного применения (2.11.1):

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi + n\varphi + k \{ n f(\varphi) + (n-1) f(\varphi_1) + \dots \\ &+ f(\varphi_{n-1}) \} = \varphi + n\varphi + k \cdot S_n(\varphi) \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

При $k \gg 1$ последовательные фазы можно считать случайными^{x)}. Поэтому случайная величина $S_n(\varphi)$ при $n \gg 1$ распределена нормально с параметрами:

$$\langle S_n \rangle = 0; \quad \langle S_n^2 \rangle = \sigma^2 \approx \langle f^2 \rangle \cdot \frac{n^3}{3} \quad (2.11.8)$$

x) Небольшие остаточные корреляции (2.11.6) можно учесть в следующем приближении аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе (2.10.5б).

При вычислении $\rho_n^{(2)}$ интегрирование по ψ можно заменить теперь интегрированием по S , положив $d\psi/dS \sim e^{-S^2/2\sigma^2}$, так как $d\psi$ пропорционально мере по фазе. Полагая $q = -\rho$ для устранения члена с ψ в экспоненте (2.11.5), получаем оценку:

$$\rho_n^{(2)}(\rho, -\rho) \sim \exp \left\{ -\frac{2\pi^2 \rho^3}{3} \cdot \langle f^2 \rangle \cdot k^2 n^3 \right\} \quad (2.11.9)$$

Характерное время ослабления корреляций оказывается порядка:

$$\tau_{\text{кор}} = n_{\text{кор}} \sim k^{-2/3} \quad (2.11.10)$$

что совпадает с "типичной" оценкой для обратной энтропии (2.11.3) ($\Omega_\phi^2 \sim k$; $\Delta = 2\pi$ для дискретного времени (2.11.1)). Между тем в рассматриваемом ("не-типичном") случае энтропия определяется выражением (2.11.4), или, в дискретном времени, $h \approx \ln k$.

Такая разница объясняется, по-видимому, тем, что энтропия определяется поведением системы только на асимптоте, в то время как коэффициент корреляции есть некоторая интегральная величина. С точки зрения процесса перемешивания более непосредственной характеристикой является коэффициент корреляции, так что это поднимает роль "типичной" оценки (2.11.3, 10). Следует, однако, иметь в виду, что для каскада типа (2.11.1) при $k \gg 1$ различие между энтропией и корреляцией может иметь реальное значение только для каких-то очень тонких деталей структуры перемешивания ($q \gg 1$), которые мы здесь не рассматриваем. Для $q \leq k$ остаточные корреляции малы уже после одного шага (2.11.6).

Возвращаясь к потоку, можно заключить, что характерное время затухания корреляций, а значит, и перемешивания, будет определяться "типичной" оценкой:

$$\tau_n \sim h^{-1} \quad (2.11.3).$$

Рассмотрим в качестве примера еще одну модель, которая может служить некоторым связующим звеном между каскадом типа (2.11.1) и потоком. Модель задается преобразованием:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{k}{2\pi} \cdot \sin 2\pi (\varphi_n + \theta_i) \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$$
(2.11.11)

где θ_i - последовательность T случайных фаз, которая затем периодически повторяется. Эту модель будем называть в дальнейшем квази-случайной. С одной стороны она напоминает основную модель, так как задаётся преобразованием, причём возмущение имеет период T . С другой стороны, при $\tau_0 \rightarrow 0$, где интервал τ_0 соответствует одному шагу, квази-случайная модель переходит в "типичный" поток со случным дискретным спектром возмущения, причём расстояние между линиями спектра равно $\Delta = 2\pi/T$. Имея в виду указанный переход, мы будем считать, что $k \ll 1$.

На рис.2.11.1 схематически изображена зависимость возмущения от времени для

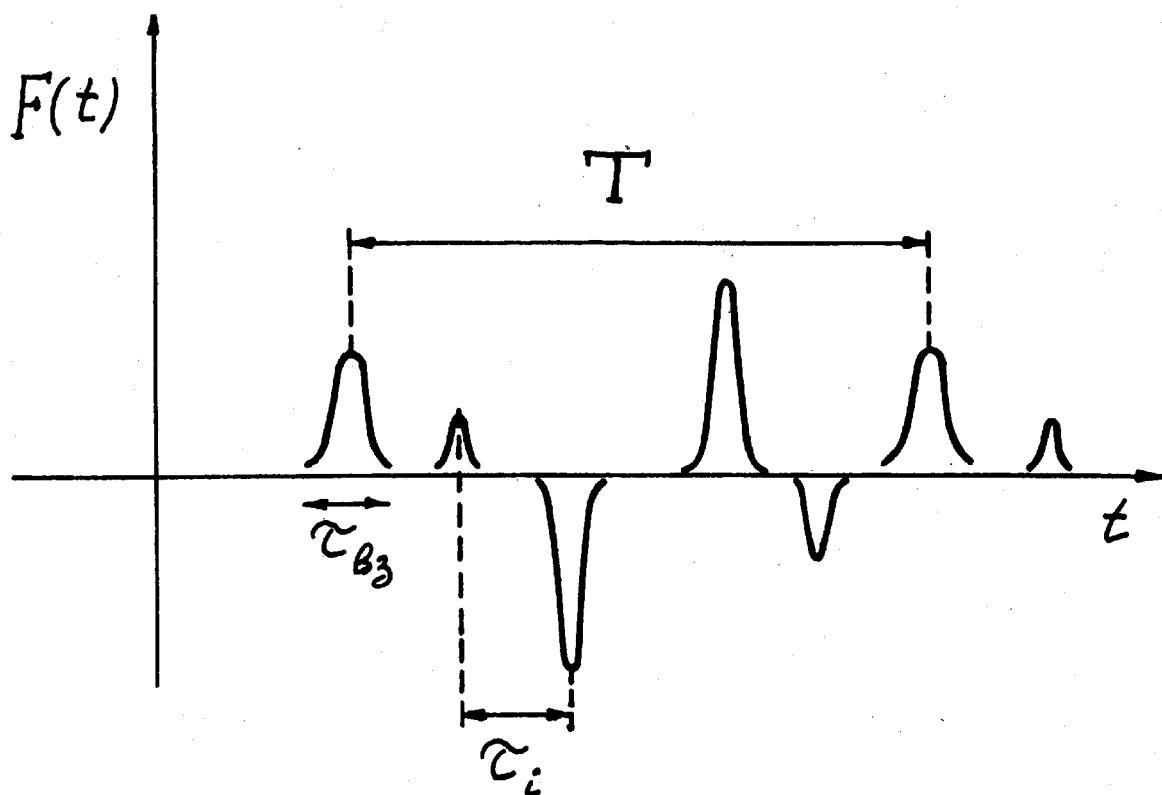


Рис.2.11.1. Временная зависимость возмущения $F(t)$ для квазислучайной модели:
 τ_{B3} - длительность взаимодействия; T - период возмущения.

квази-случайной модели. При этом мы еще более обобщили модель, введя переменные (в частности, случайные) расстояния между импульсами $\tilde{\tau}_i$ ($\tilde{\tau}_i = \tau_0$) и конечную ширину импульсов $\tilde{\tau}_{\theta_3}$, сохранив постоянный период T . Преобразование (2.11.11) соответствует случаю $\tilde{\tau}_i = 1$; $\tilde{\tau}_{\theta_3} = 0$. Поток получается при $\tau_i \sim \tau_{\theta_3}$.

Используя результаты § 2.4, можно найти собственные значения преобразования (2.11.11):

$$\lambda \approx 1 \pm \sqrt{K_i}; K_i = k \cdot \cos 2\pi(\varphi_i + \theta_i) \quad (2.11.12)$$

и направления собственных векторов (рис. 2.8.1):

$$t_g \theta_{\pm} \approx \pm \sqrt{K} \quad (2.11.13)$$

Если бы преобразование (2.11.11) было неустойчивым ($K_i > 0$) на каждом шаге, то энтропия равнялась бы: $h \approx k^{1/2} \cdot \langle \sqrt{\cos 2\pi\varphi} \rangle$. Однако, в действительности примерно в половине случаев $K_i < 0$, т.е. происходит поворот трансверсального вектора, а значит, возможен переброс его из конуса растяжения в конус сжатия (§ 2.8). При $k \ll 1$ разница обоих конусов незначительна и сама зависит от k . Поэтому можем написать: $h \approx k^{\omega}$, где $\omega > 1/2$. Для дальнейшего существенно, что h не может зависеть от T , так как при условии стохастичности (на периоде T) все фазы ($\varphi_i + \theta_i$) оказываются случайными.

Перейдем теперь к оценкам в терминах непрерывного времени, представив формально каскад (2.11.1) как поток с δ -функцией по времени. В силу периодичности спектр потока является эквидистантным: $\omega_n = n \cdot \Delta = 2\pi n / T$. Учитывая, далее, что сумма $\sum_1^T \sin 2\pi \theta_i \sim T^{1/2}$, получим следующую оценку для амплитуды гармоники возмущения и неперенормированной частоты фазовых колебаний:

$$F_0 \sim \frac{k}{\pi} \cdot T^{-1/2} \sim \Omega_f^2 \quad (2.11.14)$$

Так как величина Ω_f зависит от T , она не может определять характерное время развития стохастичности, а значит и энтропию (см. выше). Перенормировка со сте-

пенью κ даёт: $\Omega_{\phi\Sigma}^n \sim \Omega_\phi^n \cdot (\Omega_{\phi\Sigma}/\Delta)$, или:

$$\Omega_{\phi\Sigma} \sim \left[\left(\frac{k}{\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{T^{1-\frac{n}{4}}}{2\pi} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.11.15)$$

Зависимость от T исчезает при $n = 4$ и мы приходим, таким образом, к "типичной" оценке (2.11.3) для частного случая квазислучайной модели (2.11.11).

Найдем фазовые корреляции для этой модели. Нетрудно проследить, что они будут даваться той же оценкой (2.11.10), что и для основной модели (2.11.1). Единственное отличие состоит в том, что для квазислучайной модели эта оценка справедлива при любом k , в том числе и при $k \rightarrow 0$ (переход к потоку). Действительно, для получения (2.11.9,10) нам требуется только, чтобы величина $S_n(\psi)$ была бы суммой случайных функций (2.11.7). Но это автоматически предусматривается в квазислучайной модели при любом k (2.11.11), если только выполняется критерий стохастичности на периоде T ($kT^{3/2} \gtrsim 1$; см. (2.11.14)). Используя (2.11.10,14), приходим снова к "типичной" оценке (2.11.3).

Перейдем теперь к вычислению коэффициента диффузии потока. Как было показано в предыдущем параграфе для этого достаточно найти второй момент $\langle (\Delta I)^2 \rangle$.

Пусть изменение I задано уравнением:

$$\frac{dI}{dt} = \sum_n F_n \cdot \cos [\int \omega_n dt + \theta_n(t)] \quad (2.11.16)$$

где величины $\omega_n(t)$, $\theta_n(t)$ медленно изменяются под действием возмущения за время $\sim \tau_{\text{кор}}$. Поскольку ω_n означают фактически резонансные разности частот, нам будет удобно считать, что они могут быть как положительными, так и отрицательными: $-\Omega_1 < \omega_n < \Omega_2$. В дальнейшем примем для простоты, что основная часть спектра расположена симметрично относительно резонанса: $\Omega_1 \sim$

$\sim \Omega_2 \sim \omega_{\max}$ Стохастичность потока (2.11.16) соответствует условию

$\tau_{\text{кор}} \cdot \Delta_0 \lesssim 1$, где Δ_0 - среднее расстояние между линиями спектра ω_n .

При $t \ll \tau_{\text{кор}}$ спектр можно считать дискретным. Находим:

$$\Delta I \approx \sum_{n=1}^N \frac{F_n}{\omega_n} [\sin(\omega_n t + \theta_n) - \sin \theta_n] \quad (2.11.17)$$

откуда

$$(\Delta I)^2 \approx \sum_{n=1}^N \left(\frac{2F_n}{\omega_n} \right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\omega_n t}{2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\omega_n t}{2} + \theta_n \right) + \quad (2.11.18)$$

$$+ \sum_{m \neq n} \frac{4F_m F_n}{\omega_m \cdot \omega_n} \cdot \sin \frac{\omega_m t}{2} \cdot \sin \frac{\omega_n t}{2} \cdot \cos \left(\frac{\omega_m t}{2} + \theta_m \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_n t}{2} + \theta_n \right)$$

Рассмотрим вначале простейший случай дискретного спектра — эквидистантный спектр ($\omega_n = \pm n \cdot \Delta_0$), соответствующий периодическому движению с периодом $T = 2\pi/\Delta_0$. Предположим, далее, что в пределе $N \rightarrow \infty (\Delta_0 \rightarrow 0)$, фазы θ_n распределены по окружности "случайно", равномерно и независимо от F_n .

Последнее условие выполняется, в частности, для достаточно гладкой зависимости F_n от n . Тогда вторая сумма ($\sum_{n=2}$) в (2.11.18) равна нулю, а

$$\langle \cos^2 \left(\frac{\omega_n t}{2} + \theta_n \right) \rangle = 1/2.$$

Первая сумма преобразуется обычным образом в интеграл (см., например, /49/):

$$(\Delta I)^2 \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2 \cdot \frac{\sin^2 \omega_n t}{\omega_n^2} dt = \pi \cdot \frac{F_0^2}{\Delta_0} \cdot t \quad (2.11.19)$$

откуда коэффициент диффузии:

$$\mathcal{D} = \pi J(0) \quad (2.11.20)$$

где

$$J(\omega) = \frac{F_0^2}{\Delta_0} \quad (2.11.21)$$

спектральная плотность возмущения. Заметим, что величина $J(\omega)$ остается приблизительно постоянной при локальной трансформации вида спектра, например при переходе от дискретного к непрерывному спектру, если только изменения частот не очень велики. Отсюда следует, в частности, что выражение (2.11.20) для коэффициента диффузии является универсальным. Приводимые иногда в литературе другие соотношения в конечном счёте могут быть преобразованы к виду (2.11.20). Например, в работе /74/ коэффициент диффузии определяется суммой (в наших обозначениях):

$$\mathcal{D} \sim \sum_n F_n^2 V(\omega_n), \text{ где } V(\omega) \text{ — спектр корреляционной функции.}$$

В этом случае, однако F_n характеризует спектральную линию конечной ширины $\sim \tau_{\text{кор}}^{-1}$, так что сумма $\sum_n F_n^2 \cdot V(\omega_n) \sim J(\omega)$ есть просто перенормировка спектра.

Другой пример связан с обобщением выражений (2.11.20, 21) на случай полной системы резонансов (§ 2.7), когда амплитуды F_{ω_n} имеют разный порядок для различных значений n , хотя соответствующие частоты ω_{ω_n} могут лежать очень близко. В этом случае можно разбить слагаемые суммы (2.11.19) (теперь уже по n , n) на группы, в которых функции F_{ω_n} являются достаточно плавными. Для каждой из таких групп справедливо соотношение (2.11.19), а общий результат даётся суммой /46/:

$$J(\omega) = \sum_{\tilde{n}} \left(\frac{F_{\omega_n}^2}{\Delta \omega} \right) \quad \omega_{\omega_n} \approx \omega \quad (2.11.21a)$$

которая по-прежнему имеет смысл спектральной плотности возмущения.

Результат (2.11.20) был получен впервые, по-видимому, Боголюбовым /71/. Строго говоря, он справедлив лишь в пределе $N \rightarrow \infty$, но приближенно его можно использовать и для конечных, достаточно больших N . Однако в последнем случае возникает ограничение на максимально допустимое время:

$$\tau_{\omega_n} \lesssim t \lesssim \omega_{\omega_n}^{-1} \quad (2.11.22)$$

где $\omega_{\omega_n} \sim \Delta_0$. При больших временах ($t \cdot \Delta_0 \gg 1$) выражение (2.11.19) становится несправедливым, а из (2.11.17) видно, что движение является в этом случае периодическим ($\omega_n = \pm n \Delta_0$), так что кинетическое уравнение, конечно, неприменимо.

Для полноты картины мы добавили в (2.11.22) ограничение снизу; в данном случае (2.11.19) $\tau_{\omega_n} \sim \omega_{\omega_{\max}}^{-1}$, где $\omega_{\omega_{\max}}$ — ширина спектра возмущения, связанная соотношением неопределенности ($\omega_{\omega_{\max}} \cdot \tau_{\epsilon_3} \sim 1$) с длительностью взаимодействия τ_{ϵ_3} — одним из характерных масштабов времени, введенным Боголюбовым /54/). Для нашей основной модели $\tau_{\epsilon_3} = 0$. При x) В общем случае этот масштаб определяется временем корреляции τ_1 (см. ниже).

$t \lesssim \tau_{\theta_3}$ выражение (2.11.19) определяется уже всем спектром возмущения, а не только величиной F_0 . Это приводит к тому, что коэффициент диффузии зависит от времени, т.е. появляются динамические корреляции и уравнение ФПК перестает быть справедливым.

Требования на фазы θ_n , сформулированные выше, являются существенными, по крайней мере, равномерность. Простейшим примером может служить элементарная модель (2.11.1) при $k \ll 1$ (колмогоровская устойчивость). Какова бы ни была длина шага (период возмущения) $T \rightarrow \infty$ кинетическое уравнение не будет применимо к этой системе, так как она не является стохастической. Даже в стохастическом случае значение коэффициента диффузии, вообще говоря, существенно зависит от фазовых соотношений между резонансами, как это будет непосредственно видно из приводимых ниже примеров.

Требование "случайности" фаз θ_n можно заменить, переходя к общему случаю дискретного спектра, требованием "случайности" частот ω_n . Пусть $\Delta\omega_r$ характеризует порядок "случайного" сдвига линии эквидистантного спектра. Тогда дополнительные фазовые сдвиги $\Delta\theta_n \sim \epsilon \cdot \Delta\omega_r$, и для $\epsilon > \Delta\omega_r^{-1}$, фазы становятся "случайными". Очевидно, что в этом случае нижняя граница кинетического интервала (2.11.22) равна:

$$\tau_{min} \sim \Delta\omega_r^{-1} \quad (2.11.22a)$$

В частности, для достижения максимального интервала необходимо, чтобы

$$\Delta\omega_r \sim \omega_{max}.$$

С другой стороны, для любого $\Delta\omega_r$ фазы становятся случайными асимптотически при $t \rightarrow \infty$. К этому случаю относится интересная теорема Каца /72/, которая гласит, что сумма

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_n^N \cos \omega_n t \quad (2.11.23)$$

является асимптотически ($N \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$) случайной величиной, распределенной

нормально с параметрами (0,1) (среднее и дисперсия), если только частоты ω_n линейно независимы, т.е. если $\sum_n \lambda_n \omega_n \neq 0; \lambda_n \neq 0$, целые. Заметим в связи с этим, что мера линейно зависимых частот равна нулю /20/.

Для справедливости кинетического уравнения необходимо, однако, чтобы выполнялось условие (в том числе и при переходе к пределу $N \rightarrow \infty$):

$$\Delta \omega_r \gg \Delta_0 \quad (2.11.24)$$

Именно такой спектр (в пределе при $\Delta_0 \rightarrow 0$) было бы естественно называть непрерывным спектром. Это несколько более сильное свойство, чем слабое перемешивание (§ 2.3). Последнее эквивалентно непрерывному спектру в смысле отсутствия собственных функций уравнения Лиувилля /26/^{x)}. Из результатов этого параграфа следует, что непрерывный спектр с условием (2.11.24) приводит не только к затуханию парных автокорреляций, но и к интегрируемости коэффициента корреляции, т.е. он обеспечивает справедливость кинетического уравнения (см. ниже). В дальнейшем термин непрерывный спектр будет пониматься с условием (2.11.24).

В силу вышесказанного неравенство (2.11.24) можно назвать условием непрерывности последовательности ω_n . Последнее эквивалентно также понятию вполне равномерно распределенной последовательности (§ 2.3).

Итак, для применимости кинетического уравнения в дискретном спектре система частот ω_n (или фаз Θ_n) должна быть "непрерывной". Посмотрим, что означает это условие в терминах временной зависимости возмущения $F(t) = dI/dt$ (2.11.16). Нам нужно, чтобы величина $(\Delta I)^2 = (\int F dt)^2 = \int F(t)F(t')dt dt'$ изменилась приблизительно пропорционально времени в некотором интервале (2.11.22).

Введем коэффициент автокорреляции ^{xx)}

x) По-видимому, это эквивалентно также обычному понятию непрерывного спектра ($\Delta_0 \rightarrow 0$) без дополнительных условий на фазы или частоты.

xx) Индекс "λ" означает линейная модель. Коэффициент корреляции для потока называется обычно корреляционной функцией; мы сохраним, однако, для удобства единое наименование - коэффициент корреляции.

$$\rho_\lambda(u, t, t_1) = \left[\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t+u} dt F(t+u) F(t) \right] \cdot \overline{F^2}^{-1} \quad (2.11.25)$$

с помощью которого второй момент может быть представлен, как обычно, в виде:

$$\overline{(\Delta I)^2} = \overline{F^2} \int_0^\infty \rho_\lambda du \quad (2.11.26)$$

Как и в случае дискретного времени (§ 2.10) последний интеграл должен сходиться и не должен зависеть от t_1, t (в интервале (2.11.22)). В частном случае:

$$\rho_\lambda(u) = e^{-u/\tau_\lambda} \quad (2.11.27)$$

получаем

$$\mathcal{D} = \overline{(\Delta I)_1^2} = \overline{F^2} \cdot \bar{\sigma}_\lambda \quad (2.11.28)$$

где черта означает, как обычно, усреднение по времени. Последнее выражение справедливо при $t \gtrsim \tau_\lambda$ ^{*)} и таким образом, нижняя граница интервала (2.11.22) определяется теперь временем корреляции:

$$\bar{\sigma}_{\text{штн}} \sim \bar{\sigma}_\lambda \ll \omega_{\text{рак}}^{-1} \quad (2.11.29)$$

Это неравенство есть необходимое и достаточное условие справедливости кинетического уравнения для дискретного спектра, оно просто означает, что интервал (2.11.22) не нулевой. Для "тиличного" возмущения со "случайными" фазами θ_n время корреляции становится минимальным: $\bar{\sigma}_\lambda \sim \omega_{\text{рак}}^{-1} \sim \bar{\sigma}_{\theta_3}$.

Сравнивая выражения (2.11.29) и (2.11.22a) приходим к любопытной оценке:

$$\bar{\sigma}_\lambda \cdot \Delta \omega_r \sim 1 \quad (2.11.30)$$

которая показывает, что "случайное" смещение линии $\Delta \omega_r$ играет роль её эффективной ширины (в дискретном спектре!).

х) Для непрерывно действующего возмущения. Например, для квазислучайной модели с длительностью импульса $\bar{\sigma}_{\theta_3}$ и интервалом между импульсами $\bar{\sigma}_0$ имеем, очевидно: $\bar{\sigma}_{\text{штн}} \sim \bar{\sigma}_0$, хотя $\bar{\sigma}_\lambda \sim \bar{\sigma}_{\theta_3} \ll \bar{\sigma}_0$. Впрочем, и в этом случае можно считать, что время корреляции составляет $\sim \bar{\sigma}_0$, так как в течение этого времени возмущение равно нулю; коэффициент корреляции (2.11.28), однако обращается для $\bar{\sigma}_0 > u > \bar{\sigma}_{\theta_3}$ в нуль в силу особенности его определения.

До сих пор мы рассматривали дискретный спектр, т.е. возмущение (2.11.16) с постоянными частотами ω_n и фазами θ_n . Такой случай осуществляется, например, в чисто линейной системе, скажем, в системе линейных осцилляторов с линейной связью. Такая система заведомо эргодична, так как её можно преобразовать к нормальным координатам, т.е. к системе независимых осцилляторов. Тем не менее возможно статистическое поведение такой системы в интервале (2.11.22), описываемое кинетическим уравнением. По указанным причинам случай дискретного спектра будем называть линейной (статистической) моделью. Как уже отмечалось, такая модель была введена впервые Боголюбовым /71/ и в настоящее время является наиболее распространенной в статистической механике (см., например, /49/). Более подробно эта модель будет обсуждаться в § 2.13, сейчас заметим только, что она не имеет никакого отношения к эргодической теории, а её основным недостатком является ограничение по времени сверху (2.11.22).

Верхний предел (Δ_σ^{-1}) интервала (2.11.22) называют часто циклом Пуанкаре и связывают с его возвратной теоремой. Последнее заключение, однако, справедливо, как мы видим, только в случае дискретного спектра, т.е. для линейной модели. С учётом нелинейности и вытекающей из неё стохастичности спектр становится непрерывным и ограничение по времени сверху (2.11.22) отпадает.

Перейдем к более детальному изучению последнего случая. Представим возмущение $F(t)$ в виде

$$F(t) = f(t) \cdot v(t) \quad (2.11.31)$$

где $f(t)$ — заданная внешняя сила (деленная на частоту), имеющая дискретный (в частности, эквидистантный) спектр со средним расстоянием между линиями Δ ; $v(t)$ — скорость осциллятора. Очевидно, что возникновение непрерывного спектра связано как раз с последней величиной $v(t) = v_0(t) \cdot \cos \varphi(t)$ и является следствием процесса перемешивания по фазе $\varphi(t)$.

Учитывая, что при малом возмущении $v_0(t)$ изменяется незначительно по

сравнению с фазой, мы можем выразить корреляцию скорости через корреляцию фазы (2.11.5):

$$\rho_v(u) = \frac{\overline{v(t+u) \cdot v(t)}}{v^2} \sim \rho_u^{(2)}(p, q) \quad (2.11.32)$$

Явная оценка последнего коэффициента корреляции не может быть дана в общем виде, однако, из рассмотрения, проведенного в начале этого параграфа, следует, что $\rho_u^{(2)}$ убывает с u экспоненциально с характерным временем, определяемым "типичной" оценкой для энтропии (2.11.3).

Корреляции возмущения $F(t)$ зависят, вообще говоря, сложным образом от линейных корреляций (2.11.25) силы $f(t)$ и нелинейных корреляций скорости $v(t)$ (2.11.32). Мы рассмотрим два крайних случая.

Пусть вначале

$$\tau_\lambda \cdot h \ll 1 \quad (2.11.33)$$

Этот случай будем называть квази-линейным по аналогии с соответствующим приближением в теории плазменных волн /56/. В этом приближении корреляции определяются внешней силой: $\rho(F, F') \approx \rho(f, f')$ при $u \leq T$ ($f = f(t); f' = f(t+u)$) и убывают с характерным временем τ_λ (см. выше). При $u \geq T$ линейные корреляции $\rho(f, f')$ снова возрастают в силу квазипериодичности $f(t)$. В простейшем случае периодической силы $f(t)$ коэффициент корреляции $\rho(f, f')$ также оказывается периодическим. Это приводит к сильному возрастанию линейных корреляций на интервалах: $kT < u < kT + \tau_\lambda$: $k = 1, 2, \dots$. Здесь и вступают в силу корреляции скорости: $\rho(F, F') \approx \rho(v, v')$ с характерным временем $\tau_{k\text{op}} \sim h^{-1}$ (2.11.3). Схематический ход общего коэффициента корреляции представлен на рис. 2.11.2 сплошной линией; пунктиром изображены нелинейные корреляции $\rho(v, v')$.

Можно сказать, что в квази-линейном случае существует область применимости линейной модели, подкрепляемая для $t > T$ нелинейной моделью.

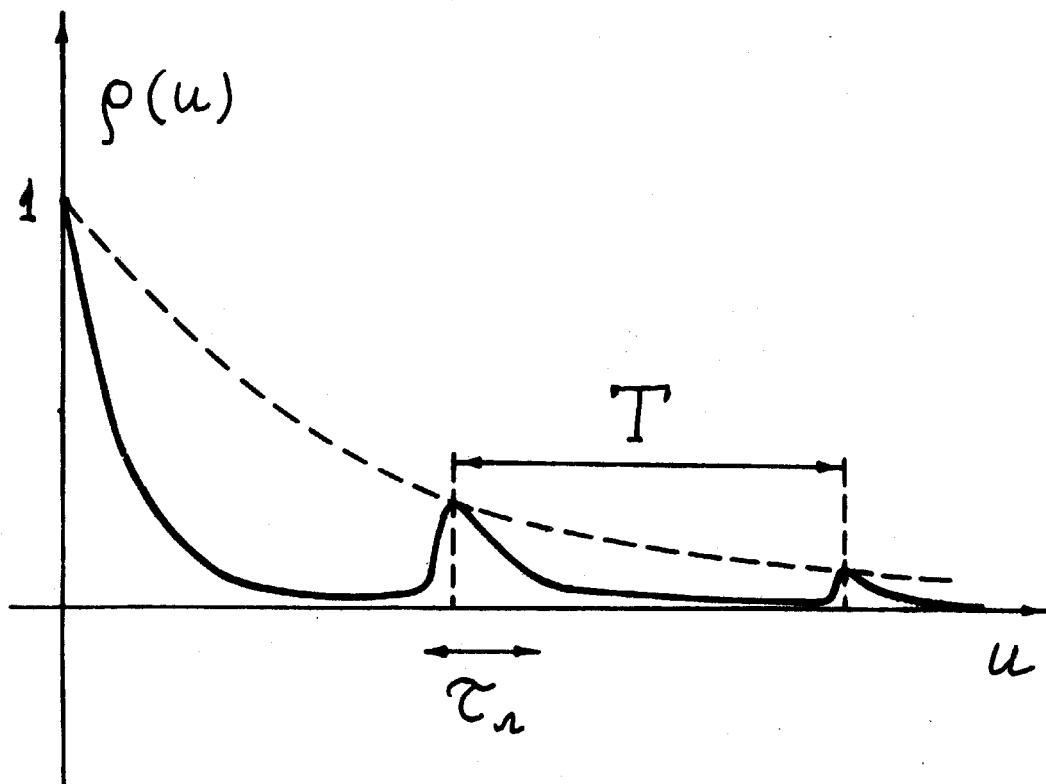


Рис.2.11.2. Схема автокорреляций возмущения $F(t)$ в квази-линейном случае. Пунктирная кривая представляет нелинейные корреляции $\rho(v, v')$ с характерным временем $\sim h^{-1} \sim \Omega_f^{-4/3} \Delta_3^{1/3}$, сплошная кривая — общие корреляции $\rho(F, F')$, определяемые в интервале применимости линейной модели ($u < T$) линейными корреляциями $\rho(f, f')$ с характерным временем $\tau_1 \sim 4\omega_f^{-1}$.

В обратном предельном случае

$$\tau_1 \cdot h \gg 1 \quad (2.11.34)$$

линейная модель вообще неприменима, а убывание корреляций характеризуется пунктирной линией на рис.2.11.2, если только выполнено дополнительное условие

$$\omega_{\max} \gtrsim h \sim \Omega_f \varepsilon \quad (2.11.35)$$

Физический смысл этого условия состоит в том, что должно быть несколько перенормированных резонансов, которые разрушают друг друга. В противном случае образуется всего один перенормированный резонанс, а максимальная частота возмущения $\sim \omega_{\max} \ll \Omega_f \varepsilon$, так что возникает только экспоненциально узкий стохастический слой вблизи сепаратрисы этого резонанса (2.6.17).

Заметим, что условия (2.11.35) и (2.11.33, 34), вообще говоря, независимы, так как $\tau_1^{-1} \sim \Delta\omega_r \lesssim \omega_{\max}$. Но для "типовых" ("случайных") начальных фаз θ_n имеем: $\Delta\omega_r \sim \omega_{\max}$, так что развитая стохастичность соответствует только квази-линейному случаю (2.11.33).

В заключение рассмотрим несколько примеров на вычисление коэффициента диффузии.

Начнем с основной модели (2.1.11), подробно рассмотренной в предыдущем параграфе. Выразим коэффициент диффузии для неё через параметры непрерывного времени (потока), введя в преобразование δ -функцию. Положим, для определенности $h_\theta(\theta) = \cos \theta = \cos \omega t$, тогда $F_n = \varepsilon / T$, и из (2.11.20) получаем:

$$\mathcal{D} = \frac{\varepsilon^2}{8T} \quad (2.11.36)$$

что в точности совпадает с (2.10.12), если учесть, что T характеризует длительность одного шага.

Коэффициент диффузии можно оценить еще одним способом, который может оказаться полезным в некоторых случаях. Именно, имея в виду картину "касающихся" перенормированных резонансов, можем написать:

$$\mathcal{D}_\omega \sim (\Delta\omega)^2 \cdot \Omega_{\phi\Sigma}^3 \sim \Omega_{\phi\Sigma}^3 \sim \frac{\Omega_\phi^4}{4} \sim \frac{\varepsilon^2}{T} (\omega')^2 \quad (2.11.37)$$

Индекс ω указывает, что коэффициент диффузии берется по частоте. Последнее выражение показывает, что он совпадает по порядку величины с (2.11.36).

Первая из оценок (2.11.37) справедлива для любой "типовной" системы, вторая - только для резонансов на первой гармонике: $\rho\omega = q$; $\rho = 1$. Сравнивая её с "типовной" оценкой для энтропии (2.11.3), приходим в этом случае к любопытному соотношению:

$$\mathcal{D}_\omega \sim h^3 \quad (2.11.37a)$$

Заметим, что если ω не является канонической переменной, необходимо пе-

рейти к коэффициенту диффузии по I : $D_I \equiv D = D_\omega \cdot (dI/d\omega)^2$,

прежде чем подставлять его в кинетическое уравнение.

Рассмотрим квази-случайную модель

$$\varphi' = \varphi + \frac{k}{2\pi} \cdot \sin 2\pi(p\varphi + q)$$

$$\varphi' = \varphi + \varphi'$$

модифицированную таким образом, чтобы получить резонансы p -й гармоники:

$p\omega = q\Omega$, где $\omega = 2\pi\varphi/T$; $\Omega = 2\pi/\tau$. Расстояние между резонансными значениями частоты: $\Delta = \frac{\Omega}{p} = \frac{2\pi}{pT}$, а расстояние между резонансами, т.е. между значениями частоты возмущения: $\Delta_0 = 2\pi/\tau$. В терминах непрерывного времени (ср. (2.11.14)) имеем: $\Omega_\varphi^2 \sim p F_0 \sim \sim pk/\sqrt{T}$; $(\Delta\omega)_H^2 \sim \frac{k}{p\sqrt{T}}$. Перенормировка даёт (2.11.3а): $\Omega_\Sigma \sim \sim (pk)^{2/3}$; $(\Delta\omega)_\Sigma \sim k^{2/3} \cdot p^{-1/3}$. Используя общую оценку (2.11.37), найдем: $D_\omega \sim (\Delta\omega)_\Sigma^2 \Omega_\Sigma \sim k^2$, что совпадает по порядку величины с общей формулой (2.11.20, 21): $D_\omega \sim F_0^2/\Delta_0 \sim k^2$.

Рассмотрим теперь диффузию при периодическом прохождении резонанса.

Наиболее простым случаем является быстрое прохождение резонанса, которое описывается преобразованием (2.9.7) типа основной модели. Из выражения (2.10.12) находим непосредственно (обозначения см. в § 2.9):

$$D_\omega = \frac{\langle (\Delta\omega)_1^2 \rangle}{8\pi} \cdot \Omega_0 = \frac{\Omega_0}{8} \cdot \frac{\Omega_\varphi^2}{V} \quad (2.11.38)$$

или в параметрах потока:

$$D_\omega \sim \frac{\Omega_\kappa^4}{\Omega_0} \sim \frac{\varepsilon^2 F^2}{\Omega_0} \cdot (\omega')^2 \quad (2.11.39)$$

Последняя оценка совпадает с общим выражением (2.11.20). Однако область применимости этого выражения, как и для предыдущего примера, определяется условием $\zeta > T = 2\pi/\Omega_0$, так что квази-линейная область в данном случае полностью отсутствует из-за специальных фазовых соотношений между резонансами.

При медленном прохождении резонанса изменение частоты почти постоянно и

почти обратимо (§ 1.5). Рассмотрим поэтому полное изменение частоты $\Delta\omega_{\pm}$ за период модуляции, т.е. после двух прохождений (туда и обратно). Из выражения (2.9.10) находим

$$\Delta\omega_{\pm} \approx 2V\Omega_+ \ln \left(\frac{V + \xi_+}{V - \xi_-} \cdot \frac{\sqrt{4\pi V} - \xi_+}{\sqrt{4\pi V} - \xi_-} \cdot \frac{\sqrt{4\pi V} + \xi_+}{\sqrt{4\pi V} + \xi_-} \right) - \frac{\Omega_+}{\pi} (\xi_+^2 - \xi_-^2) \quad (2.11.40)$$

Так как распределение по ξ теперь уже совсем неравномерно (см. § 2.9), то без дальнейших вычислений можно получить лишь оценку:

$$\mathcal{D}_\omega = \frac{(\Delta\omega_{\pm})^2}{8\pi} \Omega_0 \sim 16 \Omega_0 V^2 \Omega_+^2 |\ln V|^2 \sim \quad (2.10.41)$$

$$\sim 16 \frac{(\Delta\Omega)^{3/2}}{\Omega_k^2} \Omega_0^{7/2} |\ln V|^2 \sim \frac{16 |\ln V|^2 (\Delta\Omega)^{3/2} \Omega_0^{7/2}}{|\varepsilon F\omega'|}$$

Здесь численный множитель учитывает число комбинаций из логарифмических членов в (2.11.40).

Заметим, что зависимость коэффициента диффузии от параметров при медленном прохождении (2.11.41) является, грубо говоря, обратной по отношению к быстрому (2.11.39). В частности, получается парадоксальный, на первый взгляд, результат, что коэффициент диффузии уменьшается с ростом возмущения. Объяснение состоит в том, что одновременно уменьшается параметр V (при заданном Ω), а вместе с ним и интервал фаз ξ , на котором получается разностный эффект (2.11.40).

Таким образом, при периодическом прохождении резонанса скорость диффузии как функция $\Omega_k^2 \sim F$ (возмущение) или V (скорость прохождения) имеет максимум в районе $V \sim 1$.

Мы пренебрегли выше возможность захвата при медленном прохождении резонанса. В действительности, при $V \rightarrow 0$ захват играет существенную роль (§ 1.6), а процесс диффузии становится чрезвычайно сложным. С одной стороны, вследствие затухания фазовых колебаний процесс оказывается частично обратимым, это приводит к уменьшению диффузии. С другой стороны, устойчивый захват возможен только для одного направления прохождения резонанса, это вызывает систематическое смещение частоты. Максимально возможное значение коэффициента диффузии можно, по-види-

мому, оценить посредством:

$$D_{\max} \sim (4\Omega)^2 \cdot \Omega. \quad (2.11.42)$$

оно вообще не зависит от возмущения.

§ 2.12 Многомерный нелинейный осциллятор. Диффузия Арнольда.

В этом параграфе мы попытаемся распространить полученные выше результаты на многомерную автономную систему, состоящую из нескольких (N) слабо связанных между собой нелинейных осцилляторов. Как отмечалось в § 1.1, многомерный осциллятор может быть сведен в первом приближении к одномерному неавтономному осциллятору типа (1.1.1). Поскольку стохастическая система является, как показал Аносов /31/, грубой^{x)}, то следующие приближения не могут нарушить стохастичность или даже существенно изменить её параметры. Однако, такое заключение не распространяется на область колмогоровской устойчивости, где многомерная система значительно отличается от одномерной /20/.

Рассмотрим вначале более аккуратно переход к одномерному осциллятору в первом приближении. Существенное отличие от заданного внешнего возмущения состоит в том, что частоты возмущения теперь не являются постоянными, так как они представляют из себя комбинацию частот других нелинейных осцилляторов.

Основным резонансом многомерного осциллятора является так называемый простой резонанс или резонанс кратности 1, т.е. просто одно резонансное соотношение между всеми частотами:

$$\sum_i^N n_i \omega_i (I_j) \equiv (n, \omega) = 0 \quad (2.12.1)$$

Это соотношение определяет семейство пересекающихся поверхностей (для произвольных целых n_i) в пространстве импульсов или пучок пересекающихся в начале координат плоскостей в пространстве частот. В дальнейшем всегда будет подразумеваться пространство частот, если не сделано специальной оговорки.

x) т.е. структурно-устойчивой; понятие, введенное Андроновым и Понтрягиным /84/, см. также /85/.

Запишем уравнения движения в виде:

$$\dot{I}_k = -\varepsilon \frac{\partial H(I_j, \theta_i)}{\partial \theta_k} = -i\varepsilon \sum_{(n)} n_k \tilde{H}_{(n)} e^{i(n, \theta)} \quad (2.12.2)$$

$$\dot{\theta}_k = \omega_k(I_j) + \varepsilon \frac{\partial H(I_j, \theta_i)}{\partial I_k}$$

где $H = \sum_{(n)} \tilde{H}_{(n)} e^{i(n, \theta)}$ - гамильтониан; все величины без индексов и в скобках представляют собой N -мерные векторы, а $k, j = 1, 2, \dots, N$. Пренебрегая в первом приближении членом с $\partial H / \partial I_k$ (§ 2.3) и вводя резонансную фазу:

$$\psi_{(n)} = (n, \theta) \quad (2.12.3)$$

можем написать вблизи одного из резонансов в отсутствии перекрытия:

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &\approx -i\varepsilon n_k \tilde{H}_{(n)} e^{i\psi_{(n)}} \\ \dot{\psi}_{(n)} &= (n, \omega) \end{aligned} \quad (2.12.4)$$

и фазовое уравнение:

$$\ddot{\psi}_{(n)} \approx -\left(i\varepsilon \sum_{k,j} n_k \frac{\partial \omega_k}{\partial I_j} \cdot n_j \tilde{H}_{(n)}\right) e^{i\psi_{(n)}} = -i\Omega_{(n)}^2 e^{i\psi_{(n)}} \quad (2.12.5)$$

где $\Omega_{(n)}$ - частота фазовых колебаний рассматриваемого резонанса, которая определяется некоторой средней нелинейностью по всем осцилляторам. Фазовые колебания превращают плоскость (2.12.1) в резонансный слой толщиной

$$(\Delta\omega)_{(n)} \sim \frac{\Omega_{(n)}}{|(n)|} \quad (2.12.6)$$

где $|(n)|$ - модуль вектора (n) . Последнее выражение обобщает понятие ширины одномерного резонанса (§ 1.4).

Резонанс кратности k возникает при одновременном выполнении k резонансных условий (2.12.1), что имеет место в районе пересечения k резонансных слоев. Движение вблизи кратного резонанса описывается системой k фазовых уравнений типа (2.12.5):

$$\ddot{\psi}^l = -i \sum_j \Omega_{lj}^2 e^{i\psi^j} \quad (2.12.7)$$

где индексы $\ell, j = 1, 2, \dots, k$ означают номер вектора (n), а фазовые частоты даются выражениями:

$$\Omega_{\ell j}^2 = \sum_{i,k} n_i^\ell \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial I_k} \cdot n_k^j \cdot \tilde{H}^j \quad (2.12.8)$$

$$I_k = -i\varepsilon \sum_\ell n_k^\ell \cdot \tilde{H}^\ell \cdot e^{i\psi^\ell}$$

$$\dot{\psi}^\ell = (n^\ell, \omega)$$

В частности для малых колебаний $e^{i\psi_j} \rightarrow \mp \psi^j$ (знак зависит от выбора устойчивого или неустойчивого положения равновесия, соответственно, см. § 1.4) и получается система линейных уравнений.

Как уже отмечалось выше, в стохастическом случае нет оснований ожидать каких-либо новых эффектов, однако, представляет интерес получить многомерные оценки в более явном виде.

Рассмотрим прежде всего полную систему резонансов и определим критическое значение параметра гладкости возмущения ℓ_c (§ 2.7). Как и в одномерном случае оно зависит от сходимости суммы $\sum_s \sim \sum_{(n)} (4\omega)_{(n)} \sim \sum_{(n)} \Omega_{(n)} / |I(n)|$. Будем рассматривать, по-прежнему, резонансы только первого порядка и, кроме того, ограничимся неперенормированными резонансами. Как было разъяснено в § 2.7 мы приDEM, таким образом, к нижней оценке для ℓ_c , которая дополняет верхнюю оценку Мозера [28]. Дальнейшее зависит от выбора типа возмущения. Рассмотрим два случая. В первом положим:

$$\tilde{H}_{(n)} \sim \prod_i n_i^{-(\ell_i + 3)} \quad (2.12.9)$$

Это выражение обобщает одномерное (2.7.6) и означает, что гладкость возмущения характеризуется независимо по каждой из степеней свободы своим параметром ℓ_i .

Подставляя (2.12.9) в (2.12.6) и используя (2.12.5) найдем:

$$\sum_s \propto \sum_{(n)} \left(\sum_{i,k} n_i n_k \cdot \prod_j n_j^{-(\ell_j + 3)} \right)^{1/2} / |I(n)| \quad (2.12.10)$$

где оставлены только величины, от которых зависит сходимость $\sum_{i,s}$. Последняя определяется асимптотикой $n_i \rightarrow \infty$. При заданном (ω) все $n_i > n_k \geq |n_i|$. Поэтому сумма $\sum_{i,s} \approx \sum_{(n)} n_j^{-(\ell_j+3)/2}$ сходится, если:

$$\ell = \ell_{\omega \cdot n} > -1 \quad (2.12.11)$$

что совпадает с результатом § 2.7 для непрерывного времени (2.7.31).

Можно, однако, определить возмущение и по другому:

$$\tilde{H}_{(n)} \sim |n|^{-(\ell+3)} \quad (2.12.12)$$

где $|n| = \sum_i |n_i|$. Именно такое определение было принято Мозером /28/ (см. также /20/). Оно означает, что и смешанные производные силы непрерывны только до номера ℓ включительно. Интересующая нас сумма принимает теперь вид:

$$\sum_{i,s} \approx \sum_{(n)} \left(\sum_{i,k} n_i n_k |n|^{-\ell-3} \right)^{1/2} / |n| \approx \sum_{(n)} |n|^{-\frac{\ell+3}{2}}$$

и сходится при условии:

$$\ell > 2N-3 \quad (2.12.13)$$

Сравнивая это значение с результатом Мозера /28/, получаем, что критическое значение гладкости возмущения лежит в интервале:

$$2N-3 < \ell_c \leq 2N+2 \quad (2.12.14)$$

Заметим, что ширина интервала для ℓ_c , равная 5, если ℓ - действительное и 4, если ℓ - целое, совпадает с шириной для одномерного преобразования: $1 < \ell_c \leq 6$ (§ 2.7). Дальнейшее обсуждение этого вопроса мы отложим до численных экспериментов (§ 3.3).

Произведем теперь более аккуратную оценку границы стохастичности по переходу резонансов первого порядка. Мы ограничимся случаем почти гармонических колебаний, т.е. предположим, что в нулевом приближении имеется только основная гармоника ω_c во каждой из степеней свободы, а амплитуды высших гармоник $n_i \omega_i$ порядка $\epsilon^{\frac{n_i}{2}-1}$.

Предположим, далее, что имеет место \bar{n} -кратное взаимодействие^{x)}. При под-

x) т.е. прямое взаимодействие только между \bar{n} степенями свободы.

счёте числа частот возмущения (и резонансов) нужно учитывать, конечно, только такие комбинации осцилляторов, в которые входит тот осциллятор, движением которого мы интересуемся. Тогда в первом приближении по ϵ количество резонансов равно:

$$N_1 = C_{n-1}^{\bar{m}-1} \cdot 2^{\bar{m}-1} \approx \frac{(2N)^{\bar{m}-1}}{(\bar{m}-1)!} \quad (2.12.15)$$

Это выражение легко обобщается на случай, когда имеется n_0 первых гармоник сравнимой амплитуды:

$$N_1 = C_{n-1}^{\bar{m}-1} \cdot \frac{(2n_0)^{\bar{m}}}{2} \approx n_0 \cdot \frac{(2n_0 N)^{\bar{m}-1}}{(\bar{m}-1)!} \quad (2.12.15a)$$

Во втором приближении (ϵ^2) число резонансов значительно увеличивается по двум причинам: во-первых, за счёт высших гармоник и, во-вторых, за счёт появления в каждом из осцилляторов основной гармоники всех остальных.

Первым эффектом можно пренебречь при $2\bar{m}\sqrt{\epsilon} < 1$. Действительно, он увеличивает число резонансов в $2\bar{m}$ раз, но зато ширина резонанса уменьшается в $\sqrt{\epsilon}$ раз. В обратном случае ($2\bar{m}\sqrt{\epsilon} \gg 1$) суммарная ширина резонансов увеличивается максимум в $2n_0! \cdot \epsilon^{\bar{m}/2} \sim (\bar{m}\sqrt{\epsilon})^{\bar{m}} \cdot e^{-\bar{m}}$ раз независимо от N . В дальнейшем мы пренебрежем этим эффектом.

Второй эффект является основным, он приводит к увеличению числа резонансов в $\bar{m} \cdot 2^{\bar{m}-1} \cdot N^{\bar{m}-1}/(\bar{m}-1)! \sim N_1$ раз, так что $N_2 \sim N_1^2$. Аналогично можно показать, что $N_k \sim N_1^k$. Нетрудно убедиться, что положение границы стохастичности по порядку величины одно и то же в любом приближении. Действительно, $\sum_s^{(k)} \geq \epsilon^{\frac{k}{2}} N_k \geq (\sqrt{\epsilon} N_1)^k \sim 1$. Последняя оценка следует из того факта, что величина $\sqrt{\epsilon} N_1$ является безразмерной (подробности см. ниже). Правда, этого нельзя сказать о параметре стохастичности $S^{(k)} \geq \sum_s^{(k)}$, который расходится при $k \rightarrow \infty$, если $\sqrt{\epsilon} N_1 > 1$. Однако, эта расходимость фиктивная, так как резонансы необходимо перенормировать (см. ниже).

Итак, нам достаточно определить границу стохастичности по первому приближению. В нижеследующих оценках мы будем встречаться с суммами вида:

$\sum_{i=1}^{\tilde{m}} n_i f_i$, где $n_i = \pm 1$, а f_i - некоторые величины. Мы примем для таких сумм "типичную" оценку, соответствующую "случайному" набору n_i :

$\sum_{i=1}^{\tilde{m}} n_i \sim f \sqrt{\tilde{m}}$, где f - некоторое среднее значение f_i . Полагая:

$\partial\omega/\partial I \sim \omega/I$, $\tilde{H}_{(n)} \sim \omega I$, получим для \tilde{m} - кратного взаимодействия:

$$\Omega_{(n)} \sim \omega (\varepsilon \alpha \tilde{m})^{1/2} (2.12.5); |\Delta\omega| \sim \sqrt{\tilde{m}} \text{ и } (\Delta\omega)_{(n)} \sim \omega (\varepsilon \alpha)^{1/2};$$

$\Omega \sim \omega \sqrt{\tilde{m}-1} \sim \omega \sqrt{\tilde{m}}$ - частотный интервал величины $\sum_i n_i \omega_i$.

занимаемый N_1 резонансами. Граница стохастичности определяется соотношением:

$$S \sim N_1 \cdot (\Delta\omega)_{(n)} / \Omega \sim 1 \text{ или } S$$

$$(\varepsilon \alpha)_S \sim \frac{\tilde{m}}{N_1^2} \approx \frac{\tilde{m} \cdot [(\tilde{m}-1)!]^2}{(2N)^{2\tilde{m}-2}} \quad (2.12.16)$$

Таким образом, критическая величина возмущения убывает, по крайней мере, $\propto N^{-2}$

($\tilde{m} = 2$). Отсюда ясно, что макроскопические молекулярные системы - типичные объекты статистической механики - находятся всегда далеко в области стохастичности.

В частности, мера неэргодической компоненты убывает, по крайней мере, $\propto N^{-6}$ (§ 2.8).

Заметим, что для принятой выше нормировки ($\tilde{H}_{(n)} \sim \omega I$) малый параметр

ε характеризует только один резонанс. Так как общее число резонансов $N_1 \gg 1$

(2.12.15) очень велико, должно выполняться дополнительное условие

$$\tilde{\zeta}^2 \equiv \varepsilon^2 N_1 \ll 1 \quad (2.12.17)$$

где новый параметр $\tilde{\zeta}$ характеризует полное возмущение, записанное с помощью равенства Парсеваля.

Найдем теперь перенормированную ширину резонанса $(\Delta\omega)_{(n),\Sigma} \equiv (\Delta\omega)_{\Sigma}$,

- x) Интересно отметить, что величина $(\varepsilon \alpha)_S$ оказывается здесь в \tilde{m} раз больше, чем в работе /76/ (см. также /13/). Это различие объясняется тем, что в /13,76/ граница стохастичности определялась по перекрытию резонансных слоев в N -мерном пространстве. Между тем этого условия недостаточно, так как фазовые колебания внутри слоя происходят во вполне определенном направлении $(\Delta\omega_{\omega_i})$ (2.12.4), между тем как движение вдоль слоя является, вообще говоря, медленным (см. ниже). Поэтому для стохастичности необходимо, чтобы замыкалась цепочка векторов $(\Delta\omega_{\omega_i})$, соответствующих различным резонансам, или, иначе говоря, чтобы перекрывались одномерные ширины резонансов (2.12.6).

которая определяет^{xx)}, согласно результатам § 2.11, динамический масштаб времени τ_n (локальная неустойчивость, корреляции, перемешивание). Перенормируя в "ти-ничном" случае со степенью $n=4$, получаем: $(\Delta\omega)_{\Sigma} \sim (\Delta\omega)_{(n)}^{4/3} \cdot \Delta^{-1/3}$ (2.11.3). Но согласно нашим предыдущим оценкам $(\Delta\omega)_{(n)} \sim \omega \sqrt{\epsilon\alpha}$ и:

$$\Delta \sim \frac{\omega \sqrt{m}}{N_1} \sim \omega \sqrt{m} \cdot \frac{(m-1)!}{(2N)^{m-1}} \quad (2.12.18)$$

Отсюда находим:

$$(\Delta\omega)_{\Sigma} \sim \omega \cdot m^{-1/6} (\alpha \xi)^{2/3} \quad (2.12.19)$$

Проверим, что перенормированная ширина резонанса не расходится в высших приближениях: $(\Delta\omega)_{\Sigma}^{(k)} \sim (\epsilon^{2k} N_k)^{1/3} \sim \xi^{2k/3}$, но по условию (2.12.17) $\xi \ll 1$, и этот ряд быстро сходится.

Согласно результатам § 2.11 энтропия и коэффициент диффузии^{x)} выражаются в "тичном" случае через перенормированную ширину резонанса (2.11.37)^{xx)}:

$$D_{\omega} \sim h^3 \sim (\Delta\omega)_{\Sigma}^3 \sim \frac{\omega^3}{\sqrt{m}} (\alpha \xi)^2. \quad (2.12.20)$$

Коэффициент диффузии зависит только от квадрата полного возмущения (ξ^2), которое действует так, как будто бы оно являлось полностью случайным. Именно в этом смысле в § 2.5 говорилось, что стохастическая неустойчивость приводит к наиболее быстрой диффузии, возможной при заданном возмущении.

Перейдем теперь к области колмогоровской устойчивости. Как уже отмечалось ранее (§ 2.2) ситуация в этой области существенно отличается от одномерной. Наиболее важное отличие состоит в том, что инвариантные торы, размерность которых равна, очевидно N , не разделяют $(2N-1)$ -мерную энергетическую поверхность в фазовом пространстве системы /20/^{xxx)}. В пространстве импульсов (частот) инвариантные торы изображаются просто точками, расположенными между всюду плотной

x) В общем случае - тензор диффузии (2.10.15); нижеследующая оценка относится к диффузии вдоль одной из осей: $\langle (\Delta\omega)_i^2 \rangle = 2D_{\omega} \cdot t$; для полного N -мерного вектора: $\langle |(\Delta\omega)|^2 \rangle = 2N D_{\omega} \cdot t$.

xx) при $h_i \sim 1$ (2.11.3a).

xxx) Напомним, что одномерным мы называем случай $N=2$ для автономной системы (§ 2.2).

паутиной переплетающихся и пересекающихся резонансных поверхностей (плоскостей) (2.12.1).

Каждая из резонансных поверхностей представляет из себя, как мы знаем, слой толщины (2.12.6), внутри которого имеются инвариантные торы, аналогичные наружным (это вытекает уже из результатов работы Арнольда /77/ и подробно исследовано Мозером /78/), а снаружи — стохастические слои (§ 2.6). Именно эти многочисленные пересекающиеся между собой стохастические слои и образуют неустойчивую (эргодическую) компоненту движения в области колмогоровской устойчивости. Первый пример такой неустойчивости был рассмотрен Арнольдом /21/, затем было выяснено, что подобный механизм неустойчивости является весьма общим для многомерного движения /79/ (см. также § 2.6). Он приводит к своеобразной диффузии вдоль системы пересекающихся резонансов, которую мы будем называть в дальнейшем диффузией Арнольда.

Чтобы понять механизм диффузии Арнольда, обратимся к основным уравнениям многомерного резонанса (2.12.1-5). Заметим прежде всего, что для каждого заданного резонансного слагаемого фазовый множитель $e^{i(\eta, \theta)}$ одинаков для всех компонент вектора (I) и поэтому изменение (ΔI) направлено по вектору (η).

Для основного резонансного члена это задает направление фазовых колебаний, причём фазовый множитель принимает вид: $e^{i\varphi_{(n)}}$, где $\varphi_{(n)}$ — резонансная фаза (2.12.3). Каждое из остальных слагаемых в (2.12.2) характеризует возмущение резонансного тора, направленное параллельно своему вектору (η). Фазовый множитель разрушающего (возмущающего) резонанса можно записать в виде: $e^{i(\omega_1 t + \varphi_{(n)})}$ где $\omega_1 = (\Delta n, \omega)$ расстройка частоты по отношению к разрушаемому резонансу.

Если система находится внутри резонанса, то возмущение соседних резонансов приводит лишь к деформации резонансного тора. Однако на краю резонанса внутри стохастического слоя, приращения интеграла: $\int dt e^{i(\omega_1 t + \varphi_{(n)})} \sim -\mu_n \Omega_{(n)}^{-1}; \mu_n \sim e^{-c/S_n}; S_n \sim \frac{\Omega_{(n)}}{\omega_1}$ за каждый полупериод фазовых колебаний с

частотой $\Omega_{(n)}$ образуют случайную последовательность из-за произвольного сдвига фазы между возмущением и фазовыми колебаниями. Подробный разбор этого механизма стохастичности проведен в § 2.6. Возмущение импульса имеет порядок

$$|\Delta I|_{nn'} \sim \varepsilon_n \cdot \mu_n \cdot \Omega_{(n)}^{-1} \quad (2.12.21)$$

где вектора (n) , (n') относятся к разрушающему и разрушающему резонансу, соответственно; $\varepsilon_n \sim \varepsilon \tilde{H}_{(n')}$.

Как уже говорилось выше, вектор $(\Delta I)_{nn'}$ направлен по (n') и, вообще говоря, не совпадает с направлением стохастического слоя. Поэтому диффузия (2.12.21) возможна лишь на небольшое расстояние порядка ширины стохастического слоя. Для дальнейшей диффузии необходимо по крайней мере два возмущающих резонанса с непараллельными $(n')_1$, $(n')_2$. Тогда один из них обязательно имеет составляющую вдоль стохастического слоя, которая и даёт собственно диффузию Арнольда, а другой — поперёк слоя, что обеспечивает отражение от границ слоя. При этом диффузия лежит в плоскости векторов $(n')_1$, $(n')_2$. Для того, чтобы диффузия могла идти в любом направлении вдоль $(N-1)$ -мерной резонансной поверхности, требуется, очевидно, $(N-1)$ возмущающих резонансов.

Более сложным является вопрос о фазовых соотношениях между различными возмущающими резонансами. Их действия не являются, вообще говоря, независимыми хотя бы потому, что имеется закон сохранения энергии (для автономной системы)^{x)}, который всегда ограничивает диффузию Арнольда поверхностью постоянной энергии. Возникает существенный вопрос, не появятся ли (и при каких условиях) аналогичные ограничения, связанные с другими законами сохранения? Этот вопрос остается пока открытым, однако, мы примем гипотезу, что других ограничений нет. Основанием для такой гипотезы может служить теорема Пуанкаре /36/ об отсутствии в общем случае аналитических интегралов движения кроме энергии (см. также /152/ и § 2.6).

x) Мы подразумеваем здесь фактически все аддитивные законы сохранения (энергия, импульс, момент), применение которых не вызывает сомнений.

В свете теории КАМ естественно предположить, что разрушение остальных интегралов происходит как раз на стохастических слоях резонансов вследствие диффузии Ангольда.

Коэффициент диффузии можно грубо оценить непосредством:

$$|\delta I|_{\text{ин}}^2 \cdot \Omega_{(n)}, \text{ или, с учетом (2.12.5, 21):}$$

$$\mathcal{D}_A \sim I_\omega^2 \cdot \frac{\varepsilon_n^2}{n \sqrt{\alpha \varepsilon_n}} \cdot e^{-2c/s_n} \quad (2.12.22)$$

Для получения более явных оценок скорости диффузии положим:

$$\varepsilon_n \sim \varepsilon \cdot e^{-\bar{m}n/2n_0} \quad (2.12.23)$$

где n — теперь уже максимальный номер гармоники. Мы считаем, что по каждой степени свободы амплитуда гармоники возмущения убывает как e^{-n/n_0} , при-

чем взаимодействие является \bar{m} — кратным (§ 2.12). Более аккуратно было бы напи- писать: $\exp\left(-\sum_{i=1}^{\bar{m}} |n_i|/n_0\right)$, но для наших грубых оценок мы положим:

$$\sum_i n_i = \bar{m}n \approx \bar{m}n/2, \text{ откуда и вытекает (2.12.23). Фактически параметр}$$

\bar{m} характеризует теперь число частот, для которых берутся гармоники. Коэффици- ент диффузии определяется, в основном, экспонентой, которая принимает вид:^{x)}

$$\exp\left(-\frac{n'\bar{m}}{n_0} + \frac{n}{4n_0} - \frac{2c e^{\bar{m}n/4n_0}}{n \sqrt{\alpha \varepsilon} \cdot (n')^{n-1}}\right) \quad . \text{Аргумент экспоненты}$$

достигает максимума при:

$$n' = \left(\frac{2c(n-1)n_0 e^{\bar{m}n/4n_0}}{\bar{m}n \sqrt{\alpha \varepsilon}}\right)^{\frac{1}{n}} \gtrsim n \quad (2.12.24)$$

Последнее неравенство необходимо для справедливости принятого приближения (§ 2.6).

Оно нарушается в некотором интервале n , который можно определить из условия:

$$\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2n}} < \frac{\bar{m}n}{2n_0} \cdot e^{-\frac{\bar{m}n}{4n_0}} \quad (2.12.25)$$

Мы использовали здесь оценку (2.12.29a) для ε_s . Если $\varepsilon/\varepsilon_s$ не слишком ма- ло, искомый интервал равен:

$$n'_c = \frac{2n_0}{\bar{m}} \lesssim n \lesssim \frac{4n_0}{\bar{m}} = n_c \quad (2.12.25a)$$

x) Мы используем здесь оценку (2.12.28) для ω_1 , см. ниже.

При $\varepsilon/\varepsilon_s < (2N/e)^{2N}$ всегда $n' > n$. В интервале (2.12.25а) оптимальное $n' = n$ (§ 2.6). При этом в показателе экспоненты можно оставить только первое слагаемое. Действительно, второе слагаемое в экспоненте всегда мало по сравнению с первым, а отношение третьего к первому есть: $(n'/n)/(n-1)$. На границе, когда $n' = n$, третье слагаемое даёт поправочный множитель $(n/(n-1))$. Оставляя в экспоненте только первое слагаемое, получаем:

$$\mathcal{D}'_A \sim I^2 \omega \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{n \sqrt{\alpha}} \cdot e^{-\frac{n}{n_0}} \quad (2.12.26)$$

Из условия справедливости этого выражения (2.12.25) видно, что всегда $\mathcal{D}'_A < \mathcal{D}_A$ (2.12.29). Эта оценка на обоих границах интервала (2.12.25а) переходит приближенно в оценку (2.12.29), в чем легко убедиться, используя (2.12.25).

Перейдем теперь к области $n > n_c$ (или $n < n'_c$). Поясним, что в большинстве задач требуется оценить скорость диффузии Арнольда по резонансам с заданным n , точнее с n меньше некоторого. Последнее условие определяет среднее расстояние между резонансами Δ_n . Конкретный вид функции $\Delta_n(n)$ зависит от вида взаимодействия, см., например, формулы (2.12.15а, 18), справедливые для $n \ll N$.

Сейчас мы рассмотрим обратный предельный случай $n \approx N$. Грубую оценку Δ_n можно сделать следующим образом. Полное число различных комбинаций компонент вектора (n) равно $(2n)^N$, так как каждая компонента может принимать значения от $-n$ до n . Однако резонансы дают только такие комбинации, для которых вектор (ω) в уравнении $(n, \omega) = 0$ (2.12.1) имеет положительные компоненты. Считая при больших n распределение векторов (n) и (ω) в среднем изотропным, можно оценить долю векторов (ω) с положительными компонентами как 2^{-N} , откуда полное число резонансов $\sim n^N$, а среднее расстояние между ними:

$$\Delta_n \sim \frac{\omega}{n^N} \quad (2.12.27)$$

Основная ошибка этой оценки связана с неравномерной плотностью резонансов

(см. рис.4.3.1), что может быть учтено в (2.12.27) введением специального множителя: $\omega \rightarrow k\omega$.

Из (2.12.27) вытекает, в частности, оценка для частоты возмущения ω_1 , которую мы использовали выше:

$$\omega_1 \sim n \cdot \Delta_n \sim \frac{\omega}{n^{N-1}} \quad (2.12.28)$$

Средний "зазор" между резонансами Δ_n определяет плотность сетки стохастических слоев по которым идет диффузия Арнольда. Из оценки (2.12.22) с учётом (2.12.23, 24) получаем:

$$\Delta_n \sim T^2 \omega \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{\alpha}} \cdot M_n; \quad (2.12.29)$$

$$M_n = n^{-1} \exp \left\{ -\frac{4N}{\bar{n}(N-1)} \left(\frac{2c n_0^2 (N-1)}{n \bar{n}^2} \right)^{\frac{1}{N}} \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2N}} e^{\frac{n \bar{n}}{4n_0 N}} - \frac{n}{4n_0} \right\}$$

где критическое значение ε_s определяется из выражения:

$$\Omega_{(n)} \sim \frac{2n_0}{\bar{n}} \cdot \sqrt{\alpha \varepsilon_s} \cdot \omega \sim \omega \left(\frac{\bar{n}}{2n_0} \right)^N \quad (2.12.29a)$$

В последней оценке мы использовали эффективное значение параметра n_0 , которое вытекает из появления экспоненциального множителя (2.12.23) $e^{-\bar{n}n/2n_0}$, откуда $n_{0\text{eff}} \approx 2n_0/\bar{n}$.

Таким образом скорость диффузии Арнольда убывает с ростом n по закону двойной экспоненты. Это наглядно характеризует степень колмогоровской устойчивости в многомерном случае. Напомним, что в одномерном случае устойчивость является вечной (§ 2.2). Практически зависимость типа (2.12.29) определяет некоторую границу:

$$\Pi_2 = \frac{\bar{n}n}{4n_0 N} \sim 1 \quad (2.12.29b)$$

за которой скорость диффузии Арнольда становится невидимой малой. Заметим, что эта граница как раз соответствует условию $n \sim n_c$ (см. выше). Это значит, что оценку (2.12.29) можно практически применять лишь на самой границе (2.12.29b).

Оказывается, однако, что в некоторых случаях возможна и более быстрая диф-

фузия по системе резонансов. Появление двойной экспоненты в (2.12.29) связано, как мы видели, с тем, что величина $S_n \sim \Omega_n / \Delta_n$ в оценке (2.12.22) сама становится экспоненциально малой, т.к. Ω_n убывает с ростом n экспоненциально, а Δ_n — только как $n^{\sqrt{2}}$ (2.12.27). Но этого не происходит на резонансах кратности 2, т.е. на пересечении двух резонансных поверхностей. В этом случае всегда $S_n \sim 1$ и экспонента исчезает из оценки (2.12.22). Более того, так как большинство резонансов кратности 2 образовано резонансами с n одного порядка ($n \sim n_{\text{max}}$), то происходит полное разрушение резонанса, т.е. ширина стохастического слоя становится порядка ширины резонанса. Таким образом возникает сравнительно широкий канал, по которому идет диффузия с относительно большой скоростью. Чтобы отличить этот специальный вид диффузии мы будем называть его стримерной диффузией. Название связано с тем, что при наименьшем числе измерений, когда эта диффузия возможна, стохастический слой резонанса кратности 2 имеет в пространстве частот форму узкой трубки (стримера), по которой идет сравнительно быстрая диффузия, картина, напоминающая чем-то стримерный пробой в газе.

Стримерная диффузия возможна только в том случае, когда резонансы кратности 2 образуют пересекающуюся сетку в пространстве частот. Из геометрических соображений ясно, что это возможно при условии:

$$N_a \geq 4; \quad N_h \geq 3 \quad (2.12.30)$$

где N_a , N_h — число степеней свободы (динамических частот) для автономной и неавтономной системы, соответственно. Таким образом, для стримерной диффузии требуется на одну степень свободы больше, чем для обычной диффузии Арнольда.

Оценку скорости стримерной диффузии получим из (2.12.22,23) с учётом

$$S_n \sim 1; \quad n \sim n':$$

$$D_c \sim I^2 \omega \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{n \sqrt{\alpha}} \cdot e^{-\frac{3}{4} \cdot \frac{n}{n_0}} \quad (2.12.31)$$

Величина D_c , конечно, тоже быстро убывает с ростом номера гармоники резонанса, но уже не так катастрофически как D_A . С точностью до численного множите-

ля ~ 1 в экспоненте, D_c совпадает с D_A' (2.12.26). Оба механизма дают примерно одинаковую скорость диффузии при $n \sim 1$, если только это попадает в область (2.12.25). В противном случае стримерная диффузия оказывается даже медленнее в этой области. Существенно, однако, что закон (2.12.31) сохраняется при любых n , в то время как в обычной диффузии Арнольда при больших n появляется двойная экспонента. Поэтому стримерная диффузия играет существенную роль только в области $n \gtrsim n_c$ (2.12.25a).

Заметим, что для стримерной диффузии достаточно уже двух резонансов, а не трех, как для обычной диффузии Арнольда (см. выше). Это связано с тем, что оба резонанса действуют теперь в одной и той же области пространства, причем их вектора (n) всегда непараллельны. Однако в данном случае нетривиальным является требование наличия составляющей вектора (ΔI), или (n), вдоль стримера. В частности, это условие нарушается при параллельных: $(\Delta I) \parallel (\Delta \omega)$. Так как $(\Delta I) \parallel (n)$ (2.12.2), то из условия резонанса (2.12.1) вытекает: $(\Delta \omega, \omega) = 0$, т.е. вектор ($\Delta \omega$) перпендикулярен резонансной плоскости, а значит, и стримеру, так что диффузия отсутствует. Поскольку матрица нелинейности $\frac{\partial \omega}{\partial I_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial I_k \partial I_k}$ симметрична и может быть приведена к главным осям, условие непараллельности векторов (ΔI), ($\Delta \omega$), необходимое для стримерной диффузии, сводится к тому, чтобы собственные значения матрицы нелинейности были различными.

Резонансы кратности > 2 не приводят уже к качественно новым эффектам.

Коэффициент диффузии (2.12.28) так же, как и (2.12.31) еще не определяет реальной диффузии в пространстве импульсов. Действительно, диффузия Арнольда происходит вдоль резонансных поверхностей, которые в общем случае образуют очень запутанную систему; в местах пересечения поверхностей будет происходить "случайный" (в силу стохастичности движения) переход с одной поверхности на другую, так что в целом диффузия Арнольда представляет собой комбинацию двух случайных процес-

сов: диффузии вдоль стохастического слоя и переход с одного слоя на другой. Если средняя длина между двумя пересечениями ℓ_j достаточно мала, то полная длина диффузионного пути L по системе пересекающихся слоёв может быть оценена по обычным формулам теории случайных блужданий /43/:

$$L \sim (\Delta I)^2 / \ell_j \quad (2.12.32)$$

где (ΔI) — полное изменение импульса в процессе диффузии. Тогда время диффузии можно оценить по формуле:

$$t_d \sim \frac{L^2}{D_A} \sim \frac{\omega}{\Delta_n^2} \cdot \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^4 \cdot \frac{\alpha^{5/2}}{\varepsilon^{3/2} M_n} \quad (2.12.33)$$

где мы положили $\ell_j \sim \Delta_n / \omega' = \Delta_n \cdot I / \alpha \omega$.

Заметим, что закон этой "двойной диффузии" является необычным, так как время диффузии t_d оказывается пропорциональным не квадрату, а четвертой степени "расстояния" (ΔI). Введем коэффициент "двойной диффузии":

$$D_2 \equiv \frac{d}{dt} \langle (\Delta I)^4 \rangle \sim I^4 \cdot \frac{\Delta_n^2}{\omega} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2} M_n}{\alpha^{5/2}} \quad (2.12.34)$$

Полученные соотношения остаются справедливыми и для стримерной диффузии с заменой: $D_A \rightarrow D_c$.

Скорость диффузии Арнольда (2.12.29) убывает экспоненциально с уменьшением параметра стохастичности $S^2 \sim \varepsilon / \varepsilon_s$. Кроме того диффузия имеет место лишь для специальных начальных условий, относительная мера которых $\sim S \ll 1$ (при $S < 1$; § 2.6). Однако полная система резонансов, а, значит, и стохастических слоёв является всюду плотной. Поэтому задача о движении в области колмогоровской устойчивости является асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) некорректной, так как любое сколь угодно малое изменение начальных условий переводит траекторию из устойчивой компоненты в стохастическую и наоборот. Заметим, что в данном случае мы не можем просто произвести усреднение по небольшому объёму фазового пространства, как это было сделано при выводе кинетического уравнения. Это связано с тем, что в большей части фазового пространства система является устойчивой и поэтому такое

усреднение не соответствует никакому реальному процессу в системе, а ссылка на "практическую" неопределенность начальных условий в механике недостаточна.

Можно, однако, следующим образом регуляризовать задачу. Добавим к динамической системе какой-либо "внешний" диффузионный процесс с коэффициентом диффузии D_o . Например, в случае движения частицы в магнитной ловушке (§ 4.4) таким процессом является всегда присутствующее рассеяние на остаточном газе. Эта дополнительная диффузия ликвидирует сингулярность начальных условий и, кроме того, даёт возможность пренебречь резонансами очень высоких гармоник и оставить только конечное число резонансов. Однако, в отличие от стохастической области, движение будет существенно зависеть теперь от дополнительной диффузии, в том числе и в пределе $D_o \rightarrow 0$.

Процесс диффузии будет проходить при этом через две стадии. На первой из них происходит "внешняя" диффузия с коэффициентом D_o до ближайшей резонансной поверхности, т.е. на расстояние $\sim l_1$. На второй стадии "внешняя" диффузия происходит "параллельно" диффузии Арнольда. В простейшем случае, когда число резонансов невелико, так что $l_1 \sim (A)$, можно пренебречь "двойной диффузией" и считать, что диффузия вдоль стохастических слоёв с коэффициентом D_A совпадает приблизительно с диффузией по A . Тогда полный коэффициент диффузии на второй стадии процесса равен $D_o + D_A \cdot \omega$, где $\omega < 1$ - некоторый фактор уменьшения скорости диффузии за счёт того, что система проводит внутри стохастического слоя только малую часть времени $\sim \delta_n \sim s_n e^{-C/S_n}$ (§ 2.6). С первого взгляда может показаться, что $\omega \sim \delta_n$, однако, в действительности ω значительно больше. При заданных n, n' D_A действительно умножается на величину $\sim \delta_n$. Однако, с другой стороны, это умножение эквивалентно приблизительно замене $C \rightarrow \frac{3}{2} C$ (2.12.22), а зависимость D_A от C очень слабая (2.12.29). Кажущееся противоречие объясняется тем, что в процессе оптимизации по n' последнее изменяется от введения дополнительного множителя δ_n ,

который, таким образом, в значительной степени компенсируется. Если Γ есть показатель первой экспоненты, то $\omega \sim 2\pi/\Gamma$ (2.12.29). В частности, при минимальном значении $\Gamma = 4\pi$ (2.12.26) $\omega \sim 1/2$. То же самое касается и области (2.12.25) ($n' = n$).

Заметим, что полный коэффициент диффузии существенно зависит в любом случае от "вспомогательного" параметра D_0 . Последний не должен быть слишком большим, иначе стохастические слои вообще перестают работать. Критическое значение D_0 определяется из условия выхода из слоя за время порядка одного фазового колебания, что как раз порядка скорости диффузии в стохастическом слое (§ 2.10). Отсюда условие существования диффузии Арнольда:

$$D_0 \leq D_A \quad (2.12.35)$$

Однако заметное влияние этой диффузии имеет место при меньших $D_0 \leq D_A, \omega$.

Отметим, что зависимость времени диффузии от параметра возмущения будет иметь характерный вид переходной кривой с двумя плато при малом и большом возмущении. Действительно, в обоих пределах коэффициент диффузии равен D_0 , но расстояние разное: (ΔI) и ℓ_I , соответственно. Отношение времен диффузии на плато равно поэтому:

$$k \sim \left(\frac{\Delta I}{\ell_I} \right)^2 \quad (2.12.36)$$

Рассмотрим теперь более интересный случай большого числа резонансов:

$\ell_I \ll (\Delta I)$, когда имеет место "двойная диффузия" (2.12.33, 34). Это значит, что кинетическое уравнение приобретает более сложный вид, чем обычно (2.10.10). Ввиду грубости оценок, касающихся "двойной диффузии", мы не будем выводить это уравнение, а воспользуемся простой оценкой для обычной диффузии: $\frac{d(\Delta I)^2}{dt} \sim D_0$ и для "двойной диффузии": $\frac{d(\Delta I)^4}{dt} \sim D_0$ (2.12.34). Отсюда полная скорость диффузии равна:

$$\frac{d(\Delta I)^2}{dt} \sim D_0 \left(1 + \frac{\gamma}{(\Delta I)^2} \right); \quad \gamma = \frac{D_0 \cdot \omega}{2D_0} \quad (2.12.37)$$

Интегрируя это уравнение в простейшем случае $\omega = \text{const}$, получаем полное время диффузии:

$$t_A \sim D_0^{-1} \left[(4I)^2 - \gamma \ell_u \left(1 + \frac{(4I)^2 - \ell_i^2}{\gamma} \right) \right] \quad (2.12.38)$$

которое опять таки существенно зависит от D_0 .

Некоторые экспериментальные данные по диффузии Арнольда будут приведены в §§ 3.6; 4.4.

Для стримерной диффузии картина качественно остается той же самой, но эффективный коэффициент диффузии D_c^* с учётом обычной диффузии D_0 заметно уменьшается:

$$D_c^* \sim D_c \cdot S_n^2 \sim I^2 \omega \cdot \frac{\varepsilon^{5/2}}{\alpha^{3/2}} \cdot n^{N-1} \cdot e^{-\frac{5}{4} \cdot \frac{\bar{n}_n}{n_0}} \quad (2.12.39)$$

более существенно, чем D_A (см. выше). В последней оценке использовано соотношение (2.12.31) и выражение для S_n :

$$S_n \sim \frac{\Omega_n}{\Delta_n} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \cdot n^N \cdot e^{-\frac{\bar{n}_n}{2n_0}} \quad (2.12.40)$$

Отношение времен диффузии на плато будет меньше (2.12.36), так как вместо поглощающих резонансных поверхностей, которые обязательно пересекаются в процессе диффузии D_0 , теперь имеются поглощающие трубы (стримеры), так что возможен обход их ("промашка"). Однако увеличение времени жизни незначительно, поскольку вероятность промашки быстро убывает по мере приближения к стримеру.

В качестве модели можно рассмотреть диффузию между двумя концентрическими цилиндрами с поглощением только на внутреннем. Несложные вычисления показывают, что время диффузии пропорционально только логарифму отношения радиусов цилиндров. В нашем случае это отношение $\sim S_n$, так как среднее расстояние между стримерами того же порядка, что и между резонансными поверхностями. Таким образом находим вместо (2.12.36):

$$k \sim \left(\frac{4I}{\ell_i} \right)^2 / |\ell_u S_n| \quad (2.12.41)$$

Сделаем в заключение несколько замечаний по поводу кинетического уравнения в многомерном случае. Если число степеней свободы невелико, то функция распределения по-прежнему описывает ансамбль тождественных N -мерных систем в Γ -пространстве $2N$ измерений. Уравнение для такой функции распределения называется основным кинетическим уравнением /49/. Однако обычно сложные системы статистической механики состоят из очень большого числа ($n \rightarrow \infty$) одинаковых элементов - "частич", взаимодействующих между собой. В таком случае появляется новая возможность: кроме основного кинетического уравнения можно написать уравнение для так называемой одиночечной функции распределения, описывающей плотность "частич" в фазовом пространстве одной "частицы", которое называется M -пространством. Так как полное число частич N всегда конечно, то в M -пространстве (так же, как и в Γ -пространстве) имеет смысл только крупноструктурная функция распределения (§ 2.10).

Аналогичным образом может быть введено кинетическое уравнение для S -частичной фазовой плотности ($S \ll n$), описывающее распределение подсистем из S "частич".

Для многомерного осциллятора "частичей" является одномерный осциллятор, слабо связанный с остальными, например, фонон в кристаллической решетке. Если рассматривать такой одномерный осциллятор как неавтономный с заданным внешним возмущением, мы придем к основному кинетическому уравнению в простейшем Γ -пространстве (§ 2.10). Но если тот же самый одномерный осциллятор считать "типичным" представителем системы из взаимодействующих осцилляторов, мы получим кинетическое уравнение в M -пространстве. В обоих случаях получается, конечно, одно и то же уравнение (§ 2.10), разным является лишь физический смысл фазовой плотности.

§ 2.13. Замечания о природе статистических законов

Имея дело со статистической механикой и, в частности, кинетическими уравнениями, трудно удержаться от соблазна сделать несколько общих замечаний о природе статистических законов, необратимости и тому подобных все еще несколько мистических проблемах. Будем надеяться, что эти замечания не окажутся простым повторением хорошо известных аргументов. Нашим преимуществом в данном вопросе является проведенное в этой работе детальное исследование перехода от динамического поведения к статистическому для очень простой, вероятно, простейшей, механической системы — элементарной модели, которая представляет собой одномерный нелинейный осциллятор под действием заданного периодического возмущения.

На основной вопрос — является ли движение такой системы "настоящим" случайным процессом — мы отвечаем утвердительно в противоположность многим другим авторам, занимавшимся исследованием этой проблемы. Среди них Крылов /30/, точка зрения которого в остальном очень близка нам и фактически продолжается и развивается в настоящей работе.

Если принять это утверждение, то появляется возможность общего объяснения статистических законов природы на основе классической механической модели. В этом случае статистические законы действуют в динамической системе тогда и поскольку, когда и поскольку движение системы является стохастическим в том смысле, какой придается этому термину в настоящей работе (§ 2.3). Такая точка зрения является совершенно естественной в настоящее время для математиков с их эргодической теорией (см., например, /42/), но, как это ни странно, по-видимому, чужда физикам, во всяком случае современной статистической механике /27, 49/, в которой безраздельно господствует так называемая линейная модель (см. § 2.11 и ниже).

Наиболее неожиданным следствием излагаемой точки зрения оказалась возможность статистического поведения предельно простых систем вплоть до элементарной модели, которая имеет всего одну степень свободы. Впрочем, для эргодической тео-

рии это не было неожиданностью. Еще Хопф /28/ указал на такую возможность для системы с двумя степенями свободы, хотя только совсем недавно Синаю удалось доказать стохастичность движения одной реальной механической системы — системы твердых шариков в ящике, которая в простейшем случае имеет всего две степени свободы /106/. Этот результат резко противоречит твердо укоренившемуся в физике представлению о том, что статистические законы действуют лишь в очень сложной системе с огромным числом степеней свободы $N \rightarrow \infty$.

Возвратимся теперь к нашему основному утверждению, сделанному выше, о том, что статистические законы соответствуют некоторому частному случаю движения классической механической системы, а именно — стохастическому движению.

Возможны двоякого рода возражения против этого утверждения. Одно из них, менее существенное, связано с "островками" устойчивости, всегда существующими в стохастической области элементарной модели (§ 2.8). Это значит, что в принципе всегда найдутся такие специальные начальные условия конечной, хотя бы и очень малой меры, для которых движение не является стохастическим. По поводу этого возражения можно сказать, только, что такие устойчивые области, вообще говоря, действительно существуют и могут наблюдаться для простых систем (§ 3.5). Заметим, однако, что остаточные "островки" устойчивости характерны для колебательных систем, например, для кристаллической решетки, если обратиться к типичным макроскопическим молекулярным объектам статистической физики. В то же время для газа и, вероятно, для жидкости устойчивые области полностью отсутствуют. По крайней мере это доказано Синаем для модели газа как системы твердых шариков, упоминавшихся выше /106/. Далее, даже для колебательных молекулярных макроскопических систем устойчивые области исчезающие малы (§§ 2.8, 12):

$$\frac{\Delta I}{I} \leq N^{-\gamma} \quad (2.13.1)$$

В этом пункте появляется соблазн использовать квантование фазового пространства, чтобы доказать, что очень малые ΔI вообще невозможны /50/. Такое доказательство

ство, однако, не проходит, как это было выяснено Крыловым /30/. Грубо говоря, дело заключается в том, что одновременно с квантованием изменяется и тип описания движения, а именно, необходимо перейти от фазового пространства классической механики к Гильбертову пространству волновых функций, в котором движение квантовой системы описывается, по-прежнему, траекторией.

Наконец, и это наш главный аргумент, оба типа систем статистической физики (с устойчивыми областями и без них) всегда взаимодействуют между собой через молекулярные столкновения, а также через электромагнитное (тепловое) излучение. В этих условиях устойчивые области могут сохраняться только для очень простых макроскопических или молекулярных, систем с малым числом степеней свободы (2.13.1) и то в течение короткого промежутка времени по сравнению со временем релаксации с окружающей средой. Подобные эффекты действительно наблюдаются, в частности, в так называемых одномолекулярных реакциях, например, термической диссоциации, если число атомов в молекуле > 2 . В настоящее время существуют две противоположные теории таких реакций, одна из которых (теория Ландау /153/ и Касселя /154/ опирается на неограниченную стохастичность внутримолекулярного движения, в то время как другая (теория Слейтера /155/) предполагает, наоборот, наличие полного набора интегралов движения. В действительности же, как это подтверждается прямыми экспериментами и численным счётом /156/, при редких столкновениях имеет место некоторый промежуточный случай, типичный для системы с разделенным фазовым пространством (§ 2.5). Во избежание недоразумений подчеркнем еще раз, что отклонения от статистического поведения ограничены в этом примере очень коротким промежутком времени между двумя последовательными столкновениями.

Второе, значительно более глубокое, возражение против нашей общей концепции статистических законов связано с самой природой механического движения как обратимого во времени движения по траектории. Наиболее подробно эта проблема рассмотрена Крыловым /30/. Она тесно связана также с парадоксом Лошмидта, возникающим из противоречия между динамической обратимостью и статистической необратимостью

мостью движения.

Основное возражение Крылова против классической механической модели статистических законов сводится к следующему. Поскольку динамическое движение обратимо, его необратимые статистические свойства (например, увеличение или уменьшение энтропии) будут целиком зависеть от начальных условий. Рассмотрим далее обычную постановку статистического опыта как многократное повторение процесса при заданных макроскопических начальных условиях. Тогда для получения статистического поведения функция распределения микроскопических начальных условий при заданном макроскопическом состоянии должна быть равномерной в достаточно малых областях фазового пространства. Между тем эволюция функции распределения с течением времени ведет, наоборот, ко все более и более сингулярному состоянию, в чем легко убедиться, рассмотрев обратное движение. Таким образом мы приходим как будто бы к невозможности не только обосновать, но даже и ввести постулат о начальных микроскопических условиях.

Иногда это возражение "развивают" еще дальше и утверждают, что с точки зрения динамической модели вероятность увеличения и уменьшения энтропии вообще одинакова, так как в силу теоремы Лиувилля фазовый объем двух состояний с разной энтропией, через которые система проходит в процессе движения, одинаков. Нам будет удобно начать с опровержения последнего, уже явно неправильного, утверждения, основанного в сущности на недоразумении. Дело в том, что, если понимать термин "объем фазового пространства" буквально, то в любой реальной ситуации он равен нулю, потому что мы всегда имеем конечное число систем (и частиц в системе), а также конечное число повторений опыта (см. § 2.10). Если же ввести некоторый условный фазовый объем, определяемый приближенно по конечному числу точек в фазовом пространстве, то он не сохраняется в процессе движения.

Рассмотрим последний случай подробнее на примере системы из $\sqrt{N} \gg 1$ осцилляторов типа элементарной модели, слабо взаимодействующих между собой. Бу-

дем описывать состояние этой системы в M -пространстве (§ 2.12), которое совпадает в данном случае с фазовым квадратом элементарной модели. Состояние системы представляется N точками в этом квадрате. Пусть они распределены статистически равномерно и независимо, так что система занимает вначале "все" фазовое пространство. Это не мешает ей, однако, собраться в процессе движения в очень малую область $\{\}$ фазового квадрата. Оценим вероятность этого, предполагая, что область $\{\}$ имеет простую форму. Рассмотрим обратный процесс перемешивания, когда область $\{\}$ трансформируется в систему узких полос с общей площадью $\{\}$, равномерно распределенных по квадрату (рис. 2.4.1). Очевидно, что все N точек должны лежать на какой-нибудь из полос этой системы; вероятность этого $\omega_{\{\}} = \{\}^N$ или, если нас интересует сбиение в любую малую область $\{\}$ (уменьшение энтропии):

$$\omega = \{\}^{N-1}$$

Но это есть как раз вероятность соответствующей флюктуации. Таким образом теорема Лиувилля не противоречит малости флюктуаций, приводящих, в частности, к уменьшению энтропии.

Рассмотренный пример является также ответом на второе возражение Крылова относительно эволюции функции распределения. Безусловно, непрерывная (тонкоструктурная (§ 2.10)) функция распределения стремится с течением времени к сингулярной, как это легко понять из картины перемешивания на рис. 2.4.1. Однако, как отмечалось выше, такая функция не соответствует никакому реальному опыту, т.е. является принципиально ненаблюдаемой и потому должна быть исключена из теории и заменена крупноструктурной функцией распределения (§ 2.10). Последняя же стремится к равномерной согласно эргодической теории. Это даёт возможность не только устраниć указанное Крыловым противоречие, т.е. ввести постулат о начальных микроскопических условиях, но и открывает путь к обоснованию этого постулата. Естественно предположить теперь, что начальное состояние ($t=0$) интересующего нас процесса ($t>0$) в некоторой системе определяется конечным состоянием предшествующего процесса ($t<0$) в той же системе.

Здесь возникают, однако, две трудности. Первая связана с тем, что равномерное распределение получается согласно эргодической теории лишь в пределе $\tau \rightarrow \infty$. Эта трудность не является существенной, поскольку при положительной энтропии Крылова-Колмогорова процесс перемешивания идет экспоненциально быстро и практически заканчивается за сравнительно короткое время. Однако остается другая трудность, связанная с самой постановкой статистического опыта. Как уже отмечалось выше, предполагается многократное повторение исследуемого процесса при одних и тех же макроскопических условиях. Это требование не очень определенное в том смысле, что оно ничего не говорит о микроскопическом состоянии. Поэтому возникает по крайней мере подозрение, если не уверенность, в основе которой лежит, в сущности, туманное само по себе представление о нашей неограниченной свободе воли, подозрение, что мы можем "создать" любое начальное микросостояние и тем самым получить любое течение процесса в противоречие со статистическим опытом. Конечно, с другой стороны существует интуитивное представление о том, что микроскопические координаты "недоступны" на самом деле экспериментатору, так что фактически мы не в силах влиять на микроскопическое состояние макроскопической системы. Однако это не является доказательством, во всяком случае остается возможность, что мы как-то научимся это делать в будущем, ибо, как гласит популярное в наше время изречение: "Нет ничего невозможного для науки!"

Нам кажется, что эти сомнения могут быть разрешены на основе анализа наиболее важного свойства стохастической системы — локальной неустойчивости движения, развивающейся со временем экспоненциально. Нетрудно убедиться, что благодаря этому свойству в природе не существует замкнутой системы в отношении её динамического движения, кроме всей Вселенной. В качестве примера рассмотрим движение молекул газа в модели твердых шариков радиуса R со средней длиной свободного пробега ℓ . Рассмотрим возмущение этого движения гравитационным полем единственного протона, находящегося на "другом конце" Вселенной, т.е. на рас-

стоянии $R \sim 10^{28}$ см. Учитывая, что возмущение является приливным и что существенно изменение гравитационного поля протона за счет его смещения, получим дополнительное угловое отклонение молекулы газа:

$$(\Delta\theta)_0 \sim \frac{2\bar{m}}{Rv^2} \cdot \left(\frac{\ell}{R}\right)^3 \quad (2.13.2)$$

где \bar{m} - гравитационная постоянная, а v - скорость молекулы. Это возмущение будет расти по закону:

$$(\Delta\theta)_n \sim (\Delta\theta)_0 \cdot \left(\frac{\ell}{r}\right)^n \quad (2.13.3)$$

где n - число последовательных соударений молекулы, и через

$$n_1 \sim - \frac{\ln(\Delta\theta)_0}{\ln \ell/r} \quad (2.13.4)$$

становится $(\Delta\theta)_1 \sim 1$, т.е. траектория динамического движения существенно изменится. Если взять газ при нормальных условиях: $\bar{m} \sim 10^{-24}$;

$v \sim 10^5$ см/сек ; $\ell \sim 10^{-5}$ см ; $r \sim 10^{-8}$ см , то оценка (2.13.4) даёт: $n_1 \approx 60$, что требует всего $\sim 10^{-8}$ сек. Этот крайний пример наглядно демонстрирует, что с точки зрения молекулярной динамики существует только одна замкнутая система - Вселенная в целом, которая включает в себя, разумеется, и экспериментатора. Последний не властен, таким образом, ни над своим, ни над каким-либо другим микроскопическим состоянием. Это состояние определяется начальными условиями Вселенной при $t = -\infty$, а вовсе не "созданием" начально-го состояния в конкретном статистическом опыте. Нарушение статистических законов в такой модели на бесконечном промежутке времени возможно поэтому лишь для начальных условий меры нуль. Тот факт, что Вселенная не находится в таком специальному состоянии является минимальной гипотезой нашей модели.

Будучи минимальной эта гипотеза не является тривиальной по тем же причинам, на которых основано второе возражение Крылова: при $t \rightarrow +\infty$ фазовая точка системы стремится к некоторому исключительному положению, между тем как её начальное значение ($t \rightarrow -\infty$) не должно быть исключительным. Нам кажется, однако, что эта трудность скрепе психологическая, чем физическая. Дело в том, что обе

исключительные области ($t \rightarrow \pm \infty$) совершенно различны. Формально они отличаются лишь (!) изменением знака всех скоростей и это производит какое-то гипнотизирующее действие. Но мы знаем, что даже незначительное изменение начальных условий стохастической системы приводит к полному изменению траектории движения. Что же касается упомянутых выше исключительных областей при $t \rightarrow \pm \infty$, то, как это наглядно видно из картины перемешивания на рис.2.4.1, они представляют собой две системы пересекающихся полос. Поэтому любая исключительная область $t \rightarrow +\infty$ оказывается равномерно распределенной по всем исключительным областям $t \rightarrow -\infty$, иначе говоря она полностью теряет всю свою исключительность при обращении скоростей.

В этом, как нам кажется, и состоит ответ на парадокс Лошмидта о необратимости в статистической механике.

Что же касается преимущественного направления термодинамических процессов во Вселенной, то оно определяется её резкой макроскопической неравномерностью, имеющей космологическое происхождение. Наиболее важным здесь является доминирующая роль гравитационного взаимодействия во Вселенной. При таком взаимодействии вообще не существует равновесного состояния из-за так называемого коллапса (неограниченного сжатия), которым заканчивается развитие как всей Вселенной в целом, так и отдельных достаточно массивных звезд /157/. Заметим попутно, что отсутствие термодинамического равновесия делает невозможным и тепловую смерть Вселенной. Насколько нам известно, это простое соображение было высказано совсем недавно Зельдовичем и Новиковым /157/. Если сингулярность при коллапсе Вселенной не проходится^{x)}, то наступает состояние, которое можно было бы назвать космологической смертью Вселенной. Если же сингулярность проходится как это можно, по-видимому, заключить из работы Лифшица, Судакова и Халатникова /159/^{xx)}, то Вселен-
x) для открытой модели Вселенной, которая является, на наш взгляд, более вероятной /158/.
xx) См. впрочем /157/, стр.551.

ная периодически получает возможность начать жизнь "сначала" (и, конечно, прожить её лучше!).

Обсудим теперь кратко некоторые возможности устранения минимальной гипотезы, сформулированной выше. Нужна ли в действительности такая гипотеза? Можно ли подобрать такие специальные начальные условия, хотя бы и меры нуль, чтобы статистическое поведение оказалось невозможным несмотря на стохастичность системы? Может оказаться, что таких условий просто не существует, независимо от их меры. Чтобы понять это, обратимся опять к численному эксперименту с элементарной моделью и предположим, что у нее полностью отсутствуют устойчивые области, как и в случае молекулярных столкновений. Поскольку это касается действительных чисел всегда существуют исключительные начальные условия, для которых движение не подчиняется никаким статистическим законам. Мера таких траекторий, конечно, равна нулю, но они существуют. Однако численный эксперимент всегда ограничен, в принципе, rationальными числами из-за конечного числа разрядов мантиссы ЭВМ, мера которых также равна нулю. Но два множества нулевой меры и совершенно различной природы наверняка не пересекаются. Во всяком случае здесь имеется принципиальная возможность строго доказать, что все начальные условия приводят к стохастическому движению. Возникает вопрос, не может ли иметь место такой же эффект и в природе вследствие квантования пространства-времени, если последнее действительно существует? Ответ на него совсем не очевиден, как это видно на примере квантования фазового пространства, рассмотренного выше. Однако такая возможность не исключена. Любопытно, что в этом случае даже обращение скоростей не приводит к нарушению статистических законов, поскольку траектории прямого и обратного движения совершенно не совпадают из-за "округления" ("квантования"). Интересно отметить, что движение тем не менее является в некотором смысле обратимым, так как динамические уравнения, включая процедуру "округления", не изменяются при обращении времени.

Существенно, что абсолютная величина кванта пространства-времени практически не играет роли вследствие экспоненциального развития локальной неустойчивости стохастического движения. Так, например, если даже квант имеет порядок гравитационной длины ($\sim 10^{-55}$ см для электрона), его влияние на динамику движения газа при нормальных условиях (см. пример выше) будет сказываться всего через ~ 16 соударений, или $\sim 10^{-9}$ сек.

Своебразное новое квантование фазового пространства рассмотрено Крыловым /30/. Как отмечалось выше, обычное квантование ($\Delta\mu \sim \hbar$) не приводит к ожидаемому эффекту вследствие изменения типа описания. Чтобы обойти это затруднение, Крылов выдвинул гипотезу, что макроскопические системы не имеют определенной Ψ -функции вследствие своеобразной, предполагаемой Крыловым, дополнительности между микроскопическим (квантовым) состоянием системы и её макроскопической (термодинамической) характеристикой. Это приводит к квантованию $\Delta\mu \gg \hbar$ и даёт возможность объяснить статистическое поведение даже в классической постановке задачи (см. выше). Мы не можем здесь анализировать эту гипотезу более подробно, так как настоящая работа ограничена исключительно классической механикой. Скажем только, что развитие этой гипотезы представляется нам чрезвычайно интересным, тем более, что она означает, по существу, неприменимость квантовой механики к макроскопической системе и, следовательно, отсутствие непрерывного перехода через квазиклассическую область.

Другая возможность исключения минимальной гипотезы связана с тем, что точные динамические законы природы могут оказаться необратимыми во времени. Сейчас это одно из возможных объяснений аномального распада K -мезонов /160/. Существенно, опять таки, что в условиях экспоненциальной локальной неустойчивости стохастической системы достаточно сколь-угодно малой необратимости динамических уравнений.

Иногда высказывается предположение, что квантово-механическое движение су-

щественно необратимо вследствие так называемой редукции Ψ -функции при измерении, т.е. при взаимодействии с макроскопическим объектом, которое не описывается уравнением Шредингера /27/. Фактически, в современной квантовой механике нет ясного понимания процесса измерения, так что весь этот вопрос в целом остается пока открытым. Нам кажется, однако, более вероятной другая в некотором смысле противоположная гипотеза, состоящая в том, что сама редукция Ψ -функций является следствием статистических свойств макроскопического измерительного прибора. Основанием для такой гипотезы служат следующие соображения. Редукция Ψ -функций не обязательно должна сопровождаться трансформацией исходной Ψ -функции в одно из состояний, суперпозицией которых она являлась до измерения. Достаточно, чтобы исходное чистое состояние превратилось в смешанное, т.е. чтобы фазовые соотношения между суперпозиционными состояниями стали неопределенными. В последнем случае интерференция между состояниями отсутствует и Ψ -функция даёт классическую вероятность, когда система "на самом деле" находится в каком-то одном из состояний, но мы не знаем, в каком именно. В отличие от этого до измерения система находилась "на самом деле" во всех состояниях сразу (чистое состояние). Но разрушение фазовых корреляций между суперпозиционными состояниями, необходимое для превращения чистого состояния в смешанное, и является, по-видимому, неизбежным следствием взаимодействия микросистемы со статистическим прибором. Высказанная гипотеза требует, конечно, детального изучения, выходящего за рамки данной работы. Отметим, что в литературе эта проблема обсуждается уже довольно давно (см., например, /162/).

Сравним в заключение нашу точку зрения с линейной моделью современной статистической механики, введенной Беголюбовым /71/ и наиболее полно разработанной Пригожиным и его школой /49/ (см. также /161/). Как уже говорилось в § 2.11, эта модель не требует эргодичности, но справедлива, т.е. приводит к статистическим законам, строго говоря, только в пределе очень большого числа степеней свободы.

ды $N \rightarrow \infty$. Для конечного N действие модели ограничено по времени сверху (§ 2.11). Для макроскопических молекулярных систем этот верхний предел очень велик /163/ и практически не имеет никакого значения. Существенно, однако, что даже при $N \rightarrow \infty$ статистическое описание, возможно лишь для малой подсистемы $N_1/N \rightarrow 0$ /49/. Это условие может быть формально удовлетворено, если взять только запаздывающие решения волнового уравнения Лиувилля (2.10.1) (при дополнительном требовании $N, V \rightarrow \infty; N/V = const$, V - объём системы) и таким образом исключить реакцию всей системы в целом на исследуемую подсистему. По указанной причине это условие связывают иногда неудачно с принципом причинности, выделяющим определенное направление времени /49/. Нам кажется, что лучше говорить об определенных начальных условиях (отсутствие приходящих (опережающих) волн), так как ведь и полное решение уравнения Лиувилля (запаздывающее + опережающее) должно удовлетворять принципу причинности.

В свете последнего условия можно сказать, что линейная модель даёт возможность получить каноническое распределение Гиббса для подсистемы в термостате без микроканонического распределения всей замкнутой системы. Статистическое поведение подсистемы достигается при этом за счёт дополнительных требований на параметры всей системы (термостата) типа требования случайных фаз или частот (§ 2.11).

Линейная модель является возможной в статистической физике и очень удобной в силу относительной простоты её математического аппарата. Однако она не является обязательной и, фактически, не соответствует реальной молекулярной динамике, поскольку реальные макроскопические молекулярные системы являются стохастическими (§ 2.12). Это находится в противоречии с утверждением Пригожина о том, что такие системы не являются эргодическими и имеют полный набор интегралов движения /49/. Ошибочность последнего утверждения вытекает хотя бы из примера Синайя /106/. Причина ошибки состоит в том, что ряды, представляющие эти инвариант-

ты, вообще говоря, расходятся. Согласно теории КАМ они сходятся только при достаточно малом возмущении, вне стохастической области. Заметим попутно, что в стохастической области, а точнее, даже при слабом перемешивании (§ 2.3), уравнение Лиувилля (2.10.1) не имеет даже собственных функций (кроме константы).

Тем не менее есть область, в которой линейная модель оказывается очень существенной. Поясним это на примере газа. В своем подходе к статистической механике Боголюбов /54/ ввел два характерных масштаба времени: длительность взаимодействия при столкновении (τ_{c_3}) и время между столкновениями (τ_{ct}). Последнее оказывается как раз порядка времени перемешивания ($\sim h^{-1}$) /30/. Поэтому наша нелинейная модель работает только для $t > \tau_{ct}$, т.е. только в диффузионной (гидродинамической) области, где происходит релаксация (диффузия) газа по координатам (ср. диффузией основной модели, масштаб τ_3 , § 2.10). Релаксация же газа по импульсам происходит как раз за время $\sim \tau_{ct}$, так что она не может быть описана нелинейной моделью. В лучшем случае последняя даёт лишь порядок времени релаксации /30/. Для принципиальных вопросов обоснования статистической физики такое ограничение по времени снизу несущественно, гораздо важнее отсутствие ограничения сверху. Однако для приложений очень важно расширить область применимости кинетического уравнения в сторону меньших времен. Это можно сделать как раз с помощью линейной модели при дополнительном специальном ограничении на начальные условия системы. Наиболее общее ограничение такого типа было получено Сандри /63/ и названо им "принципом отсутствия параллельных движений", что означает отсутствие сильных корреляций в начальный момент ($t = 0$). Согласно нашей концепции этот "принцип" может быть обоснован, исходя из предшествующего движения системы ($t < 0$) с учётом перемешивания. Заметим, что "отсутствие параллельных движений" по Сандри вовсе не означает, как это иногда интерпретируется /55/, отсутствие коллективных процессов вообще. Нужно только, чтобы было еще и беспорядочное относительное движение частиц, точнее, требуется, чтобы парные корреляции возрастали не быстрее v_{12}^2 при $v_{12} \rightarrow 0$, где v_{12} — относительная скорость двух частиц /63/.

ГЛАВА III

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В этой главе собраны результаты численных экспериментов с элементарной моделью, которая является, по-видимому, простейшей, но в то же время адекватной основной задаче о движении системы слабо связанных нелинейных осцилляторов. Мы исследуем здесь, главным образом, основной критерий стохастичности по перекрытию резонансов, а также некоторые детали структуры движения системы с разделенным фазовым пространством. Полученные ниже экспериментальные результаты образуют, как нам кажется, достаточно надежную основу развивающейся в этой работе теории стохастичности. Дополнительные эксперименты с более сложными моделями приведены в следующей главе.

§ 3.1 Общие замечания

В предыдущей главе с помощью полукачественных физических соображений мы установили существование и оценили положение границы стохастичности для одномерного нелинейного осциллятора, находящегося под действием внешнего периодического возмущения. Это — главный результат настоящей работы. К сожалению, строгий математический анализ проблемы наталкивается пока на непреодолимые трудности, связанные, главным образом, с очень сложной структурой фазовой плоскости системы (см. § 2.8; 3.3). В этих условиях естественно обратиться к эксперименту. В данном случае, однако, нет необходимости производить "настоящие" эксперименты, т.е. наблюдать за движением каких-то реальных механических систем; да это и не так просто сделать технически, поскольку наибольший интерес представляют для нас консервативные системы. По-видимому, наилучшим приближением было бы движение протонов в накопительных кольцах для встречных пучков /80/. Однако такие кольца еще не построены. Несколько худшим (из-за радиационного трения) экспериментом является движение электронов в магнитной ловушке в предельно высоком вакууме.

Такие опыты проводились /81-83/ и дали интересные результаты, которые будут обсуждаться в § 4.4. Конечно, прелесть "настоящих" экспериментов состоит в том, что, исследуя даже самый простой вопрос можно натолкнуться случайно на новый фундаментальный закон природы. Однако, если мы заранее ограничим себя только так называемой "конструктивной" физикой^{x)} (см. Введение), т.е. только следствиями твердо установленных фундаментальных законов природы, в данном случае законов механики, то гораздо более простым и в некотором смысле более мощным методом исследования является так называемый численный эксперимент, под которым мы понимаем в данном случае численное интегрирование уравнений движения на цифровой электронной вычислительной машине (ЭВМ). Конечно, саму ЭВМ можно рассматривать как специфическую механическую систему, а счёт на ней как частный случай "настоящего" эксперимента точно также как, скажем, движение электронов в магнитной ловушке можно, в свою очередь, рассматривать в качестве аналоговой (электронной!) вычислительной машины. Тем не менее этот "частный" случай (ЭВМ) в настоящий момент резко выделен своей необычайной, можно сказать, беспрецедентной, гибкостью имея в виду принципы построения ЭВМ и отвлекаясь от чисто технических ограничений сегодняшнего дня. Последние необходимо, разумеется, тщательно учитывать; как и во всяком эксперименте они определяют его предельные возможности. Для ЭВМ основными ограничениями являются: а) скорость счёта ($\sim 10^6$ операций в секунду для типичных современных ЭВМ); б) объём оперативной памяти ($\sim 10^7$ бит); в) число (двоичных) разрядов мантиссы, от которого зависит точность счёта, а также степень непрерывности величин в представлении ЭВМ (≈ 50).

Наилучшим типом динамической системы для экспериментов на ЭВМ является каскад, т.е. преобразование с дискретным временем. При указанных выше ограничениях

x) Мы используем этот, по-видимому, не очень удачный термин для обозначения таких широких областей физики, как, например, статистическая физика или химия (см. ниже) в отличие от более узких и специальных проблем технической и прикладной физики.

ниях можно уверенно работать на временах $\sim 10^8$ шагов (итераций), поднимаясь в отдельных случаях до 10^{10} шагов (§ 3.3). При переходе от каскада к потоку, т.е. к дифференциальным уравнениям, положение существенно ухудшается, так как для обеспечения разумной точности приходится брать весьма малый шаг интегрирования и реальная длительность процесса значительно сокращается. Совсем плохо обстоит дело с интегрированием уравнений в частных производных, особенно, многомерных; здесь явно не хватает оперативной памяти ЭВМ. В связи с этим нам хочется обратить внимание на вычислительную систему нового типа "Иллигак-4", сооружаемую сейчас в Иллинойском университете (США), которая представляет собой комбинацию 256 центральных процессоров обычных ЭВМ /86/ (см. также /87/). Для определенного класса задач, включая интегрирование уравнений в частных производных, эффективная скорость счёта этой машины достигает 10^9 операций в секунду. Это - поистине гигантский шаг вперед в технике численного эксперимента!

Итак, мы должны обратиться к численному эксперименту. Конечно, полученные таким путем закономерности должны как-то выводиться и чисто дедуктивным путем из уравнений движения. Именно так и поступает эргодическая теория. Любопытно отметить, что возникающие здесь трудности связаны не только (и, вероятно, не столь-ко) с доказательством соответствующих теорем, но и с их формулировкой. Ибо, чем сложнее явление, тем большее количество все более и более запутанных условий приходится вводить, чтобы обеспечить "математическую строгость" теоремы. Поэтому в ряде случаев результат может быть получен гораздо быстрее индуктивным путем (как и в фундаментальной физике), т.е. с помощью обобщений, экстраполяций, аналогий, контрольных экспериментов и т.п., имеющих конечной целью конструирование приближенной теории и, что самое главное, связанной с нею целой системы понятий и моделей, с помощью которой можно уже как-то подступиться к практическим задачам прикладной физики. Естественно поэтому, что основная ценность эксперимента в этой области - эвристическая, т.е. он должен помочь нам угадать правильную приближен-

ную теорию или, по крайней мере, правильно представить себе, хотя бы качественно, основные черты интересующего нас явления. Поэтому нам нет необходимости интегрировать очень сложные уравнения движения реальных механических систем, достаточно посмотреть на простейшие, но адекватные основной задаче, модели. Очевидно, что правильный выбор модели и есть главная трудность такого эксперимента.

Изложенная концепция, в общем, хорошо известна и широко применяется в таких областях "конструктивной" физики как теория колебаний, гидродинамика, статистическая механика и, даже, химия^{x)}. Мы хотели бы только раз подчеркнуть здесь два существенных момента: во-первых, необходимость сочетания эксперимента ("настоящего" или численного) с аналитической теорией, хотя бы и полукачественной, без которой совершенно невозможно ориентироваться в неисчерпаемом море явлений прикладной физики; во-вторых, всемерное использование численного эксперимента, причём именно как эвристического средства, а не просто для получения конкретных числовых данных^{xx)}. В связи с этим стоит отметить, что пожалуй, основным преимуществом численного эксперимента помимо его простоты и удобства (при наличии хорошей ЭВМ!) является возможность предельно "чистой", т.е. полностью контролируемой постановки опыта и чрезвычайно гибкого изменения его условий, недостижимая в "настоящем" эксперименте. Кроме того ЭВМ представляет широкие возможности обработки результатов счёта, в том числе логической, даже без их вывода из машины, возможности, которые начинают использоваться и в "настоящем" эксперименте, например, путём непосредственной связи ЭВМ с ускорителем. Основным недостатком

x) См., например, очень интересную Нобелевскую речь Малликена/128/, где он, в частности, говорит: "... я хочу еще раз выразить свою уверенность в том, что уже наступила эпоха вычислительной химии, когда сотни (если не тысячи) химиков для изучения все новых и новых проблем будут переходить от лабораторных работ к вычислительным машинам".

xx) Очень интересное обсуждение эвристической роли ЭВМ в еще более широком классе так называемых математических экспериментов, не обязательно связанных с интегрированием дифференциальных уравнений, дано Уламом /93/. При этом также оказывается чрезвычайно полезным постоянное сочетание эксперимента на ЭВМ с теоретическими умозаключениями экспериментатора. Такая непрерывная связь человека и машины получила даже специальное наименование "синергетического подхода" (*Synergetic Approach*) /93, 94/. Нам кажется, однако, что это - типично экспериментальная ситуация и "синергетический подход" можно рассматривать просто как частный случай "настоящего" эксперимента.

численного эксперимента или, лучше сказать, что "аппаратурным" эффектом, за которым нужно тщательно следить, являются так называемые "ошибки счёта", которые сводятся в итоге к "ошибкам" округления, т.е. связаны с конечным числом разрядов мантиссы на ЭВМ. Можно сказать, что пространство всех величин в опытах на ЭВМ является "квантованным". Этот "аппаратурный" эффект будет подробно обсуждаться в § 3.3.

Ниже описаны численные эксперименты с простейшими моделями, специально сконструированными для выяснения основных особенностей стохастичности. В следующей главе мы коснемся некоторых приложений развивающейся теории к более или менее практическим задачам. Проведенные в связи с этим численные эксперименты можно рассматривать также, как продолжение экспериментов с простейшими моделями, хотя их уже значительно труднее интерпретировать из-за существенно большей сложности соответствующих динамических систем. Последнее замечание относится также к незавершенным численным экспериментам с простейшей многомерной системой, описанным в § 3.6.

В последнее время в литературе появилось довольно много работ, посвященных численным экспериментам, аналогичным описанным в этой и следующей главах. Пожалуй, наиболее близкие результаты получены Хеноном и Хайлом /92/ и Грином /47/. Ссылки на другие работы даются по ходу изложения.

В дальнейшем термин "численный эксперимент" мы заменим для краткости термином "эксперимент"; это не приведет к недоразумениям, поскольку везде в этой работе, кроме § 4.4, речь будет идти только о численных экспериментах.

Большинство экспериментов, описанных в этой главе (кроме § 3.6), выполнены на БЭСМ-6 Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР совместно с Иэрайлевым и составляют часть его кандидатской диссертации.

§ 3.2 Выбор моделей и обработка результатов счёта

Детальный анализ, проведенный в предыдущей главе, показал, что явление стохастичности может быть сведено, в конечном счёте, к элементарной модели (§ 2.4), которую мы для удобства перепишем еще раз в виде:

$$\begin{aligned}\varphi' &= \{\varphi + k \cdot f(\varphi)\} \\ \varphi' &= \{\varphi + \varphi'\}\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

где скобки $\{\dots\}$ означают, как обычно, дробную часть аргумента. Возможность такого упрощения задачи связана, в частности, с тем, что элементарная модель описывает движение в стохастическом слое вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса, который является "зародышем" любой стохастичности (§ 2.6). Поэтому наши основные эксперименты, описанные в этой главе, проводились с элементарной моделью (3.2.1). Только в последнем параграфе мы приведем результаты некоторых экспериментов с многомерной системой. Модель для этих экспериментов, близкая к элементарной, будет описана там же (§ 3.6).

Вид функции $f(\varphi)$ в (3.2.1) ("силы") определялся, в основном, соображениями выбора максимально простого для счёта на ЭВМ, но нетривиального случая. Нетривиальность означает наличие "островков" устойчивости в стохастической компоненте, или квази-резонансов (§§ 2.8 ; 3.5). Примером тривиальной "силы" является функция

$$f(\varphi) = \varphi - 1/2 \quad (3.2.2)$$

для которой стохастичность строго доказана недавно Оседедцем и Синаем при условии локальной неустойчивости (§ 2.8)^{x)}.

К этому же типу относится используемая ниже "сила" типа "пилы":

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varphi - 1/4 & \varphi \leq 1/2 \\ 3/4 - \varphi & \varphi \geq 1/2 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

^{x)} тривиальной только в стохастической области, но не в области колмогоровской устойчивости (см. § 3.3).

Однако, если мы "сгладим" вершины "пилы" квадратичной функцией:

$$f_{\text{sgl}}(\varphi) = \frac{1}{4} - \delta - \lambda \cdot (\varphi - 1/e)^2 \quad (3.2.4)$$

для $\varphi \approx 1/2$ и аналогично для $\varphi \approx 0; 1$, то такая "сглаженная пила" становится уже нетривиальной "силой", поскольку эти квадратичные участки как раз и приводят к появлению областей устойчивости (§ 3.5).

В большинстве экспериментов использовалась простейшая нетривиальная "сила":

$$f(\varphi) = \varphi^2 - \varphi + 1/6 \quad (3.2.5)$$

Здесь выбрано минимальное число умножений, линейный член ($-\varphi$) улучшает гладкость $f(\varphi)$ (разрыв только производной); коэффициент $1/6$ устраняет постоянный дрейф φ ($\langle f \rangle = 0$), оставляя только диффузию.

Для некоторых контрольных экспериментов использовалась аналитическая "сила"^{x)}:

$$f(\varphi) = \frac{\sin 2\pi \varphi}{2\pi} \quad (3.2.6)$$

Наконец, для исследования устойчивых областей использовалось преобразование:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \varphi^3 \\ \varphi' &= \varphi + \varphi' \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

которое, по существу, эквивалентно элементарной модели (3.2.1) (с $f = -\varphi^3$), но не содержит множителя k ^{xx)} и, что самое главное, позволяет обойтись (для устойчивых траекторий) без взятия дробных частей. В результате для последней модели была достигнута рекордная скорость счёта — 7 мксек на один шаг (3.2.7), в то время как скорость счёта для модели (3.2.1) с "силой" (3.2.5) составляла около 20 мксек на шаг. Для достижения максимальной скорости счёта программирование задачи производилось вручную (в коде ЭВМ). В частности, весь основной цикл собственно вычисления преобразования (3.2.1) удалось разместить в быстрых регистрах

x) Множитель 2π в амплитуде введен для более удобного сопоставления с (3.2.5).

xx) Введение этого множителя в (3.2.7) эквивалентно преобразованию $\varphi \rightarrow \varphi / \sqrt{k}$; $\varphi \rightarrow \varphi / \sqrt{k}$.

БЭСМ-6, что исключало необходимость сравнительно медленного обращения к оперативной памяти. Кроме того применялась блокировка нормализации и округления, т.е. фактически, целочисленная (с фиксированной запятой) арифметика; это давало дополнительный выигрыш в скорости счёта.

Основной выходной информацией являлась гистограмма функции распределения траектории на фазовой плоскости, т.е. число попаданий траектории в каждую из ячеек фазового квадрата. Мы не приводим ее, как правило, ввиду крайней громоздкости даже для весьма грубого разбиения фазовой плоскости (32×32 ячейки, 1024 чисел^{x)}. На основе гистограммы может быть построена гораздо более компактная фазовая карта (см., например, рис.3.3.1,2), на которой отмечается только факт попадания или не-попадания траектории в каждую из ячеек.

Наиболее мелкое разделение фазовой плоскости для получения гистограммы составляло $128 \times 128 = 16384$ ячейки. Для фазовой карты нет необходимости занимать целое слово памяти машины под каждую ячейку, достаточно использовать один двоичный разряд /88/. Это позволяет увеличить число ячеек до $512 \times 1024 = 524288$. При таком числе ячеек вывод даже фазовой карты становится невозможным и приходится ограничиться подсчётом пустых и заполненных ячеек и выводом характерных участков карты фазовой плоскости (см., например, рис. 3.5.2). Отметим, что все размеры массивов для функции распределения и фазовой карты выбраны равными некоторой степени двойки, что существенно упрощает ручное программирование. Некоторые специальные методы обработки будут описаны ниже.

§ 3.3 Колмогоровская устойчивость

Начнём с описания экспериментов по колмогоровской устойчивости. Напомним, что она означает существование нерезонансных инвариантных торов /20/, которые для системы (3.2.1) имеют вид кривых, пересекающих весь фазовый квадрат вдоль оси ψ .

x) См. впрочем § 3.6, где приведены отдельные участки подобных гистограмм.

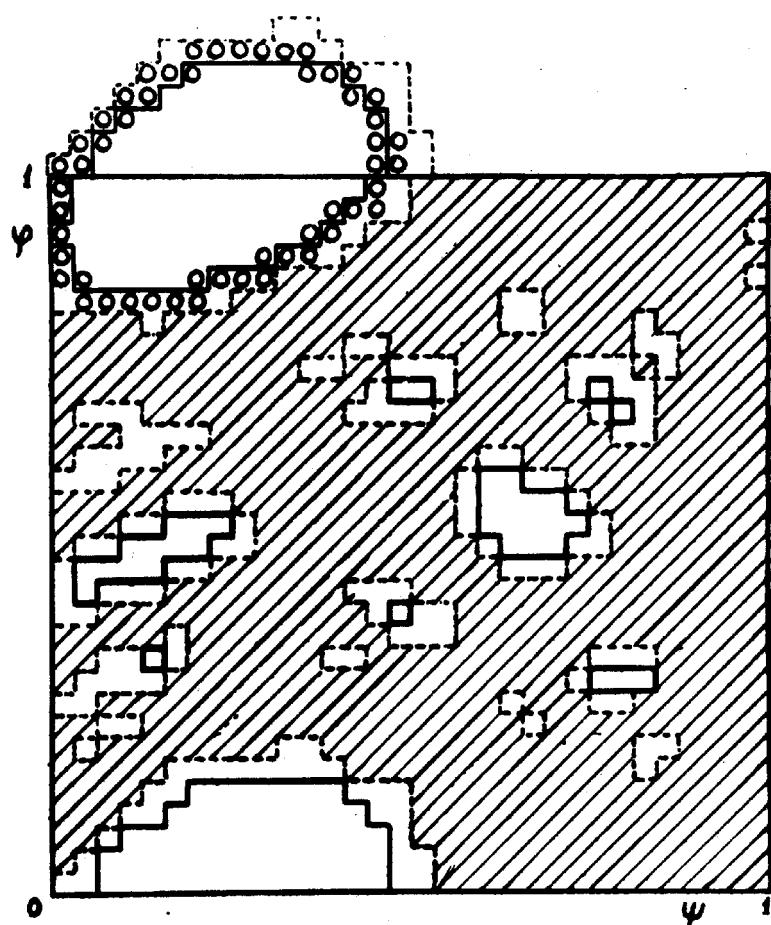


Рис.3.3.1

Фазовая карта системы (2) для "силы" (3.2.5); разделенная на 32×32 ячейки; $k \approx 1$; $\varphi_0 = 0$; $\varphi_0 \approx 0.765$; $t = 5.10^6$ шагов; стохастическая область заштрихована; ячейки, совершенно свободные от траектории, обведены сплошной линией; между сплошной и пунктирной линиями — ячейки с существенно меньшей плотностью траекторий (только часть ячейки занята стохастической компонентой); кружками обозначена устойчивая траектория с начальными условиями: $\varphi_0 = 0$; $\varphi_0 \approx 0.460$; $t = 5.10^6$.

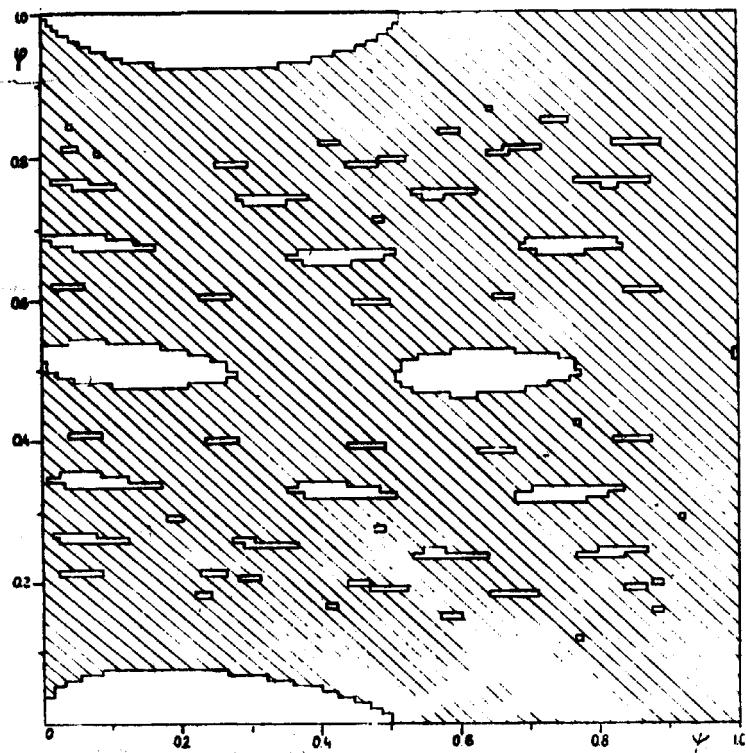


Рис. 3.3.2

Фазовая карта для "силы" (3.2.5): 128×128 ячеек; $k = 0.2$; $t = 5.10^7$; стохастическая компонента заштрихована.

В частности, для невозмущенной системы ($k = 0$) это просто прямые: $\varphi = \text{const}$

Согласно теории КАМ (§ 2.2) эта инвариантность не распространяется, вообще говоря, на резонансные области, расположенные для преобразования (3.2.1) в окрестности рациональных значений импульса:

$$\varphi_p = \frac{\Gamma}{q} \quad (3.3.1)$$

Γ, q — целые. Если резонансы этой системы перекрываются, то нерезонансные точки, а вместе с ними и колмогоровская устойчивость, исчезают.

Согласно оценкам § 2.7 при условии:

$$\ell \leq 1 \quad (3.3.2)$$

перекрытие резонансов высших гармоник (первого порядка) имеет место при любом $k \rightarrow 0$.

Для "силы" (3.2.5) $\ell = 0$ (разрыв первой производной) и поэтому можно ожидать отсутствия колмогоровской устойчивости при любых k . На рис.3.3.2 приведена фазовая карта для $k = 0.2$. Видно, что стохастическая компонента пересекает всю область по φ , оставляя лишь изолированные островки устойчивости. Это, действительно, означает отсутствие колмогоровской устойчивости, как она была определена выше.

При меньших значениях k , однако, область, занятая траекторией, оказывается ограниченной по φ , по крайней мере, в течение времени счёта $t_o = 10^8$. Более того, к концу движения ($t \gtrsim 0.7 \times t_o$) вообще не заметно никакой диффузии с точностью до размера фазовой ячейки ($\Delta\varphi = 1/128$).

Для другой "силы" (3.2.3) с тем же параметром гладкости $\ell = 0$ стохастическая компонента оставалась ограниченной по φ даже для $k \approx 1$ в течение $t = 5 \cdot 10^8$.

В настоящее время не вполне ясно, означает ли это существование некоторой области колмогоровской устойчивости, т.е. неполное перекрытие резонансов, или же очень малый коэффициент диффузии. Можно только утверждать, что резонансные об-

ласти занимают значительную часть фазовой плоскости, так как из 10 случайно выбранных начальных условий (для "силы" (3.2.5), $k \approx 0.01$) 4 оказались лежащими внутри резонансов высоких ($\varphi \sim 100$) гармоник (ограниченное движение по φ), 6 попали на узкие ($\Delta\varphi \sim 10^{-3}$) стохастические полосы (вероятно разрушенные сепаратрисы) и не было ни одного случая колмогоровской устойчивости. Сводная фазовая карта приведена на рис.3.3.3. Отчетливо видны резонансные области внутри стохастических полос. Однако наиболее интересной, на наш взгляд, особенностью движения являются перекрывающиеся стохастические полосы с ограниченной диффузией по φ . Это особенно ярко демонстрирует необычайно сложную структуру фазовой плоскости рассматриваемой системы, если учесть к тому же, что размер ячейки ($\Delta\varphi$, $\Delta\varphi$) на рис.3.3.3 равен приблизительно $3 \cdot 10^{-5} \times 6 \cdot 10^{-5}$.

Не менее интересный случай изображен на рис.3.3.4^{x)}, где представлена фазовая карта движения для "силы" (3.2.3) и $k = -1.145$. Здесь серые кружки показывают область фазового пространства, фактически занятую траекторией движения, а черные кружки и кресты представляют периодическое продолжение "серой" области по оси φ . Обе области перекрываются (перекрывающиеся ячейки обозначены крестами), тем не менее диффузия ограничена "серой" областью, по крайней мере, в течение времени счёта ($3 \cdot 10^6$ шагов). Это указывает, возможно, на существование очень тонких шелей в системе перекрывающихся резонансов различных гармоник. Подобная гипотеза обсуждалась в § 2.7.

Возможно и совершенно другое объяснение остановки диффузии — за счёт так называемого зацикливания, т.е. появления периодичности движения из-за конечного числа точек фазового пространства ЭВМ (см. ниже). Зацикливание облегчается тем, что на отдельных участках по φ диффузия может быть очень медленной (§ 2.7).

Для проверки высказанных предположений были проведены эксперименты с искусственно уменьшенным числом разрядов мантиссы. Это достигалось путем "среза-

x) Этот рисунок заимствован из работы /76/, где изучалась аналогичная проблема.

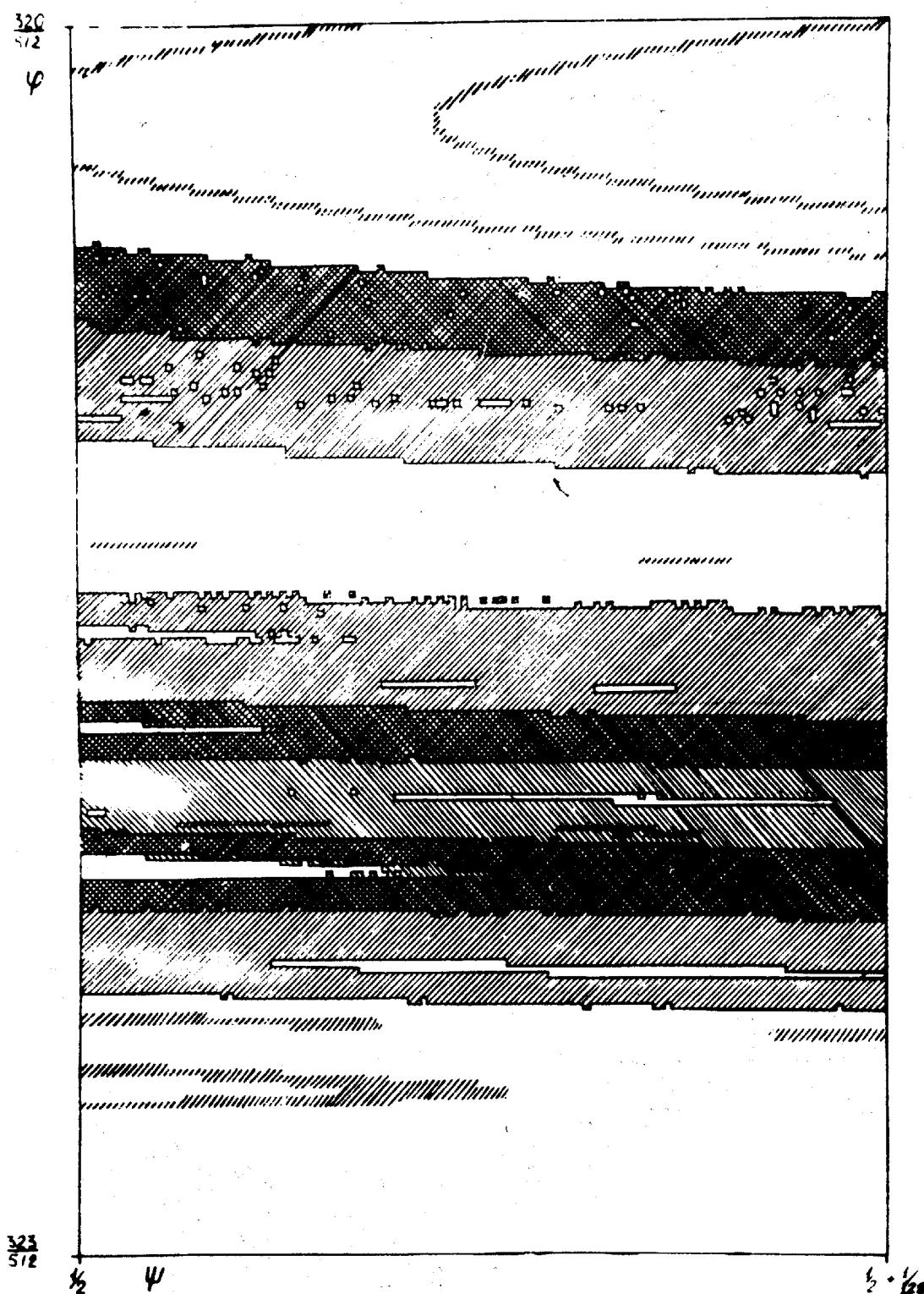


Рис.3.3.3. Сводная фазовая карта движения системы (3.2.1) с "силой" (3.2.5) для различных начальных условий: $K \approx 0.01$; $t = 10^7$; размер изображенного участка фазовой плоскости ($\Delta\varphi, \Delta\psi$) равен $3/512 \times 1/128$; он разделен на 374×128 ячеек. Широкие эргодические полосы заштрихованы; тонкие (в одну, две ячейки) области представляют устойчивые траектории внутри резонансов первого порядка.

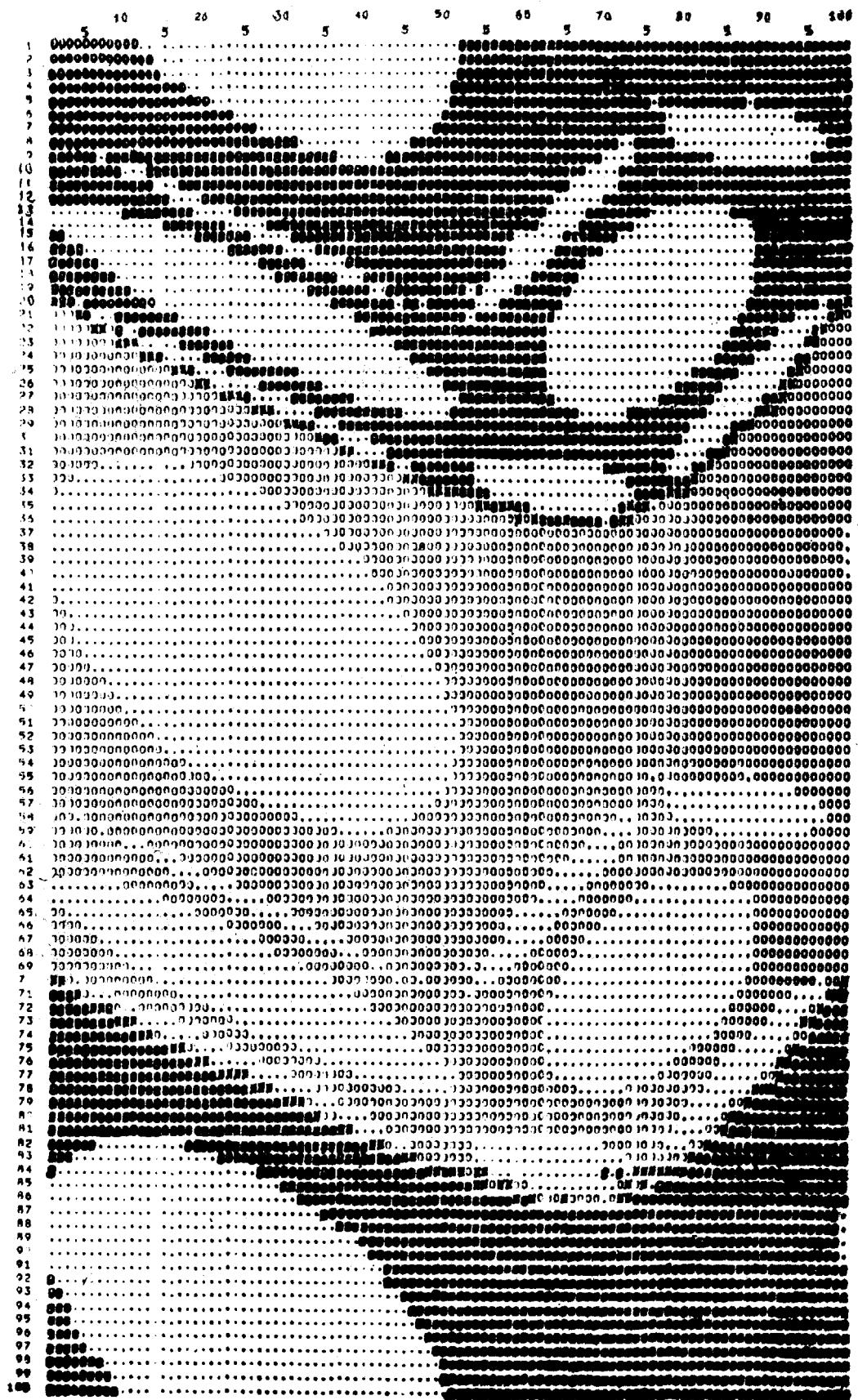


Рис.3.3.4. Фазовая карта модели (3.2.1) с "силой" (3.2.3): $\lambda = -1.145$; $t = 3 \cdot 10^6$.
Черные кружки и кресты представляют периодическое продолжение вдоль оси φ области, занятой траекторией и отмеченной серыми кружками; ячейки общие для обоих областей отмечены крестами.

ния" младших разрядов φ ; φ после каждого шага преобразования. Некоторые результаты этих экспериментов приведены в таблице 3.3.1, где дано количество заполненных траекторий ячеек фазового квадрата (из 16384) в зависимости от числа "срезанных" двоичных разрядов мантиссы n для двух значений параметра k .

Если причиной остановки диффузии являются щели, то увеличение n должно было бы облегчать диффузию за счёт "перепрыгивания" через эти щели; если же все дело в зацикливании, то должен наблюдаться обратный эффект, так как при меньшем числе разрядов зацикливание облегчается. Из данных таблицы 3.3.1 видно, что зависимость диффузии от n носит сложный и противоречивый характер, возможно, что действуют оба фактора. Во всяком случае, этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Таблица 3.3.1

n	0	6	11	14	15	16	25
$k \approx 0.146$	6815	4528	11270	13807	6996	14427	
$k \approx 0.03$	1246					808	144

Отметим, что подобный эффект остановки диффузии наблюдался и раньше, в численных экспериментах Куранта /97/ и Хайна /98/. Таким образом, движение в этом случае оказывается в некотором смысле даже более устойчивым, чем это можно ожидать по первому приближению (§ 2.7). Тем не менее создается впечатление, что в исследованном случае $\ell = 0$ колмогоровская устойчивость вне резонансов действительно отсутствует в соответствии с оценками § 2.7. Согласно результатам работы /76/ то же самое имеет, по-видимому, место и для случая $\ell = 1$, в то время как для $\ell = 2$ результаты этой работы не противоречат колмогоровской устойчивости, опять таки в соответствии с выводами § 2.7.

Для сравнения на рис.3.3.5 показана фазовая карта системы (3.2.1) с аналитической силой (3.2.6), для которой амплитуды гармоник убывают экспоненциально. Видно, что остается только небольшая неустойчивая полоска вдоль сепаратрисы резонанса (§ 2.6).

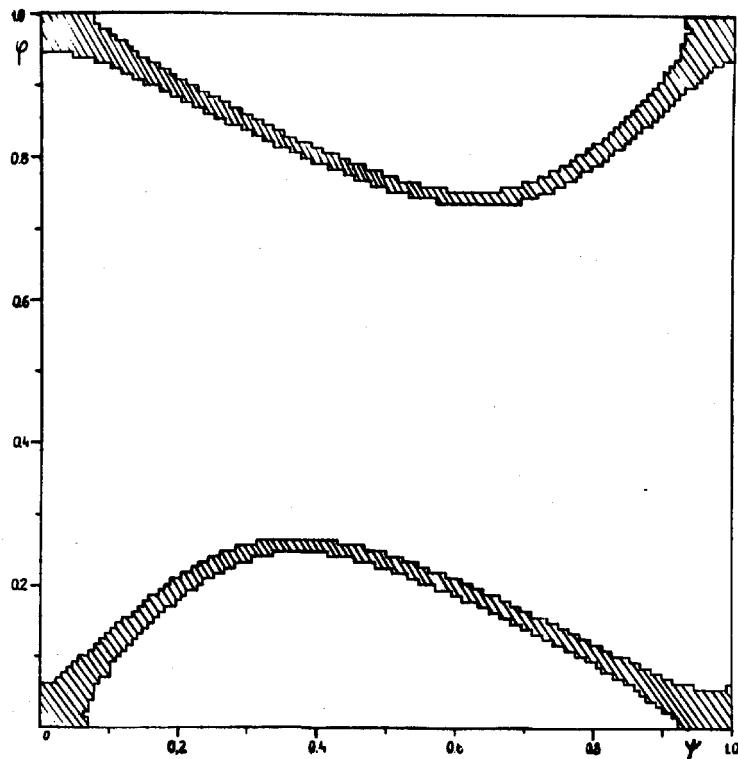


Рис.3.3.5. Фазовая карта для аналитической "силы" (3.2.6): 128 x 128 ячеек;
 $k \approx 0.62$; $t = 10^7$. Заштрихованная область представляет сто-
 хастический слой в окрестности сепаратрисы основного резонанса.

Использование силы (3.6.2) для численных экспериментов неудобно, так как вычисление синуса занимает слишком много времени. Поэтому мы обращались к ней только для контрольных экспериментов (см. ниже).

Вернемся теперь к изолированным устойчивым областям, которые хорошо видны на рис.3.3.1,2. Они расположены внутри резонансов разных гармоник. Наибольшая область устойчивости соответствует основному резонансу $q = 1$, хотя на рис.3.3.2 можно различить устойчивые области резонансов по пятую гармонику включительно.

Причина повышенной устойчивости этих областей связана с тем, что траектории здесь ограничены по ψ (см., например, рис.3.3.1, 6) и не пересекают, вообще го-

воля, особенности "силы" $f(\psi)$. С другой стороны, теория КАМ применима с некоторой модификацией /77, 78/, и к внутренней области резонансов. Она приводит к выводу о существовании при определенных условиях достаточно малой устойчивой области вокруг эллиптической точки (вокруг периодического решения в общем случае). Размер устойчивой области определяется в данном случае шириной стохастического слоя в окрестности сепаратрисы. Он может быть оценен по формулам § 2.6 или по локальной неустойчивости (§ 2.4). В частности, полное исчезновение устойчивой области на рис.3.3.1 соответствует превращению эллиптической точки преобразования (3.2.1) с "силой" (3.2.5) ($\psi_0 = 1/2 - 1/\sqrt{12} \approx 0.21$) в гиперболическую. Это происходит при условии $k > k_s = 4/(1-2\psi_0) \approx 7$, которое может рассматриваться как форма критерия стохастичности (/47/, § 2.4). Так как для случая на рис.3.3.1 $k = 1 \ll 7$, то устойчивая область должна иметь значительный размер, определяемый практически сингулярностью $f(\psi)$ в точке $\psi \neq 0$. К тому же выводу можно прийти, если рассмотреть параметр разрушения сепаратрисы

$S_1 = \omega_1 / \Omega_\phi$ (§ 2.6), где частота возмущения $\omega_1 = 2\pi$, а частота фазовых колебаний получается линеаризацией преобразования (3.2.1) в точке $\psi = \psi_0$, что даёт: $\Omega_\phi = \sqrt{2k}$. Полагая $S_1 \sim 1$, получаем: $k_s' \sim 2\pi^2$. Отношение $k_s'/k_s \sim 3$ характеризует точность оценки: $S_1 \sim 1$.

Возникает фундаментальный вопрос: является ли определенная, таким образом, приближенная граница той самой границей вечной устойчивости, существование которой вытекает из теории КАМ? Или иначе: не сместится ли существенно граница устойчивости на рис.3.3.1, если значительно увеличить время движения?

Для проведения такого эксперимента была выбрана модель (3.2.7). Аналогичный эксперимент был проведен несколько раньше Ласлетом /91/ с преобразованием:

$$\begin{aligned} q' &= q + \frac{13}{4} p \\ p' &= p + q'(q'-1) \end{aligned} \tag{3.3.3a}$$

Движение этой системы аналогично движению в устойчивой области на рис.3.3.1 ("сила" (3.2.5)). Причина, по которой мы выбрали более симметричное преобразование (3.2.7) связана, в частности, с ошибками округления (см.ниже). Кроме того, преобразование (3.2.7) имеет "настоящую" границу стохастичности, т.е. оно имеет область сильной стохастичности, определяемую перекрытием резонансов, в то время как граница устойчивости для преобразования (3.3.3а), так же, как и на рис.3.3.1, определяется разрушенной сепаратрисой. В последнем случае возникает некоторая неопределенность в установлении расстояния до границы стохастичности, поскольку, в любой окрестности выбранных начальных условий всегда найдутся разрушенные сепаратрисы резонансов достаточно высоких гармоник. К сожалению, в работе /91/ положение границы стохастичности не определялось вообще, так что нам остается только произвести грубую оценку её по критерию локальной устойчивости (§ 2.4), что приводит к значению: $q_s \sim 0.1$. В таком случае энергия на устойчивой траектории, исследованной в /91/, примерно в 16 раз меньше, чем на границе стохастичности, т.е. эта траектория лежит далеко в области колмогоровской устойчивости.

Для экспериментального нахождения приближенной границы стохастичности в нашем случае (на коротком времени) использовалась вспомогательная система:

$$\begin{aligned}\varphi'_{n+1} &= \left\{ \varphi'_n - 8(\varphi'_n - 1/2)^3 \right\} \\ \varphi'_{n+1} &= \left\{ \varphi'_n + \varphi'_{n+1} \right\}\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

фазовая карта которой представлена на рис.3.3.6 для $t = 5 \cdot 10^6$. Дробные части здесь совершенно необходимы, так как в противном случае траектория в стохастической области очень быстро уходит на бесконечность: $\varphi_n \sim \varphi_n \sim C^{(3^n)}$; $C > 1$.

При счёте на ЭВМ это приводит к АВОСТ'у. Коэффициент преобразования 8 и сдвиг по φ на $1/2$ выбраны из соображений удобного размещения устойчивой области в стандартном фазовом квадрате 1×1 .

Из рис.3.3.6 следует, что граница устойчивости лежит где-то в интервале:

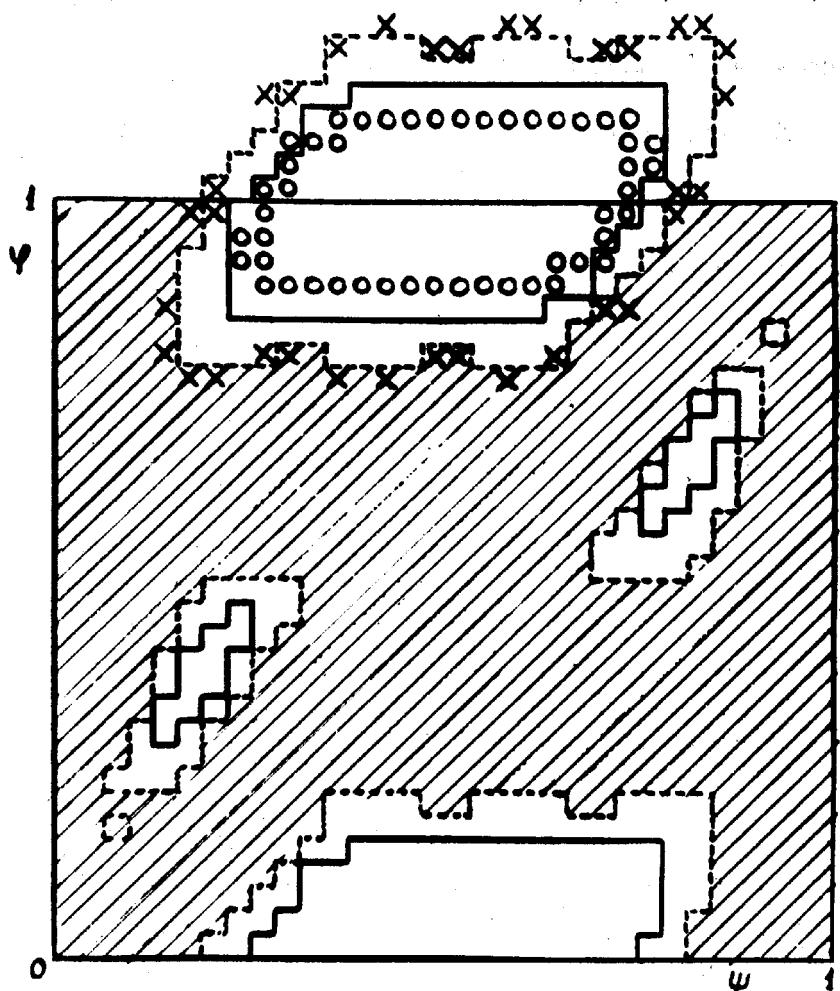


Рис.3.3.6. Фазовая плоскость системы (3.3.3); обозначения те же, что и на рис.3.3.1; эргодическая траектория соответствует начальным условиям: $\varphi_0' = 0$; $\dot{\varphi}_0' \approx 0.830$; кружками обозначена траектория длинного счёта: $\varphi_0' = 0$; $\dot{\varphi}_0' = 0.735$; крестами - другая устойчивая траектория вблизи резонанса второго порядка: $\varphi_0' = 0$; $\dot{\varphi}_0' = 0.803$; для всех трех траекторий $\mathcal{E} = 5 \cdot 10^6$.

$0.69 < \varphi_s < 0.93$ ($\varphi = 0$). Более аккуратные измерения /76/ приводят к значению $\varphi_s \approx 0.76$ (для $\mathcal{E} = 10^6$).

Заметим, что положение границы устойчивости не может зависеть от особенности силы, связанной со взятием дробной части в (3.3.3) (разрыв функции $f(\varphi)$).

Действительно, граница в данном случае чётко отделена от месторасположения особенностей ($\varphi = 0 ; 1$); поэтому последние никак не могут влиять на траектории системы, расположенные между границей и особенностями.

Устойчивая (для $\mathcal{E} = 5 \cdot 10^6$) траектория, отмеченная на рис.3.3.6 крестами, лежит на самой границе. Однако она не является сплошной, т.е. может оказаться лежащей в "островках" устойчивости внутри стохастической области (см. § 3.5). Так оно и

получается в действительности согласно /76/. В связи с этим для длинного счёта была выбрана более "нормальная" траектория, отмеченная на рис.3.3.6 кружками, для которой $\psi \approx -0.67$ ($\varphi = 0$). Это - на 12% меньше критического значения по фазе и на 40% - по энергии.

Счёт для этой траектории велся в течение $t = 10^{10}$ шагов. Через каждые 100 шагов производилась отметка положения системы на фазовой карте с минимальным размером ячейки (1/512 (по φ) на 1/1024 (по ψ)). Траектория занимала 1876 ячеек, причём это число не изменялось для $t > t_1 = 10^8$.

Последнее значение согласуется по порядку величины с ожидаемым, которое может быть оценено как

$$t_1 \sim \frac{L^2}{V} \quad (3.3.4)$$

где L - длина траектории (число ячеек), а $V = 1/100$ - частота вывода на фазовую плоскость. Оценка исходит из предположения "случайного" пересечения ячейки траекторией, так что из L ячеек может встретиться одна, в которой длина траектории будет в $\sim L$ раз меньше средней.

Для усиления полученного результата была произведена следующая дополнительная обработка, предложенная Арнольдом. На нижнем горизонтальном участке траектории с минимальной кривизной (рис.3.3.6) был выбран квадрат со стороной $2^{-18} \approx 4 \cdot 10^{-6}$. Были выведены точные значения φ, ψ всех точек (около 100 точек), попавших в этот квадрат в течение $t = 10^8$ в начале и в конце длинного счёта. Полученные значения интерполировались прямой линией по методу наименьших квадратов, отдельно для начала и конца длинного счёта. Разности $\Delta\varphi$ между координатами точек и интерполяционной прямой ($\Delta\varphi = 0$), пропорциональные расстоянию точек до этой прямой, откладывались в зависимости от времени (рис.3.3.7) и от ψ (рис.3.3.8). Единицей по оси $\Delta\varphi$ служит величина $\Delta_r = 10^{-12}$, равная максимальной ошибке округления.

На рис.3.3.8 не заметно каких-либо корреляций между $\Delta\varphi, \psi$, например,

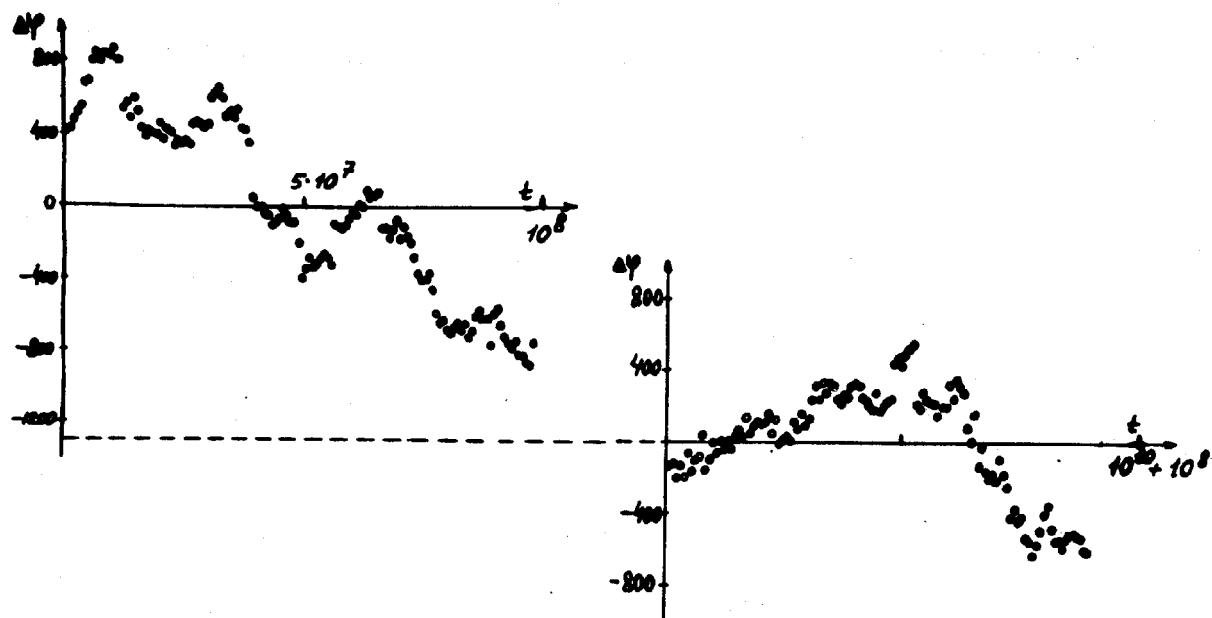


Рис.3.3.7. Слабая диффузия за счёт округления для преобразования (3.27): $\Delta\varphi$ — отклонение экспериментальных точек от интерполяционной прямой в единицах максимальной ошибки округления ("квант" пространства) $\Delta_r = 10^{-12}$; $\varphi_0 \approx -0,316$ (длинный счёт); точки слева относятся к началу длинного счёта, а точки справа — к концу.

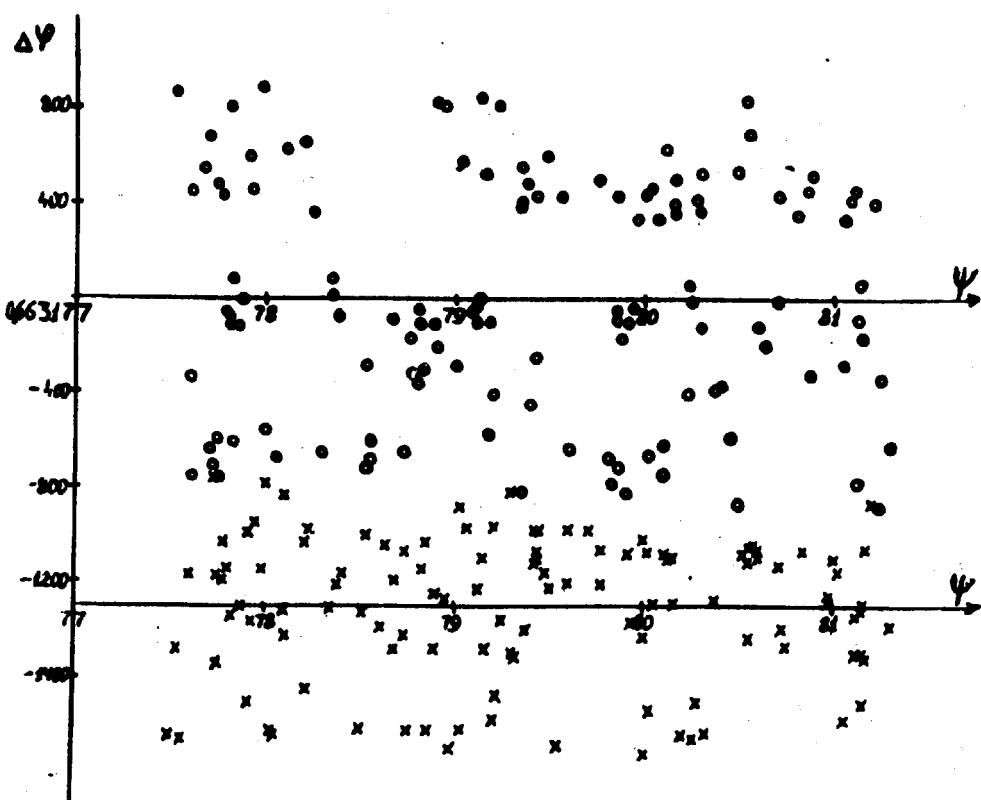


Рис.3.3.8. Поиски корреляции $\Delta\varphi$, ψ : ○ — начало длинного счёта; × — конец длинного счёта (см.рис.3.3.7).

за счёт кривизны траектории или попадания внутрь резонанса высокого порядка. Можно заключить поэтому, что разброс точек вызван некоторой "диффузией". Процесс диффузии особенно наглядно виден на рис.3.3.7. Он может быть вызван либо ошибками округления, либо тем, что мы не дошли еще до области вечной устойчивости теории КАМ. Для проверки последнего предположения эксперимент был повторен для траектории, лежащей значительно ближе к положению равновесия ($\varphi = \psi = 0$), чем траектория длинного счёта (φ меньше в 1.7 раза, энергия меньше в 2.9 раза), а также для траектории, лежащей дальше (φ больше на 11%, энергия больше на 23%). В обоих случаях коэффициент диффузии оказался тем же самым, что и для длинного счёта, так что диффузию следует отнести к действию ошибок округления.

Таким образом представляется весьма вероятным, что траектория длинного счёта лежит в области вечной устойчивости теории КАМ. Иными словами точная граница устойчивости для преобразования (3.2.7) находится где-то в интервале:

$$0.67 < \psi_s < 0.76 \quad (3.3.4a)$$

Как уже неоднократно отмечалось (см., например /89, 90/) граница устойчивости в общем случае не является просто линией, а имеется целая переходная область из чередующихся устойчивых и неустойчивых слоёв все более и более мелкой структуры, соответствующих резонансам высших порядков. При этом некоторые из областей характеризуются сравнительно большим временем развития неустойчивости. Так, например, по данным /76/ при увеличении времени счёта от 3×10^5 до 10^6 граница смещается от $\psi = 0.84$ до $\psi = 0.76$, т.е. приблизительно на 10%.

Хотя рассмотренный пример устойчивой траектории на столь длинное время является (по необходимости!) единственным, он позволяет надеяться, что положение точной границы устойчивости по теории КАМ может быть действительно оценено по порядку величины с помощью сравнительно простых критериев стохастичности, полученных в настоящей работе (глава 11). Во всяком случае такое совпадение наблюдалось во всех (около 100) случаях счёта для времени $t \sim 10^7$.

Точность этого утверждения определяется остаточной диффузией на рис.3.3.7, которая может быть объяснена ошибками округления (см.ниже). Заметим, что эта диффузия не противоречит теории КАМ, поскольку ошибки округления эквивалентны некоторому негладкому (с большим числом мелких разрывов) возмущению, недопустимо - му для теории.

Коэффициент остаточной диффузии оказывается равным (см.ниже): $D \approx 4 \cdot 10^{-27}$. В работе /91/ эта оценка значительно снижена за счёт использования двойной точности счёта: $D \approx 1.6 \cdot 10^{-61}$. Однако в экспериментах /91/ имелось систематическое накопление ошибок округления (дрейф): $\dot{V}_q = dq/dt \approx 1.3 \cdot 10^{-31}$. Этую величину следует сопоставить с $\sqrt{D} \approx 6 \cdot 10^{-14}$ в нашем случае, так что точность, достигнутая в работе /91/, все равно значительно выше. Правда, выбранная в /91/ траектории лежит, по-видимому, существенно дальше от границы стохастичности и просчитывалась в течение значительно более короткого времени ($t \sim 10^7$). Заметим в связи с этим, что повышение точности не обязательно компенсирует уменьшение времени движения, так как неустойчивость может развиваться по экспоненциальному закону (см.§ 3.6).

При взгляде на рис.3.3.7 бросается в глаза прекращение диффузии после $t \sim 10^8$. По крайней мере отчасти это объясняется, по-видимому, зацикливанием, т.е. появлением периодичности движения. Зацикливание обязательно произойдет рано или поздно вследствие конечного числа точек (S) фазовой плоскости в представлении ЭВМ. Максимально возможный промежуток времени до зацикливания равен, очевидно: $T_c = S$, после чего обязательно произойдет попадание на одну из предыдущих точек траектории и, следовательно, начнется точное повторение движения. В интересующем нас случае S определяется площадью кольца вдоль траектории, ширина которого (d) зависит от разброса точек на рис.3.3.7: $S = L \cdot d \approx 2 \cdot 10^{12} \cdot 1600 \approx 3 \cdot 10^{15}$, где $L \approx 2 \cdot 10^{12}$ - периметр траектории в единицах максимальной ошибки округления $\Delta_r = 10^{-12}$ - "кванта" пространства ЭВМ.

Для получения более реалистической оценки величины T_c предположим, что округление характеризуется "случайной" диффузией с некоторым коэффициентом D_0 .

(см. ниже). Тогда вероятность попадания траектории при очередном шаге на одну из предыдущих точек равна относительной плотности заполнения траекторий фазовой плоскости: $\omega(t) = t / L \cdot d(t)$, где $d(t) \approx 2\sqrt{2D_0 t}$. Момент зацикливания (в среднем) определяется из условия: $\int_0^{T_c} \omega dt = 1$. Это даёт

$$T_c \approx (3L \sqrt{2D_0})^{2/3} \quad (3.3.5)$$

Подставляя сюда полученное ниже экспериментальное значение^{x)} $D_0 \approx 4 \cdot 10^{-3}$, получаем: $T_c \approx 6 \cdot 10^7$. Это не противоречит данным рис. 3.3.7, но и не доказывает, что ограничение диффузии связано обязательно с зацикливанием. Мы продолжим обсуждение этого вопроса несколько позже.

Заметим, что в стохастическом случае $L \cdot d \sim L^2 \sim S = 10^{24}$, а $T_c \sim \sqrt{S} \sim 10^{12}$, так что зацикливание совершенно несущественно. Коэффициент диффузии может быть определен по среднему сдвигу ($\Delta\varphi$) между точками на рис. 3.3.7, разделенными интервалом времени $\bar{\tau}$:

$$D_{\text{эк}} = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2\bar{\tau}} \quad (3.3.6)$$

Результаты вычисления $D_{\text{эк}}$ для всех трех траекторий (см. выше) сведены в таблицу 3.3.2, где указаны также средние значения коэффициентов диффузии по всем траекториям. Кроме того, даны экспериментальные среднеквадратичные ошибки, которые удовлетворительно согласуются с ожидаемыми значениями. Разброс между различными значениями $D_{\text{эк}}$, в том числе для разных $\bar{\tau}$, не превосходит существенно статистических ошибок. Наименее вероятными являются три малых значения $D_{\text{эк}}$ при $\bar{\tau} = 10^8$ (вероятность $\sim 6\%$). Однако, если выбросить конец длинного счёта, который возможно, соответствует зацикливанию и поэтому непоказателен, то вероятность оставшихся двух случаев повышается до 16%, что уже не является существенным отклонением.

x) Здесь и дальше все длины в единицах Δ_r .

Таблица 3.3.2

τ	Длинный счёт		$\varphi_0 = -0,187$	$\varphi_0 \pm 0,350$	$\langle D_{\text{зк}} \rangle$
	Начало	Конец			
10^6	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$(4,1 \pm 0,9) \cdot 10^{-3}$
10^7	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$(3,1 \pm 1,6) \cdot 10^{-3}$
10^8	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$(1,9 \pm 1,9) \cdot 10^{-3}$

Рассматривалось также распределение больших значений ($\Delta \varphi$)_z. В начале длинного счёта они хорошо согласуются с нормальным законом, а в конце - имеются два выброса, вероятность которых $\sim 10^{-2}$. Последнее также может означать влияние зацикливания в конце длинного счёта. Если отбросить этот случай, то создается впечатление, что накопление "ошибок" округления действительно следует диффузионному закону.

К такому же выводу приводит дополнительная серия экспериментов с искусственно уменьшенным числом разрядов мантиссы на 2, 4, 8, 12, 16 двоичных разрядов из 40. Средний коэффициент диффузии этой серии равен $\langle D \rangle = (5,6 \pm 1,2) \cdot 10^{-3}$, что хорошо согласуется с данными таблицы 3.3.2.

При "срезании" 20 разрядов наблюдалось зацикливание при $\tau \approx 10^6$. Если применить здесь оценку (3.3.5), то мы получим: $T_c \approx 6000$, т.е. почти в 200 раз меньше, чем наблюдаемое значение. Такой результат может быть объяснен, например, сильными корреляциями соседних значений φ , $\dot{\varphi}$. Если эта причина действительно является основной, то можно ожидать сильной корреляции приблизительно 200 соседних значений. Эта гипотеза отчасти подтверждается ниже при вычислении коэффициента диффузии. Если применить её к длинному счёту, то зацикливание можно ожидать только при $\tau \sim 10^{10}$, т.е. только в самом конце длинного счёта. Тогда ограничение диффузии после $\tau \sim 10^8$, отчетливо видимое на рис. 3.3.7, должно

иметь какие-то другие причины. В целом вопрос требует дополнительного исследования.

Обратим внимание, что по данным таблицы 3.3.2 коэффициент диффузии, если и изменяется, то скорее уменьшается с \sqrt{t} чем растёт. Отсюда вытекает, в частности, что в пределах статистических флюктуаций нет никакого постоянного дрейфа, т.е. нет систематического накопления ошибок. Верхний предел возможного дрейфа запишем в виде: $V_\varphi = d(\Delta\varphi)/dt \lesssim \sqrt{D_{3k}/t} \approx 6 \times 10^{-6}$ (в единицах Δ_f).

Абсолютное значение коэффициента диффузии $D_{3k} \approx 4 \cdot 10^{-8}$ (таблица 3.3.2) совершенно не соответствует ожидаемому значению для случайных ошибок (Δ). Последнее может быть вычислено по формуле: $D_{ca} = \langle \Delta^2 \rangle / 2$. Величина $\langle \Delta^2 \rangle$ зависит от алгоритма округления. В нашем случае младшие разряды произведения просто отбрасывались, что соответствует случайной величине Δ , равномерно распределенной в интервале (0, Δ_f). Так как на один шаг преобразования (3.2.7) приходится 2 умножения^{x)}, то $D_{ca} = \langle \Delta^2 \rangle = \frac{1}{12} \approx 8 \cdot 10^{-2}$, т.е. приблизительно в 20 больше экспериментального значения. Такое расхождение может означать сильную корреляцию соседних ошибок. Предположим, например, что корреляция убывает по экспоненциальному закону: $\rho = e^{-n/n_0}$, где n - число шагов. Используя выражение (2.10.56) для коэффициента диффузии с учётом корреляций, получим: $n_0 \approx 20$.

Рассмотрим теперь более подробно накопления случайных ошибок, причём мы ограничимся простейшим интересующим нас случаем целочисленной арифметики. В таком случае ошибка определяется просто младшими разрядами произведения. Но такая операция аналогична одному из распространенных видов датчика псевдослучайных чисел (/95, 96/, см. также § 4.7). Таким образом проблема накопления ошибок округления сводится, в значительной степени, к исследованию различного рода датчиков псевдослучайных чисел. Конкретное устройство такого датчика зависит от алгоритма задачи. В рассматриваемом случае датчик оказывается довольно плохим, судя по величине

x) Поскольку мы использовали целочисленную арифметику (§ 3.2), то при сложении округление отсутствовало.

корреляции, приведенной выше. Буквально такой датчик, насколько нам известно, не исследовался, но похожие датчики, содержащие операцию возведения в квадрат, действительно дают плохие результаты /95/. Вот если бы наше преобразование содержало операцию умножения на константу, то мы получили бы датчик, типа системы (2.3.3), которая является стохастической, причем с огромной константой $\langle \sim \Delta_r^{-1} \rangle$. Разнообразная проверка такого датчика показывает, что он даёт случайные числа (их называют обычно псевдослучайными) очень хорошего качества (§ 4.7). Следовательно в этом случае накопление ошибок должно было бы идти просто по случайному закону. Последний вывод подтверждается, по-видимому, данными работы /91/ по исследованию преобразования (3.3.8а), которое как раз содержит умножение на константу. "Диффузия ошибок" в этом случае совпадает с чисто случайной /91/.

Несколько сложнее вопрос о постоянном дрейфе, который наблюдался в работе /91/ ($V_q \sim q \cdot \Delta_r \sim 10^{-31}$), но отсутствует в нашем эксперименте. Существует, по-видимому, два наиболее существенных различия между обоими экспериментами:

- 1) мы применяли целую арифметику, в то время как Ласлет /91/ использовал числа с плавающей запятой;
- 2) наше преобразование (3.2.7) симметрично относительно знака φ , ψ в противоположность преобразованию (3.3.8а) Ласлета.

В обоих экспериментах использовалось несимметричное округление: $\langle \Delta \rangle = \Delta_r / 2 \neq 0$, но при целой арифметике это эквивалентно постоянной "силе" в уравнении для "импульса", которая лишь слегка ($\sim \Delta_r$) сдвигает траекторию системы; в случае же плавающей запятой эта "сила" оказывается пропорциональной "скорости", т.е. становится "диссипативной". Точнее говоря, "сила" пропорциональна модулю скорости, если, как это имеет место для большинства современных ЭВМ, отрицательное число представляется в дополнительном коде. Но в таком случае для симметричных колебаний средняя "диссипация" обращается в нуль, а для несимметричных - остается.

Наиболее радикальным средством борьбы с дрейфом является введение симметричного округления, что предусматривается в большинстве ЭВМ, но требует дополнительного времени. Другой метод состоит в переходе к целой арифметике, если это допускает алгоритм задачи. Последнее существенно увеличивает также скорость счёта, особенно при использовании двойной точности.

§ 3.4 Стохастичность

В этом параграфе мы обсудим экспериментальные результаты, касающиеся поведения элементарной модели (3.2.1) в области стохастичности, т.е. при $k \gg 1$.

Действительно ли движение является в этом случае стохастическим?

Начнём с энтропии Крылова-Колмогорова (§ 2.3.4). Для экспериментального определения энтропии использовалась формула Синая /17/:

$$h = \lim_{\ell \rightarrow 0} \ln(\ell'/\ell) \quad (3.4.1)$$

где ℓ, ℓ' - длина трансверсального вектора (§ 2.4) до и после преобразования, соответственно, а усреднение производится вдоль траектории основного движения. Мы выбрали $\ell = 10^{-7}$, так что при самом большом значении $k = 10^3$ величина $\ell' \sim 10^{-4} \ll 1$. Численный счёт преобразования (3.2.1) производился для двух траекторий, начальные точки которых отстояли на $\vec{\ell}$, причём после каждого шага преобразования длина трансверсального вектора ($\vec{\ell}'$) приводилась к начальному значению $\ell = 10^{-7}$ без изменения его направления.

Аналитическая оценка энтропии даётся выражением (2.4.21), которое может быть уточнено для элементарной модели, исходя из формулы Синая (2.4.19):

$$h = \langle \ln \lambda_a^+ \rangle \quad (3.4.2)$$

где λ_a^+ - проекция λ^+ на направление асимптоты, которое, вообще говоря, не совпадает с направлением собственного вектора растяжения (θ^+), если последний поворачивается (§ 2.4.8).

Однако при больших $k f'$ направление вектора растяжения почти не изменяется, как в этом легко убедиться, используя выражение (2.4.14) или (2.8.4):

$$\operatorname{tg} \theta^+ \approx 1 - 1/kf' \quad (3.4.3)$$

Исключение составляет узкая область фаз вблизи области устойчивых фаз (2.4.7):

$$-4 < k \cdot f'(4) < 0 \quad (3.4.4)$$

вероятность попадания в которую $\sim 1/k$. В основной области изменение θ^+ составляет $\sim 1/k$.

Заметим также, что области значений (сектора) θ^+, θ^- не перекрывают-
ся ни при каких kf' . Действительно, из (2.8.4) следует, что полный диапазон из-
менения θ^+ составляет:

$$0 < \operatorname{tg} \theta^+ < 2 \quad (3.4.5)$$

а диапазон изменения θ^- является как раз дополнительным к (3.4.5). В большин-
стве же случаев вектор сжатия направлен почти по оси φ :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta^- \right) \approx -\frac{1}{kf'} \quad (3.4.6)$$

Отсюда вытекает, что асимптота почти всегда время составляет угол $\sim 1/k$ с
направлением вектора растяжения, лишь изредка (с вероятностью $\sim 1/k$) отклоня-
ясь на угол ~ 1 . В таком случае можно положить приближенно: $\lambda_a \approx \lambda^+$ с
точностью $\sim 1/k$. Фактически точность этого равенства даже лучше, так как от-
ношение λ_a/λ^+ изменяется в обе стороны и происходит частичная компенсация
отклонений. Поясним в связи с этим, что λ_a является косоугольной проекцией λ^+
вдоль собственных векторов, которые, вообще говоря, неортогональны (§ 2.4).

Таким образом, мы можем оценивать энтропию по формуле:

$$h \approx \langle \ln \lambda^+ \rangle \quad (3.4.7)$$

где усреднение производится по φ , причём в устойчивой области (3.4.4) нужно
положить $\lambda^+ = 1$. Заметим, что было бы неправильным просто исключить всю об-
ласть устойчивых фаз (3.4.4) из среднего (3.4.7), так как согласно данным следую-
щего параграфа стохастическая траектория заполняет почти всю эту область за исклю-
чением очень малой доли "островков" устойчивости.

Энтропия вычислялась для "силы" двух видов: (3.2.5) и (3.2.6). В первом случае интеграл (3.4.7) может быть вычислен до конца и даёт:

$$h = [H\left(\frac{k}{2} + 1\right) + H\left(\frac{k}{2} - 1\right)]/k \quad (3.4.8)$$

$$H(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1}$$

В случае силы (3.2.6) явная оценка может быть получена, если воспользоваться приближенным выражением (2.4.6):

$$\lambda^+ = \left| \frac{kf'}{2} \right| \pm 1 + \sqrt{\left| \frac{kf'}{2} \right|^2 \pm |kf'|} \approx \quad (3.4.9)$$

$$\approx kf' \pm 2 \pm \frac{1}{|kf'|}$$

где знак совпадает со знаком f' . Если ограничиться теперь только первым членом, то точность оценки энтропии будет опять таки несколько лучше, чем $\sim 1/k$, так как вклады от следующих членов почти компенсируются. Для силы (3.2.6) получаем:

$$h \approx \int_0^1 d\varphi \cdot \ln |k \cos 2\pi\varphi| = \ln \frac{k}{2} \quad (3.4.10)$$

Аналогичная оценка для силы (3.2.5) даёт:

$$h \approx (\ln k) - 1 \quad (3.4.11)$$

Данные таблицы 3.4.1 позволяют сравнить экспериментальные значения энтропии с различными оценками. Как уже отмечалось выше, начальное расстояние между траекториями выбиралось $\ell = 10^{-7}$. Увеличение его до 10^{-3} изменяет экспериментальное значение h от 3.615 до 3.72 ($k = 100.2$; сила (3.2.5)). Нормальное число шагов при вычислении энтропии по формуле (3.4.1) составляло $\ell = 10^4$. Уменьшение этого числа до 10^3 приводит к изменению энтропии с 4.234 до 4.242 ($k = 142.0$; сила (3.2.6)).

Из данных таблицы видно весьма хорошее согласие экспериментальных значений энтропии с аналитическими оценками, даже самыми простыми (3.4.10, 11). Это косвенно указывает также, что при $k \gg 1$ (фактически при $k \gtrsim 10$, см. таблицу) сто-

Таблица 3.4.1

k	"Сила" (3.2.5)				"Сила" (3.2.6)			
	Эксперим. значение	Оценки		Экспер. значен.	Оценки			
		(3.4.8)	(3.4.11)		(3.4.7)	(3.4.10)		
6.21	0.953	0.909	0.826	1.157	1.133	1.133		
14.0	1.654	1.655	1.639	1.949	1.949	1.946		
25.0	2.241	2.225	2.219	2.537	2.526	2.526		
50.0	2.914	2.913	2.912	3.227	3.219	3.219		
100.2	3.615	3.608	3.607	3.914	3.914	3.914		
142	3.938	3.955	3.958	4.234	4.263	4.263		
200	4.308	4.298	4.298	4.603	4.605	4.605		
1000	5.926	5.908	5.908	6.206	6.215	6.215		

хастическая компонента заполняет практически всю фазовую плоскость системы (3.2.1).

Этот вывод подтверждается непосредственной экспериментальной проверкой эргодичности преобразования (3.2.1). Сама по себе эргодичность является слабым свойством, совершенно недостаточным для стохастичности. Однако при дополнительном условии локальной неустойчивости движения почти всюду, что вытекает для нашей модели (3.2.1) из (3.4.4) при $k >> 1$, установление эргодичности оказывается решающим для доказательства стохастичности согласно последним результатам Аносова/31/ и Синая /34,17/.

Грубая проверка эргодичности производилась по фазовой карте с наиболее мелкими ячейками ($512 \times 1024 = 524288$ ячеек). Из данных таблиц 3.4.2, 3 следует, что при достаточно больших k траектория действительно проходит через все ячейки фазовой плоскости^{x)}. Из анализа, проведенного в следующем параграфе, будет видно,

x) По поводу трех последних случаев в таблице 3.4.3 см. следующий параграф.

что стохастическая компонента может быть и не заполняет все таки всю фазовую плоскость, однако, площадь устойчивых областей (и их размеры) убывает, вообще говоря, экспоненциально с ростом k , а для специальных значений k пропорционально k^{-2} .

Таблица 3.4.2

"Сила" (3.2.5)

k	4	8	16	32
Число пустых ячеек	42038	60	0	0
Доля площади $\times 10^5$	8000	11.4	0	0

Полное число ячеек фазовой плоскости = $512 \times 1024 = 524288$

Таблица 3.4.3

k	3.67	4.78	5.98	8.64	10.5	25.1	37.7	50.3
Число пустых ячеек	48958	10292	1681	24	0	45	8	4
Доля площади $\times 10^5$	9300	1960	320	4.6	0	8.6	1.5	0.76

Полное число ячеек фазовой плоскости = 524288.

Более тонкая проверка эргодичности состоит в исследовании равномерности заполнения фазового пространства стохастической траекторий. Для этого использовалось разбиение фазового квадрата на $N_1=128 \times 128=16384$ ячейки и подсчитывалось число попаданий (n_i) траектории в каждую из ячеек. Критерием равномерности служила дисперсия: $D = \langle (n_i - M)^2 \rangle$, где $M = \langle n_i \rangle = T/N_1$ - среднее значение числа попаданий, T - время движения (число шагов) и усреднене-

ние производится по всем ячейкам. Ожидаемое значение \bar{D} равно: $\bar{D}/\mu = 1 \pm \sqrt{2/N_1} = 1 \pm 0.011$; последний член даёт среднеквадратичное отклонение. Экспериментальное значение для силы (3.2.5) при $k = 16$; $t = 10^7$ составляет: $\bar{D}/\mu = 1.017$. Вероятность такого отклонения около 12%.

Наконец, была произведена дополнительная проверка на стохастичность по наблюдению за процессом заполнения траекторией ячеек фазовой плоскости. Для случайногодвижения при не слишком большом времени должно оставаться некоторое количество пустых ячеек (N_0), которое может быть вычислено по обычной формуле распределения Пуассона:

$$N_0 = N_2 \cdot e^{-\mu} \pm \sqrt{N_0} \quad (3.4.12)$$

где $N_2 = 512 \times 1024 = 524288$ — полное число ячеек фазовой плоскости. Результаты этого эксперимента приведены в таблице 3.4.4. Следует иметь в виду, что в данном случае $\mu = t/5N_2$, так как вывод на фазовую плоскость производился через 5 шагов.

Таблица 3.4.4

t , шаги	10^7	2×10^7	3×10^7	4×10^7	5×10^7
Число пустых ячеек, эксперимент	11531	258	6	1	0
Ожидаемое число пустых ячеек при случайному заполнении	11500 ± 107	251 ± 16	5.8 ± 2.4	0.12 ± 0.86	$2.5 \times 10^{-3} \pm 0.05$

Обработка траектории производилась через 5 шагов; $k = 16$.

Подводя итоги, можно сказать, что движение элементарной модели (3.2.1) при $k \gg 1$ действительно выглядит как "случайное". Возникает вопрос, не является ли это результатом, в конечном счете, лишь ошибок округления или, иначе говоря, специальных свойств "квантованного" пространства ЭВМ. Мы думаем, что это не так

по следующим причинам. Прежде всего "ошибки" округления ни в коем случае не являются случайными, а определяются точным и неизменным алгоритмом ЭВМ. Последний образует своеобразную динамическую систему, для которой, в свою очередь, возникает вопрос, является ли она стохастической или нет. Это зависит от алгоритма задачи, в типичном случае, когда в алгоритме присутствует умножение, округление является, по-видимому, стохастическим. Но и в этом случае его влияние ничтожно для устойчивой системы (§ 3.3). Даже если бы "ошибки" округления накапливались не диффузионно, а систематически, что возможно в специальных случаях /81/, они стали бы заметными лишь на интервале времени $\sim \Delta_T^{-1} = 10^{12}$. Поэтому сколько-нибудь существенное влияние округления возможно лишь при условии локальной неустойчивости, которая сама по себе уже означает стохастичность. Иначе говоря, влияние "ошибок" округления есть не причина, а следствие стохастичности. Заметим, однако, что эти "ошибки" могут существенно обострить переход к стохастичности и, в частности, сделать его значительно менее чувствительным к начальным условиям. Это связано с тем обстоятельством, что в момент появления локальной неустойчивости исходная динамическая система (3.2.1) становится сразу значительно сложнее, так как она начинает "чувствовать" алгоритм округления. В свое оправдание мы можем сказать только, что и в природе происходит, вероятно, нечто подобное; об этом подробно говорилось в § 2.13.

Наконец, следует упомянуть еще об опасении, что движение в "квантованном" пространстве может иметь исключительные свойства, поскольку мера такого пространства по отношению к непрерывному равна нулю, а все теоремы эргодической теории справедливы с точностью до меры нуль. Нам кажется, однако, совершенно невероятным точное совпадение двух множеств нулевой меры и совершенно различной природы.

Несмотря на все вышеприведенные оптимистические замечания по поводу чистоты численного эксперимента дальнейшее изучение (как экспериментальное, так и

аналитическое) особенностей "квантованного" пространства ЭВМ безусловно желательно.

§ 3.5 Промежуточная зона системы с разделенным фазовым пространством

В предыдущем параграфе мы установили, что при достаточно больших k движение элементарной модели действительно удовлетворяет всем проверкам на стохастичность. Исследуем теперь промежуточную зону ($k \approx 1$), которая поможет нам также глубже понять механику стохастичности.

Основной особенностью промежуточной зоны являются "островки" устойчивости, или квази-резонансы, проникающие далеко в область стохастичности и, по-видимому, существующие при любых $k \rightarrow \infty$ (§ 2.8). Кроме того, промежуточная зона распространяется вглубь области колмогоровской устойчивости. Это проявляется, прежде всего, в том, что наблюдаемая граница стохастичности зависит от времени движения, причём вблизи границы появляется область очень медленной диффузии. Соответствующие экспериментальные данные приведены в § 3.3 и мы не будем возвращаться к этому вопросу. Кроме того, вся область колмогоровской устойчивости пронизана стохастическими слоями резонансов, что имеет существенное значение для многомерной системы (§ 2.12). Некоторые эксперименты с простейшей многомерной системой будут описаны в следующем параграфе.

В этом параграфе мы ограничимся исследованием квази-резонансов в промежуточной зоне. Как было показано в § 2.8 наиболее крупные квази-резонансы соответствуют специальным значениям k , лежащим в интервалах (2.8.8, 9), и периоду $T = 1$.

Пример такого квази-резонанса приведен на рис. 3.5.1 для $k \approx 60$; $T = 10^8$. Размер устойчивой траектории ($\Delta\varphi \approx 4\varphi \approx 1/32$), лежащей судя по её неправильной форме, достаточно близко к краю устойчивой области, хорошо согласу-

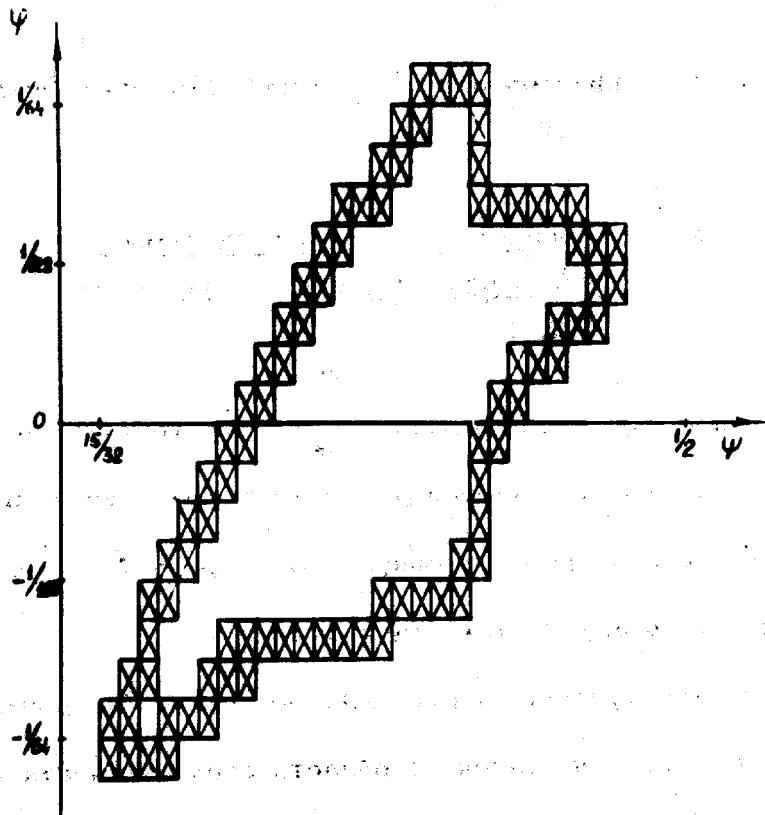


Рис.3.5.1. "Островок" устойчивости для специального значения $k = 60.1993377$:
 $\varphi_0 = 0.01$; $\varphi_0 \approx 0.483$; $t = 10^8$; размер ячейки $(1/512) \times (1/1024)$;
картина не противоречит идеально тонкой кривой, соответствующей абсолютно устойчивой траектории.

ется с оценкой (2.8.10): $\Delta\varphi \sim \Delta\dot{\varphi} \sim 2/k \approx 1/30$ ($f'' = 2$ для "си-лы" (3.2.5)). Относительная площадь области устойчивости составляет в этом случае $(4/kf'')^2 \sim 10^{-3}$ (2.8.10).

Для значений k вне интервалов (2.8.8) площадь устойчивых областей убывает значительно быстрее, как это видно из таблицы 3.4.2 (см. предыдущий параграф). В таблице приводится число ячеек фазовой плоскости, незаполненных стохастической компонентой, в зависимости от k .

Фазовая карта для одного такого случая показана на рис. 3.5.2 ("сила" (3.2.5): $k = 8$; $t = 10^8$). Ясно видны два "островка" устойчивости. Более детальный анализ показывает (см. ниже), что имеется еще и третий "островок", отмеченный на рис. 3.5.2 пунктиром. Он уже ячейки фазовой плоскости и поэтому остался невидимым. Период движения в этом случае: $T = 3$, а цифры на фазовой карте показывают последовательность движения. Два "островка" (1,2) лежат в области устойчивых

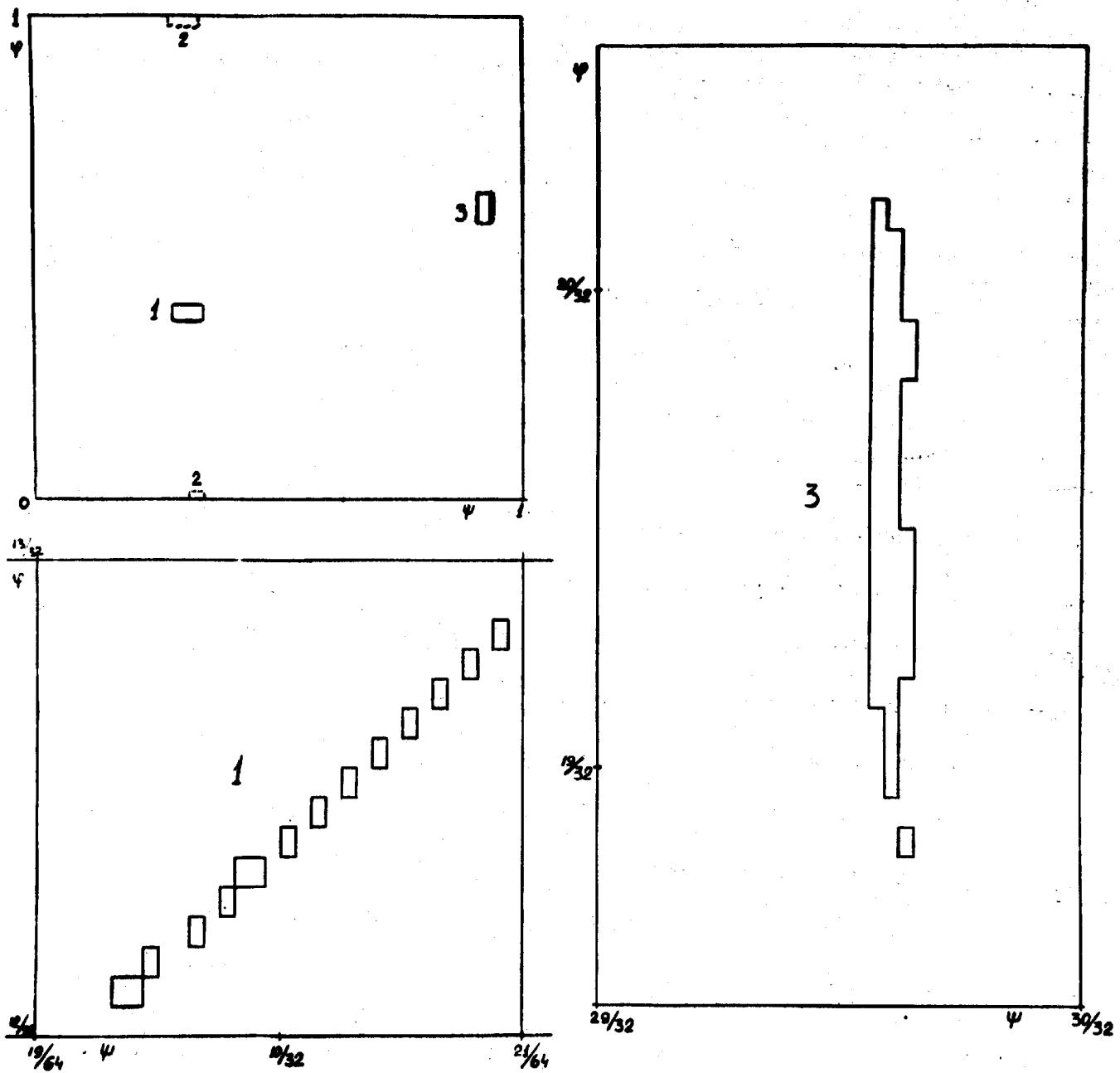


Рис.3.5.2. "Островки" устойчивости в области стохастичности ("сила" (3.2.5)): $\zeta = 8$; $\tau = 10^8$; $T = 3$. Цифры показывают последовательность движения.
 "Островки" (1,2) лежат в области устойчивых фаз, причем островок (1) сильно вытянут вдоль направления растяжения (в неустойчивой области).
 Островок (3) расположен в неустойчивой области и сильно вытянут вдоль направления сжатия.

фаз (3.4.4), причём один из них (1) сильно вытянут вдоль направления растяжения (см. § 3.4). Третий островок (3) лежит в неустойчивой области по ψ и сильно вытянут вдоль направления сжатия.

На рис.3.5.3 показаны три траектории внутри одного из "островков" (3), с помощью которых и было установлено существование трех областей устойчивости для случая, представленного на рис.3.5.2. Точками на рис.3.5.3 отмечены значения, полученные в конце счёта длительностью $t = 2 \cdot 10^7$ шагов (для средней траектории). Обращает на себя внимание их регулярность, которая становится еще более удивительной, если принять во внимание, что они совпадают с большой степенью точности (лучше 10^{-4}) со значениями, полученными в самом начале счёта, которые отмечены на рис.3.5.3 крестами. Совпадение имеет место по обеим координатам, что указывает на попадание в окрестность резонанса второго порядка очень высокой гармоники ($q = 108$). Размеры "островков" совпадают по порядку величины с оценками § 2.8 (2.8.16, 14). Так для "островка" (3) рис. 3.5.2 даёт: $\Delta\varphi \approx 0.04$; $\Delta\psi \approx 0.003$, а формулы § 2.8 приводят к оценкам: $\Delta\varphi \sim 0.1$; $\Delta\psi \sim 0.01$ ($T = 2$), если воспользоваться выражением (3.4.11) для энтропии "силы" (3.2.5).

Рассмотренный случай подтверждает частично гипотезу Синая (см. § 2.5) о том, что область устойчивых фаз может "испортить" стохастичность и вне этой области. Существенно, однако, каковы размеры и общая площадь областей устойчивости. Из данных таблицы 3.4.2 видно, что последняя величина быстро стремится к нулю с ростом k в пределах точности эксперимента, когда минимальный различимый размер на фазовой плоскости составляет $\sim 10^{-3}$.

Ничтожная доля устойчивых областей может быть связана с конкретным видом "силы" (3.2.5). Именно, для этой "силы" имеется только одна область устойчивых фаз (3.4.4) вблизи $\psi = 1/2$. При этом невозможно периодическое решение ($T > 1$), лежащее целиком в области (3.4.4), что может привести к существенному сокращению числа устойчивых областей. Для проверки этого предположения эксперимент был по-

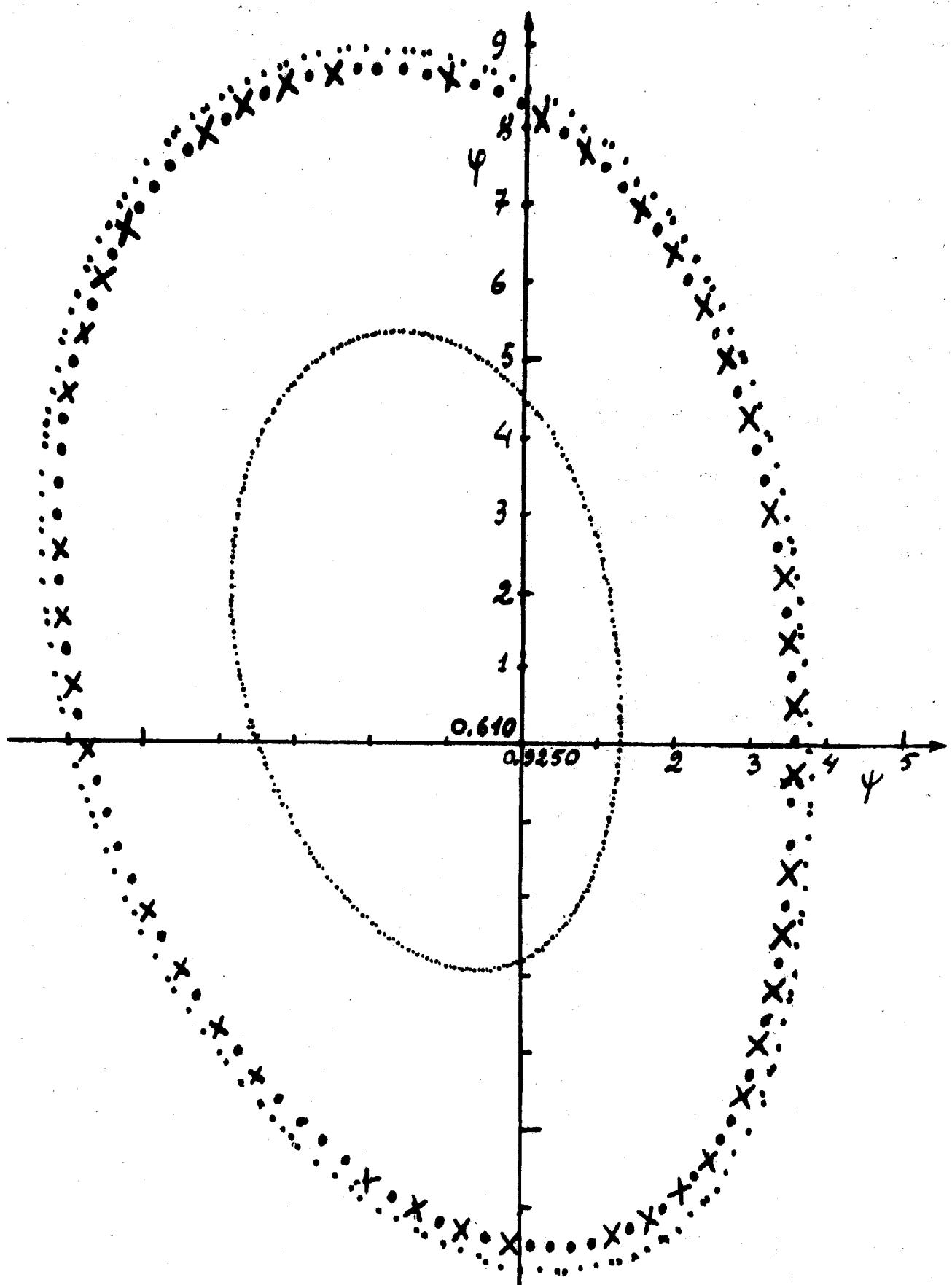


Рис.3.5.3. Устойчивые траектории внутри резонанса второго порядка, расположенного в узкой области (3) (рис.3.5.2): $K = 8$; $t = 2 \cdot 10^7$; для средней траектории точки соответствуют концу счета, кресты — началу; масштабы по осям различаются в 10 раз, цифры дают последний десятичный знак чисел в центре графика.

вторен с "силой" (3.2.6). В последнем случае имеются две области устойчивых фаз:

$\gamma > 1/4; 3/4$, так что упомянутое выше ограничение отпадает.

Результаты этого эксперимента приведены в таблице 3.4.3 и на рис.3.5.4. За исключением трех последних значений k , лежащих как раз на левом краю интервала устойчивости (2.8.8) для всех остальных (неспециальных) k площадь устойчивых областей очень быстро убывает с ростом k . Закон убывания совпадает по порядку величины с оценкой (2.8.20), которая для "силы" (3.2.6) может быть записана более конкретно в виде:

$$S^{(2)}(k) \sim \left(\ln \frac{k}{2}\right)^{-1} \exp\left[-3\left(\ln \frac{k}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi k}{2}} - 1\right)\right] \quad (3.5.1)$$

Мы использовали здесь выражение (3.4.10) для энтропии "силы" (3.2.6). Оценка (3.5.1) представлена на рис.3.5.4. сплошной линией. Она очень чувствительна к вели-

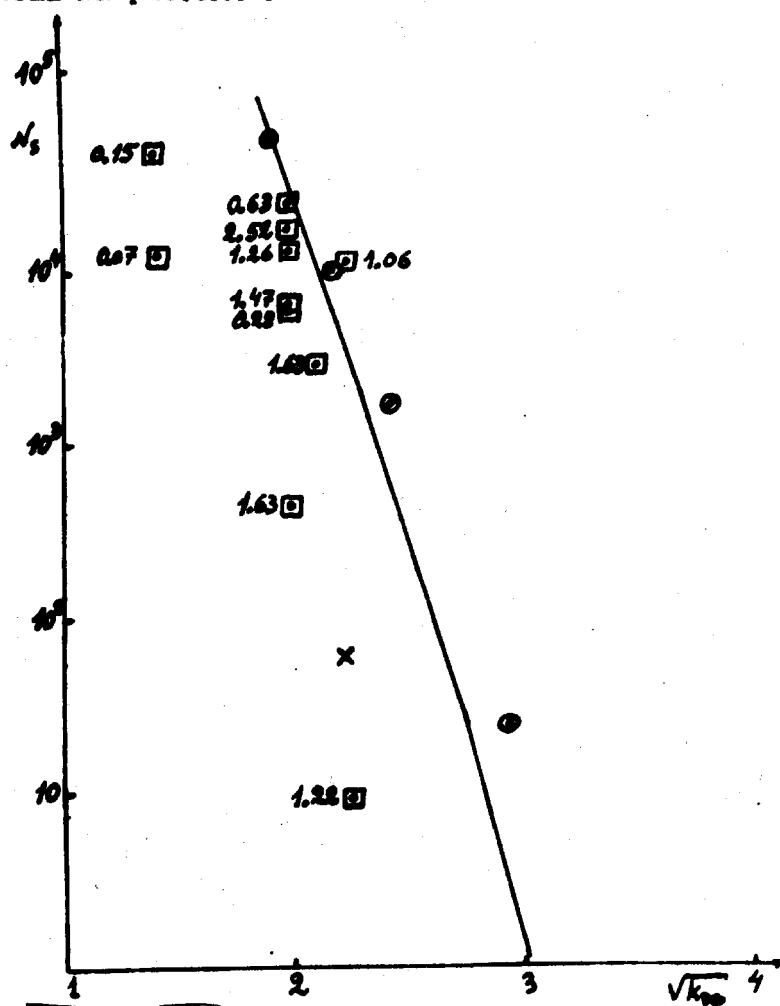


Рис.3.5.4. Зависимость числа устойчивых ячеек фазовой плоскости (N_s) от парметра k_3^2 для разных случаев: \circ - сила (3.2.6); \square - сила (3.2.3,4); \times - сила (3.2.5); $\gamma = 0.63; 2.52; 1.16; 1.06; 1.43; 0.49; 1.00; 1.63; 1.22$; значения γ указаны около точек; сплошная кривая - аналитическая оценка по формуле (3.5.1).

чине $\omega_0(k)$. Поэтому для других "сил" значения k экспериментальных точек на рис. 3.5.4 пересчитаны по ω_0 : $k_{\varphi} = 4/\pi \omega_0$ (см. (2.8.12)).

Согласно результатам § 2.8 доля устойчивых областей чувствительна к значению параметра $\gamma = \omega_0 \cdot e^k$. При $\gamma > 1$ число квази-резонансов первого типа и их общая площадь формально расходятся (§ 2.8), т.е. можно ожидать, что доля устойчивых областей будет весьма значительной. Для "силы" (3.2.5) $\gamma = 2/e < 1$ так же, как и для силы (3.2.6): $\gamma = 2/\pi$. Именно поэтому была сконструирована специальная "сила" типа "сглаженной пильы" (3.2.3,4), для которой возможны любые значения γ в зависимости от параметров δ, λ, k :

$$\gamma = \begin{cases} 2\zeta_1 k \cdot (\lambda/e)^{\zeta_1}; & k \leq 2/\lambda\zeta_1 \\ \frac{4}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\zeta_1}; & k \geq 2/\lambda\zeta_1 \end{cases} \quad (3.5.2)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2\lambda} - \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} - \frac{\delta}{\lambda}}; \quad e = 2.71\dots$$

Данные экспериментов с "силою" (3.2.3,4) также приведены на рис. 3.5.4, причём рядом с экспериментальными точками указаны значения параметра γ . Против ожидания, устойчивая площадь в случае $\gamma > 1$ оказывается даже меньше оценки (3.5.1). Возможное объяснение этого интересного результата в терминах взаимного разрушения квазирезонансов при перекрытии содержится в § 2.8.

По-видимому этим же можно объяснить тот факт, что экспериментальные данные совпадают по порядку величины с оценкой (3.5.1), по крайней мере для "силы" (3.2.6), которая учитывает квазирезонансы только второго типа. Между тем, если квази-резонансы первого типа существенны только при $\gamma > 1$, то полное число и площадь квази-резонансов третьего типа расходятся уже при любом γ (§ 2.8). Очевидно, что они, так же, как и квази-резонансы первого типа для $\gamma > 1$, взаимно разрушаются при перекрытии.

Несмотря на быстрое уменьшение площади квази-резонансов с ростом k , не исключено, что их полное число неограничено и они образуют всюду плотное множество

во устойчивых траекторий (гипотеза Синая, § 2.5). Оценки § 2.8 приводят именно к такому результату, однако, они недостаточно точны, так что последний вопрос остается пока открытым.

Несмотря на все приведенные выше экспериментальные данные, может еще оставаться известное сомнение, не является ли все же система областей устойчивости столь тонкой, что она ускользает от наблюдения (подобно одной из областей устойчивости на рис. 3.5.3). Нам кажется, что ответ на этот вопрос даёт следующий глобальный эксперимент. Мы имеем всего около 100 случаев счёта при $k \gg 1$. Ни в одном из них мы не попали в область устойчивости, несмотря на самые различные начальные условия.

§ 3.6 Пример слабой неустойчивости многомерной системы

В этом параграфе мы опишем кратко первую попытку наблюдения диффузии Арнольда для двумерного неавтономного осциллятора, заданного преобразованием:

$$\begin{aligned} I_1' &= I_1 - \varphi_1^9 + \mu_0 \varphi_2 \\ I_2' &= I_2 - \varphi_2^9 + \mu_0 \varphi_1 \\ \varphi_1' &= \varphi_1 + I_1' \\ \varphi_2' &= \varphi_2 + I_2' \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Нетрудно видеть, что эта модель является обобщением элементарной модели на двумерный случай. Выбор $f(\varphi) = -\varphi^9$ связан с желанием иметь побольше резонансов при сохранении аналитичности силы (см. ниже).

Численные эксперименты по диффузии Арнольда проводились совместно с Кайлом^{x)} и Сесслером^{xx)} на ЭВМ **CDC-6600** Вычислительного центра ЦЕРН'а (Женева) /76/. Модель (3.6.1) была выбрана после многочисленных предварительных экспериментов.

x) E. Keil, CERN, Genève, Suisse.

xx) A. Sessler, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Berkeley, California, USA.

Прижде чем переходить собственно к экспериментам получим некоторые простые аналитические соотношения для модели (3.6.1), которые потребуются нам в дальнейшем.

Если $|\varphi_i^9| \ll 1$ и $|\mu_0 \varphi_0| \ll 1$, преобразование (3.6.1) можно заменить приближенно дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{I}_i &\approx -\varphi_i^9 + \mu_0 \varphi_j \\ \dot{\varphi}_i &\approx I_i\end{aligned}\quad (3.6.2)$$

с сохраняющимся гамильтонианом^{x)}:

$$H = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + \frac{1}{10}(\varphi_1^{10} + \varphi_2^{10}) - \mu_0 \varphi_1 \varphi_2 \quad (3.6.3)$$

Ввиду резкой зависимости потенциальной энергии от координаты φ можно считать приближенно, что невозмущенное движение ($\mu_0 = 0$) происходит в прямоугольной потенциальной яме; оно характеризуется частотой:

$$\omega \approx \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \varphi_0^4 \quad (3.6.4)$$

и спектром:

$$\varphi_{2n+1} \approx \frac{8}{\pi^2} (-1)^n \varphi_0 \cdot (2n+1)^{-2} \quad (3.6.5)$$

Последнее выражение справедливо для не слишком высоких гармоник: $n \leq 10$, пока еще можно пользоваться приближением прямоугольной потенциальной ямы.

В приближении (3.6.3) имеются только резонансы связи: $\tilde{\omega}_1 = n \omega_2$, действие которых может приводить лишь к обмену энергией между осцилляторами при сохранении полной энергии H (3.6.3). Так как последняя зависит также и от энергии связи $H_i = -\mu_0 \varphi_1 \varphi_2$, то максимальное значение амплитуды одного из осцилляторов, скажем, φ_{10} достигается при условии: $\mu_0 \varphi_{10} = \varphi_{20}^9$ или:

$$10 \cdot H_2 = H_i \quad (3.6.6)$$

где $H_2 = \varphi_{20}^{10}/10$: $H = H_1 + H_2 + H_i$.

Изменение полной энергии системы H возможно за счет внешних резонансов:

^{x)} Мы преебрегаем, таким образом, внешним возмущением, действие которого действительно оказывается очень слабым (см. ниже).

$$\bar{\kappa}\omega_1 + \kappa\omega_2 = 2\pi \quad (3.6.7)$$

где мы учли только первую гармонику внешнего возмущения с частотой $\frac{2\pi}{T}$, так как при условии $\varphi^9 \ll 1$, принятом выше, $\omega \sim \varphi^4 \ll 2\pi$ (3.6.4).

Из вида спектра (3.6.5) следует, что наибольшая амплитуда соответствует одномерному резонансу $\kappa = 0$ (или $\bar{\kappa} = 0$), и $\omega_2 \approx 0$, откуда минимальная гармоника колебаний, приводящая к внешнему резонансу, равна: $\bar{\kappa} \approx 2\pi/\omega_0$, где ω_0 — максимальное значение частоты при заданных начальных условиях.

Перейдем теперь к описанию численных экспериментов.

Большая часть программы счета, включая довольно трудоёмкую обработку результатов, написана на языке **FORTRAN**. Однако основной цикл вычисления собственно преобразования (3.6.1) записан в символьическом коде операций **CDC-6600 (ASCENT)** для достижения максимальной скорости счёта^{x)}. При этом удалось поместить весь этот цикл в центральный процессор **CDC-6600**, что исключало относительно медленное обращение к оперативной памяти. Кроме того была использована возможность двух параллельных умножений на **CDC-6600**. В результате время вычисления одного шага преобразования (3.6.1) удалось довести до 9 мксек несмотря на большое число умножений. Обработанные результаты счёта выводились периодически через определенное число шагов и содержали, в частности, карту двумерной проекции четырехмерного фазового пространства системы на плоскость (φ_1, φ_2) (см., например, рис.3.6.4), а также часть гистограммы вблизи края функции распределения траектории $f(\varphi_1, \varphi_2)$ (см., например, рис.3.6.5). Цель последней обработки заключалась в том, чтобы выяснить, является ли край распределения резким, или гладким. Легко видеть, что второе свидетельствует об отсутствии инвариантных торов, т.е. о некоторой неустойчивости движения. Действительно, в одномерном случае фазовая

^{x)} Возможность комбинированного использования этих двух языков является, по нашему мнению, существенным преимуществом транслятора ВЦ ЦЕРН'a.

траектория представляет собой эллипс, а его проекция на ось φ имеет особенность $f(\varphi) \propto |\varphi - \varphi_0|^{-\frac{1}{2}}$ вблизи края распределения. Для двумерной системы с $\mu_0 = 0$ функция распределения занимает на плоскости (φ_1, φ_2) прямоугольник с аналогичной особенностью по краям (рис.3.6.7). Если $\mu_0 \neq 0$, но инвариантные торы существуют, то особенность сохраняется, но уже на более сложном контуре, отражающем конфигурацию инвариантного тора (рис.3.6.8). И, наконец, если край распределения становится гладким, это указывает на разрушение инвариантных торов и превращение их в слой конечной толщины (в четырехмерном пространстве, рис.3.6.5).

Прежде всего необходимо определить область одномерной устойчивости (3.6.1) при $\mu_0 = 0$. Это может быть сделано, так же, как и в § 3.3, по одной траектории, начальная точка которой лежит заведомо в области стохастичности. Чтобы избежать ухода траектории на "бесконечность", т.е. АВОСТ'а ЭВМ, необходимо ограничить фазовую плоскость системы с помощью взятия дробной части (§ 3.2), что эквивалентно периодическим граничным условиям. В данном случае использовался квадрат: $-1 \leq I, \varphi < 1$. Фазовая карта системы для $t = 10^8$ показана на рис.3.6.1, где кружки отмечают ячейки, занятые траекторией. Для $I_0 = 0$ начальная фаза φ_0 должна лежать в интервале $(-0.78, +0.78)$. Точность этого значения интервала определяется размером ячейки фазовой карты и составляет $\pm 1\%$.

Сравним этот результат с теоретической оценкой, которую проще всего получить из анализа локальной устойчивости (§ 2.4): $K_0 = -9\varphi_0^8 < -4$, откуда: $\varphi_0 < 0.9$, что очень близко к приведенному выше численному результату.

Как отмечалось в § 3.3, на границе стохастичности в промежуточной зоне, неустойчивость развивается очень медленно и поэтому наблюдаемая граница стохастичности зависит от времени движения. Приведенное выше значение устойчивого интервала относится к $t = 10^8$. При $t = 2 \cdot 10^8$ граница стохастичности смещается приблизительно на 4% наружу (по φ_0). Не исключено, что при $t > 10^8$ она смещается еще несколько внутрь, хотя согласно теории КАМ определенно существует граница

$(\varphi + 1.0) \times 50$

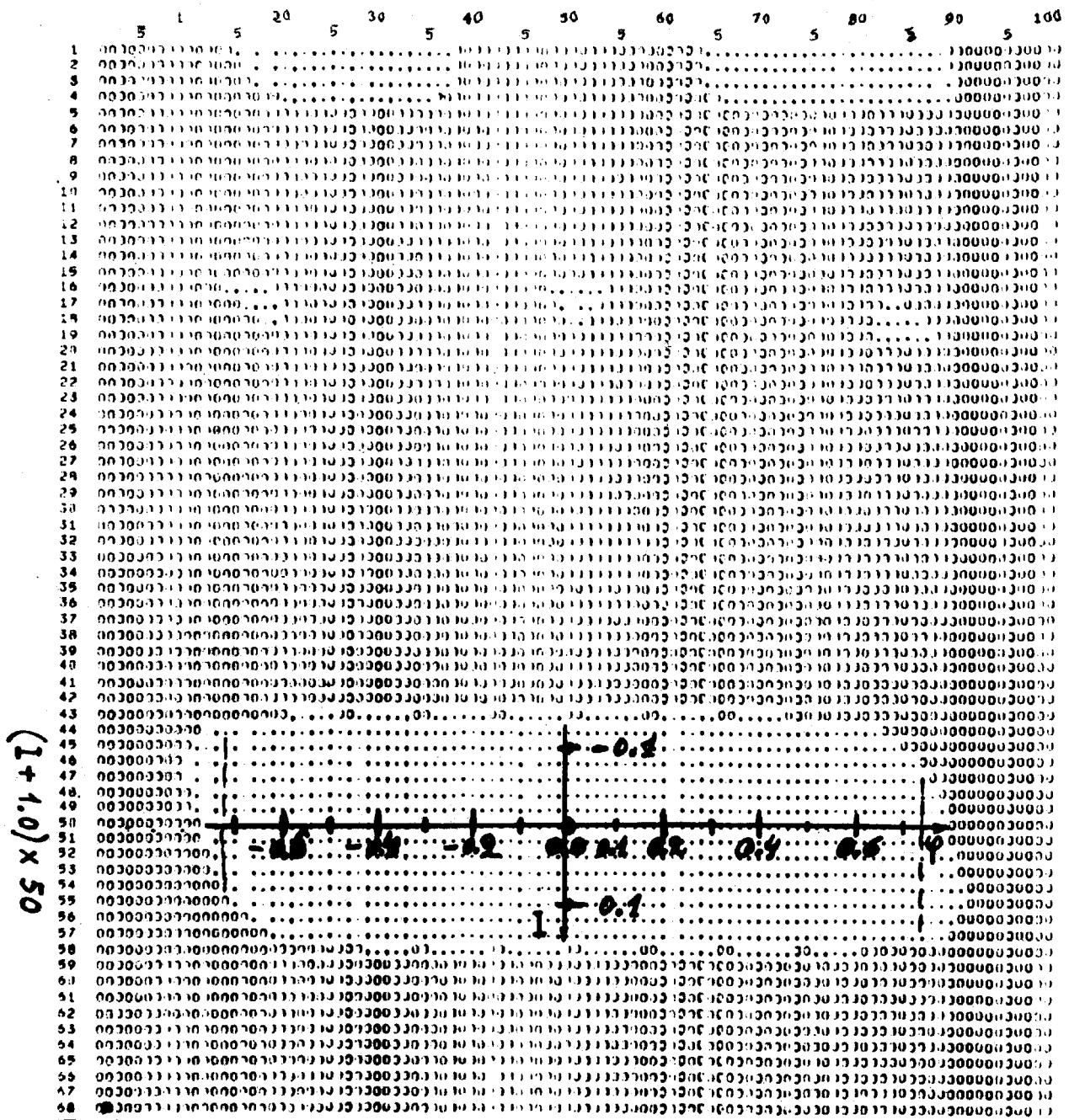


Рис.3.6.1. Область одномерной устойчивости для модели (3.6.1); $\mu_0 = 0$; $\varepsilon = 10^6$.

вечной устойчивости (см. § 3.3 и ниже).

Вероятно наиболее интересным экспериментом с моделью (3.6.1) является единственный случай очень слабой неустойчивости, наблюдавшийся при: $\mu_0 \approx 0.00115$;

$I_{10} = I_{20} = 0$; $\varphi_{10} = 0.375$; $\varphi_{20} = 0.721$. Рис. 3.6.2 показывает зависимость от времени приращения (ΔS) площади (S) вышеупомянутой двумерной проекции (φ_1, φ_2) траектории движения в линейном и логарифмическом масштабе.

Фазовые карты проекции движения на плоскость (φ_1, φ_2) представлены на рис. 3.6.3, 4; первая из них относится к началу движения ($t = 10^7$ шагов), а вторая — к самому концу ($t = 3.648 \times 10^8$), когда траектория выходит в область одномерной неустойчивости. Гистограмма распределения в последнем случае показана на рис. 3.6.5, где ясно видно, что её край является гладким и, следовательно, имеет место некоторая неустойчивость.

Закон развития неустойчивости во времени является необычным. Прежде всего бросается в глаза, что приращение площади (ΔS) происходит порциями. Это, однако, может быть связано с конечным размером ячейки фазовой плоскости; так, например, первая "ступенька" на рис. 3.6.2 соответствует всего 19 ячейкам, а вся площадь S охватывает около 5000 ячеек. Анализ фазовых карт, которые выдавались периодически через $\Delta t = 10^7$, показывает, что приращение площади происходит равномерно по всему периметру, что указывает на быстрый обмен энергией между двумя степенями свободы. Измерения локальной неустойчивости приводят к выводу, что этот обмен происходит всего за $t \sim 10^4$ (см. таблицу 3.6.1).

Наиболее удивительным на рис. 3.6.2 является неожиданный крутой подъём кризиса $\Delta S(t)$ в конце счёта. Данные фазовых карт показывают, что почти сразу же после начала подъёма обмен энергией между осцилляторами прекращается, а увеличение S происходит только за счёт одного из них.

В целом функция $\Delta S(t)$ является скорее экспоненциальной, чем линейной или пропорциональной \sqrt{t} . Если исключить последний резкий подъём, то зависимость

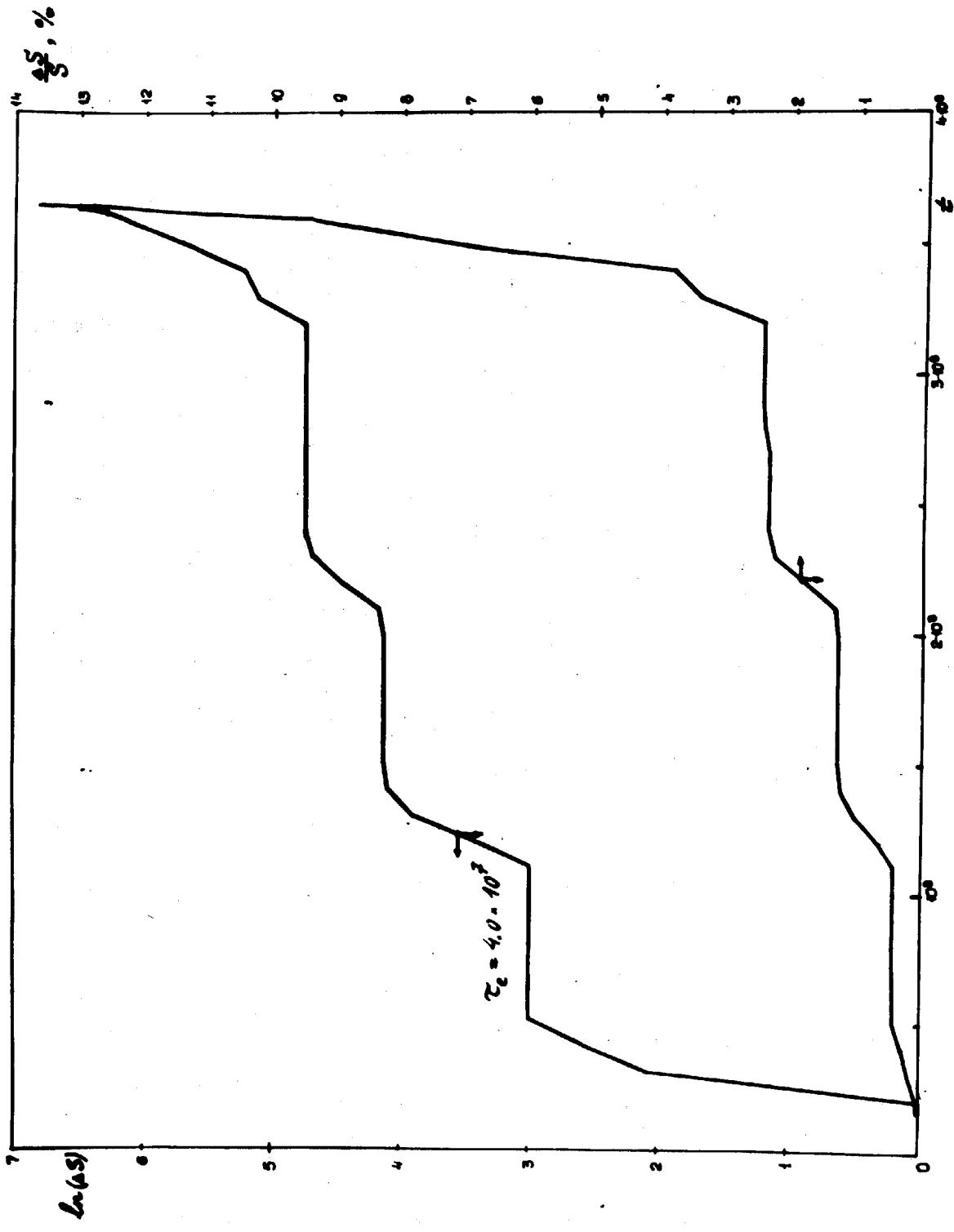


Рис.3.6.2. Пример слабой неустойчивости двумерного неавтономного осциллятора (3.6.1): $\mu_0 \approx 0.00115$; $\varphi_{10} \approx 0.376$; $\varphi_{20} \approx 0.722$; $I_{10} = I_{20} = 0$;
 S - площадь проекции движения на плоскость (φ_1, φ_2); ΔS - приращение S в процессе движения; τ_e - время роста.

$$(\varphi_2 + 1.0) \times 50$$

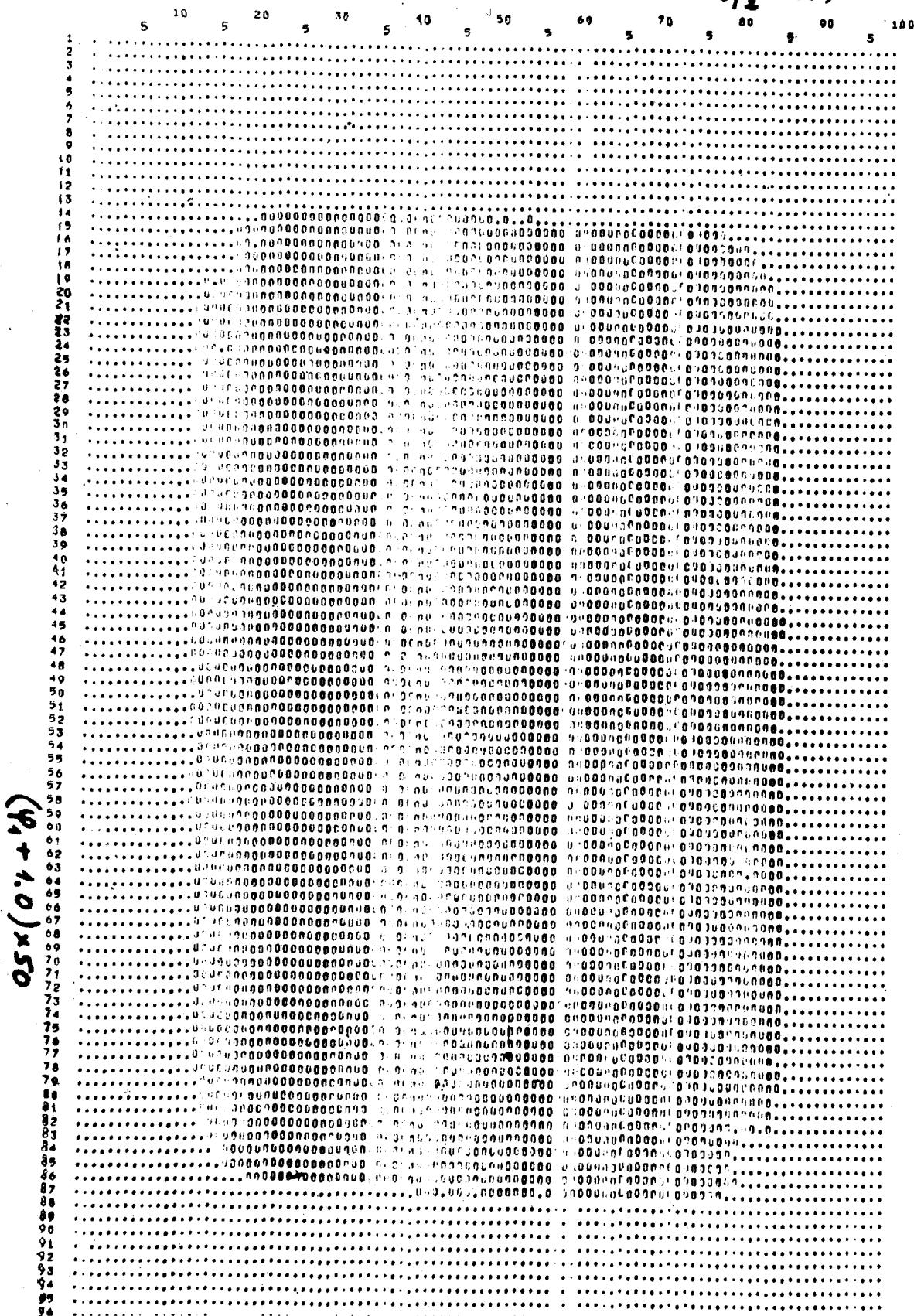


Рис.3.6.3. Фазовая карта случая на рис.3.6.2 вблизи начала счёта: $\tau = 10^7$; Кружки обозначают ячейки, занятые траекторией, а точки дают координатную сетку.

$$(\varphi_2 + 1.0) \times 50$$

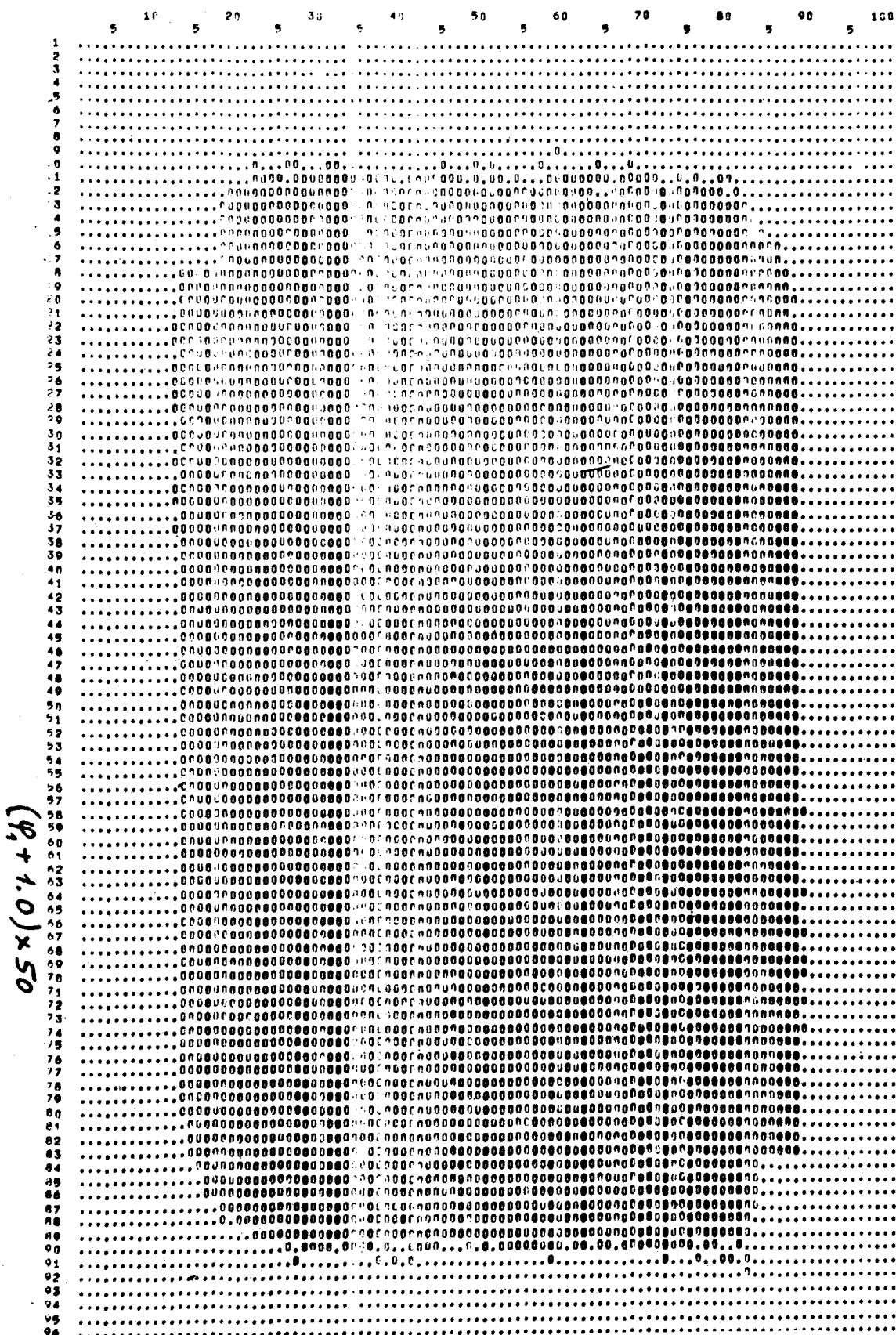


Рис.3.6.4. То же, что и на рис. 3.6.3, но в конце счета: $\tau = 3.648 \times 10^8$.

	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	($\varphi_2 + 1.0 \times 50$)
RH(2)	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
12	4	4	2	4	2	0	1	0	0	0	0	0
13	17	12	15	16	25	21	7	4	6	8	0	0
14	53	42	39	39	30	30	15	6	3	0	0	0
15	353	348	384	286	234	276	178	27	15	11	0	0
16	441	450	480	470	487	528	484	280	94	25	0	0
17	451	457	459	461	486	477	512	428	384	148	0	0
18	468	458	468	487	541	455	536	463	432	380	0	0
19	458	474	501	481	448	480	510	454	461	468	0	0
20	476	464	466	523	483	495	449	417	444	490	0	0
21	454	470	473	460	457	405	486	461	414	389	0	0
22	461	481	478	477	445	486	480	413	420	453	0	0
23	520	486	472	467	475	440	437	464	492	498	0	0
24	447	515	469	430	907	462	511	497	451	487	0	0
25	436	489	477	496	908	503	437	498	447	477	0	0
26	461	479	488	515	534	449	481	438	478	499	0	0
27	477	462	487	508	482	475	465	467	430	439	0	0
28	506	476	470	486	479	463	425	497	462	484	0	0
29	461	479	484	482	493	470	467	475	434	479	0	0
30	430	432	481	492	496	467	474	493	449	471	0	0
31	409	440	469	441	473	449	459	489	477	454	0	0
32	411	444	419	435	459	403	436	419	454	470	0	0
33	430	476	444	426	410	440	441	449	447	440	0	0
34	414	411	384	426	434	439	426	419	424	401	0	0
35	425	418	498	422	397	395	428	427	439	431	0	0
36	361	412	381	429	368	413	392	369	462	403	0	0
37	441	390	499	396	434	404	446	382	381	436	0	0
38	393	394	382	410	368	401	389	361	359	390	0	0
39	411	371	410	370	417	398	394	380	398	320	0	0
40	408	392	380	371	384	427	375	409	370	298	0	0
41	422	431	393	395	378	380	399	416	316	296	0	0
42	410	419	358	344	379	371	369	330	336	303	0	0
43	404	361	380	387	375	380	406	338	353	269	0	0
44	350	345	482	371	364	405	381	350	277	275	0	0
45	402	368	387	366	378	365	367	346	259	248	0	0
46	387	365	369	384	399	360	381	358	291	242	0	0

Рис.3.6.5. Участок гистограммы распределения проекции траектории на плоскость (φ_1 , φ_2) для случая на рис.3.6.2: $Z = 3.648 \times 10^8$.

$\Delta S(t)$ лучше всего согласуется с линейной, хотя, конечно, нельзя исключить (из-за больших экспериментальных ошибок) и зависимость $\Delta S \propto \Delta \varphi_0 \propto \sqrt{t}$,

которая соответствует обычной диффузии ($\Delta \varphi_0 \ll \varphi_0$). В последнем случае средний коэффициент диффузии равен: $D_\varphi = d(\Delta \varphi_0)^2 / dt \sim 2 \cdot 10^{-13}$.

Если же предположить, что имеет место линейный закон $S(t)$, то средняя скорость развития неустойчивости составляет: $V_\varphi = d(S(t)) / dt \sim 4 \cdot 10^{-11}$. Впрочем этот случай представляется маловероятным. Насколько нам известно, единственный механизм, приводящий к линейному закону, связан с так называемым микротронным резонансом (§ 2.4). Однако это противоречит локальной неустойчивости движения, обнаруженной экспериментально (см.ниже). Скорость развития неустойчивости

на микротронном резонансе можно оценить посредством:

$$V_\varphi \sim$$

$\sim (\Delta\omega)_p \cdot \Omega_\varphi \cdot (d\varphi/d\omega)$, где $(\Delta\omega)_p$ - ширина резонанса, а $\Omega_\varphi \sim \bar{m} \cdot (\Delta\omega)_p$ - частота фазовых колебаний (3.6.7). Подставляя сюда численные значения: $\omega_0 \approx 0.2$; $\bar{m} \approx 30$, получим: $(\Delta\omega)_p \sim 10^{-6}$ между тем как расстояние между резонансами: $\Delta \sim \omega_0/\bar{m} \sim 10^{-2}$ (см. (3.6.7), $\kappa = 0$).

Обнаруженная слабая неустойчивость не может быть объяснена ошибками окружения ЭВМ. Действительно, относительная ошибка одного округления на СДС-6600 не превосходит $\varepsilon_0 = 2^{-47} \approx 10^{-14}$. Если даже считать, что все ошибки складываются в одну сторону, то ошибка одного шага (для φ) составит: $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0 <\varphi^3> + 2\mu_0\varepsilon_0 <\varphi^2> + \varepsilon_0 \approx \varepsilon_0$, а для всего счёта: $\varepsilon_N <\varepsilon_0 \times 10^9> \approx 10^{-5}$, что значительно меньше размера фазовой ячейки $\Delta\varphi = 2 \cdot 10^{-2}$. Для контроля траектория системы (3.6.1) с "выключенным" взаимодействием ($\mu_0 = 0$) вычислялась в течение $t = 10^8$. На рис.3.6.6, 7 предstawлены фазовая карта и гистограмма распределения, соответственно. Устойчивость движения в этом случае очевидна. Аналогичные результаты получаются и при "включённом" взаимодействии (даже если $\mu_0 \approx 0.00915$) для специальных начальных условий, например, для: $\varphi_{10} = 0.375$; $\varphi_{20} = 0.522$ (рис.3.6.8, 9; $t = 5 \cdot 10^7$). Последняя устойчивая область расположена внутри одного из сильных резонансов связи, по-видимому, $\omega_1 \approx \omega_2$, так как эта область симметрична относительно φ_1 , φ_2 .

Механизм слабой неустойчивости связан скорее всего с диффузией Арнольда вдоль сильных одномерных резонансов: $\bar{m}\omega_1 = 2\pi$, поскольку система находится вблизи границы одномерной неустойчивости (рис.3.6.2). В таком случае движение должно быть локально неустойчивым. Для проверки последнего предположения две очень близкие вначале траектории ($\Delta I = 0$; $\Delta\varphi \sim 10^{-10}$) считались одновременно и вычислялось расстояние между ними в зависимости от времени ("разбегание" траекторий). На рис.3.6.10 показано разбегание по фазе, оно не противоречит экспо-

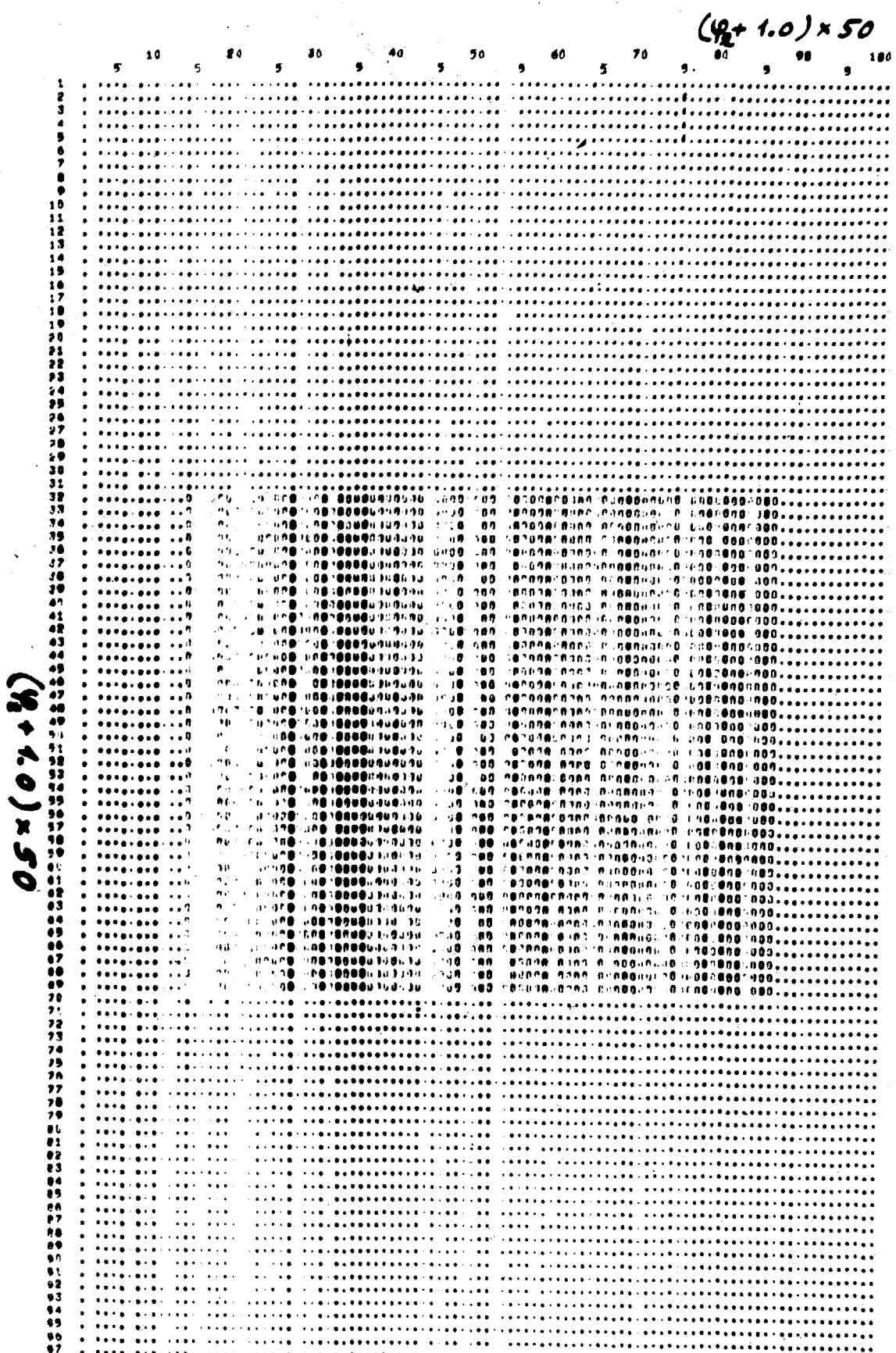


Рис.3.6.6. Контрольный эксперимент: то же, что и на рис.3.6.3, кроме $\mu_0 = 0$; $t = 10^8$.

$(\varphi_2 + 1.0) \times 50$

PH(2)	83	84	85	86	87	88	89	90	91
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	424	433	547	737	803	813	813	813	813
33	257	277	302	419	427	427	427	427	427
34	200	210	267	356	364	364	364	364	364
35	182	192	244	299	311	311	311	311	311
36	174	186	229	325	360	360	360	360	360
37	176	185	223	295	361	361	361	361	361
38	171	179	215	299	361	361	361	361	361
39	180	181	212	299	361	361	361	361	361
40	175	185	225	298	361	361	361	361	361
41	166	182	217	310	361	361	361	361	361
42	171	185	221	288	369	369	369	369	369
43	160	176	214	314	346	346	346	346	346
44	176	193	217	277	369	369	369	369	369
45	168	174	209	314	346	346	346	346	346
46	178	187	227	271	364	364	364	364	364
47	161	178	221	317	345	345	345	345	345
48	169	174	223	277	343	343	343	343	343
49	170	177	203	317	347	347	347	347	347
50	176	173	212	277	346	346	346	346	346
51	179	178	211	314	341	341	341	341	341
52	177	187	232	270	369	369	369	369	369

Рис.3.6.7. Контрольный эксперимент: то же, что и на рис.3.6.5, кроме:
 $\mu_0 = 0$; $t = 10^8$.

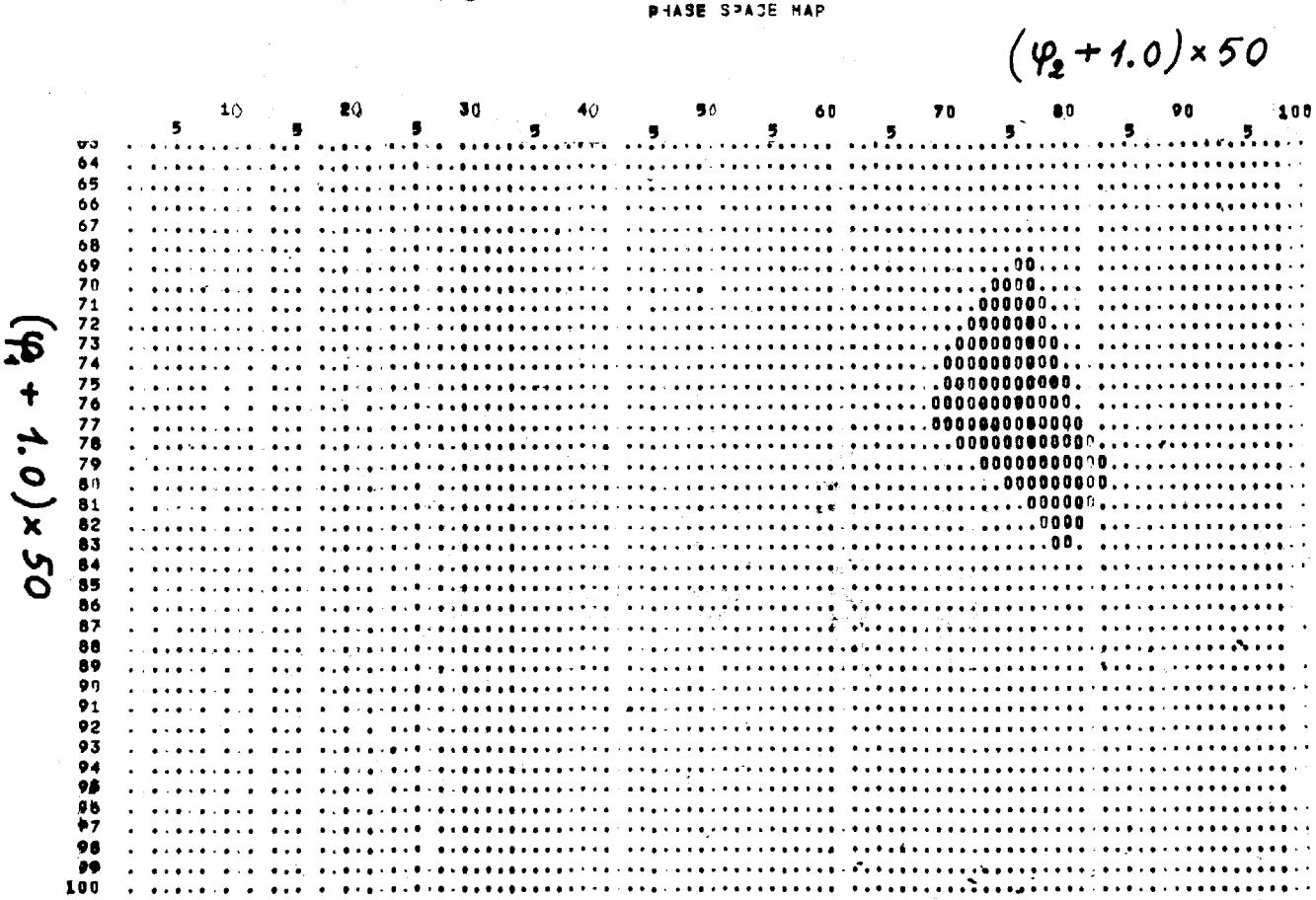


Рис.3.6.8. Фазовая карта устойчивой области системы (3.6.1): $\mu_0 \approx 0.00915$;
 $\varphi_{10} \approx 0.375$; $\varphi_{20} \approx 0.522$; $I_{10} = I_{20} = 0$.

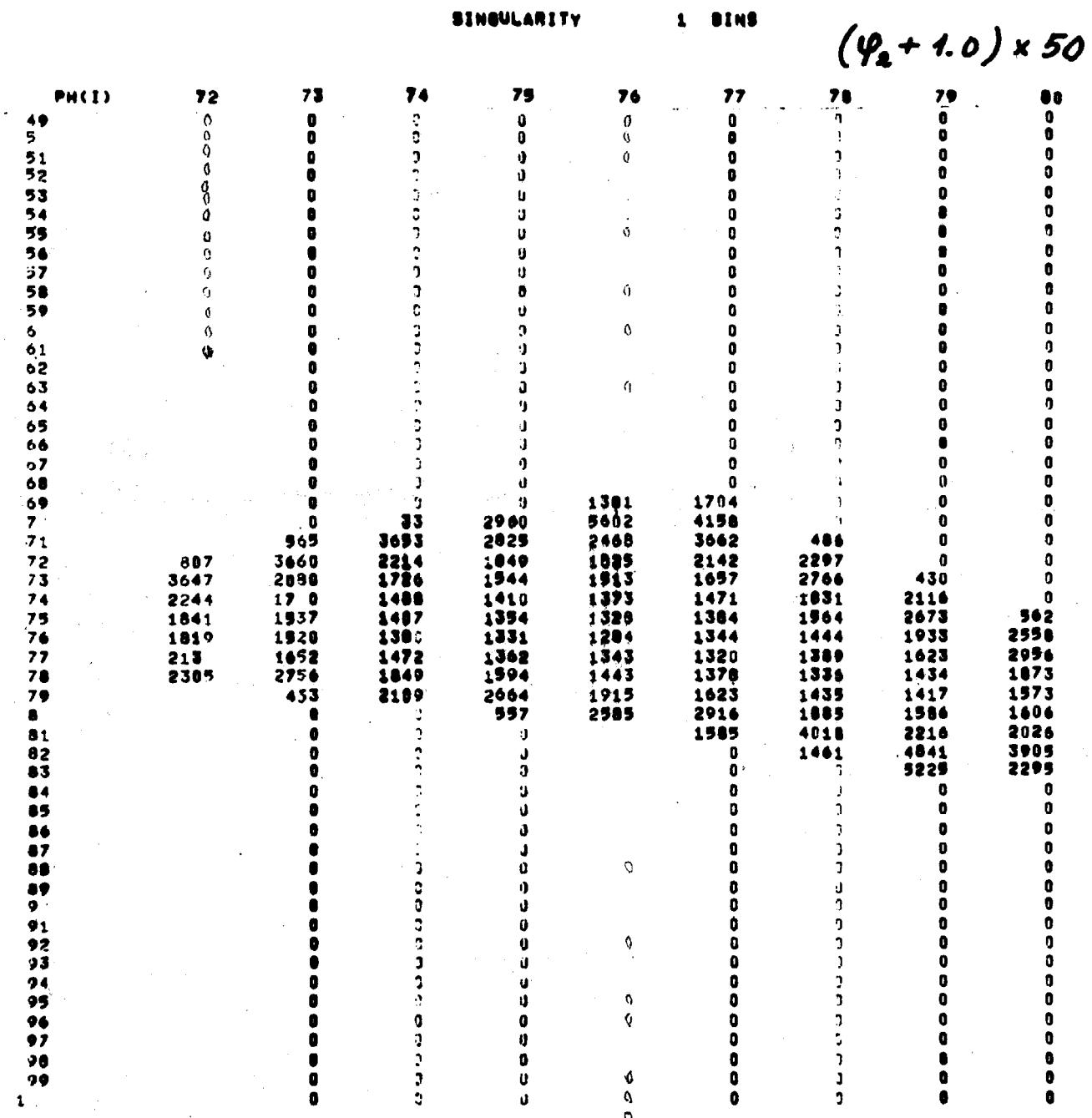


Рис.3.6.9. Гистограмма распределения устойчивой траектории на рис.3.6.8.

ионциальному закону со временем $\tau_e = h^{-1} \approx 10^3$, где h - энтропия системы. Приблизительно тот же результат получается и для разбегания траекторий по импульсу.

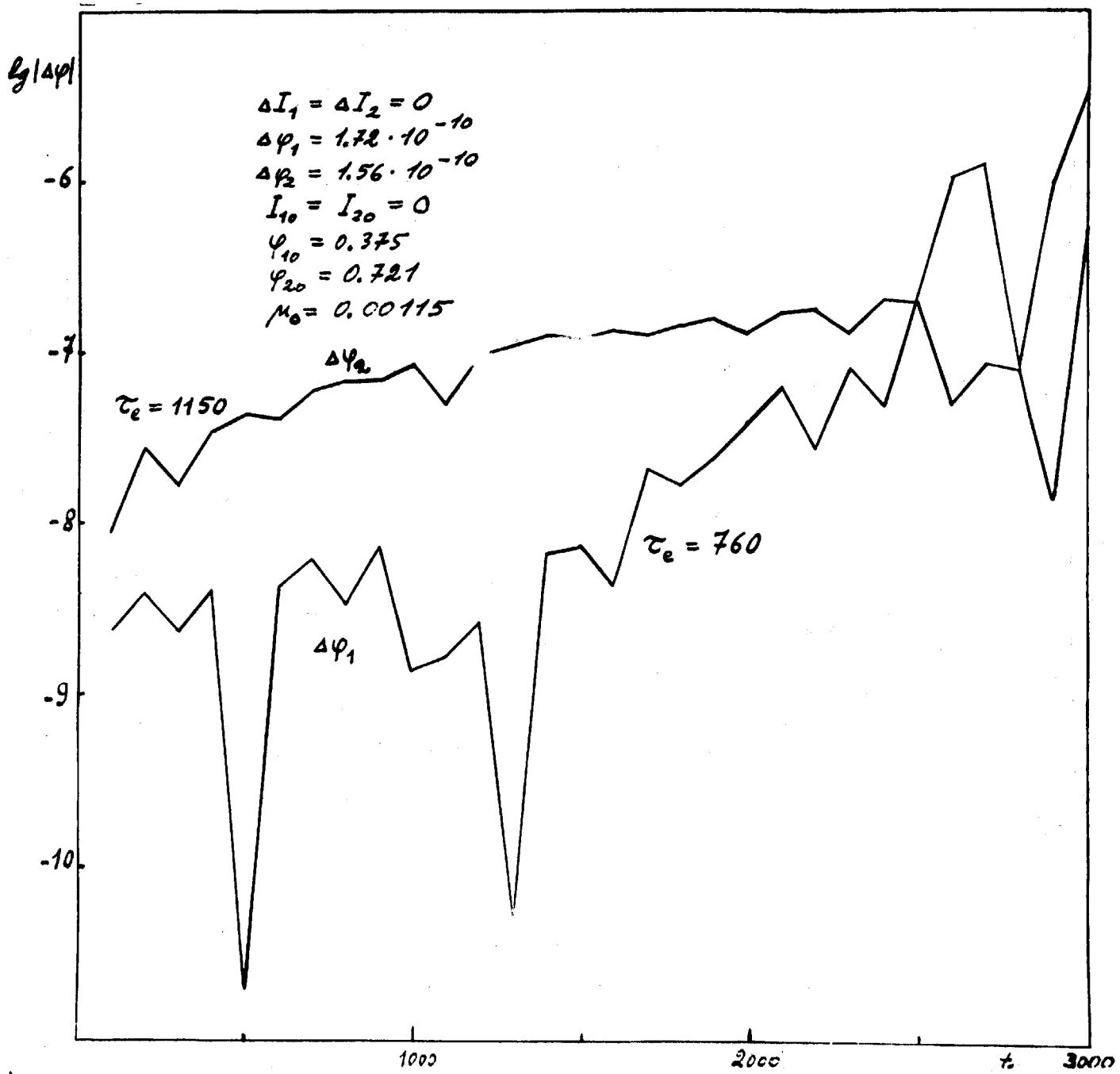


Рис.3.6.10. Локальная неустойчивость движения для случая на рис. 3.6.2 ;
 τ_e - среднее время роста.

Тем не менее вопрос оказывается на самом деле более сложным, чем это может показаться на первый взгляд. На рис.3.6.11 данные рис.3.6.10 отложены в двойном логарифмическом масштабе и не противоречат (особенно $\Delta\varphi_2$) линейному разбеганию траекторий. Последнее же может быть объяснено за счёт простого сдвига частоты нелинейных колебаний.

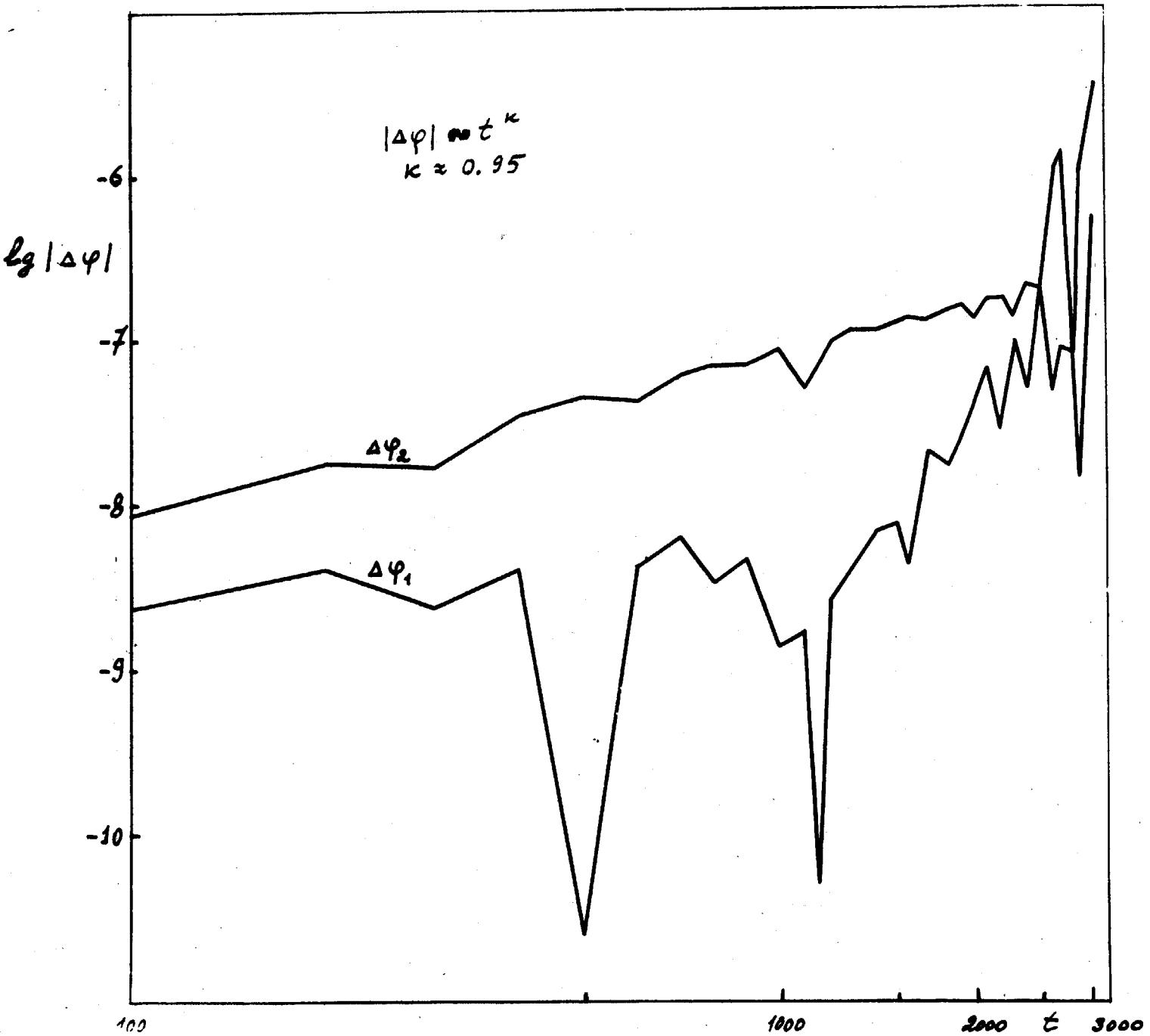


Рис.3.6.11. То же, что и на рис.3.6.10, но в двойном логарифмическом масштабе.

Очевидно, что выбранный интервал $t = 3000$ слишком мал для сколько-нибудь надежных заключений при данном значении возмущения $\mu_0 = 0.00115$. Пример локальной неустойчивости при большем возмущении показан на рис.3.6.12. Экспоненциальный характер разбегания траекторий (в среднем) не вызывает здесь сомнения. Обратим внимание, что закон изменения для всех четырех величин (ΔI_{12} :

$\Delta \varphi_{12}$) оказывается при этом одинаковым. Экспоненциальное разбегание продолжается вплоть до $\Delta I \sim I_0 = 3.4 \times 10^{-3}$. Дальнейшее незначительное увеличение ΔI объясняется, по-видимому, фазовыми колебаниями на резонансах связи.

Для слабой неустойчивости ($\mu_0 = 0.00115$) были проведены дополнительные измерения локальной устойчивости при различных начальных условиях в интервале:

$0.5 < \varphi_{0i} < 0.75$ ($I_{0i} = 0$) и $t = 10^5$. В 11 случаях из 26 наблюдалась чётко выраженная локальная неустойчивость. Пример неустойчивости приведен на рис.3.6.13, где $\Delta \equiv \Delta I$. Разность ΔI увеличивается более чем на 10 порядков и достигает $\Delta_{\max} \sim 10^{-3}$ (начальный сдвиг траекторий $\Delta I \sim \Delta \varphi \sim 10^{-14}$).

Энтропия в этом случае равна $h \approx 2.5 \times 10^{-4}$, т.е. в 4 раза меньше, чем на рис.3.6.10.

На рис.3.6.14 показан пример траектории, которая интерпретировалась как устойчивая. Несмотря на большой разброс точек неэкспоненциальный характер зависимости $\Delta I(t)$ виден достаточно хорошо. Кроме того, в противоположность рис.3.6.13, здесь явно присутствует регулярность движения (сильные периодические выбросы точек вверх), несовместимая со стохастичностью. Однако особенно четкое разделение устойчивых и неустойчивых случаев получается по максимальному значению Δ в конце счета. Так на рис. 3.6.14 конечное значение $\Delta I \approx 3 \cdot 10^{-11}$, т.е. отличается более чем на 7 порядков от неустойчивого случая на рис. 3.6.13. Такое четкое разделение всегда может быть получено, если только время счёта существенно превышает характерное время развития неустойчивости: $ht \gg 1$.

Сводные данные по локальной неустойчивости представлены в таблице 3.6.1. Номера в первом столбце показывают последовательность счёта при случайному выборе $\varphi_{10}, \varphi_{20}$. Все неустойчивые случаи собраны в конце таблицы в порядке убывания

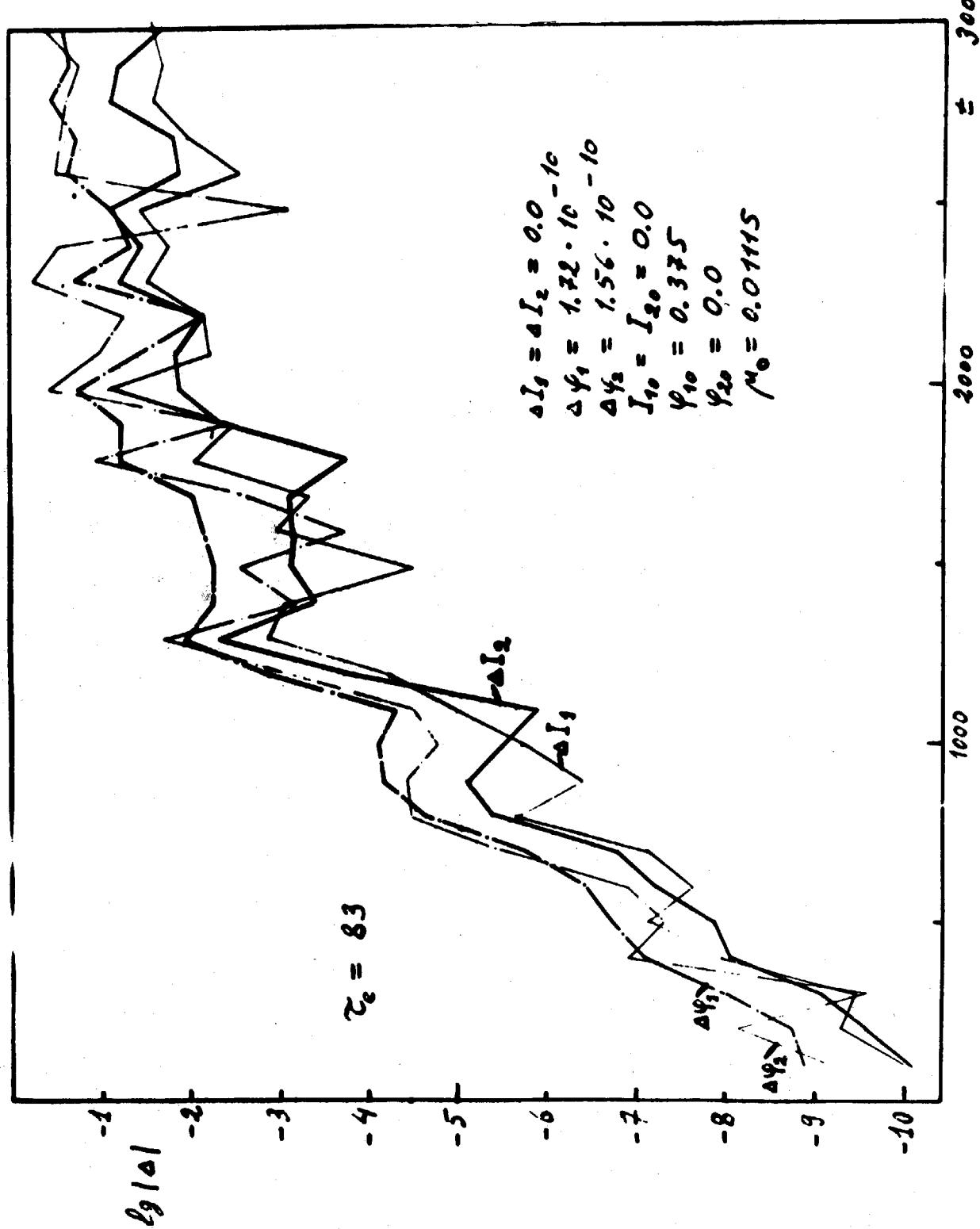


Рис.3.6.12. Локальная неустойчивость движения для модели (3.6.1); Σ_e - среднее время роста; $\mu_0 \approx 0.011$.

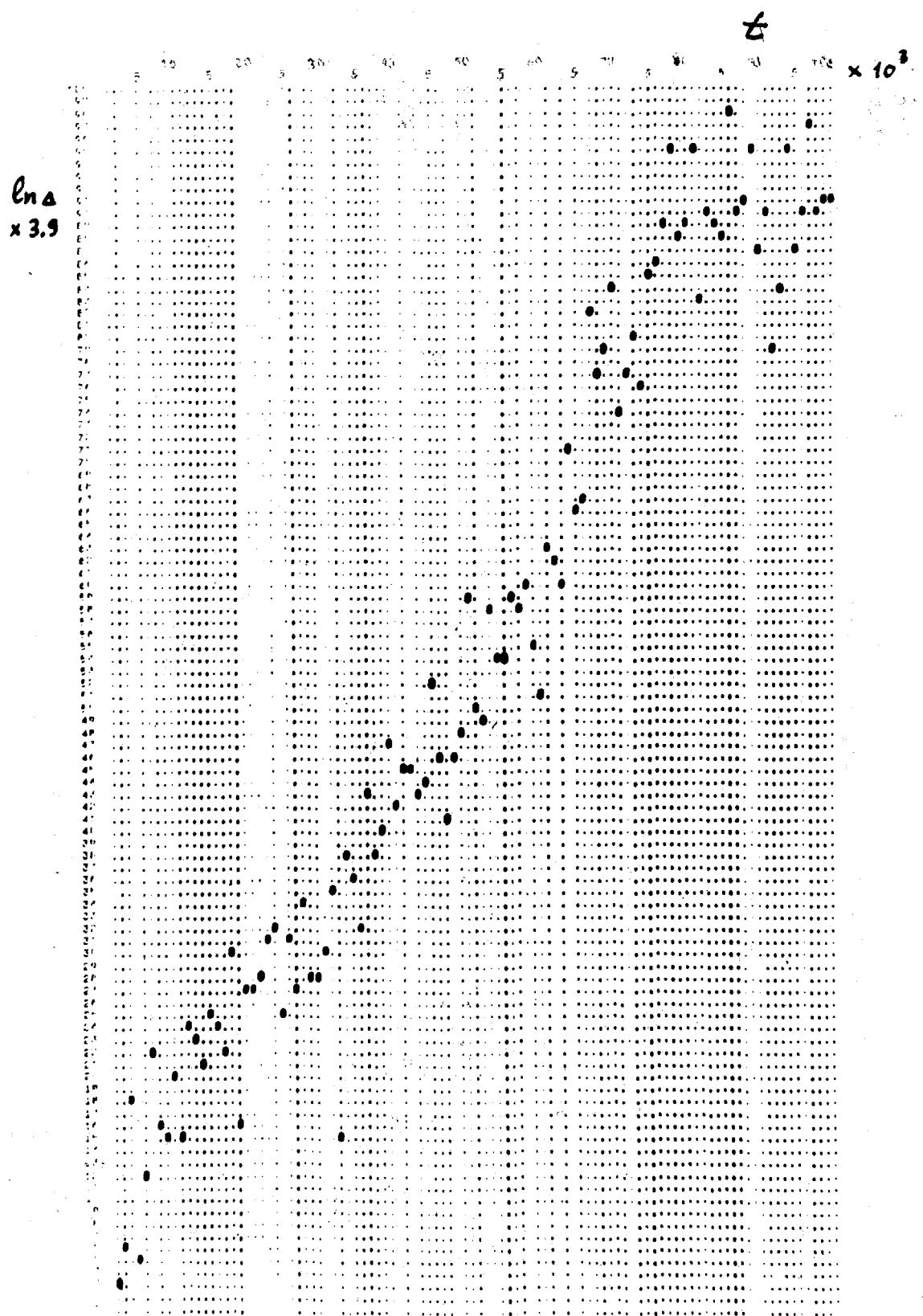


Рис.3.6.13. Локальная неустойчивость для случая на рис.3.6.2. кроме: $\varphi_{1o} \approx 0.555$:
 $\varphi_{2o} \approx 0.745$; $\Delta \equiv \Delta I_1$: движение неустойчиво.

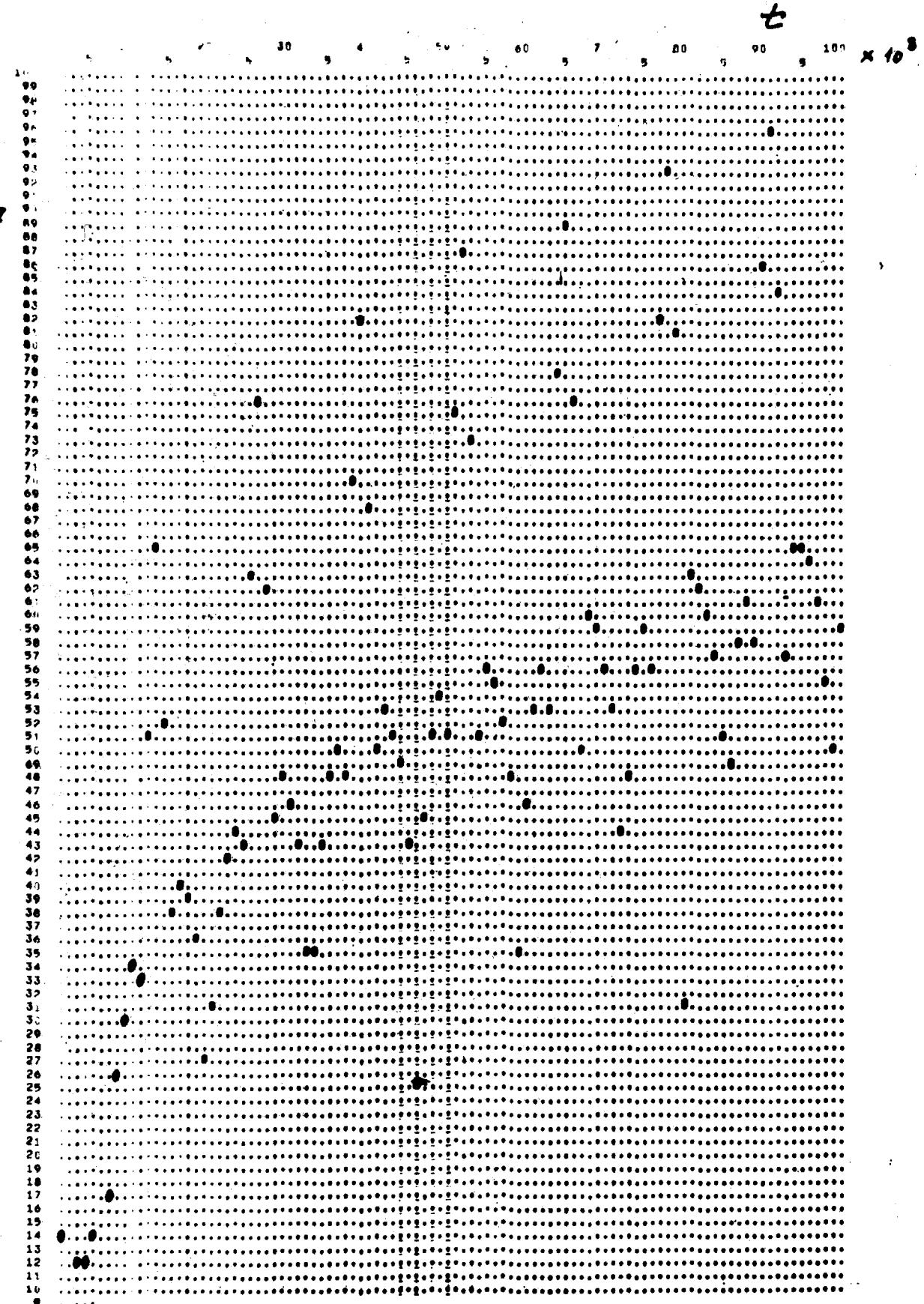


Рис.3.6.14. То же, что и на рис.3.6.13, кроме: $\varphi_{10} \approx 0.670$; $\varphi_{20} \approx 0.640$;
движение устойчиво.

щей энтропии (приведены средние значения энтропии по двум импульсам и двум fazam). Значения энтропии явно разбиваются на 5 групп, как показано в таблице. В последнем столбце даны средние значения энтропии по группам. Различные группы соответствуют, по-видимому, резонансам различных гармоник. Разделение резонансов по величине показывает, что перекрытие их ^{чрезмерно} значительное. Этот вывод подтверждается также величиной относительной доли неустойчивых начальных условий, которая равна согласно данным таблицы: $\delta = 11/26 \approx 43\%$.

Таблица 3.6.1 еще раз иллюстрирует четкое разделение устойчивых и неустойчивых случаев по значениям ΔI_{\max} и, следовательно, применимость метода исследования локальной неустойчивости. Интересно отметить, что для неустойчивых случаев $\Delta I_{\max} \sim 10^{-1} \sim I$, т.е. экспоненциальное разбегание траекторий захватывает почти всю область движения системы^{x)}. Это означает, в частности, что собственно диффузия здесь практически отсутствует (для обмена энергией между осцилляторами), так как размах фазовых колебаний на сильных резонансах связи сравним с полным интервалом диффузии.

К сожалению, имеющиеся экспериментальные данные не позволяют однозначно связать обнаруженную слабую неустойчивость с диффузией Арнольда. Оценки скорости диффузии (§ 2.12) являются слишком неопределенными, хотя и не противоречат экспериментальным данным. Покажем это, воспользовавшись оценкой (2.12.29, 29а). В качестве разрушаемых выберем резонансы связи, а в качестве разрушающих — внешние резонансы. Номер гармоники последних определяется из (3.6.7, 4) и равен (2.12.23):

$$\bar{n} = \frac{n}{2} \approx \frac{4\sqrt{5}}{\varphi_0^4} \quad (3.6.8)$$

Остальные гармоники значительно меньше, поэтому можно положить $\bar{n} = 1$. Далее, $N = 3$ (частоты двух осцилляторов и внешнего возмущения, см. также § 4.3);

x) Вместе с данными по энтропии в таблице 3.6.1 это приводит к упомянутой выше оценке среднего времени обмена энергией $\sim \langle h \rangle^{-1} \ln I/\delta I_0 \sim 10^{-4}$

Таблица 3.6.1

<i>N</i>	φ_{10}	φ_{20}	<i>I</i>		φ	$\langle h \rangle \times 10^2$
			Δ_{max}	$\langle h \rangle \times 10^2$		
1.	0.711	0.656	$2 \cdot 10^{-10}$		$5 \cdot 10^{-9}$	
2.	0.680	0.618	10^{-11}		$2 \cdot 10^{-8}$	
3.	0.596	0.723	$3 \cdot 10^{-10}$		$3 \cdot 10^{-8}$	
4.	0.649	0.625	$6 \cdot 10^{-11}$		$4 \cdot 10^{-9}$	
5.	0.517	0.615	$5 \cdot 10^{-11}$		$2 \cdot 10^{-9}$	
7.	0.610	0.580	$9 \cdot 10^{-11}$		$6 \cdot 10^{-9}$	
8.	0.672	0.642	$8 \cdot 10^{-11}$		$2 \cdot 10^{-8}$	
11.	0.580	0.588	$3 \cdot 10^{-10}$		$2 \cdot 10^{-8}$	
12.	0.589	0.503	$3 \cdot 10^{-10}$		$5 \cdot 10^{-9}$	
15.	0.601	0.648	$4 \cdot 10^{-11}$		$6 \cdot 10^{-9}$	
17.	0.531	0.726	$2 \cdot 10^{-10}$		10^{-8}	
18.	0.538	0.714	$9 \cdot 10^{-11}$		$2 \cdot 10^{-9}$	
21.	0.670	0.640	$7 \cdot 10^{-11}$		$2 \cdot 10^{-8}$	
23.	0.681	0.606	$5 \cdot 10^{-10}$		$2 \cdot 10^{-8}$	
26.	0.574	0.560	$2 \cdot 10^{-10}$		10^{-8}	
5.	0.587	0.744	$2 \cdot 10^{-1}$	1.2	$9 \cdot 10^{-1}$	1.2
14.	0.516	0.734	$2 \cdot 10^{-1}$	1.2	$9 \cdot 10^{-1}$	1.1
9.	0.744	0.533	10^{-1}	1.2	$9 \cdot 10^{-1}$	0.9
18.	0.750	0.598	10^{-1}	1.0	$9 \cdot 10^{-1}$	1.1
24.	0.628	0.553	$7 \cdot 10^{-2}$	1.0	$9 \cdot 10^{-1}$	1.1
16.	0.682	0.560	$7 \cdot 10^{-2}$	0.9	$9 \cdot 10^{-1}$	0.9
13.	0.522	0.556	$4 \cdot 10^{-2}$	0.54	$9 \cdot 10^{-1}$	0.54
10.	0.535	0.512	$3 \cdot 10^{-2}$	0.33	$9 \cdot 10^{-1}$	0.31
20.	0.747	0.658	$3 \cdot 10^{-1}$	0.15	$9 \cdot 10^{-1}$	0.15
22.	0.554	0.556	$7 \cdot 10^{-2}$	0.13	$9 \cdot 10^{-1}$	0.13
25.	0.555	0.745	$5 \cdot 10^{-2}$	0.025	$7 \cdot 10^{-2}$	0.025

$\varepsilon \sim \mu_0$; $\alpha \sim 1$; $\varphi_0 \approx 0.7$. Ввиду значительной неопределенности в оценке коэффициента диффузии Арнольда мы используем его экспериментальное значение, приведенное выше: $D_\varphi \sim 2 \cdot 10^{-13}$ и оценим с помощью (2.12.29, 29а) неизвестный параметр l_{20} . В результате получаем: $n_0 \approx 4$, что не противоречит ожидаемому $n_0 \sim 10$ (см. начало параграфа).

Тем не менее, нельзя полностью исключить возможность того, что слабая неустойчивость является каким-то сложным одномерным эффектом. В частности, устойчивость движения при $M_0 = 0$ (рис. 3.6.6, 7) также не исключает такой возможности, так как отрицательная энергия связи приводит к увеличению амплитуды колебаний при $M_0 \neq 0$ (3.6.3).

Очевидно, что необходимо дальнейшее более детальное экспериментальное исследование явления. Нам кажется, что уже один единственный случай слабой неустойчивости, который фактически наблюдался, показывает, что проблема в целом является достаточно интересной и важной. Другой случай возможной диффузии Арнольда будет обсуждаться в § 4.4.

ГЛАВА 1У

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Эта, последняя глава настоящей работы посвящена некоторым прикладным вопросам, взятым из самых различных областей механики. Их набор является весьма произвольным и отражает просто текущие успехи в приложении развивающейся теории стохастичности к конкретным задачам. Некоторые из них удалось решить полностью вплоть до практических применений (§§ 4.1, 2, 7), другие - только поставлены (§ 4.3). В некоторых случаях использовались численные эксперименты, которые можно рассматривать также, как дополнительную проверку общей теории (§§ 4.1, 2, 6). Особенно интересными, на наш взгляд, являются вопросы, связанные с диффузией Арнольда в Солнечной системе (§ 4.5), однако, здесь еще очень много неясного.

§ 4.1. Стохастическое ускорение Ферми

Пожалуй, единственное полезное применение стохастичности относится к ускорению частиц. Стохастический метод ускорения обычно связывается с именем Ферми, который предложил один из вариантов такого ускорения для объяснения происхождения космических лучей /99/. Несколько раньше (1948 г.) близкое предложение для обычных (земных) ускорителей было сделано Бурштейном, Векслером и Коломенским /100/. Однако эта работа не была опубликована и оставалась малоизвестной вплоть до 1955 г. /100/. В настоящее время большое количество работ посвящается различным аспектам статистического ускорения в плазме (см., например, обзор Цытовича /101/). Однако один вопрос остается неясным во всех этих работах, фактически он даже не ставится: при каких условиях движение частиц в плазме, ускорителях и т.п. является стохастическим? Всегда ли возможно ускорение Ферми? Выяснение последнего вопроса с помощью численного эксперимента на простейшей одномерной модели было предпринято Уламом /102/ с отрицательным результатом. С точки зрения настоя-

шой работы такой результат является вполне естественным, так как для стохастичности движения необходимо выполнение специальных условий, которые тем жестче, чем проще система. Для упомянутой выше одномерной модели ускорения Ферми вопрос был выяснен совместно с Заславским в работе /103/, к изложению которой мы и переходим. Упомянем для полноты картины, что условия стохастического ускорения в плаэме были выяснены несколько позже Заславским, Сагдеевым и Филоненко /104, 105/.

Как уже говорилось, в работе /102/ исследовался простейший случай ускорения Ферми — движение легкой частицы между двумя плоскопараллельными бесконечно тяжелыми и абсолютно упругими стенками, одна из которых неподвижна, а другая колеблется по определенному заданному закону. Численный расчет движения такой частицы /102/ привел к отрицательному результату: ускорение практически не наблюдалось. Скорость частицы иногда достигала 3 — 4 скоростей стенки и в большинстве случаев была порядка скорости стенки, в то время как согласно механизму Ферми средняя скорость частицы должна неограниченно расти пропорционально времени /99/.

Пусть стена колеблется по "пилюобразному" закону, таким образом, что ее скорость изменяется линейно со временем в течение каждого полупериода. Пусть далее, минимальное расстояние между стенками равно L , а амплитуда колебаний одной из них — a . Тогда движение частицы описывается следующей точной системой разностных уравнений:

$$v_{n+1} = \pm v_n + V(\varphi_n - 1/e) \quad (4.1.1)$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{2} - 2 \frac{v_{n+1}}{V} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{2v_{n+1}}{V}\right)^2 + \frac{4v_{n+1}}{V} \varphi_n} \quad (4.1.2)$$

$$(v_{n+1} > \frac{V\varphi_n}{4})$$

$$\Psi_{n+1} = 1 - \Psi_n + 4 \frac{v_{n+1}}{V}; \quad (v_{n+1} \leq \frac{V}{4}) \quad (4.1.3)$$

$$\Psi_n = \left\{ \Psi_n + \frac{\Psi_n(1-\Psi_n) + l/4a}{4v_{n+1}/V} \right\} \quad (4.1.4)$$

Здесь v_n — скорость частицы после n -го соударения; $V/4$ — амплитуда скорости стенки; Ψ_n — фаза колебаний стенки в момент удара, изменяющаяся от 0 до 1/2 при движении стенки в одном направлении и от 1/2 до 1 при обратном движении. Скобки $\{ \dots \}$ обращают, как обычно, дробную часть аргумента. Знак плюс в (4.1.1) соответствует формуле (4.1.2) на предыдущем шаге, знак минус — формуле (4.1.3).

Как будет видно из дальнейшего интересен случай:

$$l \gg a; \quad v_n \gg V \quad (4.1.5)$$

Тогда система (4.1.1 — 4) принимает вид:

$$v_{n+1} = v_n + V(\Psi_n - 1/2) \quad (4.1.6)$$

$$\Psi_{n+1} \approx \Psi_n \approx \left\{ \Psi_n + \frac{lV}{16a v_{n+1}} \right\}$$

Это преобразование того же типа, что и основная модель (2.1.11). Согласно результатам § 2.4 параметр стохастичности может быть определен из условия:

$$K \approx \frac{d\Psi_{n+1}}{d\Psi_n} - 1 \quad (2.4.4) \text{ и равен:}$$

$$K \approx -\frac{l}{16a} \cdot \left(\frac{V}{v}\right)^2 \quad (4.1.7)$$

откуда граница стохастичности (2.4.7):

$$\frac{v_1}{V} \sim \frac{1}{8} \sqrt{\frac{l}{a}} \quad (4.1.8)$$

Область стохастичности захватывает, таким образом, интервал: $0 \div v_1$. Для получения значительного ускорения ($v >> V$) необходимо, чтобы выполнялось довольно неожиданное условие:

$$a \ll l \quad (4.1.9)$$

При условии $\Delta v/v \sim V/v \ll 1$ кинетическое уравнение имеет вид уравнения

ФПК (§ 2.10):

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} (\mathcal{D}(v) \cdot \frac{\partial f(v, t)}{\partial v}) \quad (4.1.10)$$

где коэффициент диффузии по скорости равен (2.10.12):

$$\mathcal{D}(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle (Av)^2 \rangle}{\Delta t} \approx \frac{1}{48} \cdot \frac{v V^2}{\ell} \quad (4.1.11)$$

В качестве граничного условия в работе /103/ предлагалось использовать условие отсутствия потока на границе стохастичности:

$$\mathcal{D}(v) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=v_1} = 0 \quad (4.1.12)$$

Это условие, конечно, не является точным, так как существует переходная зона, однако, оно даёт возможность получить приближенное решение уравнения (4.1.10). В частности, стационарное распределение $(\frac{\partial f}{\partial t} = 0)$ оказывается просто равномерным: $f(v, t) \rightarrow v_1^{-1}$.

Для проверки степени приближения такого решения точная система разностных уравнений (4.1.1-4) считалась на ЭВМ в течение $N = 10^5$ столкновений при следующих значениях параметров: $a = 1$; $V = 4$; $v_0 = 0$. Для уменьшения эффектов конечного числа разрядов мантиссы величин ℓ и V выбирались в виде набора случайных чисел. Результатом численного эксперимента являлась функция распределения $F(v, t)$, определенная как доля полного времени движения t , проводимого частицей в заданном интервале скорости. Связь между f и F даётся выражением:

$$F(v, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(v, t') dt' \quad (4.1.13)$$

На рис.4.1.1а приведена типичная стационарная функция распределения для $t \gg t_r$, где время релаксации $t_r \sim v_1^2/2\mathcal{D} \sim 24v_1\ell/V^2 \sim 10^6$

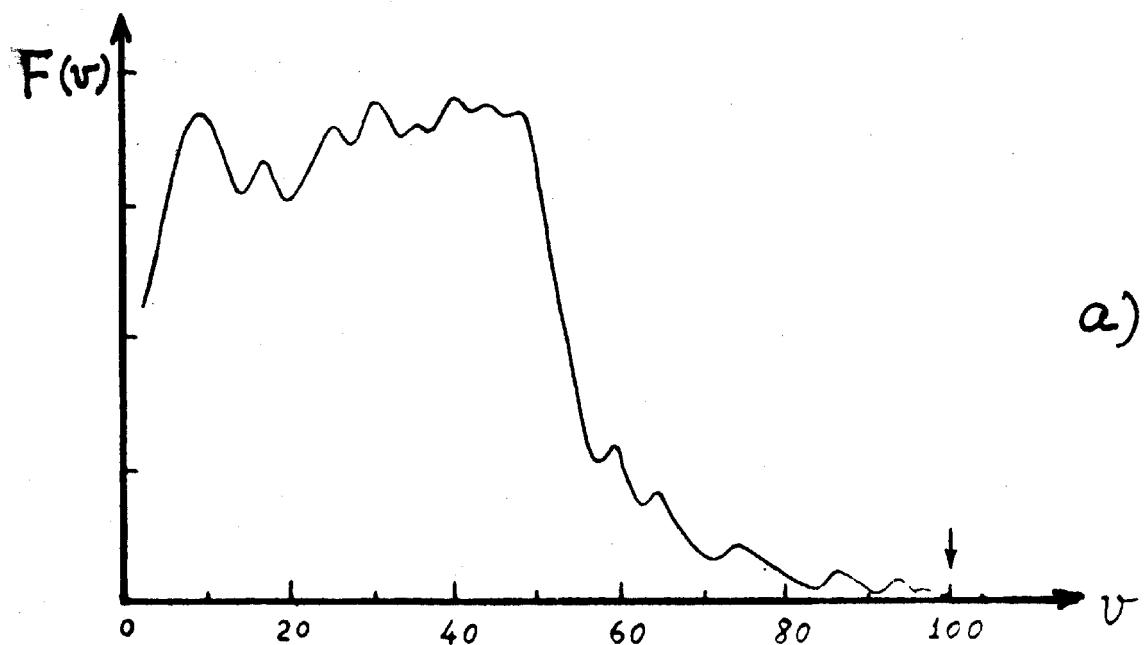
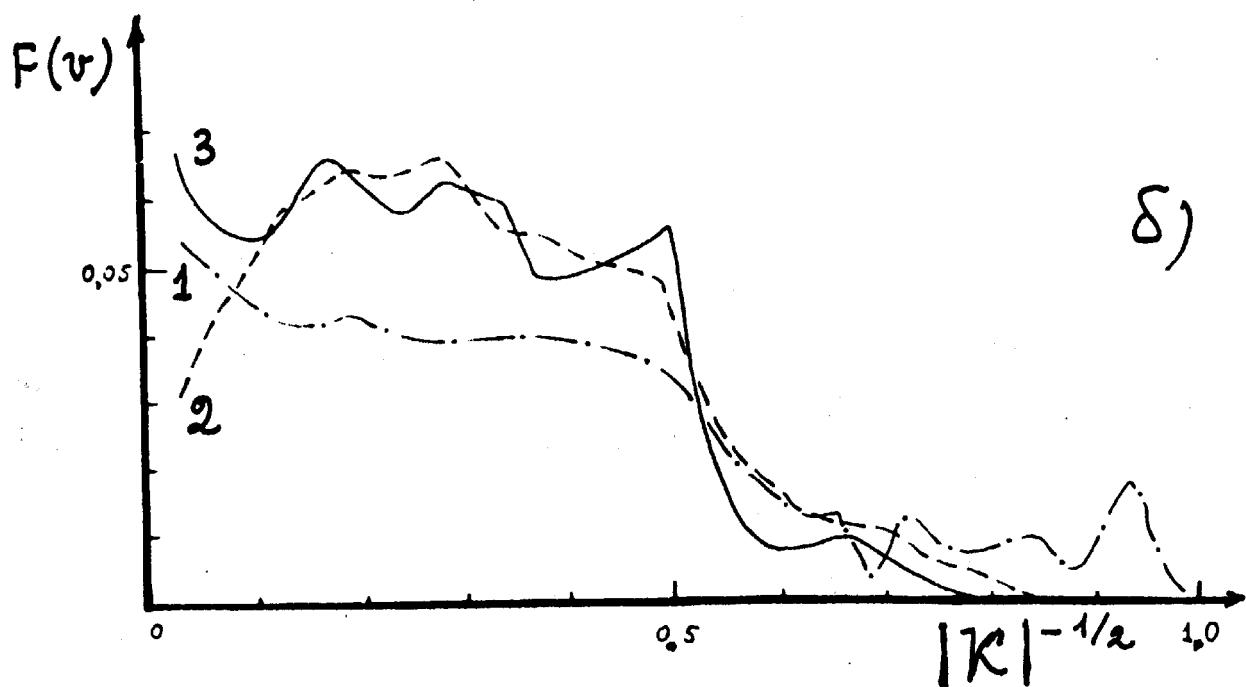


Рис.4.1.1. Функция распределения для одномерного стохастического ускорения Ферми:
 а) скорость частицы v в единицах максимальной скорости стенки ($V = 4$);
 $\ell/a = 10^4$; б) скорость частицы выражена через параметр стохастичности
 K : 1 - $\ell/a = 400$; 2 - $\ell/a = 10^4$; 3 - $\ell/a = 4 \cdot 10^4$.

(для случая на рис.4.1.1а ; $\ell/a = 10^4$; $v_1 \approx 50$), а полное время движения $t \sim \sim N\ell/v_1 \sim 10^8$. По оси абсцисс отложена скорость частицы в единицах максимальной скорости стенки. Стрелкой отмечена максимальная скорость, достигнутая частичей за 10^5 соударений. Функция распределения довольно резко обрывается вблизи границы стохастичности $v_1 \approx 50$ (4.1.8), иллюстрируя точность граничного условия (4.1.12). Флуктуации функции распределения в области стохастичности определяются числом независимых прохождений частицы через всю область ускорения: $n \sim t/t_r$.

Для флуктуаций получаем оценку:

$$\left| \frac{\Delta F}{F} \right| \sim n^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{\ell}{aN}} \quad (4.1.14)$$

При $\ell/a = 10^4$ (рис.4.1.1а) $\Delta F/F \sim 1/3$.

Рис.4.1.1б иллюстрирует выполнение критерия стохастичности $|K|^{-1/2} \sim 0.5$ (4.1.8) для различных ℓ/a . Отметим, что частица проникает довольно далеко (особенно при малых ℓ) вглубь переходной зоны.

Интересный дополнительный эксперимент был произведен Израйлевым. Он исследовал локальную устойчивость преобразования (4.1.1-4) методом возвращения к начальной точке. Иначе говоря, для различных начальных условий просчитывалось $N = 10^4$ соударений вперед и затем, с помощью обратного преобразования, столько же соударений назад. Учитывая траектория должна при этом почти возвращаться в начальную точку. В таблице 4.1.1 приведены некоторые результаты этого эксперимента для случая $\ell/a = 2500$ ($v_1 \approx 25$).

Первое число в каждой клетке (v_0) даёт начальное значение скорости, третье (v_N) — конечное, после $N = 10^4$ соударений в одном направлении, второе (v_{2N}) — после возврата. В таблице представлены 4 области. Первая (I) — широкая устойчивая область при больших скоростях ($v > v_1$) ; четвертая (IV) — широкая стохастическая область ($v < v_1$). Наиболее интересны две узкие области (II , III) на границе стохастичности, одна из которых (III) является устойчивой, а другая (II) — неустойчивой. Это еще раз демонстрирует связь между локальной неустойчивостью

Таблица 4.1.1

	1 устойчивость	11 неустойчивость	111 устойчивость	1У неустойчивость
v_o	100.135814	28.0140973	27.0832487	25.4038922
$v_{2\omega}$	100.135814	78.9256083	27.0832485	78.1138416
v_ω	101.653879	22.2647118	27.9428666	25.3236604
v_o	50.1389432	28.0138973	26.0341874	19.8875432
$v_{2\omega}$	50.1389430	23.8698307	26.0341874	41.5012536
v_ω	49.2779544	32.8259519	27.0211406	19.5240320
v_o	29.0538478	28.0039973	25.4501387	10.1569183
$v_{2\omega}$	28.0538476	34.1166266	25.4501454	18.8937993
v_ω	30.0626340	43.5797423	26.1233959	19.7363839

и стохастичностью, а также сложную структуру переходной зоны (§ 3.3).

Даже для устойчивых траекторий значения v_o и $v_{2\omega}$ совпадают в ряде случаев неполностью, а лишь с относительной точностью $\sim 10^{-8}$. Расхождение определяется, прежде всего, ошибками округления, к которым для преобразования (4.1.1-4) добавляются еще ошибки вычисления квадратного корня. Если считать, что последние того же порядка, что и округление и также являются симметричными, то относительную точность возврата можно оценить посредством (см. § 3.3): $2\Delta_r \cdot \sqrt{\frac{n}{12}} \sim 3 \cdot 10^{-11}$, где $n \sim 10$ — число операций на один шаг преобразования (4.1.1-4); $\Delta_r = 2^{-36}$ и множитель 2 учитывает среднее значение мантиссы (арифметика с плавающей запятой). Даже с учётом грубости последней оценки видно, что фактические ошибки существенно больше. Это косвенно указывает, по-видимому, на какую-то слабую неустойчивость вблизи границы стохастичности. Это становится особенно ясным в послед-

нем случае в области III, где ошибки еще на порядок больше.

Подводя итоги, можно сказать, что в одномерном случае процесс ускорения Ферми существенно зависит от выполнения условий стохастичности.

Если перейти теперь к случаю двух (и большего) числа измерений, то ситуация существенно изменяется. В частности, Синай показал /106/, что при упругом столкновении дисков или шариков всегда имеет место стохастичность. Этот результат непосредственно вытекает из того простого факта, что, как легко показать, в этом случае всегда возникает сильная локальная неустойчивость движения (§ 2.13). Разумеется строгое доказательство стохастичности является значительно более сложным /106/. По-видимому, оно распространяется на общий случай столкновения тел с выпуклой поверхностью. Последнее условие как раз и обеспечивает локальную неустойчивость движения. В то же время наличие вогнутых участков поверхности может привести к появлению областей устойчивости. Простейшим примером может служить модификация рассмотренного выше случая движения частицы между стенками, если сделать хотя бы одну из них вогнутой и рассмотреть многомерную задачу. Ясно, что поперечное движение будет в этом случае устойчивым и, следовательно, граница стохастичности останется, так же, как и для плоских стенок. В случае же выпуклой стенки поперечное движение всегда неустойчиво и граница стохастичности исчезает.

Как уже отмечалось выше, стохастический ускоритель (стохатрон) был предложен в работе /100/. Однако в этой работе предполагалось, что фаза ускоряющего напряжения должна быть случайной, а это не так просто осуществить практически. Мы видим теперь, что это требование в действительности излишне. В этом отношении механизм Ферми /99/ гораздо ближе к идеям настоящей работы, чем процессы, рассмотренные в /100, 101/.

Стochasticеское ускорение на фиксированной частоте было применено впервые, по-видимому, Волосовым и др. для предварительного нагрева плазмы в стеллараторе /107, 108/. Критерий стохастичности для этого случая был получен в работе /107/.

Ниже приводится вывод аналогичного критерия для обычного ускорителя, к которому относилось первоначальное предложение /100/, но работающего на фиксированной частоте ω_0 . В приближении коротких толчков уравнение движения частицы в таком ускорителе можно записать в виде:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + eV_0 \cos \varphi_n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + T\omega_0 \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

где T , \bar{W} - период обращения и полная энергия частицы, V_0 - амплитуда ускоряющего напряжения. Согласно общей теории (§ 2.4) критерий стохастичности определяется соотношением:

$$K_0 = \left| eV_0 \omega_0 \frac{dT}{dW} \right| \gtrsim 4 \quad (4.1.16)$$

Раскрывая обычным образом /5/ выражение для dT/dW , получим оценку для максимальной энергии стохатрона в виде:

$$\frac{W_{\max}}{eV_0} \sim \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \left| \frac{1 - \alpha \gamma^2}{\gamma^2 - 1} \right| \quad (4.1.17)$$

Здесь ω - частота обращения частицы в ускорителе, γ - релятивистский фактор, $\alpha \approx Q^{-2}$ - коэффициент расширения орбиты, Q - число бетатронных колебаний на оборот. Из последнего выражения видно, в частности, что стохастичность всегда отсутствует в районе критической энергии: $\gamma = \alpha^{-1/2} \approx Q$. Однако, вследствие "просачивания" частицы в переходную зону (см., например, рис.4.1.1) возможно более или менее медленное прохождение этой области.

Отметим, для полноты картины, что обычный микротрон /7/ работает как раз на границе стохастичности (4.1.17), так что, например, повышение ускоряющего напряжения неминуемо приведет к переходу его в стохастический режим.

Возвращаясь к стохастическому нагреву плаэмы /107, 108/, отметим, что его эффективность может быть даже выше, чем это следует из простой теории /103,107/. Именно, вместо равномерного распределения по скорости в реальной системе можно ожидать появления максимума плотности вблизи границы стохастичности, т.е. вблизи

максимальной энергии, за счёт захвата частиц в устойчивые области из-за наличия диссипации. Этот эффект, по-видимому, действительно наблюдался в экспериментах группы Волосова.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу высокочастотного нагрева и удержания плазмы в магнитных ловушках. Этот метод становится все более и более популярным в последнее время; в частности, ему была посвящена отдельная секция Третьей Конференции по исследованиям в области физики плазмы и управляемых термоядерных реакций (Новосибирск, 1968; см. также /109/). Поскольку это касается достаточно плотной плазмы переменное поле эквивалентно колеблющейся стенке, так что необходимо учитывать эффекты, связанные с границей стохастичности. С одной стороны, эти эффекты могут приводить к ограничению предельной температуры нагрева. С другой стороны, например, при высокочастотном удержании в магнитных пробах, они могут фактически существенно ухудшать удержание за счёт увеличения продольной скорости частиц.

§ 4.2. Динамика силовых линий магнитного поля в стеллараторе

Целью настоящего параграфа являются некоторые расчёты или, лучше сказать, оценки условий устойчивости движения отдельных частиц в магнитных полях стеллараторного или левитронного типа.

Обычно можно считать, что магнитный момент частицы сохраняется с достаточной степенью точности (см. § 4.4), так что речь идет об устойчивости дрейфовых траекторий частицы. Ограничивааясь, далее, областью достаточно удаленной от сепаратрисы, можно пренебречь для подавляющего большинства пролетных частиц отклонением дрейфовых траекторий от силовых линий магнитного поля /110/. Таким образом, необходимо исследовать, как это обычно и делается, устойчивость силовых линий, которые можно рассматривать как некоторую динамическую систему, а именно, осциллятор, поскольку основной особенностью стеллараторных полей является конечная скорость вра-

шения (ω) силовых линий в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Этот осциллятор находится под действием различных возмущений (неточности изготовления, рэйстреки, тороидальность и др.), с периодом, равным периметру стелларатора. При этом основную опасность представляют резонансы. Для борьбы с ними возможны два пути.

Во-первых, можно выбрать "частоту" ω вдали от всех резонансных значений, как это обычно делается в ускорителях заряженных частиц. Для этого необходимо, однако, чтобы осциллятор был почти линейным, т.е. чтобы "частота" ω слабо зависела от радиуса вращения (r), и вся интересующая нас область стелларатора находилась вне резонансов. Такие стеллараторные поля возможны (например, двухзаходный винт с большим шагом), но, по-видимому, нежелательны хотя бы потому, что при этом значительно уменьшается размер сепаратрисы^{x)}.

Другой известный способ борьбы с резонансами состоит в том, чтобы сделать осциллятор нелинейным, т.е. чтобы его "частота" зависела от радиуса вращения (амплитуды): $\omega = \omega(r)$.

Из многочисленных работ по исследованию резонансных возмущений в стеллараторе (см., например /110, 112, 113/) может создаваться впечатление, что увеличение нелинейности ($d\omega/dr$) всегда ведет к повышению устойчивости. Подобные надежды существовали и на начальной стадии разработки сильнофокусирующих ускорителей. В действительности, однако, дело обстоит иначе. Хотя нелинейность и стабилизирует резонансы (§ 1.6) она приводит одновременно к появлению новых неустойчивостей. Наиболее опасной из них является, по-видимому, стохастическая неустойчивость (гл. 11). Насколько нам известно, применительно к стелларатору такого рода стохастические процессы впервые изучались Сагдеевым и Заславским /46/. Ниже мы

x) Заметим, впрочем, что двухзаходное поле с малым шагом даёт возможность устранить правильным выбором значения $\omega(0)$ наиболее опасный центральный резонанс /111/ (см. примечание на стр. 239).

рассмотрим более подробно разрушение внутренней области магнитного поля стелларатора, следуя работе /89/.

В качестве невозмущенной системы выберем прямое винтовое μ - заходное магнитное поле, создаваемое 2μ проводниками с током J в каждом, навитыми с шагом $2\pi/\alpha$ на поверхность цилиндра радиуса a . ТорOIDальность реального стелларатора отнесем к возмущениям. Уравнения "движения" силовых линий примем в виде /115/:

$$\frac{ds}{dz} = 2\epsilon n s^{\frac{n}{2}} \cdot \sin \theta; \quad \theta = \varphi - \alpha z; \quad s = \left(\frac{r}{a}\right)^2; \quad (4.2.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \epsilon n s^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos \theta; \quad \epsilon n = \frac{4J}{c e H_z}$$

где H_z - напряженность продольного поля, r , φ , z - цилиндрические координаты.

Для справедливости (4.2.1) необходимо, вообще говоря, чтобы обе величины ϵn , $s \ll 1$. Однако оценки по порядку величины будут справедливы и в более широкой области, фактически везде за исключением непосредственной окрестности сепаратрисы. То же замечание относится и к другим сильным неравенствам. В качестве переменной выбрана величина $s = (r/a)^2$, канонически сопряженная углу φ . Следуя работе /115/ мы вводим безразмерную "частоту" ω по формуле $\bar{\varphi} = \alpha \omega z$, где $\bar{\varphi}$ - средний угол прокручивания.

Возникновение среднего угла прокручивания силовых линий, который и является основным фактором устойчивости стеллараторных полей, вполне аналогично возникновению бетатронных колебаний в ускорителе с переменным градиентом или устойчивости маятника Капицы /172, 173/.

Примем, что возмущения (постоянные во времени) описываются такими же уравнениями, что и основное поле (4.2.1), но со своими параметрами ϵ_1 , n_1 , α_1 . Предположим далее, что возмущение представляет собой набор коротких, некоррелированных между собой "толчков", т.е. параметры ϵ_1 , n_1 , α_1 , постоянны на длине ℓ (длина корреляции), удовлетворяющей неравенству:

$$a \ll \ell \ll (n_1 \alpha_1)^{-1} \quad (4.2.2)$$

Аналогичная постановка задачи имеет место, например, при расчётах устойчивости в ускорителе с жесткой фокусировкой /5/. Вследствие замкнутости стелларатора любое возмущение будет периодично с периодом L (периметр стелларатора).

Рассмотрим вначале один единственный "толчок" в точке $Z = 0$. Из уравнений (4.2.1) при условии (4.2.2) находим:

$$\begin{aligned}\Delta S &= 2\varepsilon_1 n_1 S^{\frac{n_1}{2}} \ell \sin n_1 \varphi \\ \Delta \varphi &= \varepsilon_1 n_1 S^{\frac{n_1}{2}-1} \ell \cos n_1 \varphi\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

Первое уравнение определяет смещение магнитной поверхности, зависящее от угла φ в месте возмущения. Последний изменяется под действием возмущения (второе уравнение (4.2.3)), а также в результате вращения с "частотой" ω на величину $\alpha L \omega$ (за период). В результате действие рассматриваемого возмущения можно описать с помощью следующей системы разностных уравнений, аналогичных основной модели (§ 2.1):

$$\begin{aligned}s_{N+1} &= s_N \left(1 + \frac{2\tilde{\zeta}_N}{n_1} \sin \varphi_N\right) \\ \varphi_{N+1} &= \varphi_N + \alpha L n_1 \omega (s_{N+1}) + \tilde{\zeta}_N \cos \varphi_N \\ \varphi_N &= n_1 \varphi_N; \quad \tilde{\zeta}_N = \ell \varepsilon_1 n_1^2 s_N^{\frac{n_1}{2}-1}\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

При определенных условиях (см. § 2.2) разностные уравнения (4.2.4) могут быть заменены дифференциальными:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \frac{2}{n_1} \tilde{\zeta} s \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \alpha L_1 (\omega - \omega_p) + \tilde{\zeta} \cos \varphi\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

Здесь $L_1 = n_1 L$; $\omega_p = 2\pi\bar{n}/\alpha L_1$ ($\bar{n} = 0, 1, \dots$) /110/-резонансное значение "частоты" ω ^{x)}; точка означает дифференцирование по "времени" N . Всюду в дальнейшем s означает параметр магнитной поверхности, т.е. мы пренебрегаем малыми отклонениями её от цилиндра /115/. Фазовая частота колебаний (4.2.5) равна:

x) Резонансы высших приближений: $\omega^{(p)} = (2\pi\bar{n}/\alpha L \pm p\pi)/(n_1 \pm p n)$; $p = 1, 2, \dots$ /113/ содержат дополнительный малый множитель вида $[(\varepsilon/\alpha) \cdot s^{n/2-1}]^p$ и могут быть существенны лишь вблизи сепаратрисы.

$$\Omega_\phi^2 = 2\alpha L s \omega' \xi; \quad \omega' \equiv \frac{d\omega(s)}{ds} \quad (4.2.6)$$

Заметим, что частота Ω_ϕ измеряется здесь в единицах $(\alpha L)^{-1}$.

Оценим сначала стабилизацию резонансов нелинейностью аналогично тому, как это было сделано в § 1.6. В линейном случае ($\omega' = \Omega_\phi = 0$) система (4.2.5) определяет резонансные (неустойчивые) полосы шириной:

$$\alpha L_1 (\Delta\omega)_1 = 2 \xi \quad (4.2.7)$$

В то же время нелинейная ширина резонанса (размер сепаратрисы) равна:

$\alpha L_1 (\Delta\omega)_H \sim \Omega_\phi$. Согласно § 1.6 условие стабилизации можно записать в виде: $(\Delta\omega)_H \gtrsim (\Delta\omega)_1$, или (в квадрате):

$$\xi \lesssim \frac{\alpha L s \omega'}{2} = \frac{n-2}{2} \alpha L \omega = \frac{n-2}{2} \cdot \bar{\varphi}_L \quad (4.2.8)$$

где $\bar{\varphi}_L = \alpha L \omega$ полный угол прокручивания силовой линии при обходе стеллара-тора, и мы использовали соотношение: $\omega_s \gg s^{n-2}$ /115/.

Параметр стохастичности для системы (4.2.5) равен:

$$K = 2\alpha L s \omega' \xi \cos \varphi = \Omega_\phi^2 \cos \varphi \quad (4.2.9)$$

Границу стохастичности определим из условия: $K_o = \Omega_\phi^2 = 4$. Такой выбор границы подтверждается, в частности, результатами численного счёта, приведенными в предыдущем параграфе (рис. 4.1.1). Условие устойчивости движения принимает, таким образом, вид:

$$\xi \lesssim \frac{2}{\alpha L s \omega'} = \frac{2}{(n-2) \bar{\varphi}_L} \quad (4.2.10)$$

Последнее выражение является в точности обратным к (4.2.8). Это значит, что допустимое возмущение проходит через максимум в районе:

$$\bar{\varphi}_L = \frac{2}{n-2} \sim 1; \quad \xi_{\max} \sim 1 \quad (4.2.11)$$

Приведенные выше формулы применимы непосредственно лишь при $n > 2$.

Для двухзаходного поля нужно положить /115/: $(n-2) \bar{\varphi}_L \rightarrow 4 \bar{\varphi}_L$ - раз-

х) Условие стабилизации резонанса в центре стелларатора ($\omega_p = 0$) имеет несколько иной вид: $\xi \leq \alpha L_1 \omega = n_1 \bar{\varphi}_L$. Этот резонанс особенно опасен, так как приводит к разрушению области размером $\Gamma \gg \varepsilon_1^{1/(2n-3)}$ (при $n_1 = 1$), в то время как для периферических резонансов (4.2.8) размер разрушенной области $\Delta\Gamma \gg \sqrt{\varepsilon_1}$.

ность углов прокручивания на оси стелларатора и на интересующем нас радиусе r .

Если нарушено условие нелинейной стабилизации резонанса (4.2.8), силовая линия уходит на стенку за время (число оборотов):

$$N_r \sim \frac{n_1}{\zeta} \quad (4.2.12)$$

В стохастической области, когда нарушено условие (4.2.10), коэффициент диффузии

$$\mathcal{D} \sim (\zeta s/n_1)^2, \text{ а время "жизни" силовой линии есть:}$$

$$N_s \sim \frac{s^2}{\mathcal{D}} \sim \left(\frac{n_1}{\zeta}\right)^2 \sim N_r^2 \quad (4.2.13)$$

Полученные оценки перестают быть справедливыми в непосредственной окрестности сепаратрисы, где, в частности, играют роль высшие гармоники ($k\omega$). Эта задача была рассмотрена Заславским, Сагдеевым и Филоненко /38/. Однако, полученнное ими решение не было доведено до конца, а именно, не была раскрыта зависимость $d\omega/dI$ от ω . В § 2.6 мы видели, что при весьма общих условиях поведение системы вблизи сепаратрисы является универсальным и описывается выражениями (2.6.7, 8). Из (2.6.8) вытекает, что пространственная ширина стохастического слоя в стеллараторе, пропорциональная энергетической ширине, всегда мала и совершенно несущественна в смысле ограничения устойчивой области. Интересно отметить, что ширина этого стохастического слоя не экспоненциально мала, как в случае нелинейного резонанса (§ 2.6), а просто пропорциональна малому параметру возмущения. Эта особенность была обнаружена еще Мельниковым /37/. Объяснение состоит в том, что в случае стелларатора частота возмущений, например, за счёт тороидальности, $\sim \omega$, тогда как разрушение сепаратрисы резонанса вдали от границы стохастичности происходит обычно под действием высокочастотного возмущения.

Ширина стохастического слоя по частоте (2.6.7) всегда велика и поэтому надежды на использование больших углов прокручивания в непосредственной окрестности сепаратрисы стелларатора оказываются неосуществимыми. На рис.4.2.1 представлены результаты численного счёта из работы Гибсона /116/ (тороидальное возмущение). В данном случае $\Omega_c \gg \varphi_0 - \varphi_s$, где φ_0 ($\gg \Omega_f$) — максимальный

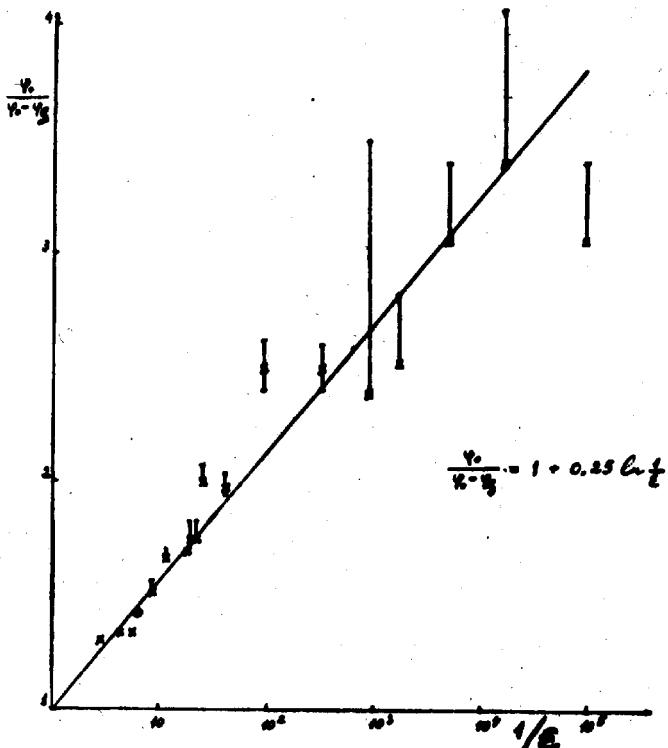


Рис.4.2.1.

Потеря угла прокручивания магнитной силовой линии в зависимости от отношения радиусов стелларатора

$\epsilon = r/R$ (тороидальное возмущение); φ_0 — максимальный угол прокручивания на сепаратрисе;

φ_s — угол прокручивания на краю стохастического слоя.

угол прокручивания на сепаратрисе, а φ_s — угол прокручивания на границе стохастичности. Уравнение интерполяционной прямой дано на рис.4.2.1, а ожидаемая зависимость имеет вид (2.6.7):

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - \varphi_s} = 1 + \frac{\Omega_\phi}{\pi \Omega_1} \cdot \ln \frac{1}{\epsilon} + \frac{\Omega_\phi}{\pi \Omega_1} \cdot \ln \frac{\Omega_1}{\Omega_\phi} \quad (4.2.14)$$

Из данных на рис.4.2.1 получаем: $\Omega_1/\Omega_\phi \approx 1.28$, откуда последнее слагаемое ≈ 0.06 , что нельзя считать серьезным расхождением с интерполяционной прямой.

Стохастическая неустойчивость силовых линий может быть использована для создания так называемой ловушки Скорнякова /112/. Особенностью этой ловушки является область "турбулентного движения" силовых линий, в которой близкие вначале линии быстро расходятся друг от друга на значительные расстояния. Именно таким свойством и обладает стохастическая неустойчивость. Смысл введения такой "турбулентной" области состоит в надежде, что в ней будет затруднено развитие плазменных неустойчивостей. Действительно, возникшие в плазме пространственные неоднородности (флуктуации), двигаясь вдоль быстро расходящихся силовых линий будут

растягиваться и перемешиваться, что эквивалентно некоторому затуханию. Трудность создания ловушки Скорнякова состоит в том, что турбулентная область должна быть окружена со всех сторон надежным "ламинарным" слоем регулярных магнитных поверхностей для обеспечения термоизоляции. В частности, стохастическая неустойчивость, рассмотренная в предыдущем параграфе, совершенно непригодна для этой цели, так как турбулентная область простирается до сепаратрисы.

Один из возможных методов создания "турбулентного" слоя в стеллараторе с помощью дополнительной короткой "резонансной" обмотки описан в работе /89/.

Здесь мы упомянем два других метода.

Первый из них был предложен Мельниковым и не требует вообще никаких дополнительных устройств. Он основан на том, что сепаратриса центрального резонанса $\omega = 0$ (который всегда имеет место для $n > 2$, см. примечание на стр. 239) разрушается тороидальным возмущением, что автоматически приводит к образованию стохастического слоя. Ширина слоя зависит от соотношения частот возмущения ($\omega_1 = 1$ для тороидального возмущения /115/) и фазовых колебаний Ω_φ (4.2.6).

Для центрального резонанса частоту Ω_φ можно оценить также из соотношения: $\Omega_\varphi \sim s/s \sim 2\pi/n_1 \sim \frac{1}{\lambda}$, так как $\Delta s \sim s$ и $\varphi \sim 1$. Эта оценка совпадает по порядку величины с (4.2.6) на краю резонанса: $\alpha L, \omega \sim \frac{1}{\lambda}$ (см. выше). Переход к безразмерной "частоте" осуществляется путем преобразования:

$\Omega_\varphi \rightarrow \Omega_\varphi / \alpha L$. Откуда:

$$\frac{\omega_1}{\Omega_\varphi} \sim \frac{\alpha L}{\lambda} \sim \omega^{-1} \quad (4.2.15)$$

В последней оценке мы использовали вышеприведенное условие $\lambda \sim \alpha L, \omega$ для размера центрального резонанса ($n_1 \sim 1$). Так как желательно, чтобы $\lambda \ll 1$, то большая ширина стохастического слоя, соответствующая условию $\omega_1 \leq \Omega_\varphi$, возможна лишь при очень малом αL , которое приводит, в частности, к "разрыву" поля при обходе вокруг стелларатора. Для непрерывности поля необходимо, чтобы $\alpha L \geq 2\pi/n_1 \sim 1$.

Второй метод создания "турбулентной" зоны основан на разрушении центрально-го резонанса специальной обмоткой, наклон которой (α_1) совпадает со средним наклоном силовой линии на краю резонанса: $\alpha_1 \approx \alpha \omega$. Полный угол поворота дополнительной обмотки при этом равен: $\alpha_1 L \approx \alpha \omega L \sim \frac{3}{4} \ll 1$, так что опять возникают трудности с непрерывностью поля, но уже только дополнительной обмотки.

Энтропия в "турбулентной" области, характеризующая скорость затухания неустойчивости /89/, будет порядка (на единицу τ , играющего у нас роль времени):

$$h \sim \alpha \omega \sim \frac{3}{4} \quad (4.2.16)$$

Это значение меньше (при $\frac{3}{4} < 1$), чем в методе, описанном в работе /89/, где $h = (\ln \alpha_f^2) / L \sim L^{-1}$, если исправить ошибку в формуле (15) этой работы.

В настоящее время возможность стабилизации плазменных неустойчивостей в ловушке Скорнякова остается весьма проблематичной. Главная трудность здесь связана, по-видимому, с границей между "турбулентной" и "ламинарной" областями, где могут возникать большие градиенты плотности плазмы, которые облегчают возникновение плазменных неустойчивостей. Тем не менее, ввиду простоты дополнительных устройств для создания "турбулентного" слоя представляется целесообразным провести соответствующий эксперимент.

§ 4.3. Диффузия Арнольда при взаимодействии встречных пучков

Мы рассмотрим ниже лишь наиболее простой случай — так называемое слабо-сильное взаимодействие, когда можно пренебречь влиянием слабого пучка на сильный. Это обычно имеет место для электрон-позитронных встречных пучков и, по-видимому, в еще большей степени будет справедливо для протон-антипротонных пучков^{x)}. Слабо-сильное взаимодействие сводится фактически к взаимодействию одиночной части-

x) Описание методики встречных пучков см. в /80/.

цы со встречным сгустком. Удобная и вполне приемлемая для наших оценок модель такого взаимодействия предложена в работе /13/.

Для протонных и, особенно, антипротонных накопителей даже очень слабая диффузия может оказаться существенной, так как в естественных условиях затухание колебаний здесь полностью отсутствует, а необходимое время жизни составляет несколько часов /125/. Недавно Будкер предложил ввести искусственное охлаждение протонов с помощью сопутствующего электронного пучка /126/, в этом случае все будет зависеть от фактически достигнутого времени затухания.

Интенсивность взаимодействия удобно характеризовать сдвигом частоты малых (линейных) бетатронных колебаний ($\Delta\nu$); в качестве малого безразмерного параметра выберем $\xi = \Delta\nu/\nu_0$. При амплитуде колебаний порядка размера сгустка нелинейность достигает максимума, равного: $\alpha \sim \xi$ /13/.

Условие резонанса имеет вид:

$$n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + p\nu_0 = 0 \quad (4.3.1)$$

где все частоты даются в единицах частоты обращения ω_0 ; n_1, n_2, p - целые; ν_0 - частота внешнего возмущения, которое мы будем считать δ - образным (любые p). Учитывая, что в данном случае $m = 2$, можем записать амплитуду гармоники возмущения в виде (см. (2.12.23)):

$$\xi_n \sim \xi \cdot e^{-n/n_0} \quad (4.3.2)$$

Параметр n_0 зависит от формы пучка и амплитуды колебаний a . В частности, для гауссовской формы пучка $n_0 \sim a/r_0$, где r_0 - поперечный размер пучка /13/. Введем еще безразмерный параметр связи между бетатронными колебаниями β^2 , который в некоторых случаях может быть очень малым /125/.

Плотность резонансов можно оценить аналогично тому, как это было сделано в § 2.12, принимая $N=3$, поскольку внешнее возмущение, как мы предположили, имеет много гармоник. Кроме того плотность резонансов должна быть пропорциональна постоянной частоте внешнего возмущения ν_0 . В результате получаем из (2.12.27):

$$\Delta_n \sim \frac{\nu_0}{n^3} \quad (4.3.3)$$

Пример системы резонансов по четвертую гармонику включительно показан на рис.

4.3.1. Видно, что плотность резонансов очень неравномерна. Этот эффект может быть включен в параметр ν_0 (4.3.3).

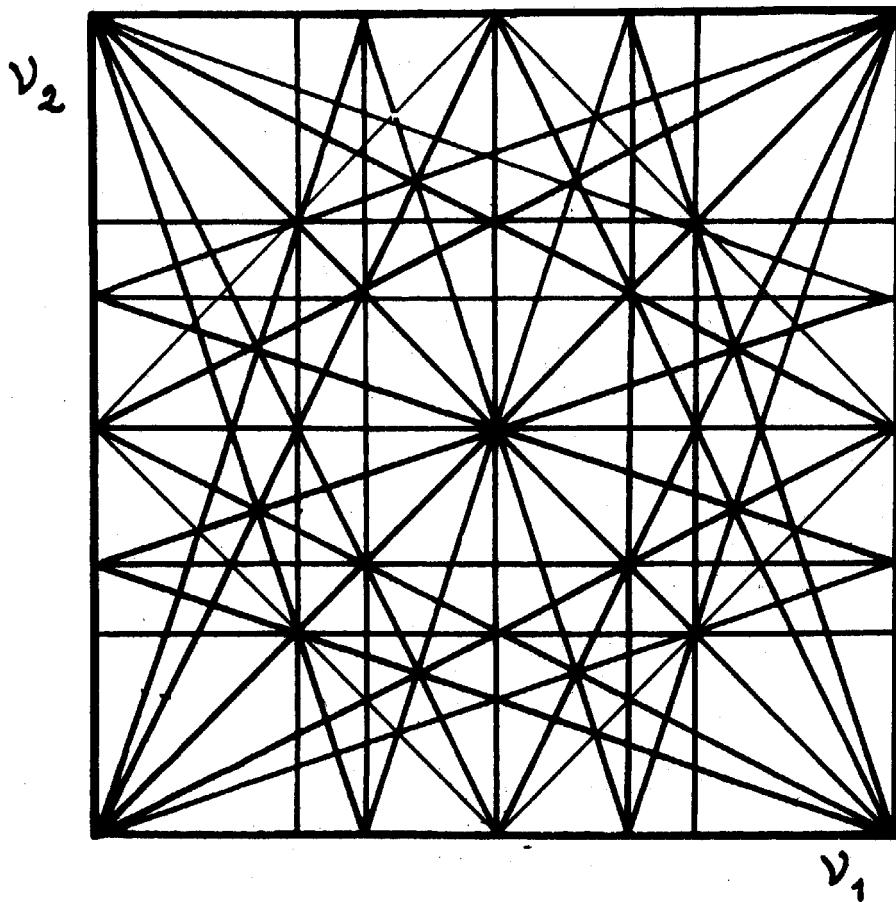


Рис. 4.3.1

Система резонансов
 $n_1 v_1 + n_2 v_2 +$
 $+ \rho v_0 = 0$ для $v_0 = 1$;
 $|n_1| + |n_2| \leq 4$;
 ρ - любое; всего 40 различных резонансов.

Оценим, прежде всего, границу стохастичности, которая определяется перекрытием основных резонансов ($n \leq n_0$). Воспользуемся выражением (2.12.29а), в котором положим: $\epsilon \rightarrow \epsilon \beta^2$ (большинство резонансов являются резонансами связи); получаем:

$$\epsilon_s \sim \frac{\nu_0}{\nu} \cdot \frac{1}{\beta^{n_0^4}} \quad (4.3.4)$$

Переходя к оценке скорости диффузии Арнольда, заметим, что в данном случае нас интересует выражение для коэффициента диффузии как функции номера резонансной гармоники (2.12.29). Дело в том, что основным вредным результатом взаимодействия

ствия встречных пучков является "раздувание" слабого пучка, приводящее к уменьшению так называемой светимости установки /80/. При этом частота бетатронных колебаний изменяется, грубо говоря, на величину $\Delta\nu = \varepsilon\nu$ полного сдвига частоты под действием встречного сгустка. Ясно поэтому, что действие резонансов будет существенным для большинства частиц, если это изменение частоты будет превышать среднее расстояние между резонансами Δ_n (4.3.3).

При $\varepsilon \ll \varepsilon_s$ выражение (2.12.29) можно упростить, пренебрегая членом $n/2n_0$ в M_n и полагая $(2n_0^2 C(n-1)/n^2 n)^{1/n} \approx 1$. Далее, если рассматривать диффузию на резонансах связи под действием других резонансов связи, то D_A умножается дополнительно на множитель β^3 (§ 2.11). Такой случай является типичным. Учитывая, наконец, что $\alpha \sim \varepsilon$ и $N = 3$, получим из (2.12.29) следующую оценку для коэффициента диффузии Арнольда:

$$D_A(n) \sim I^2 \omega_0 \varepsilon \nu \beta^3 \cdot \exp\left(-3\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{n}{6n_0}}\right) \quad (4.3.5)$$

Так как диффузия Арнольда происходит внутри стохастических слоев, объемом которых можно пренебречь при $\varepsilon \ll \varepsilon_s$ (§ 2.6), то она может стать практически существенной только при наличии дополнительной ("внешней") диффузии, например, за счёт рассеяния на газе или каких-либо других флюктуаций в накопительных кольцах. "Внешняя" диффузия обеспечивает попадание частицы на ближайший стохастический слой и последующую диффузию Арнольда. Если последняя достаточно велика, то время "раздувания" пучка будет определяться "внешней" диффузией до ближайшей резонансной поверхности, т.е. на расстояние $\sim \Delta_n$ вместо ($\varepsilon\nu$) в отсутствие диффузии Арнольда. Так как время диффузии пропорционально квадрату расстояния, то время "раздувания" пучка уменьшается при этом в

$$k = \left(\frac{\varepsilon\nu}{\Delta_n}\right)^2 \quad (4.3.6)$$

раз (см. § 2.12).

При наличии "внешней" диффузии, которая приводит не только к попаданию частицы в стохастический слой, но и к выходу из него, эффективная скорость диффузии

Арнольда уменьшается: $D_A \rightarrow D_A \cdot \omega$, но очень незначительно (§ 2.12). В дальнейшем положим $\omega \sim 1$.

С помощью (4.3.3, 6) находим:

$$\frac{n}{n_0} \sim k^{1/6} \cdot \gamma^{-1/3}; \quad \gamma = \frac{\epsilon}{\beta \epsilon_s} \quad (4.3.7)$$

Подставляя это в (4.3.5), получаем:

$$D_A \sim I^2 \omega_0 \epsilon v \beta^3 \exp(-3(\beta \gamma)^{-1/3} \cdot e^{\frac{k^{1/6}}{6\gamma^{1/3}}}) \quad (4.3.8)$$

Значение D_A определяется требуемым временем жизни ("раздувания") пучка τ : $D_A \sim I^2 / \tau$. Полагая: $B = \beta (\epsilon v \tau \omega_0)^{1/3}$ и $k=1$, приходим к уравнению для нижней границы γ_1 , определяющей область влияния диффузии Арнольда:

$$6\gamma_1^{1/3} \cdot \ln[(\beta \gamma_1)^{1/3} \cdot \ln B] = 1 \quad (4.3.9)$$

Это выражение показывает, в частности, что порог γ_1 слабо зависит от коэффициента связи β^2 , если только он не слишком мал: $\beta^2 \gg (\ln B)^{-6} = A^{-2}$.

Уравнение для γ_1 можно переписать в виде:

$$2\gamma_1^{1/3} \cdot \ln(A\beta\gamma_1) = 1 \quad (4.3.9a)$$

Полагая в первом приближении $\gamma_1 \approx 1/8$, найдем:

$$\gamma_1 \approx [2 \ln \left(\frac{A\beta}{8} \right)]^{-3} \quad (4.3.10)$$

Очевидно, что последнее выражение справедливо лишь для $A\beta \gg 8$, в противном случае необходимо решать уравнение (4.3.9) более аккуратно.

Из выражения (4.3.10) видно, что критическое значение сдвига частоты (Δv), зависит существенно только от частоты внешнего возмущения ω_0 и параметра гладкости поля встречного пучка n_0 ; от остальных параметров зависимость слабая, в том числе и от параметра связи колебаний β^2 , и от времени τ .

При увеличении (Δv) над порогом можно считать, что $n/n_0 = \text{const}$ (4.3.5), а увеличение D_A происходит за счёт множителя $(\beta \gamma)^{-1/6}$ (4.3.8).

Тогда из (4.3.7) следует:

$$k = \left[\frac{(\Delta v)}{(\Delta v)_1} \right]^2 \quad (4.3.11)$$

Выпишем еще выражение для номера гармоники резонансов, определяющих диффузию Арнольда. Из (4.3.5) имеем:

$$n_A \approx 6 n_0 \ln [(\beta \gamma)^{1/3} \cdot \ln \beta] \quad (4.3.12)$$

Полученные оценки базировались на формуле (2.12.29), которая справедлива при $n' > n$ (§ 2.12). Найдем условие, при котором возможно $n' = n$ и коэффициент диффузии даётся оценкой (2.12.26). Используя выражения (2.12.25) и (4.3.7), получаем:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} > \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^3 \approx 0.1 \quad (4.3.13)$$

Оценка (2.12.26) в нашем случае принимает вид:

$$D_A' \sim I^2 \omega_0 \varepsilon v \beta^3 \cdot e^{-2n/n_0} \quad (4.3.14)$$

Рассмотрим влияние синхробетатронных резонансов на диффузию Арнольда. Простейший эффект состоит в значительном увеличении плотности резонансов. Для этого нужно только, чтобы спектр синхробетатронных резонансов перекрыл расстояние между резонансами (4.3.3). Ширина спектра зависит от механизма синхробетатронного взаимодействия. Для встречных пучков основным эффектом является, по-видимому, модуляция частоты бетатронных колебаний, которая происходит по двум причинам. Во-первых, из-за модуляции нелинейного сдвига частоты, причём ширина спектра может достигать здесь $\Delta_c \sim n \cdot \Delta v_r$, где n — номер гармоники бетатронных резонансов, а Δv_r — полный нелинейный сдвиг частоты радиальных колебаний; во-вторых, за счет модуляции частоты обращения, ширина $\Delta_c \sim n v_r v_c / q$ (q — кратность высокой частоты /5/).

Условие перекрытия можно найти из следующих соображений. В уравнении резонанса $\sum_i n_i v_i = 0$ слагаемое $n_c v_c \sim \Delta_c$ должно быть порядка изменения остальной суммы между соседними резонансами, которое, в свою очередь, $\sim n \Delta_n \sim v_0 / n^2$ (4.3.3). Отсюда условие перекрытия: $\Delta_c \gtrsim \gtrsim v_0 / n^2 \sim n \cdot (\Delta v)_1$, где n определяется временем диффузии Арнольда, а $(\Delta v)_1 \equiv (\Delta v_z)_1$ — порог диффузии Арнольда без учёта синхробетатрон-

ных резонансов. Тогда последнее выражение для ширины Δ_c приводит к условию на синхротронную частоту:

$$\nu_c \geq \frac{\nu_0 q}{vn^3} \quad (4.3.15)$$

Порог диффузии Арнольда будет определяться теперь расстоянием между синхротронными резонансами, которое равно $\sim \nu_c/n / 133$, т.е. он уменьшается в $n \Delta_n / \nu_c$ раз, что на границе (4.3.15) составляет $\sim (vn/q)^x$. Фактически уменьшение будет еще больше, так как скорость диффузии Арнольда также возрастает из-за увеличения плотности резонансов^{x)} и поэтому начинают работать резонансы более высоких гармоник. Первое выражение для $\Delta_c \sim n \cdot (\Delta v_r)$ приводит к условию $\Delta v_r \gtrsim (\Delta v)_1$, т.е. не понижает порога.

Аналогичным образом действует модуляция магнитного поля накопителя. Опять таки возникает частотная модуляция с шириной спектра $\Delta_H \sim n \nu \xi$, где $\xi = \Delta H / H$ — амплитуда модуляции. Из условия перекрытия: $\Delta_H \gtrsim n \Delta_n$ получаем границу опасной модуляции:

$$\xi \gtrsim \frac{\nu_0}{vn^3} \quad (4.3.16)$$

Причём в этом случае уменьшение порога диффузии Арнольда ($\sim \nu_0/n^2 v_{in}^{1/3}$) будет значительно больше из-за малой частоты модуляции v_{in} , а также из-за увеличения диффузии Арнольда (см.стр.).

Значительно сложнее действие модуляции высокой частоты. С одной стороны, это приводит к частотной модуляции внешнего возмущения с порогом (4.3.16), для величины $q \xi_\omega = q \Delta \omega / \omega$. Правда, амплитуда этого возмущения может быть уже существенно меньше, чем от встречного пучка. С другой стороны, спектр модуляции в возмущении может перекрыть зазор между соседними синхротронными резонансами, что при условии (4.3.15) поведет к еще большему уменьшению порога диффузии Арнольда. Упомянутый зазор составляет $\sim \nu_c/n$ по бетатронной частоте $/133$, или $\sim \nu_c/vn$ по частоте обращения. Отсюда граница опасной модуляции

x) См. аналогичную оценку в следующем параграфе (4.4.15).

высокой частоты равна:

$$\Im \omega \gtrsim \frac{\nu_c}{\nu_{nq}} \sim \frac{\nu_o}{q\nu^2 n^4} \quad (4.3.17)$$

Последняя оценка дана на границе (4.3.15). При этом амплитуда такого возмущения может быть опять таки маленькой (см. выше).

Наконец, возможен еще эффект модуляции самой синхротронной частоты под действием разных факторов. Однако для перекрытия зазора между синхробетатронными резонансами в этом случае требуется уже весьма значительная модуляция

$$\Delta\nu_c / \nu_c \gtrsim \kappa^{-1}.$$

Как мы видели, действие (частотной) модуляции сводится к расщеплению каждой резонансной плоскости и образованию своеобразного мультиплета из параллельных плоскостей. При достаточно малом расстоянии между этими резонансами они начнут разрушать друг друга с образованием сплошного стохастического "коридора". Существенно, однако, что это явление не изменяет диффузию Арнольда, поскольку вектора (κ) всех резонансов мультиплета параллельны (см. § 2.12).

Возвращаясь к синхробетатронным резонансам, отметим, что они могут привести и к более существенному эффекту, чем простое увеличение плотности резонансов, а именно, к стримерной диффузии (§ 2.12). Ускоряющее высокочастотное напряжение является здесь внешним возмущением, нарушающим консервативность системы. Иначе говоря, это возмущение выводит систему с поверхности постоянной энергии и обеспечивает тем самым стримерную диффузию.

Для того чтобы диффузия могла идти на значительное расстояние, необходимо пересечение соседних стримеров. Это возможно, если изменение динамических частот

$$\Delta\nu \gtrsim \Delta n \sim \frac{\nu_o}{n^4} \quad (4.3.18)$$

Мы рассматриваем здесь четыре частоты — две бетатронные, частоту обращения и частоту внешнего возмущения. Последнее должно иметь при этом достаточно чисто гармоник ($\sim \kappa$). В противном случае необходимое ($\Delta\nu$) значительно увеличивается (см. ниже). Это требование обычно не выполняется в накопительных коль-

цах. Во-первых, ускоряющее напряжение имеет, как правило, всего одну гармонику, а, во-вторых, в синхротронном режиме частота обращения в среднем остается постоянной. Стримерная диффузия в этой ситуации возможна только, если выйти за пределы синхротронной сепараторы, что может иметь значение для протонов или электронов очень малой энергии (см. § 4.4).

В обычных условиях необходимо принять во внимание синхротронные колебания, частота которых и будет третьей динамической частотой в дополнение к двум бетатронным.

Для значительной стримерной диффузии необходимо, как отмечалось выше, пересечение соседних стримеров. Это как раз возможно за счёт изменения самой синхротронной частоты Δv_c . Если положить $\Delta v_c \sim v_c$, то условие пересечения стримеров оказывается таким же, как и полученное выше условие перекрытия зазора $\Delta_n \sim v_0/n^3$ синхротронными резонансами. Из ширины спектра последних, связанной с нелинейным сдвигом частоты: $\Delta_c \sim n \cdot (\Delta v_r)$ (стр. 248), получаем порог стримерной диффузии в форме:

$$(\Delta v_r)_1 \sim \frac{v_0}{n^3} \quad (4.3.19)$$

Модуляция частоты обращения даёт порог, совпадающий с выражением (4.3.15).

Номер гармоники резонансов n определяется временем стримерной диффузии, для которой, с учётом "внешней" диффузии, нужно взять оценку (2.12.39). Мы перепишем её для рассматриваемой задачи, учитывая, что $N = 3$; $\varepsilon \rightarrow \varepsilon \cdot \beta^2$:

$$\alpha \sim \varepsilon; \bar{n} = 2; \omega = \omega_0; \text{ получаем:}$$

$$D_c^0 \sim I^2 \omega_0 v \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^3 \beta^5 n^2 e^{-\frac{5n}{2n_0}} \quad (4.3.20)$$

Конкретизируем эту оценку в простейшем случае $\beta^2 \approx 1$; $\Delta v_r \sim \Delta v$.

Используя оценку (4.3.15) и вводя снова время "раздувания" пучка $\tilde{\tau} \sim I^2/D_c^0$, получим уравнение для критического значения синхротронной частоты:

$$(v_c)_1 \approx \frac{15}{n_0^3} \cdot \frac{v_0 q}{v} \cdot \left\{ \ln \left[\omega_0 \tilde{\tau} v \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^3 \left(\frac{v_0 q}{v v_c} \right)^{2/3} \right] \right\}^{-3} \quad (4.3.21)$$

Последнее слабо зависит от тока сильного пучка $I \gg \Delta v$, если только $(\omega_0 \tilde{\tau} v) \cdot (\Delta v/v)^3 \beta^5 \gg 1$ (4.3.20). Комбинируя аналогичным образом (4.3.19, 20),

найдем порог стримерной диффузии по току из уравнения:

$$(\Delta v)_2 \approx \frac{15v_0}{n_0^3} \cdot \left\{ \ln \left[(\nu \tilde{\omega}_0) \cdot \left(\frac{\Delta v}{\nu} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{v_0}{\nu} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}^{-3} \quad (4.3.22)$$

Оба эффекта (4.3.21, 22) работают независимо. Время "раздувания" уменьшается приблизительно обратно пропорционально квадрату превышения соответствующей величины над порогом (см. (2.12.41), (4.3.11)).

Модуляция магнитного поля или высокой частоты может привести к увеличению стримерной диффузии, однако, сама по себе (без синхротронных колебаний), не может вызвать её, так как частота модуляции не является динамической переменной.

В качестве примера выберем следующие параметры протонного накопительного кольца: $\tilde{\omega} = 10^5$ сек; $\nu = 10$; $v_0 = 1$; $\omega_0 = 10^8$ сек $^{-1}$; $\beta^2 \sim 1$; $(\Delta v)_s \sim 1/20$. Последнее значение взято из численных экспериментов /97, 127/ и из экспериментов на электронных накопителях /127, 133/. Во всех случаях величина $(\Delta v)_s$ лежала в интервале: $1/10 - 1/40$. Отсюда можно оценить также параметр $n_0 \sim 2$ (4.3.4).

Решение уравнения (4.3.9) методом последовательных приближений даёт:

$\gamma_1 \approx 1/50$, откуда $(\Delta v)_1 \sim 10^{-3}$, причём работают резонансы до $n \approx 8$. Порог по стримерной диффузии (4.3.22) есть $(\Delta v)_2 \sim 2 \cdot 10^{-3}$ ($n \approx 8$), т.е. примерно тот же, что и для обычной диффузии Арнольда. Наконец, порог по синхротронной частоте (4.3.21) равен: $(\nu_c)_1/q \sim 5 \cdot 10^{-4}$ ($n \approx 6$) при $\Delta v = 10^{-3}$. Фактически, синхротронная частота должна быть еще меньше: $\nu_c/q \lesssim 2 \cdot 10^{-4}$, что вытекает из оценки (4.3.15) с $n = 8$. В противном случае порог обычной диффузии Арнольда уменьшится дополнительно в $\sim \Omega n/q \approx 80/q$ раз. Такого же порядка допуск и на модуляцию магнитного поля и модуляцию частоты ($q \Delta \omega / \omega$) (4.3.16).

Рассмотренный случай круглого пучка является, вероятно, наихудшим. Эффективным методом борьбы с диффузией Арнольда представляется уменьшение связи между бетатронными колебаниями, т.е. коэффициента β^2 , а также параметра ангармонич-

ности n_0 . Кроме того, рабочая точка накопителя (v_1, v_2) должна находиться в районе минимальной плотности резонансов. Наиболее радикальным средством было бы полное выключение высокой частоты, однако, это может уменьшить светимость установки /125/. Помогает также увеличение кратности высокой частоты до $q \gtrsim nv$ (стр. 249).

При сравнимой интенсивности обоих встречных пучков роль слабого играет пучок больших размеров, поскольку для узкого пучка параметр n_0 очень мал /13/. При одинаковых размерах пучков возможно их одновременное взаимное "раздувание" при котором (Δv) уменьшается до порогового значения. В этом случае процесс может быть значительно осложнен когерентными колебаниями пучков /127/. однако, последние уже сравнительно нетрудно подавить, например, с помощью обратной связи /127/.

Полученные выше оценки являются, конечно, весьма грубыми. Они могут быть уточнены в конкретных случаях с помощью численного эксперимента. Согласно работе /76/ для этого достаточно исследовать локальную устойчивость движения в сравнительно коротком счёте.

Еще лучше было бы провести модельные опыты на электронном накопителе. Хотя в этом случае время диффузии Арнольда существенно ограничено радиационным затуханием, оно может быть сделано достаточно большим, чтобы наблюдать этот процесс (до 1 сек на установке, описанной в работе /133/).

§ 4.4. Ловушки с магнитными пробками. Сохранение адиабатического инварианта

Удержание заряженной частицы в открытой магнитной системе типа ловушки с магнитными пробками осуществляется, как известно, за счёт сохранения орбитально-гого магнитного момента частицы (M), который является адиабатическим инвариантом ларморовского вращения /117/. Адиабатический инвариант не является точным инвариантом и до недавнего времени условия его сохранения оставались неясными. В

частности, еще в работе 1928 года Андронов, Леонович и Мандельштам /119/ показали на простом примере уравнения Маттье, что адиабатический инвариант может нарушаться при сколь угодно медленном, но резонансном периодическом изменении параметра. Для периодического возмущения Фирсов ввел поправки к адиабатическому инварианту, которые позволили отодвинуть существенное нарушение инварианта до все более и более высоких порядков асимптотического разложения /118/. Завершением этого направления явилась работа Крускала /18/, в которой показано, что уточненный адиабатический инвариант сохраняется во всех порядках асимптотического разложения. Это не означает, конечно, строгую инвариантность, но эквивалентно утверждению, что изменение адиабатического инварианта во всяком случае "экспоненциально" мало (см. ниже и § 2.2). Только сравнительно недавно Арнольд смог доказать вечное сохранение адиабатического инварианта для одномерного нелинейного осциллятора и, соответственно, вечную устойчивость движения заряженной частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке /120/. Требование аксиальной симметрии здесь существенно и связано с топологическими особенностями теории КАМ, о которых говорилось в §§ 2.2,12.

Как мы уже знаем, теория КАМ не даёт критического значения возмущения. Последнее можно оценить из численных экспериментов в работе /123/ и опытов Родионова с электронами /121/. Оказалось, что в обоих случаях граница неустойчивости определяется приблизительно простым критерием перекрытия резонансов /10/. Однако, оставалось неясным, являлась ли наблюдавшаяся устойчивость вечной в соответствии с теорией КАМ или просто увеличивалось время развития неустойчивости. Выяснению этого вопроса были посвящены ряд экспериментов /122, 81-83, 131/. Во всех этих работах была обнаружена очень слабая неустойчивость, развивающаяся за время до 10^9 отражений электрона от магнитных пробок. Особенно подробное исследование этой слабой неадиабатичности было проведено в /82, 83/. Пример зависимости среднего времени жизни электрона в ловушке от величины магнитного поля показан на рис.4.4.1.

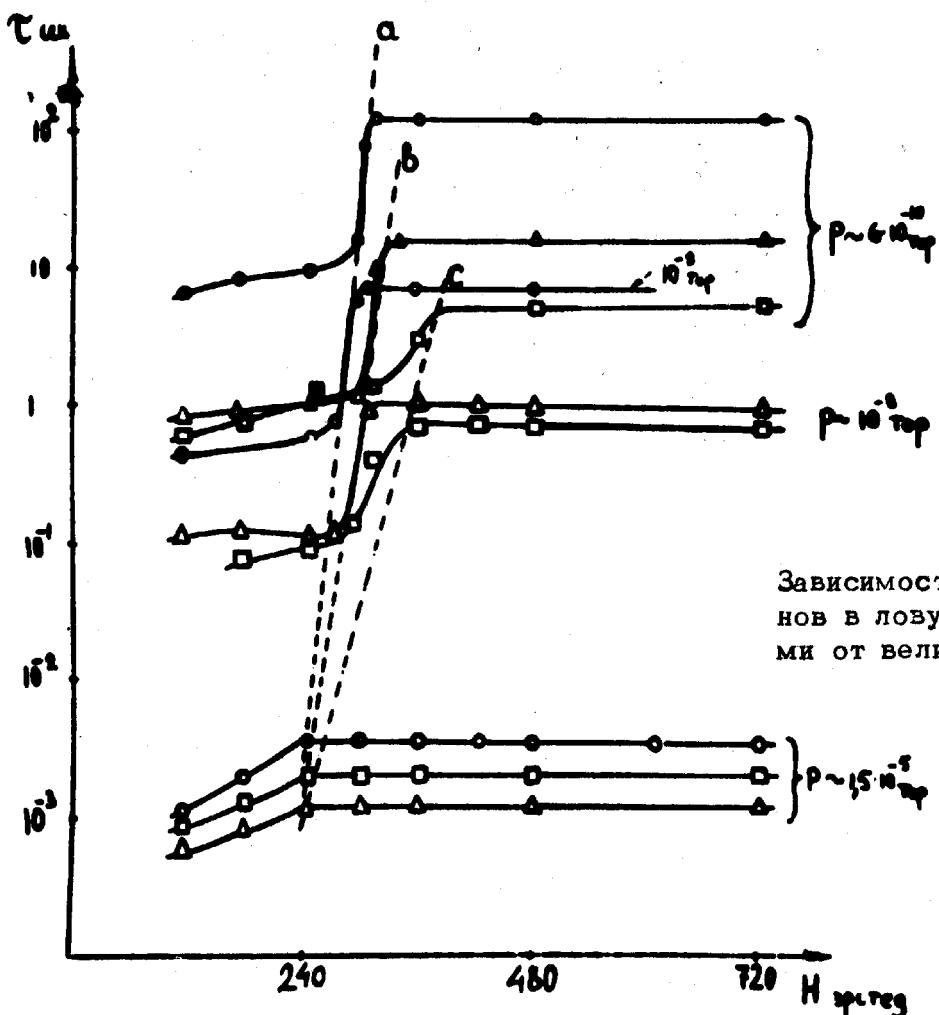


Рис. 4.4.1.

Зависимость времени жизни электронов в ловушке с магнитными пробками от величины магнитного поля H .

заятот из работы /83/. Кривые соответствуют различным давлениям остаточного газа в ловушке и различным методам измерения времени жизни. Неадиабатичность проявляется в более или менее резком уменьшении последнего. Совершенно неожиданным явилось образование нижнего "плато", т.е. почти полное прекращение уменьшения времени жизни с магнитным полем.

Природа этой слабой неустойчивости не была выяснена экспериментально. В настоящее время можно высказать лишь две гипотезы.

Согласно первой из них обнаруженная неустойчивость связана с тем, что реальное магнитное поле ловушки не являлось аксиально-симметричным, несмотря на все принятые меры. В таком случае система становится трехмерной и теория КАМ не может гарантировать большую устойчивость движения, несмотря на инвариантные торы. Более того, Арнольд открыл конкретный механизм неустойчивости в этом случае /21/, который мы назвали в § 2.12 диффузией Арнольда. Ниже мы рассмотрим

этую гипотезу более подробно.

Остановимся сначала на второй гипотезе, согласно которой очень слабая неустойчивость возможна и в аксиально-симметричной ловушке за счёт неопределенности границы стохастичности и проникновения стохастических участков глубоко в область колмогоровской устойчивости (§ 2.5).

Движение частицы в ловушке может быть описано с помощью преобразования, если проинтегрировать изменение магнитного момента за полпериода колебаний между пробками (для ловушки, симметричной относительно медианной плоскости). Результат такого интегрирования представлен в наиболее удобной форме в недавней работе Хастье, Хоббса и Тейлора /124/. Их вычисления опираются на наблюдение, сделанное еще в работе /123/ и состоящее в том, что основное изменение μ происходит в медианной плоскости магнитного поля. Это можно пояснить следующим образом. Если имеется только градиент H , то силовые линии расходятся без изгиба и магнитное поле является локально аксиально-симметричным. Но в таком случае магнитный момент сохраняется точно, поскольку он оказывается пропорциональным обобщенному моменту. Если же силовые линии изгибаются, то аксиальная симметрия нарушается даже локально, обобщенный момент не сохраняется и возможна только адиабатическая инвариантность μ . Поскольку изгибание силовых линий пропорционально H'' (штрих означает дифференцирование вдоль силовой линии), мы приходим к следующему выражению для локального параметра адиабатичности /124/:

$$\varepsilon_a = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_{\parallel}}{\omega_H} \sqrt{\frac{H''}{2H}} \sim \frac{\Omega}{\omega_H} \quad (4.4.1)$$

Здесь $\omega_H = eH/mc$ - ларморовская частота; Ω - частота продольных колебаний; v_{\parallel} - составляющая скорости частицы вдоль силовой линии, а численный коэффициент введен для удобства. Заметим, что последнее выражение теряет смысл вблизи оси симметрии ловушки, на расстоянии порядка ларморовского радиуса из-за сохранения обобщенного момента. Выше мы упомянули, что изменение μ очень резко зависит от ε_a , следовательно, оно является практически локальным и произхо-

дит в максимуме Σ_a . В простейшем случае, но конечно, совсем не всегда, этот максимум совпадает с медианной плоскостью.

Согласно /124/ изменение магнитного момента после прохождения медианной плоскости дается в первом приближении выражением:^{x)}

$$\Delta \mu \approx A \cdot e^{-\frac{1}{\Sigma_a}} \cos \psi \quad (4.4.2)$$

Здесь ψ - лармировская фаза в максимуме Σ_a , а A - некоторое сложное выражение:

$$A = -\frac{3\sqrt{\pi e}}{8\Sigma_a} \cdot \mu \cdot \left[\frac{\rho}{R} \left(1 + \frac{2v^2}{v_1^2} \right) - \frac{2H}{H''} \cdot \frac{v^2 + v_0^2}{v_1^2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right] \sim \frac{r}{\ell} \mu \quad (4.4.3)$$

где ρ - лармировский радиус; R - радиус кривизны силовой линии; r - расстояние от оси ловушки; $\ell^2 = H/H''$. Выражение (4.4.2) справедливо при $r \ll \ell$ /124/.

Изменение фазы между двумя последовательными прохождениями медианной плоскости в первом приближении равно:

$$\Delta \psi \approx \int \omega_H(\mu) dt = \Theta(\mu) \sim \frac{r}{\rho} \sim \Sigma_a^{-1} \quad (4.4.4)$$

Если, в том же приближении, считать Σ_a , A постоянными, то получим преобразование типа основной модели:

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu + \varepsilon \cos \psi; \quad \varepsilon = A e^{-\frac{1}{\Sigma_a}} \\ \psi' &= \psi + \Theta(\mu') \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Критерий стохастичности принимает вид: $(r/\rho) e^{-\frac{1}{\Sigma_a}} \sim 1$ или: $\Sigma_a \sim 1$.

Учитывая результаты численных экспериментов, описанные в предыдущей главе, едва ли можно надеяться на какие-то остатки стохастичности при значении безразмерного малого параметра $\varepsilon d\theta/d\mu \lesssim 10^{-4}$ /82, 83/, $\Sigma_a \lesssim 0.1$:

x) Воспользовавшись оценкой $\Sigma_a \sim \Omega / \omega_H$ (4.4.1), приDEM к типичному выражению: $\Delta \mu \sim e^{-\omega_H/\Omega}$ для изменения адиабатического инварианта при аналитическом изменении параметра, которое мы неоднократно использовали в этой работе (см. также /45/).

$\Gamma \sim \rho$). Правда, точные уравнения движения сложнее преобразования (4.4.5), и можно думать, что эти малые поправки как раз и приводят к медленной диффузии. Однако, согласно теории КАМ малое возмущение не разрушает инвариантные торы. Все же, поскольку граница применимости теории КАМ установлена экспериментально лишь для очень специальной системы (§ 3.3), вопрос остается пока открытым.

Обратимся снова к первой гипотезе. Условие резонанса имеет теперь вид:

$$\rho \Omega_g + q \Omega + \ell \bar{\omega} = 0 \quad (4.4.6)$$

Здесь $\Omega_g \ll \Omega \ll \bar{\omega}$ - частоты дрейфа, продольных колебаний и средняя частота ларморовского вращения, соответственно. Как и в предыдущем параграфе мы снова можем воспользоваться теорией диффузии Арнольда, развитой в § 2.12.

Основные особенности задачи сводятся к следующему:

1. Электрон в асимметричной ловушке представляет собой трехмерный автономный осциллятор с трехкратным взаимодействием ($\kappa = 3$). Оценка (4.3.3) для плотности резонансов сохраняется:

$$\Delta_n \sim \frac{\omega_0}{n^3} \quad (4.4.6a)$$

причём параметр $\omega_0 \sim \bar{\omega}$ учитывает также и отклонение плотности резонансов в данной точке частотного пространства ($\Omega_g, \Omega, \bar{\omega}$) от средней ($\langle \omega_0 \rangle = \bar{\omega}$).

2. Рабочая точка ($\Omega_g, \Omega, \bar{\omega}$) задается параметром адиабатичности:

$$\frac{\Omega_g}{\Omega} \sim \frac{\Omega}{\bar{\omega}} \sim \varepsilon_a \quad (4.4.7)$$

Показатель экспоненты для ε_n (2.12.23) записывается теперь в виде:

$1\rho/2n_g + 191/2n_o + 1\ell/2n_o$. В (4.4.7) положим $\ell = 0; 1$, так что слагаемым $\ell/2n_o$ можно пренебречь. Далее, $\rho \sim q$ (4.4.7), но вероятно $n_g \gg n_o$.

Последнее связано с тем обстоятельством, что азимутальная неоднородность обычно ограничена вдоль ловушки, т.е. действует в течение времени $\leq \Omega^{-1}$. Отсюда $n_g \gtrsim \frac{\Omega}{\Omega_g} \gg 1$. Следовательно, из трех слагаемых показателя экспоненты остается только одно. Учитывая теперь соотношения (4.4.2, 3) приходим к оценке:

$$\varepsilon_n \sim \varepsilon_a \cdot e^{-1/\varepsilon_a} \quad (4.4.8)$$

Численный коэффициент в экспоненте выбран здесь согласно (4.4.2). Частота фазовых колебаний тройного резонанса ($\rho, q, l \neq 0$ (4.4.6)) даётся оценкой ($d \sim 1$):

$$\Omega_3 \sim \bar{\omega} \beta \sqrt{\varepsilon_a \Omega_g / \Omega} \sim \bar{\omega} \varepsilon_a \beta \quad (4.4.9)$$

Здесь множитель Ω_g / Ω (вместо экспоненты) учитывает, что азимутальное возмущение хотя и действует в течение короткого времени, но почти повторяется через пол-периода продольных колебаний. Параметр стохастичности для асимметричной ловушки может быть записан в виде:

$$\frac{\Omega_3}{\Delta_n} \sim \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_0}\right) \varepsilon_a \beta n_0^2 n_g \sim \beta n_0^2 \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right) \sim 3\beta \quad (4.4.10)$$

Численное значение параметров принято на основании экспериментальных данных работы /82/, которые показывают сильное влияние азимутальной неоднородности при $\beta^2 \sim (\Delta H/H)_\varphi \gtrsim 10\%$. В области диффузии Арнольда зависимость $H_{kp}(\beta)$ очень слабая (см. ниже).

3. Согласно (4.4.1) $\varepsilon_a \propto v_u/H \propto (\sin \theta)/H$,

причём изменение угла наклона траектории к медианной плоскости $\Delta \theta \propto \tau_p^{1/2}$, где τ_p время диффузии за счёт рассеяния на газе. Всегда существует область углов ($\sin \theta \approx 0$), где диффузия Арнольда не существенна и все определяется рассеянием на газе. Эта область по крайней мере отчасти ответственна, по-видимому, за образование нижнего плато на рис.4.4.1. Полагая $\Delta \theta \sim \theta$ можем получить форму такого "плато" из условия $(\sin \theta)_{H_c} = (\sin \theta_e)/H_c$:

$$\tau \approx \frac{\tau_c}{\theta_c^2} \cdot \arcsin^2 \left[\left(H/H_{kp} \right) \cdot \frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_c} \right] \quad (4.4.11)$$

где H_{kp} - критическое значение магнитного поля, выше которого диффузия Арнольда перестает играть роль (при заданном давлении остаточного газа); τ_c - время жизни электрона на верхнем плато, а θ_c - угол конуса потерь. Закон (4.4.11) работает лишь для частиц в области $\theta \approx 0$, количество которых зависит от метода инъекции. Время жизни остальных частиц определяется диффузией до ближайшего резонанса как и в задаче предыдущего параграфа. В этом случае, как мы знаем, также по-

лучается два плато (§§ 2.12; 4.3). Оценим перепад между ними. Для этого сравним расстояние по частоте до ближайшего резонанса Δ_n и до выхода из ловушки $\Delta\Omega \sim \Omega$. Используя (2.12.36) и (4.4.6a), найдем:

$$k \sim \left(\frac{\Delta\Omega}{\Delta_n} \right)^2 \sim \varepsilon_a^{-4} \quad (4.4.11a)$$

где мы положили: $\omega_0 \sim \omega \sim \varepsilon_a \Omega$: $n \sim \varepsilon_a^{-1}$. Ход кривых на рис. 4.4.1 определяется сложной комбинацией обоих процессов (4.4.11, 11a).

Дополнительная информация о структуре диффузии Арнольда в магнитной ловушке с точки зрения рассматриваемой гипотезы может быть получена из очень интересных данных работы /83/, представленных на рис. 4.4.2.

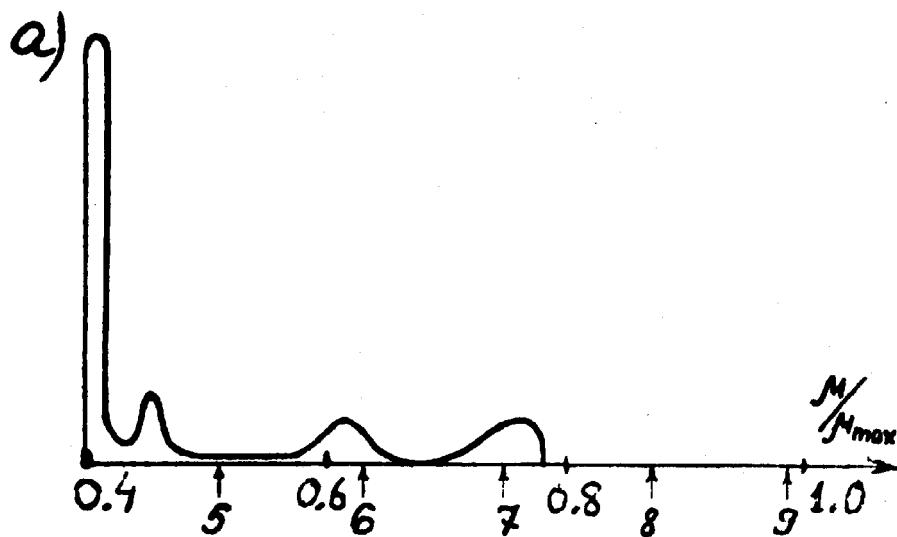
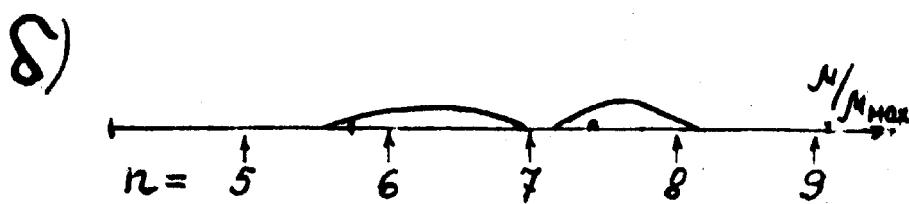


Рис.4.4.2

Распределение электронов в ловушке по магнитному моменту M : а) через 10^{-3} сек после инъекции; б) через 3.4 сек; M_{\max} - максимальное значение M .



Здесь изображен пример распределения (спектра) электронов в ловушке по M в единицах максимального M_{\max} . Точка $M/M_{\max} = 1$ соответствует движению в медианной плоскости ($\theta = 0$). Самая левая точка спектра ($M/M_{\max} \approx 0.4$) лежит за конусом потерь. Верхний спектр (а) снят сразу же после инъекции (чез-

рэз 10^{-3} сек) и отражает какие-то быстрые процессы в ловушке. Картина диффузии Арнольда может быть сопоставлена с нижним спектром (δ), снятым через 3.4 сек после инъекции. Наиболее интересной особенностью этого спектра является минимум, совпадающий с одним из главных резонансов $n\Omega = \bar{\omega}$ ($n = 7$), положение которого отмечено стрелкой. Наличие минимума в спектре свидетельствует о потерях частиц, которые могут уходить отсюда по стохастическим слоям резонансов. Аналогичные потери происходят и на резонансах $n = 6 ; 8$ (рис.4.4.2б). Небольшое несовпадение с вычисленным положением резонансов легко может быть объяснено экспериментальными ошибками, поскольку спектр на рис.4.4.2 получался дифференцированием непосредственно измеряемого интегрального спектра.

По данным рис.4.4.2 можно определить уменьшение времени жизни электронов по сравнению с верхним плато: $k \sim \left(\frac{\mu - \mu_c}{\Delta\mu/2} \right)^2 \approx \left(\frac{0.3}{0.06} \right)^2 = 25$ ($\Delta\mu$ — расстояние между резонансами), что согласуется по порядку величины со значением $k \approx 16$ из данных рис.4.4.1. Однако возникает существенное различие с оценкой (4.4.11а), которая в этом случае даёт: $k \sim 10^3$. Причина различия очевидна — в случае на рис.4.4.2 время жизни определяется диффузией до ближайшего основного резонанса $n\Omega = \bar{\omega}$, а не до трехчастотного резонанса $n\Omega + l\Omega_g = \bar{\omega}$ как предполагалось в (4.4.11а).

Возможное объяснение отмеченной особенности связано со структурой переходной области по $\Theta(\mu)$. Как уже отмечалось выше, при достаточно больших $\mu \rightarrow \mu_{\max}$ диффузия Арнольда отсутствует ($\Sigma_a \rightarrow 0$). Поэтому в переходной области могут проявляться лишь наиболее сильные резонансы. В то же время в этой области находится обычно довольно много частиц, так как она соответствует большому телесному углу (малые Θ). Поэтому измеряемое время жизни электронов в ловушке существенно зависит от процессов в этой области. Трехчастотные резонансы эффективно работают, по-видимому, лишь в области $\mu/\mu_{\max} \lesssim 0.6$ (рис.4.4.2), где время жизни поэтому резко падает, что приводит практически к отсутствию частиц в этой области (рис.4.4.2). Конкурирующим процессом здесь могло

бы быть образование стохастического слоя вблизи конуса потерь, который совпадает с сепаратрисой колебаний частиц в ловушке. Однако ширина этого слоя по оценкам § 2.6 пренебрежимо мала: $\Delta\mu \sim e^{-1/\varepsilon_a} \sim 1/400$ (4.4.2).

Нам остается оценить скорость диффузии Арнольда. Для этого необходимо заново получить оценку для D_A (§ 2.12) с учётом сделанных выше замечаний. Экспоненциальный фактор принимает вид (2.12.29):

$$\mathcal{M}_n = n^{-1} \cdot \exp \left(-3 \cdot \left(\frac{C_{\omega_0}}{\sqrt{\omega_0} n^2} \right)^{1/3} \cdot (\varepsilon_a \beta)^{-1/3} \cdot e^{1/6\varepsilon_a} \right) \quad (4.4.12)$$

Нахождение точного значения численного множителя в первой экспоненте ($\beta \sim 3$) затруднительно, мы получим его ниже из экспериментальных данных. Коэффициент диффузии находим аналогично тому, как это было сделано в § 4.3:

$$D_A \sim \mu^2 \bar{\omega} \varepsilon_a \beta^3 \cdot \exp \left(- \frac{\beta \cdot e^{1/6\varepsilon_a}}{(\beta \varepsilon_a)^{1/3}} \right) \quad (4.4.13)$$

Данные работы /83/ приводят к следующим значениям параметров при $\theta = \theta_c \approx 50^\circ$ (на конусе потерь): $\varepsilon_a = 0.18$; $\bar{\omega} = 3.5 \times 10^9$; $\bar{t} \approx 100$ сек. Несмотря на неопределенность величиной является азимутальная неоднородность. Как уже отмечалось выше, в большинстве экспериментов никакой специальной неоднородности не вводилось, и по измерениям с точностью в 0.5 % поле было однородным. С другой стороны, в специальных опытах увеличение неоднородности до 10% не изменило H_{kp} в пределах экспериментальных ошибок $\pm 20\%$ /82/. Исходя из этих данных можно, по-видимому, положить: $(\Delta H/H)_\varphi = \beta^2 \sim 10^{-2}$. К счастью, значение B , которое мы хотим определить, слабо зависит от неоднородности: $B \propto (\Delta H/H)_\varphi^{1/6}$.

Прежде чем вычислять B , найдем еще связь между \bar{t} и D_A . Так как D_A очень резко зависит от ε_a , т.е. от μ , то время диффузии будет значительно меньше величины μ^2/D_A . В качестве грубой оценки можно принять, что $\bar{t} \sim (\Delta\mu)^2/D_A$, где $\Delta\mu$ определяется из условия, чтобы показатель экспоненты в (4.4.13) $\Gamma = B(\beta\varepsilon_a)^{-1/3} \cdot e^{1/6\varepsilon_a}$ уменьшился на единицу.

Полагая: $\Delta\varepsilon_a/\varepsilon_a \sim \Delta\mu/\mu$ и $6\varepsilon_a \approx 1$, получим: $\mu/\Delta\mu \sim \Gamma \sim \ln \frac{\mu^2 \bar{\omega} \varepsilon_a \beta^3}{D_A} \approx \ln(\varepsilon_a \bar{\omega} \bar{t} \beta^3)$. Собирая все соотношения, на-

ходим: $B = 2.0$. Расхождение с ожидаемым значением $B \sim 3$ нельзя считать серьезным ввиду грубости оценок. Если попробовать учесть отброшенный в экспоненте множитель: $((\omega_0 / 4 \bar{\omega} n_0^2)^{1/3} \approx 0.62$, полагая $\omega_0 \sim \bar{\omega}$; $C \sim n_0 \sim 1$, то $B \approx 1.9$. Хотя это уже значительно лучше согласуется с экспериментальными данными, не следует придавать этому большого значения ввиду произвольности выбора некоторых параметров. Можно только утверждать, по-видимому, что наша гипотеза не противоречит экспериментальным данным.

Коэффициент диффузии Арнольда очень сильно зависит от параметра адиабатичности (4.4.13). Это приводит к довольно резкому падению времени жизни при $H \approx H_{kp}$ (рис.4.4.1). Даже в полулогарифмическом масштабе зависимость $\ln \tau$ от E_a является экспоненциальной и может создать впечатление наличия абсолютной устойчивости /82/.

Оценка (4.4.13) показывает, как трудно избавиться в таких опытах от влияния азимутальной неоднородности. Так, например, уменьшение неоднородности в 100 раз, от 10% до 0.1%, приводит к уменьшению H_{kp} всего на 46%.

Разумеется для серьезного подтверждения высказанной выше гипотезы о природе слабой неустойчивости частиц в магнитной ловушке нужны дополнительные специальные эксперименты.

Рассмотрим в заключение, к каким эффектам может привести изменение магнитного поля ловушки во времени. При монотонном увеличении магнитного поля поперечная энергия частицы растет $\propto H$ ($\mu = const$), а продольная - только как \sqrt{H} , так как квадрат частоты продольных колебаний пропорционален эффективной "потенциальной" энергии ловушки μH . В результате угол наклона скорости частицы к силовой линии увеличивается, т.е. частица затягивается вглубь "потенциальной" ямы. При этом устойчивость движения, естественно, повышается.

Наиболее интересным является периодическое изменение магнитного поля, которое может иметь место, например, за счёт остаточных пульсаций выпрямленного тока,

питающего магнитные катушки. Так, в опытах /82, 83/ пульсации поля достигали величины 0.1% в центре ловушки и около 0.03% в магнитных пробках. Частота пульсаций составляла 300 Гц. Так как в условиях этих экспериментов период пульсаций много меньше времени жизни частиц в ловушке, то появляются новые резонансы. В силу пространственной неоднородности пульсаций можно считать, что частотная модуляция происходит по всем степеням свободы. Как известно /75/, спектр частотно-модулированных колебаний является эквидистантным с расстоянием между линиями Ω_0 (частота модуляции), а полная ширина основной части спектра $\sim \Delta \bar{\omega}$ — полного интервала изменения частоты. При $\Delta \bar{\omega} \gg \Omega_0$ — условие, которое обычно выполняется, — каждая резонансная плоскость расщепляется в мультиплет из $N_\omega \sim \Delta \bar{\omega} / \Omega_0$ параллельных плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии $\sim \Omega_0 / n$, где $n^{-1} \sim \Omega_0 / \bar{\omega} \sim \varepsilon_a$ (4.4.6). Появление этого малого фактора легко представить себе из геометрических соображений (см. также § 4.3).

Если теперь $\frac{\Delta \bar{\omega}}{n} \gtrsim \Delta_n$ (4.4.6а), то средняя плотность резонансов резко увеличивается, а вместе с ней и диффузия Арнольда. Полагая $n \sim 1/\varepsilon_a$, найдем допуск на модуляцию поля:

$$\xi_{kp} = \left(\frac{\Delta H}{H} \right)_{kp} \sim \varepsilon_a^2 \gtrsim 3\% \quad (4.4.14)$$

Численная оценка получена из условия $6\varepsilon_a \sim 1$, определяющего границу области, в которой диффузия Арнольда может быть практически существенна (4.4.13). При $\xi \gtrsim \xi_{kp}$ возрастание диффузии можно оценить следующим образом. Прежде всего увеличивается плотность резонансов: $\omega_0 / \bar{\omega} \sim (\Delta \bar{\omega} / \Omega_0)^{-1} \sim (\xi \bar{\omega} / \Omega_0)^{-1}$ (4.4.12). Кроме того, ширина каждого резонанса уменьшается в $(\Delta \bar{\omega} / \Omega_0)^{1/4}$ из-за уменьшения амплитуды возмущения резонансной гармоники в $(\Delta \bar{\omega} / \Omega_0)^{1/2}$ раз вследствие расщепления резонанса. В результате коэффициент диффузии становится равным:

$$D_A \sim \mu^2 \bar{\omega} \varepsilon_a \beta^3 \exp \left(-2 \left(\frac{\Omega_0}{\bar{\omega}} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{\frac{1}{6\varepsilon_a}}}{(\xi \beta \varepsilon_a)^{1/3}} \right) \quad (4.4.15)$$

где мы использовали значение B_{x2} , полученное выше (4.4.13). Основной нормирующий фактор в экспоненте $(\Omega_0 / \omega_0)^{1/4}$ оказывается в типичном случае ~ 10 .

Если модуляция магнитного поля резонирует с собственными колебаниями частицы в ловушке, возможно возникновение стримерной диффузии. Процесс совершенно аналогичен случаю предыдущего параграфа, где фактически рассматривалась та же самая задача о движении частицы в магнитной ловушке специальной конфигурации. Мы не будем здесь рассматривать стримерную диффузию подробно. Заметим только, что частоты внешнего возмущения (модуляции) должны быть для этого достаточно высокими, хотя бы порядка частоты дрейфа Ω_d .

§ 4.5 Устойчивость Солнечной системы

Проблема устойчивости планетных движений, хотя и не является актуальной в практическом отношении, давно привлекала к себе внимание астрономов, механиков и математиков своей красотой и трудностью (см., например, /129/). С самого начала было ясно, что здесь существенны очень тонкие эффекты механического движения консервативной системы. Даже простейший нетривиальный случай двух планет приводит к знаменитой нерешенной полностью и до сих пор задаче трех тел. Под устойчивостью здесь понимается отсутствие сколько-нибудь значительного, а главное, накапливающегося обмена энергией между планетами. Как известно, в другой аналогичной системе – возбужденном многоэлектронном атоме – такой обмен энергией происходит за сравнительно короткое время $\sim 10^4$ оборотов и приводит к так называемой автономизации /145/. Ясно, что эти две системы существенно различаются величиной возмущения ($\xi \sim 10^{-3}$ для планет и $\xi \sim 1$ для атома, см. ниже). Однако, возникает вопрос, является ли кажущаяся устойчивость Солнечной системы в течение $\sim 10^{10}$ оборотов строгой устойчивостью или только очень медленно развивающейся неустойчивостью. Так же, как и другие аналогичные вопросы (см., например, § 4.4) эта проблема была решена до известной степени только теорией КАМ /20/. Особенность

рассматриваемой задачи в отличие, например, от движения частицы в магнитной ловушке (§ 4.4), состоит в том, что даже в простейшем случае двух планет с круговыми компланарными орбитами (так называемая плоская задача трех тел) система является многомерной в смысле теории КАМ (§ 2.2), т.е. 4-мерные торы не делят 8-мерную поверхность постоянных энергий и момента в фазовом пространстве. А это значит, что несмотря на инвариантные торы возможна диффузия Арнольда и медленная неустойчивость на всюду плотной системе стохастических слоев резонансов (§ 2.12). Только в случае двух планет существенно различной массы, когда можно пренебречь обратным воздействием легкой планеты на тяжелую при дополнительном условии компланарности обеих орбит и круговой орбиты тяжелой планеты (так называемая круговая ограниченная задача трех тел), теория КАМ приводит к выводу о вечной устойчивости такого движения. Ниже мы даём некоторые предварительные оценки скорости диффузии Арнольда для планетной и аналогичных ей систем.

Напомним еще раз во избежание недоразумений, что фактическое время жизни планетной системы может быть значительно больше в зависимости от начальных условий и дополнительной "внешней" диффузии (§ 2.12). Учёт влияния последних факторов выходит за рамки настоящей работы. В этом параграфе мы дадим, таким образом, нижнюю оценку времени жизни Солнечной системы. Учитывая, однако, что процесс эволюции системы планетные орбиты могли существенно изменяться (см., например, /141/), такая оценка будет, вероятно, не слишком далека от действительности.

Основной особенностью рассматриваемой системы является так называемое кулоновское вырождение, означающее, что невозмущенное движение планеты имеет всего одну ("быструю") частоту вместо трех (в нерелятивистском приближении). Это вырождение снимается взаимодействием с другими планетами, и поэтому остальные две частоты являются всегда малыми ("медленными"). Воспользовавшись результатом работы /144/, выпишем нерезонансные усредненные уравнения для изменения параметров невозмущенной орбиты, главным образом, для изменения её частот. При этом мы огра-

ничимся случаем малых эксцентриситетов и наклонений ($e, i \ll 1$), что является второй характерной особенностью Солнечной системы; это справедливо даже для большинства астероидов, не говоря уже о больших планетах. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= -\varepsilon\omega \cdot \frac{ei^2}{2} \cdot \sin 2\omega' \\ \frac{di}{dt} &= -\varepsilon\omega \cdot \frac{ie^2}{2} \cdot \sin 2\omega' \\ \frac{d\Omega'}{dt} &= -\varepsilon\omega \left(1 - \frac{i^2}{2} + \frac{e^2}{2} (10 \sin^2 \omega' - 1)\right) \\ \frac{d\omega'}{dt} &= 2\varepsilon\omega \left(1 - \frac{e^2}{2} + \frac{5}{2} \left(e^2 - \frac{i^2}{2}\right) \sin^2 \omega'\right) \\ \varepsilon &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{m}}{M} \cdot \left(\frac{a}{a_0}\right)^3\end{aligned}\quad (4.5.1)$$

Здесь Ω' , ω' — долгота восходящего узла и угловое положение перигелия, отсчитанное от этого узла, соответственно /139/; \bar{m} , a_0 — масса возмущающей планеты и большая полуось её орбиты; ω , a — частота и большая полуось для возмущаемой планеты ($a_0 \gg a$); ε — малый параметр задачи. Из написанных уравнений видно, что одна медленная частота связана с прецессией векторов эксцентриситета ($\dot{\omega}'$) и момента ($\dot{\Omega}'$); она имеет порядок $\Omega \sim \varepsilon\omega$. Вторая медленная частота зависит от разности $\dot{\omega}' + 2\dot{\Omega}'$ и равна $\sim \varepsilon\omega e^2 \sim \varepsilon\omega i^2 (e \sim i)$.

Для Солнечной системы последней частотой можно пренебречь ввиду её малости ($\sim 10^{-5} \omega$). Поэтому стримерная диффузия (§ 2.12) возможна только для $N_o = 3$ планет с учётом одной медленной частоты Ω или для $N_o = 4$ на быстрых частотах. Обычная диффузия Арнольда может идти для $N_o = 2$ (с учетом Ω) и для $N_o = 3$ на быстрых частотах.

Оценим амплитуду различных резонансов. Гамильтониан взаимодействия двух планет равен \bar{m}/Γ , где

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &\approx \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - 2\Gamma_1\Gamma_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \Gamma &\approx \frac{\Gamma_0}{1 + e \cos \varphi}\end{aligned}\quad (4.5.2)$$

Γ, φ - координаты планеты в плоскости её невозмущенной орбиты с параметром Γ_0 [143]. При разложении $1/\Gamma$ по степеням $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ появляются гармоники разностной частоты: $n(\omega_2 - \omega_1)$, тем выше, чем ближе орбиты планет. Коэффициенты степенного разложения при $n \gg 1$ имеют вид

$$b_n \approx \left(\frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \right)^n = \left(\frac{2(\omega_1\omega_2)^{2/3}}{\omega_1^{4/3} + \omega_2^{4/3}} \right)^n \quad (4.5.2a)$$

где мы использовали связь: $\omega_i \propto \Gamma_i^{3/2}$. Все эти гармоники дают один и тот же резонанс: $\omega_1 = \omega_2$. Для получения других резонансов

$n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ ($n_1 \neq n_2$) необходимо разложить Γ_1, Γ_2 в (4.5.2) по степеням эксцентриситета, либо учесть частотную модуляцию $\varphi(t)$ при движении по эллиптической орбите. Оба эффекта оказываются одного порядка и дают малый множитель e^q , где $q = |n_1 - n_2|$ - так называемый порядок соизмеримости (частот) [139]^{x)}. Полное число двухчастотных резонансов $\approx nq$.

Резонансы с медленной частотой Ω появляются вследствие модуляции эксцентриситета в (4.5.2). Амплитуда этой модуляции $\sim i^2$ (4.5.1), а номер гармоники (p) частоты Ω не превосходит порядка соизмеримости: $p \leq q$. При этом появляется дополнительный малый множитель $\sim i^{2p}$. Если $e, i \ll 1$, "медленные" резонансы (включающие частоту Ω) не могут заполнить расстояние между "быстрыми" резонансами, так как для этого потребовались бы слишком высокие гармоники p . Поэтому диффузия Арнольда на значительные расстояния оказывается в этих условиях невозможной. Однако такая диффузия может начаться после существенного увеличения e, i в результате диффузии Арнольда по резонансам с небольшим $p \sim 1$. Мы оценим её позднее.

Согласно выше-приведенным оценкам амплитуда резонансных гармоник для двух планет оказывается порядка:

x) В этом параграфе буква e всегда обозначает эксцентриситет, в то время, как для экспоненты будет употребляться символ \exp .

$$\varepsilon_n^{(2)} \sim \varepsilon e^q i^{2p} \exp\left(-\frac{n}{n_0}\right) \quad (4.5.3)$$

где параметр n_0 можно оценить из коэффициентов разложения возмущения \bar{m}/Γ (4.5.2а):

$$n_0^{-1} \approx \ln \frac{2(n_1 n_2)^{2/3}}{n_1^{4/3} + n_2^{4/3}} \quad (4.5.3a)$$

Что же касается номера гармоники в (4.5.3), то $n = n_1$, если берется разложение по e_2 и наоборот.

Рассмотрим теперь три планеты. Их совместные резонансы возможны только во втором приближении по малому параметру E , поскольку прямое гравитационное взаимодействие является двухчастичным. Для оценки амплитуды резонансов заметим, что в случае трех планет величины Γ_1, Γ_2 в (4.5.2) содержат в первом приближении малые возмущения от взаимодействия с третьей планетой. Во втором приближении это приведет к трехпланетным резонансам. При разложении возмущения \bar{m}/Γ появляются две независимые разности частот (например, $\omega_1 - \omega_2$ и $\omega_2 - \omega_3$). Их гармоники просто перемножаются, что приводит к системе резонансов с двумя независимыми номерами гармоник. Это даёт $\sim n^2$ резонансов даже для круговых орбит. При учёте эллиптичности появляются дополнительные резонансы аналогично предыдущему случаю. Порядок соизмеримости равен теперь, как легко проверить: $q = |n_1 + n_2 + n_3|$ ($n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3 = 0$); полное число резонансов $\sim n^2(q+1)$. Соответствующий малый множитель в амплитуде резонанса остается равным по-прежнему e^q , так же, как и множитель i^{2p} для p -й гармоники медленной частоты. Результирующая оценка для амплитуды будет содержать лишний множитель ε и $\exp(-n/n_0)$ за счёт появления второй разности частот. Показатель экспоненты в оценке (4.5.3) принимает вид $(n_1 + n_2)/n_0 = 2\bar{n}/n_0 = n/n_0$, где теперь n — максимальное значение номера гармоники (ср. (2.12.23)). Окончательная оценка для трех планет даёт:

$$\varepsilon_n^{(3)} \sim \varepsilon^2 e^q i^{2p} \exp\left(-\frac{n}{n_0}\right) \quad (4.5.4)$$

Аналогичным образом можно получить оценку амплитуды резонанса для произвольного числа планет:

$$\varepsilon_n^{(N_0)} \sim \varepsilon^{N_0-1} e^q i^{2p} \exp\left(-\frac{N_0 n}{2n_0}\right) \quad (4.5.5)$$

$$q = \left| \sum_{i=1}^{N_0} n_i \right|$$

Мы принимаем здесь, что массы всех планет и параметры их орбит одного порядка.

Полное число резонансов равняется теперь $\sim n^{N_0-1} (q+1)$, а среднее расстояние между ними:

$$d_{nq} \sim \frac{\omega_0}{n^{N_0-1} (q+1)} \quad (4.5.6)$$

Рассмотрим вначале случай $N_0 \geq 3$ планет, когда диффузия Арнольда может идти на быстрых резонансах. Кроме того, можем положить $q = 0$, так как $e \ll 1$ (4.5.5, 6). Найдем прежде всего границу стохастичности, для чего можно воспользоваться (2.12.29а). Полагая: $\alpha \sim 1$; $m = N_0$; $N = N_0 - 1$; $\varepsilon^{(N_0)} \sim \varepsilon^{N_0-1}$, получаем:

$$\varepsilon_s \sim \left(\frac{N_0}{2n_0}\right)^{\frac{2N_0}{N_0-1}} \quad (4.5.7)$$

Минимум достигается при наименьшем $N_0 = 3$: $\varepsilon_s \sim n_0^{-3}$.

Эта оценка получена при учёте только N_0 -частотных резонансов. Их, действительно, большинство, но они очень слабые из-за уменьшения эффективного параметра взаимодействия (4.5.5). При $N_0 \gg 3$ имеет поэтому смысл рассмотреть противоположный предельный случай парных резонансов, число которых равняется, очевидно, $N_0 - 1 \approx N_0$. Тогда критерий стохастичности (2.12.29а) превращается в:

$$\varepsilon_s \sim N_0^{-2} \quad (4.5.8)$$

Отсюда следует, что при достаточно большом N_0 система обязательно становится стохастической. Таковы, например, звездные ассоциации /174/. Если считать, что мас-

сы звезд в ассоциации одного порядка, то $\varepsilon \sim 1/N$, так как каждая звезда движется в среднем поле всех остальных. Из оценки (4.5.8) тогда следует, что граница стохастичности соответствует $N_0 \sim 3$. Двойная звезда, конечно, абсолютно устойчива в отсутствии внешних возмущений. Кратная звезда с $N_0 > 2$ также может быть устойчивой, если массы её компонент или расстояния между ними существенно различны, что дополнительно уменьшает параметр взаимодействия ε (4.5.1). Такова и наша Солнечная система.

Аналогичным образом ведет себя многоэлектронный возбужденный атом, что приводит, в частности, к автоионизации, о которой упоминалось в начале этого параграфа. И в этом случае стохастичность может нарушаться, если взаимодействующие электроны находятся на значительном расстоянии (на разных оболочках).

В сущности такая же картина остается и для ядра, так как в оценке (4.5.8) не использовалась специфичность кулоновского взаимодействия. Опять таки статистическая модель Бора, предполагающая стохастичность движения, может нарушаться, особенно при возбуждении небольшого числа нуклонов. Этот эффект наблюдался экспериментально /146/.

Возвратимся к Солнечной системе и оценим диффузию Арнольда сначала на быстрых резонансах. Разделим резонансы на разрушающие и разрушающие. Для первых эффективный параметр возмущения можно записать в виде: $\varepsilon_1 \sim \varepsilon^{N_0-1}$ ((4.5.5), $p=q=0$), причём должно быть: $N_0 \geq 3$; для вторых выразим параметр возмущения через число независимых частот $N = N'_0 - 1$ (4.5.6): $\varepsilon_2 \sim \varepsilon^N$; величины N_0 , N'_0 могут быть разными. В оценке для коэффициента диффузии (2.12.29) положим $\exp(\bar{m}_n / 4\pi_n N) \sim 1$, поскольку мы хотим оценить максимальную скорость диффузии на низших резонансах $n \sim 1$. Кроме того примем, что множитель $\frac{2N}{N_0(N-1)} (\dots)^{1/N} \sim 1$ (2.12.29). Вводя время диффузии $\tilde{\tau}$ на $\Delta I \sim I$, получим оценку:

$$(\bar{\omega}) \sim \sqrt{\varepsilon_1} \varepsilon_2^{-2} \cdot \exp\left(\varepsilon_1^{-\frac{1}{2N}}\right) \sim \\ \sim \varepsilon^{\frac{N+1}{2} - 2N} \cdot \exp\left(\varepsilon^{-\frac{N-1}{2N}}\right) \quad (4.5.9)$$

Если принять для Солнечной системы $\varepsilon \sim 10^{-3}$, то последнее выражение достигает минимума при $N_0 \approx N = 3$, равного: $(\bar{\omega}_0) \sim 10^{16}$ (лет)^{x)}. Это существенно больше времени существования Солнечной системы ($\sim 10^{10}$ лет).

Фактически время диффузии будет еще значительно больше, так как имеется только две большие планеты, для которых $\varepsilon \sim 10^{-3}$, тогда как для вышеприведенной оценки требуется четыре планеты ($N = 3$).

В случае двух планет, как уже отмечалось выше, для диффузии Арнольда требуется медленная частота, которая слишком мала, чтобы обеспечить заполнение зазора между быстрыми резонансами (см. выше). Тем не менее диффузия может идти с участием резонансов первой гармоники по медленной частоте: $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \rho \Omega = 0$; ($\rho = 0, \pm 1$). Всего имеется, таким образом, три резонанса, образующие пересечение, как раз необходимый минимум для диффузии Арнольда (§ 2.12). При этом эксцентриситет и наклонение орбит возрастают, происходит сближение орбит и, как следствие, значительное увеличение взаимодействия между планетами. Если начальное расстояние между планетами было не слишком велико, возможно даже пересечение орбит, что наверняка приводит к стохастичности. Последнее связано с тем, что при этом возможны сколь-угодно близкие прохождения, а, значит, параметр $n_0 \rightarrow \infty$ (4.5.3a) и плотность резонансов неограниченно возрастает (см. также рис. 4.5.1).

Ширина рассматриваемых резонансов и расстояние между ними имеют порядок (см. (4.5.3, 1)):

$$\Delta \omega_n \sim \omega \cdot i^P \sqrt{\varepsilon e^q} \cdot \exp\left(-\frac{n}{2n_0}\right) \quad (4.5.10)$$

x) Частота $\omega_0 \approx 0,53$ лет⁻¹ берется для Юпитера.

В том случае, когда массы двух планет существенно различаются, движение тяжелой планеты можно считать заданным (ограниченная задача трех тел). Если, кроме того, эксцентриситет тяжелой планеты $e_0 = 0$, то во вращающейся системе отсчета, связанной с тяжелой планетой, полная энергия легкой планеты сохраняется – так называемый интеграл Якоби, который может быть записан приближенно в форме /147/:

$$\frac{1}{a} + \frac{2 \cdot \cos i}{a_0^{3/2}} \cdot \sqrt{a(1-e^2)} \approx \text{const} \quad (4.5.11)$$

Отсюда видно, что если, как мы предположили выше для выбранных резонансов, $a = \text{const}$ в процессе диффузии Ариольда, то $e^2 + i^2 = \text{const}$ тоже ($e, i \ll 1$). Такая диффузия не может существенно изменить орбиту, если вначале $e, i \ll 1$. Поэтому надо учесть эксцентриситет тяжелой планеты, т.е. произвести разложение возмущения κ/Γ по обоим эксцентриситетам. Так как у тяжелой планеты эксцентриситет обычно мал, мы ограничимся только первой степенью его. Тогда оценка (4.5.3) принимает вид:

$$\varepsilon_n^{(z)} \sim \varepsilon(e_0 \kappa) e^{q-1} i^{2\rho} \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_0}\right) \quad (4.5.12)$$

где κ относится теперь к тяжелой планете. Вместо (4.5.10) получаем, соответственно:

$$\Omega_n \sim \omega \cdot i^\rho \sqrt{\varepsilon(e_0 \kappa) e^{q-1}} \exp\left(-\frac{\kappa}{2\kappa_0}\right) \quad (4.5.13)$$

$$\Delta_n \sim \varepsilon \omega$$

При этом указанный выше механизм диффузии работает для $q \geq 2$, так как при $q = 1$ нет боковых резонансов с медленной частотой, т.е. $\rho = 0$.

Для оценки скорости диффузии Ариольда необходимо использовать исходную формулу (2.12.22). В качестве разрушаемого выберем основной резонанс $\rho = 0$. Так как скорость диффузии резко зависит от e , то время диффузии будет определяться по порядку величины удвоением e от начального значения или учетверением энергии радиальных колебаний, которая составляет $\Delta I/I \sim e^2$ от полной энергии планеты. Оценивая необходимое для этого время как $\tau \sim (\Delta I)^2 / D_A$, получим из (2.12.22) для случая (4.5.13):

$$(\tilde{\tau}_\omega) \sim (\varepsilon e_0 n e^{q-1})^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{e}{c}\right)^q \cdot \exp\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \exp(n/n_0)}{e_0 n e^{q-1}}}\right) \quad (4.5.14)$$

Применим эту оценку к Солнечной системе. Рассмотрим вначале систему больших планет, характеристики которых по данным /139/ приведены в таблице 4.5.1, включая гипотетическую планету Ольберса (№ 5) между Марсом и Юпитером, распавшуюся на астероиды /147/. Величина ζ равна отношению частот соседних планет, а ζ_0 указывает ближайший резонанс. Выбор этого резонанса несколько произведен и определяется компромиссом между значением q и точностью резонанса ($\zeta - \zeta_0$).

Начнем с крайней пары Солнечной системы Нептун-Плутон. В этом случае, как отмечалось выше, работает не резонанс $2/3$ ($q = 1$), а совпадающий с ним резонанс $4/6$ ($q = 2$). Полагая $\varepsilon \sim 5 \times 10^{-5}$, получим с помощью оценки (4.5.14): $\tilde{\tau} \sim \sim 5 \times 10^{10}$ лет, что сравнимо с временем жизни Солнечной системы. Возможно поэтому, учитывая грубость оценки, что аномально большой эксцентриситет и наклонение орбиты Плутона объясняются именно диффузией Арнольда. С другой стороны обратное влияние Плутона на Нептун значительно слабее из-за малой массы Плутона ($\tilde{\tau} \sim 4 \times 10^{12}$ лет). Аналогичная аномалия для Меркурия не может быть объяснена, по-видимому, с помощью диффузии Арнольда из-за малой массы Венеры ($\tilde{\tau} \sim 7 \times 10^{11}$ лет^x). Заметим, однако, что если бы порядок соизмеримости частот Меркурия и Венеры был бы не $q = 3$, а $q = 2$, то даже при $e = 0.1$ мы получили бы $\tilde{\tau} \sim \sim 10^{10}$ лет, т.е. диффузия Арнольда была бы уже заметной. Возможно поэтому, что эта диффузия играла известную роль в процессе образования Солнечной системы, ограничивая расстояния между планетами снизу. Это связано с тем, что на малых расстояниях имеется много резонансов вида $(n-q)/n$ ($q = 2$; $n_0 \propto n^2$). Разумеется, нужно отдавать себе ясный отчет, насколько такие гипотезы являются спорными и малоубедительными, что, впрочем, довольно типично, по необходимости, для астрономии /147/. Тем не менее, когда обнаруживается новое явление, такое как диффузия

^x) Эта аномалия объясняется, возможно, малой массой самого Меркурия /141/.

Таблица 4.5.1

№	Название планеты	\bar{m} x)	a	ω_i	$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$	$\frac{n_1}{n_2}$	$\frac{\Delta - \Delta_0}{\Delta_0} \%$	e	c
1	Меркурий	0.036	0.39	4.16	0.3915	2/5	0.85	0.21	0.12
2	Венера	0.82	0.72	1.63	0.6152	3/5	1.5	0.007	0.059
3	Земля	1.00	1.00	1.00	0.5317	1/2	3.2	0.017	-
4	Марс	0.11	1.52	0.53	0.4014	2/5	0.14	0.093	0.032
5	Астероиды ^{xx)}	< 0.1	(2.8)	0.21	0.3948	2/5	0.52	-	-
6	Юпитер	310	5.2	0.084	0.4028	2/5	0.28	0.048	0.023
7	Сатурн	94	9.5	0.034	0.3504	1/3	1.7	0.056	0.043
8	Уран	14	19	0.012	0.5098	1/2	1.0	0.047	0.013
9	Нептун	17	30	0.0061	0.6599	2/3	0.68	0.009	0.031
10	Плутон	0.94	40	0.0040	-	-	-	0.25	0.30

x) Масса Солнца $M = 3.3 \times 10^5$

xx) Гипотетическая планета Ольберса, распавшаяся на астероидами /147/.

Арнольда в данном случае, полезно представить себе, хотя бы и несколько фантастически, все возможные его проявления.

Обратимся теперь к другой резонансной паре Юпитер - Сатурн, для которой :

$q = 3$; $\epsilon \sim 10^{-3}$; $n/n_0 \approx \frac{2}{9} \cdot \frac{q^2}{n} = 2/5$. В данном случае мы должны воспользоваться оценкой (4.5.10), так как массы обоих планет одного порядка. Это, впрочем, не даёт большой разницы, так как эксцентриситеты их орбит также близки по величине. Из оценки (4.5.14) получаем довольно большое время: $\tilde{\tau} \sim 10^{12}$ лет из-за малого эксцентриситета. Опять таки для $q = 1$ было бы $\tilde{\tau} \sim 3 \times 10^6$ лет и даже для $q = 2$ все еще $\tilde{\tau} \sim 10^9$ лет. Для других планетных пар диффузия Арнольда пренебрежимо мала из-за малых масс планет за исключением пары Сатурн-Уран. В последнем

случае: $\bar{\tau} \sim 3 \times 10^{10}$ лет, т.е. того же порядка, что и для пары Нептун-Плутон. Разница между этими парами заключается в том, что первая из них находится значительно дальше от резонанса. Возможно также, что оценка $\bar{\tau}$ для последней пары энчично занижена, так как аномально малый эксцентриситет орбиты Нептуна мог быть в прошлом существенно больше.

Наконец, возможен еще резонанс Юпитера с гипотетической планетой Ольберса (см.таблицу). Предположим, что эта планета, обладая малой массой, имела значительный эксцентриситет, такой, скажем, как у Меркурия: $e = 1/5$ ($\sim \epsilon$). Тогда оценка (4.5.14) даёт: $\bar{\tau} \sim 10^8$ лет. Этот результат, как нам кажется, позволяет устранить трудности с объяснением механизма разрыва планеты Ольберса и образования таким образом пояса астероидов. Насколько можно судить по литературе /147/, гипотеза разрыва первичной планеты является наиболее вероятной для объяснения происхождения астероидов. С нашей точки зрения разрушение планеты Ольберса могло явиться результатом сближения её с Юпитером. Собственно разрыв (или несколько разрывов) планеты могли произойти при этом и позже, например, под влиянием собственного вращения /147/. Что же касается распределения астероидов, то в настоящее время оно может существенно отличаться от первоначального вследствие эволюции орбит.

Заметим в связи с этим, что используемая обычно для анализа такой эволюции классическая теория возмущений неприменима вблизи резонансов /128/ для $t \gtrsim t_s$, где t_s — время развития неустойчивости в стохастическом слое, которое можно оценить посредством (4.5.13):

$$t_s \sim \Omega_n^{-1} \sim 10^3 \text{ лет} \quad (4.5.15)$$

Численное значение взято для резонанса 2/5 с Юпитером. Поэтому введенные Хиряма /148, 147/ "неизменные" или собственные элементы орбит астероидов имеют смысл только вдали от основных резонансов. В частности, диффузия Арнольда нарушает теорему Лапласа - Пуассона об отсутствии вековых возмущений у большой полуси орбиты. Интересно отметить, что пять основных семейств астероидов с близкими значениями "неизменных"

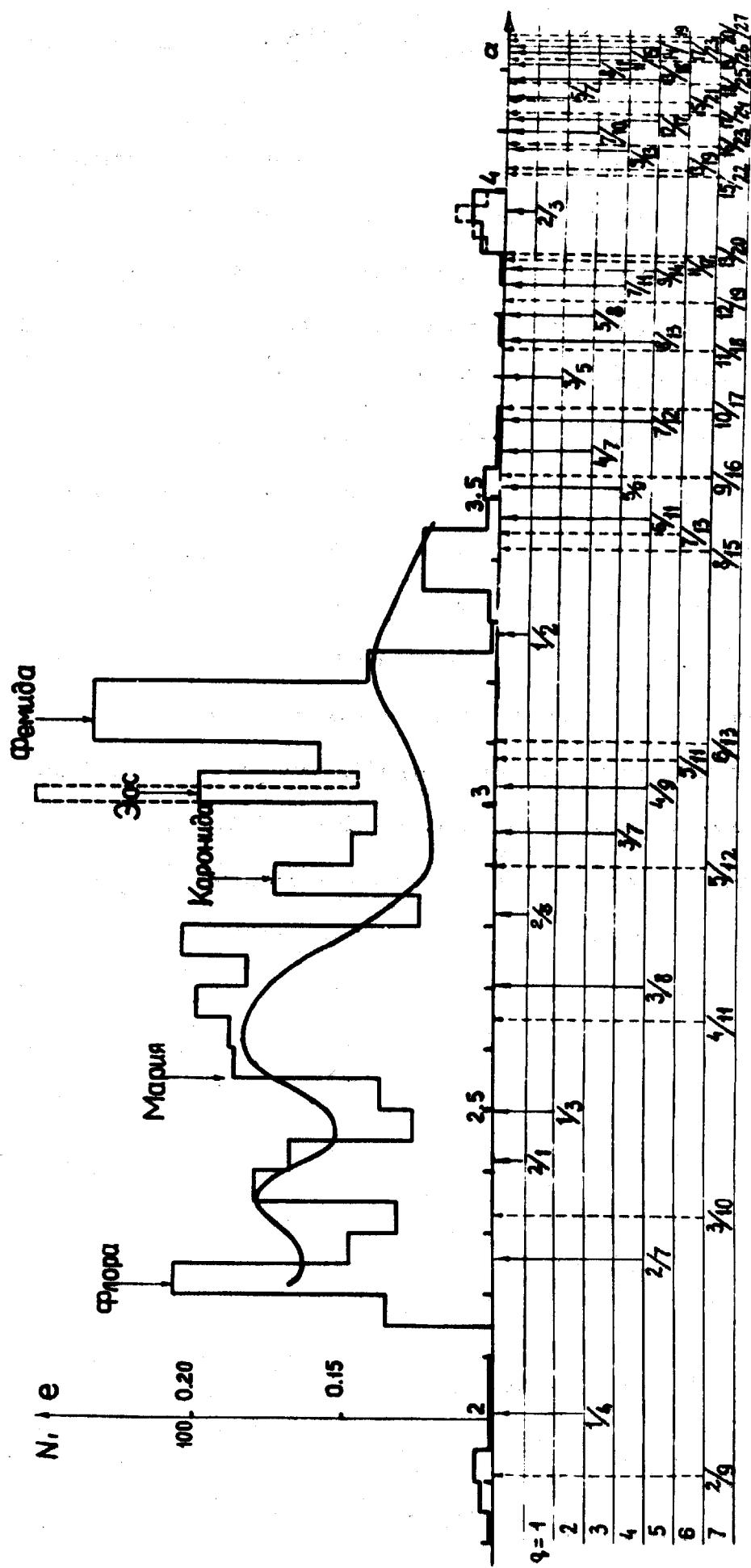


Рис. 4.5.1 Частотный спектр 1641 астероида (ломаная линия) и корреляции с эксцентриситетом e (кривая): $\sqrt{N_i}$ — число астероидов в интервале $\Delta e = 0.05$; пунктир дает распределение (E_2) в интервале $\Delta e = 0.025$.

элементов, найденных Хирама, лежат как раз между основными резонансами (рис. 4.5.1).

На рис.4.5.1 дана гистограмма распределения астероидов по большой полуоси (a) их орбиты, или, иначе говоря, частотный спектр астероидов. Представленный интервал: $1.8 < a < 4.0$ охватывает 1641 астероид из 1660, параметры которых приведены в [149]. Стрелками отмечены резонансы с Юпитером, которые разбиты на 7 групп по значению порядка соизмеримости $q = 1 \div 7.$ ^{x)}

Для всех резонансов с $q \leq 5$ в распределении имеются так называемые "люки", т.е. явные уменьшения числа астероидов. Несколько менее определенные "люки" наблюдаются и для резонансов с $q = 6$, но полностью отсутствуют при $q = 7$. Казалось бы исключением являются резонансы $2/3, 4/9$, которым соответствуют максимумы распределения вместо "люков". Однако более детальное распределение (пунктир) показывает, что и вблизи этих резонансов число астероидов уменьшается (ср. с резонансом $2/7$). Иногда упоминается еще "максимум" вблизи резонанса $3/4$ ($a = 4.2949$), имея ввиду единственный астероид Туле ($a = 4.2829; e \approx 0.032; i \approx 0.041$) [147]. Однако единственный случай не может служить серьезным возражением против общей закономерности, тем более что в данном случае величины e, i аномально малы ($\langle e \rangle = 0.141; \langle i \rangle = 0.166$ [147]).

Наконец, остается еще одно на этот раз несомненное исключение — так называемая группа троянцев (15 астероидов) [147], расположенная внутри резонанса $1/1$ ($a = 5.2028$), относительная ширина которого $\sim \sqrt{\epsilon} \approx 3\%$. Причина исключительности этого резонанса состоит в том, что он находится внутри стохастического кольца, так как расстояние между резонансами с заданным q ($\omega_1/\omega_2 = \frac{n-q}{n}$) стремится к нулю при $\omega_1/\omega_2 \rightarrow 1: \Delta_n \approx q/n^2$. Однако эти резонансы, ширина которых $\sim \sqrt{\epsilon e^q}$ ((4.5.13), $n_0 \approx \frac{2}{g} \cdot \left(\frac{q}{n}\right)^2$, см. выше), не могут разрушить полностью резонанс $1/1$, ширина которого существенно х) Иногда отмечают еще "люк", связанный с Марком (резонанс $2/1$), также показанный на рис.4.5.1. Однако понижение функции распределения в этом месте явно не выходит за пределы статистических ошибок.

больше ($\sim \sqrt{\varepsilon}$). Поэтому внутри резонанса 1/1 образуется устойчивая область, в которой и находится группа троянцев. Подобные устойчивые области возможны и для других резонансов, так как соседние резонансы с медленной частотой, вызывающие диффузию Арнольда, значительно слабее и не могут разрушить двухчастотный резонанс полностью. Этот эффект и объясняет, по-видимому, по крайней мере отчасти, сохранение некоторого числа астероидов в "люках".

Оценим скорость диффузии Арнольда для астероидов, полагая для простоты в (4.5.14) : $e_{\text{оп}} \sim e \sim i \sim 1/5$; $n \sim n_0$. Тогда для $q = 2$ получаем: $\tilde{\tau} \sim 4 \times 10^6$ лет. Граница работающих резонансов по q может быть найдена, если взять в качестве максимально наблюдаемого $\tilde{\tau} \sim 10^{10}$ лет. Получаем: $q_{\text{max}} = 4$ ($\tilde{\tau}_4 \sim 3 \times 10^9$ лет). Согласие с экспериментальными данными на рис.4.5.1 можно считать удовлетворительным, учитывая грубость оценок.

На рис.4.5.1 показана также зависимость среднего эксцентриситета орбит астероидов от их большой полуоси (по Путилину /147/), которая явно коррелирует с резонансами в соответствии с оценкой (4.5.14). Исключение составляет резонанс 1/2, особенностью которого является равенство частот вращения астероида и радиальных колебаний Юпитера в системе отсчёта, вращающейся вместе с последним. При этом колебания могут быть сфазированы таким образом, чтобы сближение было минимальным. Этот эффект определенно играет роль в движении астероида, так как при $e > 0.2$ распределение долготы перигелия астероидов имеет явный максимум в направлении перигелия Юпитера /147/. Однако, механизм, приводящий к такой преимущественной ориентации орбит, остается неясным, особенно если учесть прецессию орбит с периодом

$$\sim \frac{2\pi}{\varepsilon \omega} \sim 10^4 \text{ лет.}$$

Ширина большинства "люков" оказывается $\sim 1\%$ (рис.4.5.1) и слабо зависит от порядка резонанса. Её нижняя граница определяется шириной резонанса и составляет $\sim 10^3 \div 10^{-2}$ ($q = 2 \div 5$). Верхняя граница зависит от дополнительной диффузии, например за счёт взаимодействия астероидов между собой или с межпланетным веществом.

вом. Кроме диффузии играет роль также систематическое изменение орбит. В связи с этим обратим внимание, что часть "люков" ($2/7$; $3/8$; $4/9$; $2/3$, см.рисунок) сдвинуты относительно резонанса в сторону больших энергий (a), что соответствует увеличению размеров орбиты со временем. Как бы то ни было можно ожидать, что если расстояние между работающими резонансами станет меньше ширины "люка" большинство астероидов должно погибнуть. По-видимому, именно это и наблюдается на участке $a > 3.2$ (рис.4.5.1). Имеется всего 16 астероидов с $a > 4.0$ и со специальными значениями параметров; остальные, если они и существовали вначале, должны были испытывать слишком тесные сближения с Юпитером, попадать в стохастическое кольцо и захватываться Юпитером. Возможно, этим же объясняется и практически полное отсутствие астероидов вблизи Марса (имеется всего 3 астероида с $a < 1.8$).

Насколько нам известно, единственной конкурирующей гипотезой является гипотеза Брауэра /151/, которая объясняет появление "люков" просто фазовыми колебаниями на резонансах в предположении равномерного или хотя бы достаточно гладкого распределения астероидов по интегралам движения. Такой эффект несомненно существует, однако, остается неясной отмеченная выше независимость ширины "люка" от q и, в то же время, ограничение работающих резонансов условием $q \leq 6$ (рис.4.5.1). Для выяснения вопроса необходимы более аккуратные оценки диффузии Арнольда в Солнечной системе.

§ 4.6 Нелинейные волны. Турублентность.

В этом параграфе мы попробуем применить развивающую концепцию стохастичности к движению непрерывной среды. Именно в этом случае мы имеем хорошо известную и чрезвычайно наглядную картину стохастического движения — турбулентность. Более того, турбулентное движение представляет собой типичный пример системы с разделенным фазовым пространством (§ 2.5) (ламинарная и турбулентная зоны), факт, который кажется столь удивительным для дискретной динамической системы. Точно также существуют критические значения параметров, например, скорости потока даю-

щие границу турбулентности (стохастичности). При аналитическом вычислении этой границы используется критерий локальной неустойчивости /164/, который в дискретных системах эквивалентен стохастичности (§ 2.4). Таким образом существует далеко идущая аналогия между движением дискретной и непрерывной динамических систем. Эта аналогия становится вполне понятной, если вспомнить, что в обычных условиях, например, при ограниченных размерах среды, её движение может быть разложено на некоторые дискретные моды ("квазичастицы"), слабо взаимодействующие между собой по крайней мере при некоторых значениях параметров задачи. Более того, в ряде случаев спектр таких мод ограничен, например, дисперсией, так что эффективно взаимодействует лишь конечное число мод. В последнем случае имеется полная аналогия с дискретной системой.

Особенностью методов исследования стохастичности, развивающихся в настоящей работе, является использование свойств нелинейного резонанса. Поэтому в настоящий момент неясно, каким образом можно применить эти методы (и можно ли вообще) для исследования классической турбулентности в гидродинамике. Однако, есть и специфические колебательные проблемы движения непрерывной среды. Это – взаимодействующие между собой нелинейные волны. Подобные проблемы изучались с разных сторон многими авторами. Мы не имеем здесь возможности подробно анализировать все эти работы, упомянем только два наиболее красивых на наш взгляд эффекта. Первый из них – устойчивость нелинейных мод, открытая Ферми, Паста и Уламом /165/ – аналог колмогоровской устойчивости для непрерывной системы. Развитие этого направления позволило Крускалу и Забускому открыть специфические нелинейные образования – солитоны, обладающие замечательной устойчивостью, или, иначе, так называемые обратимые ударные волны /166/. Второй эффект – бесстолкновительные (и, как обычно, необратимые) ударные волны – был предсказан теоретически Сагдеевым /175/.

Ниже мы ограничимся исследованием проблемы Ферми-Паста-Улама /165/, при чём в качестве модельной системы возьмем не непрерывную среду, а, так же, как и

в /165/, приближенно представляющую её цепочку связанных нелинейных осцилляторов, или, короче, нелинейную цепочку, движение которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_\ell = (x_{\ell+1} - 2x_\ell + x_{\ell-1}) + \beta [(x_{\ell+1} - x_\ell)^3 - (x_\ell - x_{\ell-1})^3] \quad (4.6.1)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, N-1; a = 1; L = N.$$

Здесь a — невозмущенное расстояние между соседними массами ($\bar{m} = 1$), соединенными нелинейной пружиной; L — полная длина цепочки.

Эта модель оказывается очень удобной прежде всего для численных экспериментов, поскольку не требуется интегрировать уравнения в частных производных. Кроме того, такая сравнительно простая модель даёт возможность проследить переход от дискретной системы к непрерывной среде.

Система (4.6.1) соответствует волновое уравнение второго порядка /165/:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left(1 + 3\beta \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right) + \gamma^2 \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \quad (4.6.2)$$

где $z \approx la$ — координата вдоль цепочки. Последний член был введен Забуским /167/ и характеризует дисперсию, обусловленную дискретности цепочки:

$$\gamma^2 = \frac{a^2}{12} = \frac{1}{12} \left(\frac{L}{N} \right)^2 \quad (4.6.3)$$

В отсутствие дисперсии в решении нелинейного волнового уравнения через короткое время возникает сингулярность и затем — неоднозначность.

Для волны одного направления можно написать также уравнение первого порядка /167/:

$$u_z + u^2 u_{zz} + \delta^2 u_{zzz} = 0 \quad (4.6.4)$$

где $u = \partial x / \partial z$; $\delta^2 = 2\gamma^2 / 3\beta$; $\tilde{z} = (3/2)\beta(t-z)$, а индекс означает дифференцирование по соответствующему аргументу. В таком виде уравнение справедливо только при $\beta \rightarrow 0$ (см. ниже).

Как следует из выражений (4.6.1, 2, 4) мы ограничиваемся здесь (более простым)

случаем кубической нелинейности (по силе). Квадратичная нелинейность ($u^2 \rightarrow u$) детально исследована в диссертации Израйлева.

Статистические свойства нелинейной цепочки (4.6.1) выяснены более или менее подробно в работе /168/. Главным здесь является граница стохастичности, которая позволила объяснить /168/ парадоксальный в свое время результат Ферми, Паста, Улама - отсутствие равнораспределения по энергии между модами нелинейной цепочки.

Найдем прежде всего положение границы стохастичности. В качестве невозмущенной системы возьмем линейную цепочку ($\beta = 0$), движение которой можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний $Q(z)$:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \cdot \sin \frac{\pi k z}{N} \quad (4.6.5)$$

с частотами:

$$\omega_k = 2 \cdot \sin \frac{\pi k}{2N} \quad (4.6.6)$$

В качестве малого параметра возмущения примем величину:

$$\xi = 3\beta u^2 = 3\beta \omega^2 \quad (4.6.7)$$

где ω - плотность энергии колебаний на единицу длины цепочки. Ограничимся случаем $k \ll N$, который даёт возможность перейти к непрерывной среде ($N \rightarrow \infty$).

Тогда расстояние между резонансами в первом приближении равно:

$$\Delta = \omega_{k+1} - \omega_k \approx \frac{\pi}{N} \quad (4.6.8)$$

Это выражение справедливо, если число возбужденных мод (N_0) невелико. В противном случае нужно использовать оценку (2.12.15), которая в данном случае (четырехфононное) взаимодействие (4.6.2)) приводит к выражению:

$$\Delta \sim N_0^{-3} \quad (4.6.9)$$

Предыдущая формула применима, таким образом, при условии:

$$N_0 \lesssim N^{1/3} \quad (4.6.10)$$

х) Мы рассматриваем здесь колебания цепочки с закрепленными концами:
 $x_0 = x_N = 0$, т.е. стоячие волны; по поводу бегущих волн см. ниже.

Коэффициент нелинейности цепочки $\alpha \sim \epsilon$, поскольку невозмущенная система является линейной, а кубическая нелинейность даёт поправку к частоте уже в первом приближении /3/. В этом и состоит упрощение задачи при кубической нелинейности по сравнению с квадратичной, для которой поправка к частоте появляется только во втором приближении. Наконец, частота фазовых колебаний имеет порядок:

$$\Omega_\phi \sim \epsilon \omega_k \approx \frac{\epsilon \pi k}{N} \quad (4.6.11)$$

Откуда граница стохастичности определяется оценкой /168/:

$$\epsilon_s \sim \frac{1}{k} \sim \frac{\lambda}{L} \quad (4.6.12)$$

где λ - длина волны колебаний. Видно, что при возбуждении низших мод порог стохастичности повышается; это объясняет результат Ферми, Паста, Улама /165/.

Фактически в оценку (4.6.10) нужно подставлять максимальное значение k , возникающее в процессе эволюции нелинейной волны. Эволюция сводится, в основном, к распаду начальной волны на так называемые солитоны /166/. Величина k_{sol} определяется шириной солитона и может быть легко оценена из (4.6.4) /166/:

$$k_{\text{sol}} \sim L \cdot \left(\frac{u}{\delta} \right) \sim \sqrt{\epsilon} \cdot N \quad (4.6.13)$$

Эта оценка имеет смысл, если начальное $k_0 \lesssim k_{\text{sol}}$; в противном случае распад на солитоны не происходит /169/. Для (4.6.13) граница стохастичности (4.6.12) принимает вид:

$$\epsilon'_s \sim N^{-2/3} \quad (4.6.14)$$

В следующем приближении по k/N частота $\omega_k \approx \pi k/N = (\pi^3/24) \cdot (k/N)^3$, так что возможна более плотная система резонансов с минимальным расстоянием:

$$\Delta_1 \sim \frac{k^2}{N^3} \quad (4.6.15)$$

Это даёт границу стохастичности вида:

$$\epsilon_s^{(1)} \sim \frac{k}{N^2} \quad (4.6.16)$$

Полная ширина этой системы резонансов составляет: $\Delta \omega \sim (k/N)^3$, что соответствует обмену энергией:

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} \sim \frac{\Delta \omega}{E_k \cdot \omega'_E} \sim \frac{k^2}{\varepsilon N^2} \quad (4.6.17)$$

Сравнивая с (4.6.16) находим, что в интервале:

$$\frac{k}{N^2} \lesssim \varepsilon \lesssim \frac{k^2}{N^2} \quad (4.6.18)$$

должна иметь место развитая стохастичность.

Наконец, возможна еще стохастичность за счёт нелинейного разброса частот ω_k , который имеет порядок:

$$\Delta \omega_k \sim \Delta E_k \cdot \omega'_E \sim \varepsilon \omega_k \cdot \frac{\Delta E_k}{E_k} \sim \varepsilon \cdot \frac{\Delta E_k}{E_k} \quad (4.6.19)$$

поскольку при достаточно большом N каждому резонансу невозмущенных частот соответствует, вообще говоря, несколько комбинаций мод. Нелинейное возмущение снимает это вырождение и приводит к сильному разрушению резонансов при $\Delta E_k \sim \sim E_k$.

Рассмотрим теперь случай бегущей волны, которая описывается уравнением первого порядка (4.6.4) в системе отсчёта, движущейся со скоростью невозмущенной (линейной) волны. Замечательной особенностью уравнения (4.6.4) является независимость его от параметра возмущения β , который просто изменяет масштаб времени. Отсюда сразу вытекает, что в этом случае невозможен критерий стохастичности типа (4.6.12). Это, в свою очередь означает, что поведение стоячих и бегущих нелинейных волн может существенно различаться. Другая альтернатива указана ниже.

Единственным параметром уравнения (4.6.4) является отношение:

$$R = \left(\frac{uL}{k\delta} \right)^2 \sim \varepsilon \left(\frac{N}{k} \right)^2 \quad (4.6.20)$$

которое определяет также условие распада волны на солитоны ($R \gtrsim 1$) /169/.

Вопрос о том, является ли последнее неравенство также и условием неустойчивости, остается пока открытым, хотя некоторые численные эксперименты /166/ склоняют к мысли, что это не так.

Выше отмечалось, что уравнение первого порядка (4.6.4) справедливо только в первом приближении по $\beta \rightarrow 0$. Следующие приближения были получены Круш-

каль; например, с точностью $\sim \beta^2$ уравнение принимает вид:

$$u_z + u_z''^2 \left(1 - \frac{9}{16} \beta u^2\right) + \delta^2 u_{zzz} = 0 \quad (4.6.21)$$

Никаким преобразованием масштабов невозможно избавиться здесь от β , значит, этот параметр будет входить и в критерий стохастичности.

Перейдем теперь к описанию некоторых численных экспериментов с нелинейной цепочкой, которые были проведены совместно с Израйлевым и Хисамутдиновым и подробно описаны в диссертации Израйлева.

Как уже отмечалось выше, интегрировалась система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.6.1) с граничными условиями: $x_0 = x_N = 0$. Начальные условия задавались через нормальные координаты $Q(0)$ ($Q'(0) = 0$) (4.6.5). Ошибки счёта контролировались по сохранению полной энергии цепочки; их значения приведены в подписях к рисункам. Время движения и шаг интегрирования (h) приводятся в естественных единицах (4.6.6).

Основной проблемой обработки результатов численного счёта являлся выбор чёткого и удобного критерия того, что движение действительно является стохастическим. В различных случаях использовались следующие методы.

1. Визуальная оценка по кривым зависимости энергий нескольких мод от времени, а также по виду спектра в разные моменты времени ($E_k(t)$). Этот метод даёт достаточно чёткий результат, если вначале возбуждена всего одна мода, как это имело место в большинстве случаев в работе /165/. Пример такого случая для наших вычислений приведен на рис.4.6.1. Нижняя кривая (δ) демонстрирует чёткие почти-периодические колебания энергии первой моды. К сожалению, такие начальные условия возможны лишь для самых низших мод. Дело в том, что мода $k \ll N$ может непосредственно обениваться энергией только с модами $3k, 5k, 7k$ и т.д. В случае возбуждения одной достаточно высокой моды её энергия практически остается неизменной. На рис.4.6.2 приведен пример возбуждения единственной моды $k_0 = 15$. Небольшие колебания энергии связаны с взаимодействием через высшие моды. Причины

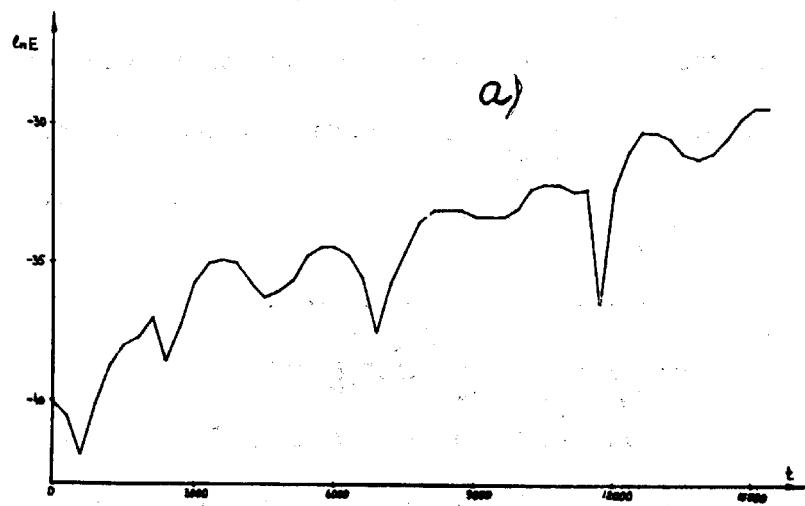


Рис.4.6.1

Слабая стохастичность:
 $E_1(0) \approx 0.0788$;
 $E_2 \approx 5.3 \times 10^{-18}$; $\beta = 8$;
 $\epsilon \approx 0.06$; $t_{\max} \approx 15300$; $h = 1/2$;
 $\Delta E/E \approx 0.15\%$; a -
 рост $E_1(t)$; δ - за-
 висимость $E_1(t)$.

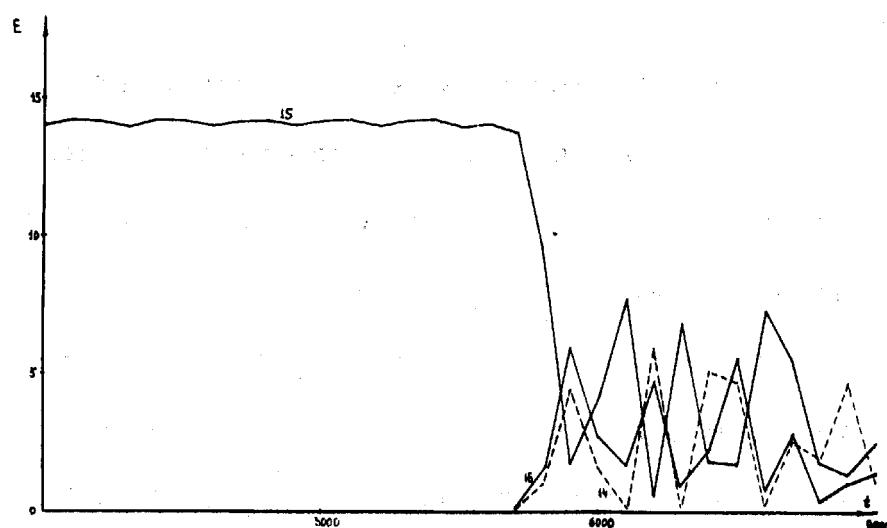
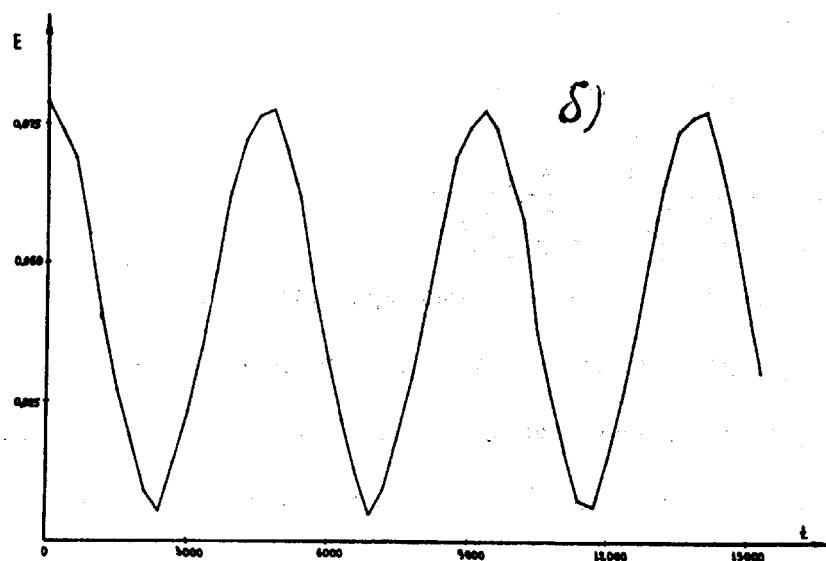


Рис.4.6.2

Возбуждение единствен-
 ной (15-й) моды: $E_{15} \approx$
 ≈ 14.1 ; $\beta \approx 0.0314$;
 $\epsilon \approx 0.04$; $t_{\max} = 9000$;
 $h = 1/6$; $\Delta E/E \approx 1.5\%$.

интенсивного обмена энергией после $\zeta = 5000$ будут обсуждаться ниже.

2. Автокорреляции (§ 2.3) вычислялись для смещения определенного осциллятора x_j и для энергии определенной моды колебаний E_k по следующим формулам:

$$\rho(x_j, \tau) = \frac{\overline{x_j(t) \cdot x_j(t-\tau)}}{\overline{x_j^2(t)}} \quad (4.6.22)$$

$$\rho(E_k, \tau) = \frac{\overline{E_k(t) E_k(t-\tau)} - \overline{E_k(t)}^2}{\overline{E_k^2(t)} - \overline{E_k(t)}^2}$$

Здесь черта означает усреднение по ζ через равные промежутки $4t$; τ — сдвиг по времени. Во всех случаях для $\rho(x_j, \tau)$ $j = 16$, что при выбранном $N = 32$ соответствует среднему осциллятору цепочки.

3. Корреляции между модами вычислялись по формуле:

$$\rho(E_k, E_e) = \frac{\overline{E_k E_e} - \overline{E_k} \cdot \overline{E_e}}{\sqrt{[(\overline{E_k^2} - \overline{E_k}^2)(\overline{E_e^2} - \overline{E_e}^2)]}} \quad (4.6.23)$$

где значения E_k и E_e берутся в один и тот же момент времени через $4t$, а черта, так же как и в (4.6.22), означает усреднение по ζ . Вследствие закона сохранения полной энергии системы коэффициент корреляции (4.6.23) отличен от нуля даже для стохастического движения. Нетрудно показать, что в последнем случае он равен:

$$\rho(E_k, E_e) = -\frac{1}{N-1} \quad (4.6.24)$$

Таким образом, знание этого коэффициента даёт возможность определить эффективное (среднее) число взаимодействующих мод N .

4. Локальная неустойчивость колебаний, которая означает, что почти любые близкие вначале траектории расходятся экспоненциально быстро в процессе движения. Для исследования локальной неустойчивости мы использовали свойство пространственной симметрии нашей системы, согласно которому четные моды не могут появиться в процессе движения, если они не были возбуждены вначале [165]. Поэтому имеется точное решение $E_{2k}(t) = 0$ и нам достаточно проследить за ростом четных мод, если вначале сообщить им очень небольшую энергию. Мы обнаружили эту своеобразную неустойчивость чётных мод случайно. Когда исследовалось возбуждение одной един-

ственной моды, в процессе счёта оказалось, что энергия чётных мод ("запрещенных") увеличивается от машинного нуля ($\sim 10^{-19}$) до значительной величины и даже становится сравнимой с энергиями нечётных мод. Значит, с самого начала существовала несимметрия в $X_\ell(t)$ относительно середины цепочки. "Виновником" оказалась процедура вычисления синуса, входящего в формулы преобразования (4.6.5). Обнаружилось, что синус вычислялся с некоторой погрешностью, зависящей от номера моды k , в результате чего и возникала слабая несимметрия, соответствующая некоторому малому возбуждению чётных мод. Впоследствии, когда это было необходимо, проводилась специальная симметризация $X_\ell(t)$ сразу же после перехода от $Q_k(t)$ к $X_e(t)$.

Этот эффект и был положен в основу метода локальной неустойчивости.

На рис.4.6.2 как раз и представлен случай, когда в результате быстро развивающейся неустойчивости энергия, ранее сосредоточенная в одной моде ($k_o = 15$), через некоторое время резко переходит в соседние моды. Этот метод дал возможность обнаружить слабую неустойчивость и для случая $k_o = 1$. Параметры взяты из работы /165/, авторы которой рассматривали движение в этом случае как квазипериодическое. Действительно, рис.4.6.1б не даёт никакого повода усомниться в этом. Тем не менее, рис.4.6.1а показывает, что существует, хотя и слабая, неустойчивость, которая может оказаться на общем поведении (например, первой моды) через достаточно большое время. На рис.4.6.3 еще раз продемонстрирован рост чётных мод ($k_o = 15,17$), причём заметно, что далекие ($k = 2,30$) моды "вырастают" позднее, чем более близкие ($k = 14,18$), хотя скорость роста у всех мод примерно одинакова. Заметим также, что переход энергии к высшим модам ($k = 30$) происходит быстрее, чем к низшим ($k = 2$). Этот эффект был отмечен еще в /168/.

С помощью этого же метода, задавая в некоторый момент времени начальное возмущение чётных мод ($\sim 10^{-14} E$), было проведено исследование границы стохастичности. При этом возбуждались по три нечётных моды и определялась скорость рос-

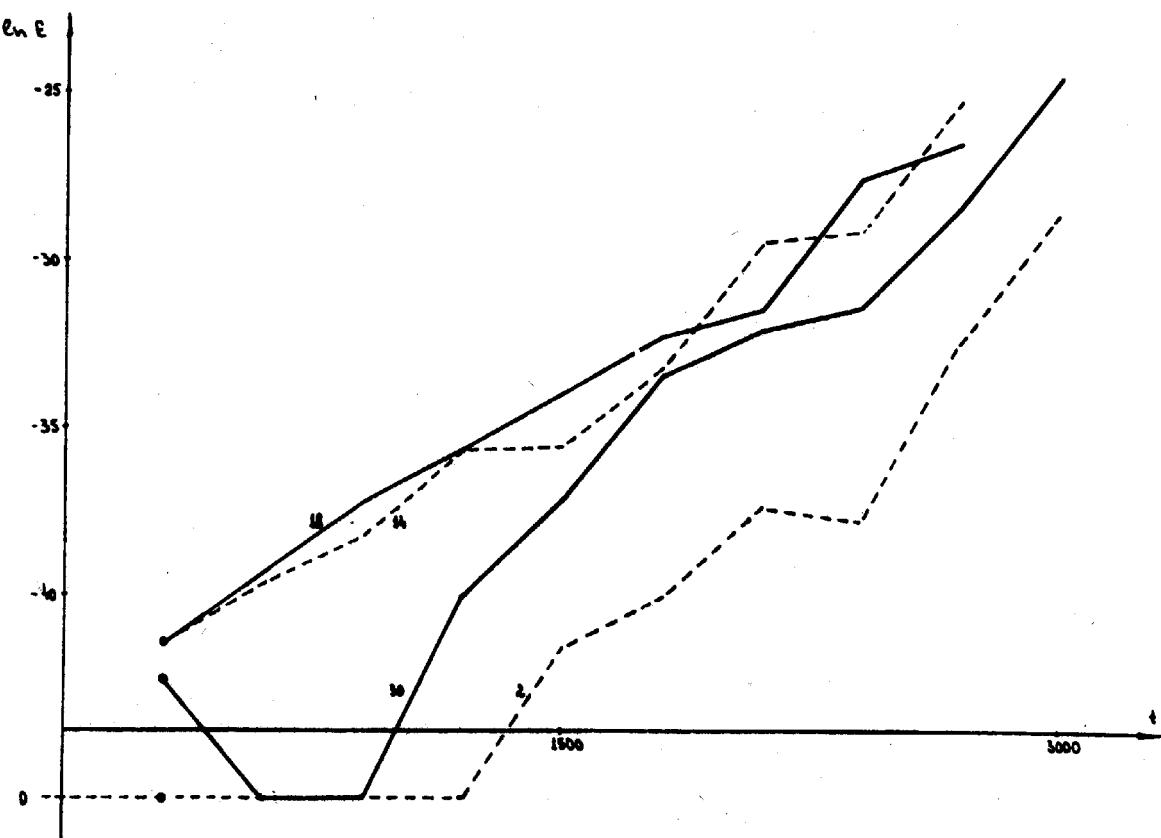


Рис.4.6.3. Экспоненциальный рост чётных мод при начальном возбуждении нечётных ($k_o = 15; 17$): цифры указывают номера мод; нуль на графике — машинный нуль, соответствующий $E_k \sim 10^{-20}$; $E \approx 20$; $\beta = 0.0314$; $\xi \approx 0.06$; $t_{\text{макс}} = 3000$; $h = 1/6$; $\Delta E/E \approx 3.5\%$.

та энергии близлежащих чётных мод.

Описанный метод является чрезвычайно удобным, во-первых, из-за своей наглядности, а во-вторых, в этом случае не требуются большие времена счёта. Кроме того, один счёт даёт сразу расстояние между двумя близкими траекториями.

Сводные данные приведены на рис.4.6.4 в виде вертикальных отрезков, дающих экспериментальный интервал значений скорости роста $1/\tilde{\gamma}$. Группы данных 1, 11, 111, 1У получены по росту чётных мод при начальном возбуждении трёх соседних нечётных мод в различных участках спектра. Группы У, У1 получены по разбеганию близких траекторий, причём в первом случае (\bar{Y}) были возбуждены те же моды, что и для (I), но с симметризацией, т.е. с полным устранением чётных мод, а во втором случае (U_1) возбуждались как чётные, так и нечётные моды ($k_o = 28, 29, 30$).

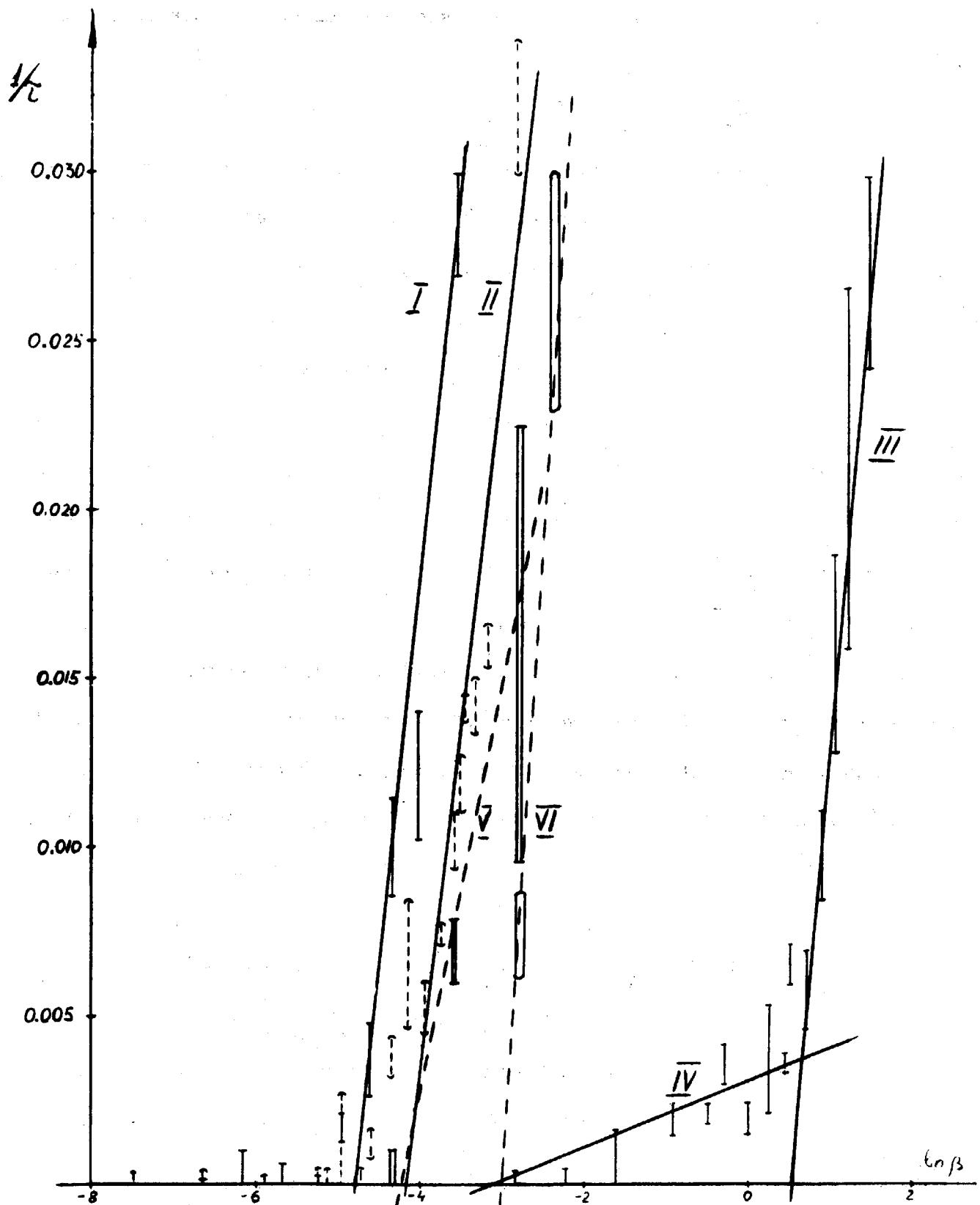


Рис.4.6.4. Зависимость скорости развития локальной неустойчивости от параметра β .
 Начальные условия: $k_0 = 27, 29, 31$ (1), $E \approx 30$; $k_0 = 15, 17, 19$ (11),
 $E \approx 17$; $k_0 = 1, 3, 5$ (111 и 1У), $E \approx 0.95$; $k_0 = 27, 29, 31$ с сим-
 метризацией (У), $E \approx 30$; $k_0 = 28, 29, 30$ (У1), $E \approx 35$.

На рис.4.6.4 использован полулогарифмический масштаб в соответствии с ожидавшейся зависимостью (2.11.4):^{x)}

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}} = \frac{\Delta}{\pi} \cdot \ln \frac{\beta}{\beta_{kp}} \quad (4.6.25)$$

где β_{kp} лежит на границе стохастичности, а Δ - порядка расстояния между резонансами. Действительно, при больших β экспериментальные данные ложатся на прямые в пределах ошибок. Однако при малых β имеются существенные отклонения, для объяснения которых мы выдвигаем гипотезу, связывающую эти отклонения, всегда в сторону больших $1/\tilde{\sigma}$, с другими более плотными системами резонансов. Это приводит одновременно и к уменьшению β_{kp} , которое определяется по пересечению интерполяционной прямой на рис.4.6.4 с осью абсцисс, и к уменьшению наклона прямой. Качественно именно это и наблюдается. Эффект особенно отчетливо виден при возбуждении низших мод, где кроме "основной" прямой (III) можно столь же уверенно провести и вторую прямую (IY).

Количественное сравнение может быть выполнено путем измерения наклона интерполяционных прямых. Среднее значение этого наклона для всех групп кроме (IY) даёт: $\langle \Delta \rangle \approx 8.2 \times 10^{-2}$, что хорошо согласуется с ожидаемой величиной:

$\Delta \approx \pi/\nu \approx 0.1$ (4.6.8). Для прямой IY: $\Delta \approx 3 \times 10^{-3}$. Это может быть сопоставлено с предсказываемой теорией плотной системой резонансов (4.6.15): $\Delta_1 \sim \sim k^2/\nu^3 \sim 10^{-3}$. В этом случае $\beta_{kp} (\propto \Delta)$ должно уменьшиться во столько же раз. Это действительно подтверждается по порядку величины:

$$\Delta(\text{III}) / \Delta(\text{IY}) \approx 25 : \beta_{kp}(\text{III}) / \beta_{kp}(\text{IY}) \approx 37.$$

Возникает вопрос, чем же отличаются в таком случае обе границы стохастичности с точки зрения поведения системы в целом? Ответ состоит в том, что более плот-

x) Функция $\tilde{\sigma}(\beta)$ зависит, как мы знаем, от фазовых соотношений между резонансами, причём закон (4.6.25) является в некотором смысле "нетипичным" (§ 2.11). Оправданием выбора такого закона служит в конечном счёте сравнение с экспериментом (см. ниже). Заметим только, что в рассматриваемом случае действительно могут быть специальные фазовые соотношения из-за особых начальных условий: $\dot{\Phi}_k(0) = 0$ (см. выше).

ная система резонансов может быть недостаточно широкой (см. выше). Поэтому перекрытие резонансов такой системы не приводит, вообще говоря, к полной стохастичности; вместо этого образуется более или менее узкая стохастическая полоса с ограниченным изменением энергии взаимодействующих мод (4.6.17).

По-видимому, именно этим эффектом объясняется странное на первый взгляд поведение системы для случая, представленного на рис. 4.6.1. Так, верхняя кривая на этом рисунке явно указывает на локальную неустойчивость движения. Однако эта неустойчивость не развивается, по-видимому, до сколько-нибудь заметной величины, так как она совершенно не проявляется на нижней кривой. В частности, последовательные максимумы на этой кривой различаются между собой на несколько процентов, однако, эта разница не растет экспоненциально, как на верхней кривой.

Возникает еще более важный вопрос, может ли такой стохастический слой привести к значительному перераспределению энергии между модами за достаточно длительное время? Хотя у нас нет сейчас никаких экспериментальных данных по этому поводу, мы знаем, что, вообще говоря, это возможно благодаря диффузии Арнольда (§ 2.12). Однако эта неустойчивость развивается чрезвычайно медленно, и поэтому её имеет смысл рассматривать отдельно от сильной неустойчивости, вызванной перекрытием широкой (и менее плотной) системы резонансов.

Данные рис. 4.6.4 удовлетворительно согласуются с оценками положения границы стохастичности (4.6.12, 14). Так, для случая 11 экспериментальное значение $\Sigma_{kp} \approx 0.03$, а оценка (4.6.12) даёт: $\Sigma_s \sim 0.06$; для случая 111: $\Sigma_{kp} \approx 0.17$; $\Sigma'_s \sim 0.1$ (в этом случае нужно учесть образование солитонов (4.6.13)). На остальные случаи наши оценки не распространяются из-за $k_o \approx \sqrt{N}$ (см. § 168/).

Отметим, что положение границы стохастичности существенно зависит от "деталей" начального состояния. Последний эффект демонстрируется прямыми Y , Y_1 на рис. 4.6.4. Так, для прямой \bar{Y} β_{kp} приблизительно в 2 раза больше, чем для прямой I , причём единственное различие между ними состоит в полном отсутствии

четных мод для случая (V). Еще более существенное различие имеет место в случае возбуждения мод смешанной четности (Y1), где β_{kp} превышает значение для сравнимого случая (J) почти на порядок. Трудно сказать сейчас, с чем это связано, может быть, например, с уменьшением числа мод одинаковой чётности. Во всяком случае это еще раз демонстрирует очень сложную структуру переходной зоны.

Мы знаем, что локальная неустойчивость не обязательно означает сильную стохастичность (хотя, по-видимому, обязательно приводит к реальной неустойчивости). Поэтому желательно использовать другие методы, для того чтобы убедиться, что при достаточно больших β , E наша система (4.6.1) действительно является стохастической. Были проделаны три контрольных счёта на предельно возможное в наших условиях время $t_{\text{max}} \sim 10^4$.

В первом случае были возбуждены три нечётные моды ($k_o = 15, 17, 19$), как и для случая (11) на рис.4.6.4, но с симметризацией. Значение $\beta \approx 0.0314$ было выбрано приблизительно в 2 раза больше β_{kp} . Измерялись автокорреляции 15й моды и смещения центрального осциллятора, а также корреляции между модами 15 и 17. Результаты приведены на рис.4.6.5. Видно, что корреляции носят почти-периодический характер, а число взаимодействующих мод практически остается без изменений:

$$\nu = 4 \pm 1 \quad (4.6.23).$$

Этот результат не обязательно противоречит данным по положению границы стохастичности на рис.4.6.4. Дело в том, что условия возникновения стохастичности определяются на самом деле энергией взаимодействующих мод /168/, а не только полной энергией, как это принято для простоты выше (4.6.12). Поэтому, во-первых, энергия не может распространяться на большое число мод, а, во-вторых, энергия каждой моды не может значительно уменьшиться вблизи границы стохастичности, так как опять таки нарушаются условия стохастичности. Это значит, что возможен только частичный обмен энергией между модами, что, в свою очередь, приводит к остаточным корреляциям.

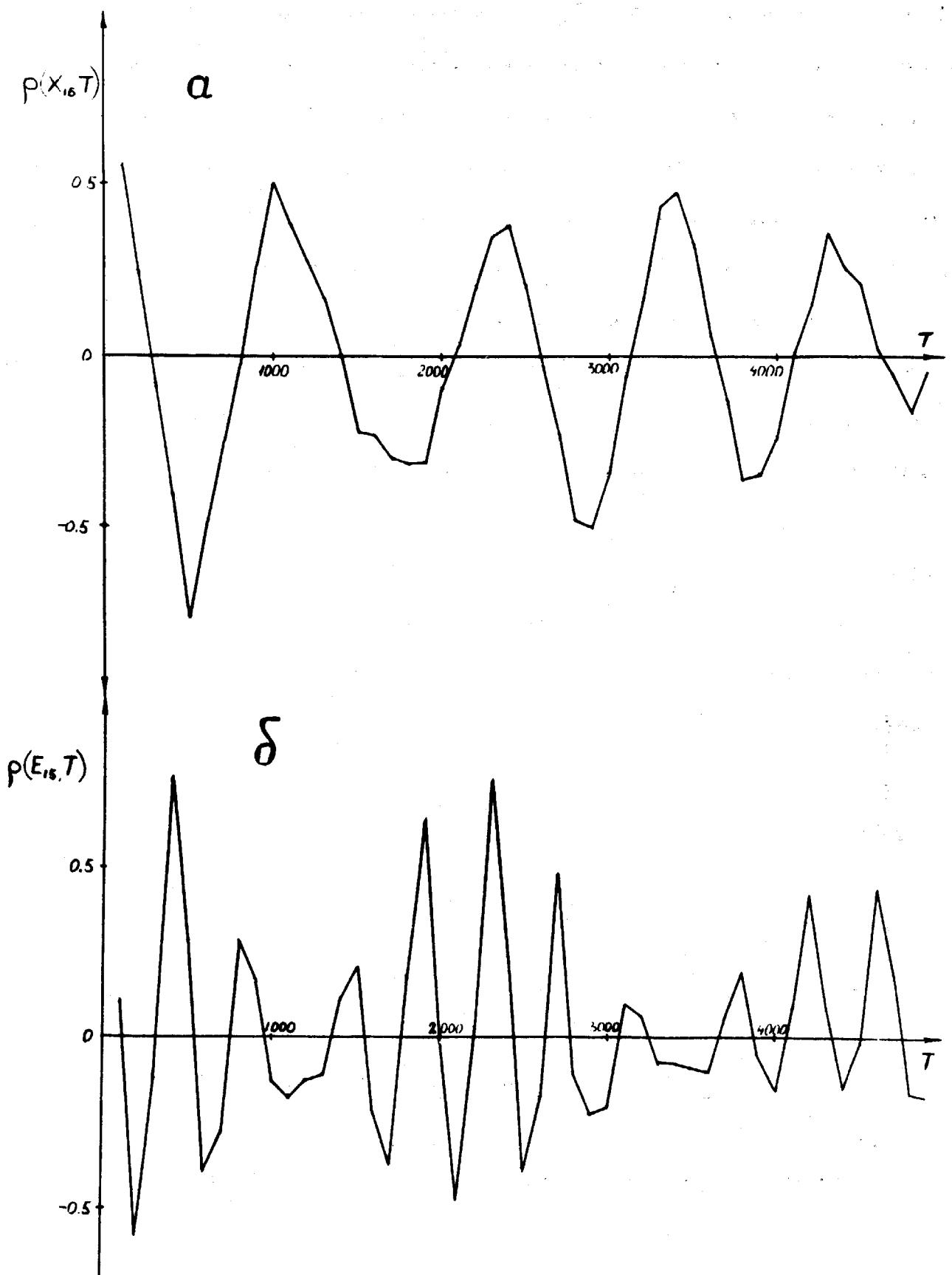


Рис.4.6.5. Корреляции для случая II на рис.4.6.4 с симметризацией; $E \approx 17$;
 $\beta \approx 0.0314$; $\varepsilon \approx 0.05$; $t_{\max} \approx 18300$; $4T = 100$; $4t = 1$; $h \approx 1/3$;
 $\Delta E/E \approx 3\%$; $\rho(E_{15}, E_{17}) = -(0.30 \pm 0.07)$.

Если, однако, взять $\beta \gg \beta_{kp}$, то мы должны получить уже "настоящую" стохастичность. Второй контрольный счёт как раз и соответствует $\beta/\beta_{kp} \approx 28$ (рис. 4.6.6). Здесь энергия действительно распределяется почти между всеми модами, исключая лишь самые низкие, для которых выполнение критерия стохастичности затруднено. Этот результат подтверждается также значением $\rho(E_{15}, E_{17})$ (рис. 4.6.7). В силу больших экспериментальных ошибок можно оценить лишь нижнюю границу для числа взаимодействующих мод: $V > 8$. Из данных рис. 4.6.7 видно также, что в пределах статистических ошибок (± 0.1) корреляции 15й моды отсутствуют. Что же касается корреляций по X , то они связаны, главным образом, с тем, что стохастичность не доходит до 1й моды. Интересно отметить, что корреля-

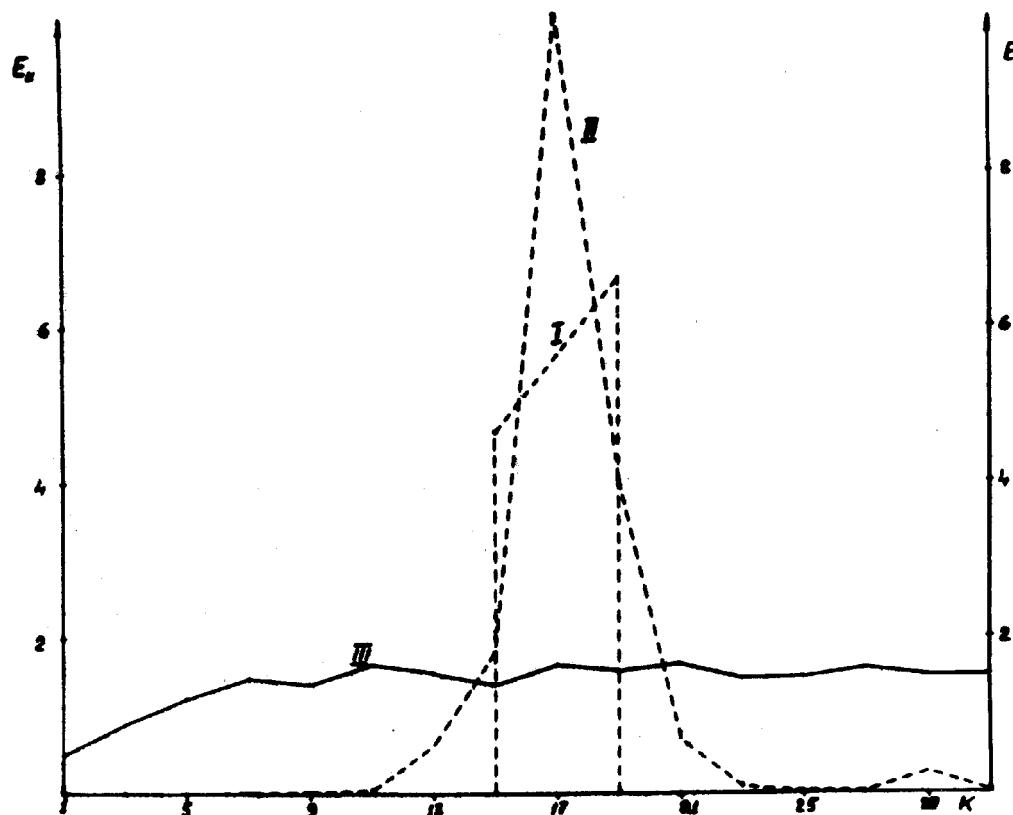


Рис.4.6.6. Спектр энергий для начального возбуждения трех мод ($k_o = 15, 17, 19$) с симметризацией (привая 1); кривая II соответствует средним энергиям мод для данных рис.4.6.5; кривая III - для данных рис.4.6.7.

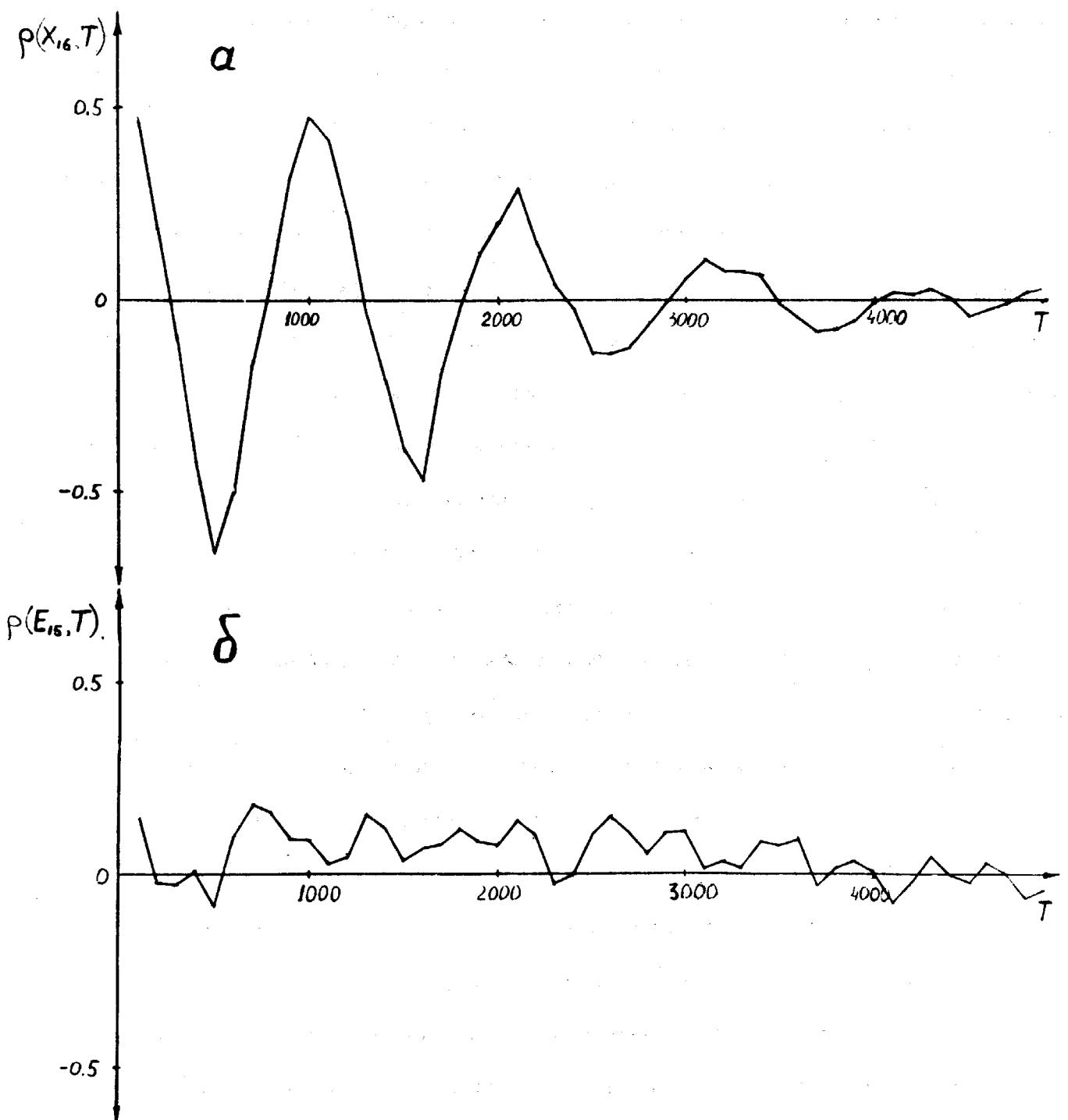


Рис.4.6.7. Корреляции для случая 11 на рис.4.6.4 с симметризацией: $E \approx 24$; $\beta \approx 0.314$; $\varepsilon \approx 0.75$; $t_{\max} \approx 16050$; $\Delta T = 100$; $\Delta t = 1$; $h \approx 1/6$; $\Delta E/E \approx 2\%$; $\rho(E_{15}, E_{17}) = -(0 - 0.13)$.

ции медленно затухают. Не исключено, что это связано как-то с влиянием ошибок счёта (см.ниже), но в таком случае почему нет никакого затухания на рис.4.6.5?

Другое возможное объяснение состоит в том, что движение первой моды, ответственной за корреляции по X , все же является стохастическим, но за значительно большие времена, так как эта мода лежит в переходной зоне.

Подводя итоги, можно констатировать, что совокупность экспериментальных данных подтверждает гипотезу работы /168/ о наличии границы стохастичности для системы (4.6.1) и, более того, подтверждает по порядку величины оценку (4.6.12) положения этой границы. Наиболее слабым пунктом являются значительные ошибки счёта, которые контролировались по изменению полной энергии системы (см.подписи к рисункам). Особенно это касается только что упомянутых контрольных экспериментов, где $\Delta E/E$ достигает 3%. Могут ли эти ошибки сами по себе вызвать стохастичность? Мы думаем, что нет. Подтверждением этому служат значительные остаточные корреляции (рис.4.6.5) и отсутствие обмена энергией (рис.4.6.6) для малых β . Другой контроль влияния ошибок был проведен для эксперимента с локальной неустойчивостью. При уменьшении шага вдвое $\Delta E/E$ уменьшилось с 3% до 0.03%, при этом кривые экспоненциального роста чётных мод несколько изменились, однако, значение интересующего нас параметра $1/\tau$ осталось прежним в пределах экспериментальных ошибок.

Тем не менее нам представляется полезным продолжение численных экспериментов с нелинейной цепочкой с большей точностью и с большим числом осцилляторов.

Недавно Хирука и Сайто провели аналогичные эксперименты с двумерной решёткой с кубической нелинейностью и также получили границу стохастичности /170/. Фактически они тоже использовали метод локальной неустойчивости, измеряя продолжительность (T) "периода индукции" в развитии неустойчивости. Пример этого явления приведен на рис.4.6.2, а объяснение его механизма дано в тексте. Величина $1/T$ пропорциональна энтропии h . Оказалось, что зависимость $h(\beta)$ близка к линейной: $h \propto (\beta - \beta_{cr})$. Вероятно, её можно сравнить с "типичной" оценкой (2.11.3) :

: $h \propto \beta^{4/3}$ ($\beta > \beta_{kp}$). Отметим, что точность счёта в /170/ была весьма высокой ($\Delta E/E \approx 0.01\%$).

Более подробные аналитические исследования стохастичности нелинейных волн содержатся в работах Заславского, Сагдеева и Филоненко /104, 105, 150/.

§ 4.7 Датчики псевдослучайных чисел

Проблема этого, заключительного, параграфа существенно отличается от ос-
тальных приложений развивающейся теории, описанных выше. Здесь мы пытаемся не
столько исследовать статистические свойства какой-либо практической динамической
системы, сколько сконструировать простейшую систему, моделирующую "случайный"
процесс. Необходимость такого моделирования возникает во многих случаях, но мо-
жет быть больше всего при использовании так называемого метода Монте-Карло
(метода статистических испытаний), предложенного Метрополисом и Уламом (см.
/95/).^{x)} Идея этого метода состоит в том, чтобы в исследованиях кинетических молекулярных процессов вернуться от решения аппроксимирующих их уравнений в частных производных, очень неудобных для решения на ЭВМ, назад, к динамическим молекулярным процессам. Разумеется, полный возврат к решению точных динамических уравнений для всех молекул абсолютно невозможен, однако, можно выбрать промежуточную, огрубленную динамическую модель, со сравнительно небольшим числом час-
тиц, которая тем не менее достаточно хорошо передаёт статистические свойства ис-
ходной системы. В частности, сам "случайный" элемент движения молекулярной сис-
темы не получается при этом автоматически из динамических уравнений, а вводится
искусственно извне, с помощью так называемых датчиков случайных чисел. Эти дат-
чики могут быть и физической природы, например, радиоактивный распад или электри-
ческие шумы. В этом случае термин случайное число можно употреблять и без ковы-

^{x)} Из других задач упомянем вычисление многомерных интегралов /95/ и стохasti-
ческие кибернетические машины /130/.

чек, если мы верим, что в природе существует "настоящая" случайность.^{x)}

С практической точки зрения, однако, значительно более удобным является датчик, использующий некоторый вычислительный алгоритм в самой ЭВМ. В этом случае слово "случайное" (число) приходится уже поставить в кавычки или заменить словом псевдослучайное. Дело в том, что аксиоматическое (эмпирическое) определение случайной последовательности включает в себя требование так называемой "иррегулярности", т.е. отсутствия алгоритма получения последовательности. Очевидно, что это требование можно проверить лишь в отрицательную сторону, т.е. оно является в некотором смысле ненаблюдаемым. Столь же очевидно, что в рассматриваемом случае алгоритмических датчиков псевдослучайных чисел оно не выполняется по определению. Однако по всем другим критериям псевдослучайные числа ничем не отличаются от "настоящих" случайных чисел (см./95/ и ниже). Согласно развивающимся в данной работе идеям это свидетельствует не столько о том, что еще не найден эффективный метод проверки на "случайность", сколько о том, что и в природе нет "иррегулярности" (§ 2.13). Более того, если в качестве алгоритма выбрать, например, преобразование, описывающее стохастическую динамическую систему, то можно утверждать, что такой алгоритм будет в некотором смысле наилучшим датчиком случайных чисел. Дело в том, что очень часто мы не знаем, какие именно свойства случайных чисел существенны в той или иной конкретной задаче. В этих условиях представляется наиболее разумным следовать природе, т.е. получать случайные числа с помощью стохастического динамического процесса. С точки зрения метода Монте-Карло это будет еще один шаг в том же направлении возврата к молекулярной динамике.

При таком моделировании, по-видимому, нет необходимости использовать обязательно гамильтонову систему, достаточно взять простейшее эргодическое преобразование с перемешиванием и положительной энтропией, например (см. § 2.3):

$$x_{n+1} = \{ k x_n \} \quad (4.7.1)$$

x) Во избежание недоразумений напомним, что речь идет только о случайности статистической физики. В частности, квантовая случайность может быть совершенно другой природы и не имеет сюда прямого отношения (см. § 2.13).

Вероятно, это действительно самое простое преобразование такого типа. Соответствующее преобразование в целых числах записывается в виде:

$$\Gamma_{n+1} \equiv k\Gamma_n \pmod{2^P} \quad (4.7.2)$$

Такой датчик случайных чисел был изобретен среди прочих Лемером еще в 1951 году /132/, через 2 года после появления метода Монте-Карло. Однако до сих пор этот датчик, если и выделялся среди множества других, то лишь за его недостаток, связанный с операцией умножения, которая потребляет относительно много времени ЭВМ.

Хотя преобразование для действительных чисел (4.7.1) полностью исследовано аналитически (§ 2.3), переход к целым числам на ЭВМ (4.7.2) может привести к появлению аномалий, поскольку теоремы эргодической теории справедливы с точностью до меры нуль. Хорошо известным примером таких аномалий является существование периода псевдослучайной последовательности. Возможны, однако, и более тонкие нарушения статистических свойств. Поэтому возникает необходимость проверки датчика (4.7.2). Такая проверка производилась уже в ряде работ /95/. Мы приведем ниже некоторые результаты дополнительной проверки, в которой были использованы уникальные возможности БЭСМ-6. Проверка производилась совместно с Израйлевым и Антиповым.

Согласно /135/ максимальный период (2^{P-2}) последовательности (4.7.2) достигается при: $k \equiv 3 ; 5 \pmod{8}$; Γ_0 — нечетное (4.7.3), а коэффициент парной корреляции соседних псевдослучайных чисел равен /136/:

$$\rho \approx \frac{1}{k} \quad (4.7.4)$$

Поскольку целочисленное умножение по модулю 2^P на k и $(k - 2^P)$ эквивалентно, то при $k \geq 2^{P-1}$ корреляции будут увеличиваться по сравнению с (4.7.4). Согласно /136/ увеличение корреляций возможно даже при $k > 2^{P/2}$ в зависимости от конкретного значения k .

Для проверки качества псевдослучайной последовательности были выбраны следующие параметры датчика (в восьмиричной записи в ячейке БЭСМ-6):

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &: 4013064256500425 ; & \frac{k}{2^P} &\approx \frac{11}{16} \\ \langle \Gamma_0 \rangle &: 4013543660414035 ; & \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Точные значения параметров несущественны при выполнении условий (4.7.3). Даже очень "круглая" константа κ : 4000000000200003 не ухудшает статистические свойства датчика. Заметим, что это, по-видимому, не всегда так [137]. Поэтому лучше выбирать "некруглые" параметры (4.7.5).

Использовались три метода проверки: равномерность (16384 ячейки); парные корреляции Γ_{n+1} , Γ_n (128 x 128 ячеек) и 14-ти кратные корреляции соседних чисел по одному двоичному разряду ($2 \times 2 \dots = 2^{14}$ ячеек).

Основные результаты приведены в таблице 4.7.1. Критерием случайности для всех трех методов служило отклонение от равномерного распределения во всем массиве из $2^{14} = 16384$ ячеек. Характеристикой отклонения является отношение дисперсии (D) к среднему значению (M) количества псевдослучайных чисел в одной ячейке. Ожидаемое значение отношения для случайной последовательности равно (с доверительной вероятностью 95%):

$$\frac{D}{M} = 1.0 \pm 0.022 \quad (4.7.6)$$

В таблице 4.7.1 приведены также значения $\sqrt{D/M}$ - статистической точности проверки.

В качестве дополнительного контроля статистических свойств был произведен подсчет числа пустых ячеек массива 512 x 1024 для парных корреляций. Массив является логическим, причем каждый элемент занимает один двоичный разряд (ср. § 3.2). Результаты приведены в таблице 4.7.2, где \bar{n} и $\bar{m}_{\text{теор}}$ - полученное и ожидаемое число незаполненных ячеек в массиве.

В таблице 4.7.3 представлены результаты проверки статистических свойств для 14-ти кратных корреляций 1-го и 14-го двоичных разрядов. Для увеличения периода в последнем случае применялось возмущение константы k (4.7.7).

Наконец, для парных корреляций было построено вторичное распределение отклонений от среднего, что является более тонким методом проверки статистических свойств. Случайной величиной здесь является отклонение числа попаданий в ячейку

двумерного массива от среднего значения, нормированное на корень из дисперсии. Распределение производилось в интервал $(-4,4)$, разделенный на 128 ячеек. График полученного распределения и сравнение с гауссовой кривой приведены на рис. 4.7.1. Разброс точек вызывается двумя причинами: статистический разброс $\pm 5\%$, который хорошо согласуется с большинством точек на рисунке, и разброс за счет целочисленности случайной величины. Минимальное значение случайной величины составляет примерно $1/5$ размера ячейки распределения, что может вызвать колебания $\pm 20\%$. Это

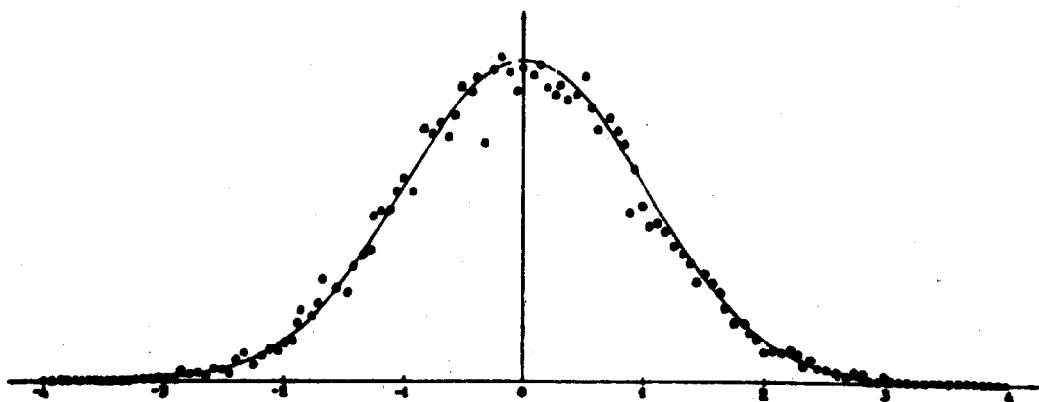


Рис. 4.7.1

Отметим также небольшой выход последнего значения Z_M в таблице 4.7.1 из 95% интервала (4.7.6). Это может объясняться недостаточной длиной периода для 14-го разряда, который еще существенен при проверке на равномерность.

Подводя итоги, можно сказать, что ни в одной из проверок, как наших, так и других авторов, не было обнаружено отклонение свойств последовательности (4.7.2) от случайной. Что же касается длины периода, то возможно несколько методов увеличения ее. Один из них был предложен Соболем /138/ и состоит в возмущении константы k в (4.7.2) через L шагов:

$$k_{e+1} \equiv k_e + c \pmod{2^P} \quad (4.7.7)$$

где $C = 8$ — минимальная константа, для которой $k_e \equiv 3 \pmod{8}$ для всех e . Согласно [138] период увеличивается при этом в \sqrt{L} раз.

Таблица 4.7.1

	N	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Равномерность	$\sqrt{D}/M \%$	405	128	40	13	4.0	1.3
	D/M	1.003	1.003	1.003	1.006	1.000	0.977
	\bar{m}	15415	8911	27	0	0	0
Парная корреляция	$\sqrt{D}/M \%$	407	128	40	13	4.0	1.3
	D/M	1.013	1.000	0.988	0.983	0.987	1.004
	\bar{m}	15420	8905	38	0	0	0

Таблица 4.7.2

	N	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Парная корреляция	\bar{m}	523288	514376	433175	77952	0
	$\bar{m}_{\text{теор}}$	522700 ± 700	514300 ± 700	433600 ± 650	78000 ± 280	0

Таблица 4.7.3

	N	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
1-й разряд	$\sqrt{D}/M \%$	412	127	41	13	4.0	1.3
	D/M	1.037	0.982	1.008	0.987	0.974	1.002
	\bar{m}	15431	8848	31	0	0	0
14-й разряд	$\sqrt{D}/M \%$	414	128	41	13	4.0	1.3
	D/M	1.045	1.006	1.013	0.994	0.989	1.008
	\bar{m}	15431	8889	33	0	0	0

Другой метод состоит в использовании более сложных датчиков, например, типа элементарной модели (2.4.16) с линейной функцией $f(\varphi) = \varphi - 1/2$. В этом случае для повторения псевдослучайной последовательности необходимо точное совпадение уже двух чисел φ, φ .

Еще одна проблема связана с выбором начального значения V_0 (4.7.2), в особенности, при многократном обращении к датчику. Здесь опять таки важно исключить точное совпадение начальных условий при двух обращениях. По-видимому, наилучший способ состоит в том, чтобы задавать V_0 от другого более сложного датчика с практически бесконечным периодом, причем этот последний должен работать непрерывно, никогда не возвращаясь к своим начальным условиям.

Другой подход к решению проблемы арифметического моделирования случайных процессов развивается Постниковым /24,33/. Он также отказывается от требования иррегулярности последовательности, заменяя его требованием вполне равномерного распределения, т.е. отсутствия корреляций любой кратности (см. §2.3). С нашей точки зрения этого требования недостаточно для хорошего моделирования случайного процесса, так как оно еще не гарантирует положительной энтропии процесса (§2.3). Если же энтропия равна нулю, то перемешивание может итти очень медленно и неравномерно, что в практическом отношении недопустимо.

Специфической проблемой изучения датчиков псевдослучайных чисел является накопление ошибок округления при счете на ЭВМ. Эта проблема распадается на две части. Первая (накопление ошибок в большом) связана с динамикой алгоритма счета, главным образом, с его устойчивостью. Например, при счете траектории стохастической системы ошибки растут со временем экспоненциально. Вторая часть проблемы – локальное (по времени) накопление ошибок – определяется процессом округления. Как уже отмечалось в §3.3 этот процесс эквивалентен работе некоторого датчика псевдослучайных чисел, алгоритм которого определяется алгоритмом счета. Особенность процесса накопления ошибок состоит в том, что средняя ошибка (дрейф) вообще го-

воля не равна нулю. Поэтому основная задача сводится к нахождению этого дрейфа.

Если же он равен нулю, например, из условия симметрии алгоритма счета, то получается датчик псевдослучайных чисел в чистом виде. В частности, если в алгоритме счета содержится умножение на константу, то датчик является "хорошим", как было показано выше, и ошибки округления накапливаются по случайному закону. Примеры случайного и неслучайного накопления ошибок приведены в §3.3.

Можно надеяться, что детальное изучение таких "округляющих" датчиков позволит, наконец, получать надежные оценки ошибок счета столь желательные при работе на ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Г.Голдстейн. Классическая механика.ГИТГЛ,1957.
2. В.М.Волосов. ДАН, 121, 22 (1958).
3. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз,1958.
4. Ю.Ф.Орлов. ЖЭТФ 32, 316 (1957).
5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев.Теория циклических ускорителей.Физматгиз,1962.
6. Б.В.Чириков. ДАН 125, 1015 (1959) .
7. В.И.Векслер. ДАН 43,346; 44,383 (1944).
8. E.M. McMillan, Phys. Rev., 68, I43 (I945).
9. P.A. Sturrock, Annals of Physics, 2, II3 (I958).
- 10.Б.В.Чириков.Атомная энергия 6, 630 (1959).
- 11.K.Symon, A.Sessler, Proc. of the CERN Symposium, I, 44 (I956).
- 12.H.Weyl, Math. Annalen, 77, 313 (I916).
- 13.Я.С.Дербенев, С.И.Мишин, А.Н.Скрипинский. Атомная энергия, 20, 217 (1968).
14. A.Schoch, CERN Report, 57-2I (I958).
15. Э.Л.Бурштейн, Л.С.Соловьев, ДАН, 139, 855 (1961).
16. Д.Д.Биркгоф, Динамические системы, М.-Л., 1941.
17. Я.Г.Синай, Изв. АН, мат., 30, 15 (1966).
18. М.Крускал. Адиабатические инварианты, ИИЛ, 1962.
19. А.Н.Колмогоров. ДАН, 88, 527 (1954).
20. В.И.Арнольд. УМН, ХУШ, 91 (1963).
21. В.И.Арнольд. ДАН, 156, 9 (1964).
22. Л.А.Рохмин. Изв. АН, мат., 25, 499 (1961).
23. Н.М.Коробов. Изв.АН, мат., 14, 215 (1950).
24. А.Г. Постников. Арифметическое моделирование случайных процессов, Труды математического института им. В.А.Стеклова, L VI, 1960.
25. А.Н.Колмогоров. ДАН, 119, 861 (1958).
26. П.Р.Халмош. Лекции по эргодической теории, ИИЛ, 1959.
27. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
28. J.Moser, A Rapidly Convergent Iteration Method and Non-Linear Differential Equations, II, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, v.XX, Fasc. III, 1966.
29. Э.Хопф, УМН, 1У, в.2, 129 (1949).

30. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики. Изд. АН СССР. 1950.
31. Д.В.Аносов. ДАН 145, 707 (1962); 151, 1250 (1963).
32. Дж.Честер. Теория необратимых процессов. Наука, 1966.
33. А.Г.Постников. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. Труды математического института им.В.А.Стеклова, L XXXII, 1966.
34. Я.Г.Синай. Вероятностные идеи в эргодической теории. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1962.
35. G.Hedlund, Bull. Amer. Math. Soc., 45, 241, (1939).
36. Н.Пoincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I, II, III, Paris, 1892, 1893, 1899.
37. В.К.Мельников, ДАН, 139, 31 (1961); 142, 542 (1962); 148, 1257 (1963).
38. N.N.Filonenko, R.Z.Sagdeev, G.M.Zaslavsky, Nuclear Fusion, 7, 253 (1967).
39. А.Н.Колмогоров. Общая теория динамических систем и классическая механика, Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954, (обзорные доклады), Физматгиз, 1961.
40. Я.Г.Синай, Изв. АН, мат., 30, 1275 (1966).
41. В.А.Рохлин, УМН, XXII, в.5 (137), 3 (1967).
42. Д.В.Аносов, Я.Г.Синай, там же, стр.107.
43. С.Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИИЛ, 1947.
44. А.Н.Колмогоров, УМН, вып.У, 5 (1938).
45. А.М.Дыхне, А.В.Чаплик, ЖЭТФ 40, 666 (1961).
46. M.N.Rosenbluth, R.Z.Sagdeev, J.B.Taylor, G.M.Zaslavsky, Nuclear Fusion, 6, 297 (1966).
47. J.M.Greene, Two-Dimensional Measure Preserving Mappings, Preprint, Princeton University, 1967.
48. J.Ford, частное сообщение, 1967.
49. И.Пригожин. Неравновесная статистическая механика. МИР, 1964.
50. H.Grad, Levels of Descriptions in Statistical Mechanics and Thermodynamics, Report on Delaware Seminar in the Foundations of Physics, 1967.
51. М.А.Леонтович, ЖЭТФ 5, 211 (1935).
52. Я.Г.Синай. Функциональный анализ, 2, 64, 70 (1968).
53. P.G.Saffman, Proc. Roy. Soc., 299, 101 (1967).
54. Н.Н.Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
55. К.П.Гуров. Основания кинетической теории (Метод Н.Н.Боголюбова), Наука, 1966.

56. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, УФН, 73, 701 (1961); Ядерный синтез 1, 82 (1961).
57. Ю.Л.Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. МГУ, 1964.
58. С.Л.Соболев. Уравнения математической физики, Наука, 1966.
59. М.М.Лаврентьев. О постановке некоторых некорректных задач математической физики, Сб. Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Наука, Новосибирск, 1966.
60. А.Н.Тихонов, ДАН, 153, 49 (1963).
61. E.Schroedinger, Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 9, I44 (1931).
62. А.Н.Колмогоров, Annals of Physics, 113, 766 (1937).
63. G.Sandri, Annals of Physics, 24, 332, 380 (1963).
64. Ю.Л.Климонтович, Ю.А.Кухаренко, ФММ 19, 161 (1965).
65. С.Т.Беляев. Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильных полях. Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т.Ш, стр.50 (1958).
66. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ 7, 203 (1937).
67. Я.И.Френкель. Статистическая физика, М.-Л., 1948.
68. В.М.Алексеев, ДАН, 177, 485 (1967).
69. R.Balescu, Physica, 36, 433 (1967).
70. Л.Бриллюэн. Научная неопределенность и информация. Мир, 1966.
71. Н.Н.Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР, 1945.
72. М.Кап. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИИЛ, 1963.
73. М.Кап. Несколько вероятностных задач физики и математики. Наука, 1967.
74. Ф.Г.Басс, Я.Б.Файнберг, В.Д.Шapiro. ЖЭТФ 49, 329 (1965).
75. Э.Маделунг. Математический аппарат физики, Физматгиз, 1960.
76. B.Chirikov, E.Keil, A.Sessler, Stochasticity in Many-Dimensional Non-Linear Oscillating Systems, CERN Report (to be published).
77. В.И.Арнольд, ДАН 137, 255 (1961).
78. J.Moser, On the Theory of Quasiperiodic Motions, SIAM Review, 8, I45 (1966).
79. В.И.Арнольд. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. Доклад на Международном съезде математиков, Москва, 1966.
80. Г.И.Будкер. УФН, 89, 533 (1966).
81. G.Gibson, W.Jordan, E.Lauer, Phys. Fluids, 6, II6, I33 (1963).
82. А.Н.Дубинина, Л.С.Красицкая. Письма ЖЭТФ, 5, 230 (1967) ; А.Н.Дубинина, Ю.Н.Юдин. ЖЭТФ (в печати).

83. В.Г.Пономаренко, Л.Я.Трайнин, В.И.Юрченко, А.Н.Ясненский, ЖЭТФ 55, 3, (1968).
84. А.А.Андронов, Л.С.Понтрягин, ДАН 14, 247 (1937).
85. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
86. W.B.Riley, Electronics, I967, NIO, I4I.
87. Э.В.Евреинов, Ю.Г.Косарев, Изв. АН СССР, технибери., 1963, №4,3.
88. Ю.М.Волошин, А.П.Ершов, Г.И.Кожухин. Входной язык систем автоматизации программирования. Изд. СО АН СССР, 1964.
89. Б.В.Чириков. ДАН, 174, 1313 (1967).
90. Б.В.Чириков. Когда динамическая система становится статистической? Сообщение на Международном съезде математиков, Москва, 1966.
91. L.J.Laslett, A Computational Investigation of a Non-Linear Algebraic Transformation, I967 (unpublished).
92. M.Hénon, C.Heiles, Astronomical Journal, 69, 73 (I964).
93. С.Улам. Нерешенные математические задачи. Наука, 1964.
94. N.J.Zabusky, A Synergetic Approach to Problems of Nonlinear Dispersive Wave Propagation and Interaction, University of Delaware, I965.
95. Н.П.Бусленко, Д.И.Голенко, И.М.Соболь, В.Г.Срагович, Ю.А.Шрейдер. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), Физматгиз, 1967.
96. Д.И.Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. Физматгиз, 1965.
97. E.Courant, Nuclear Science, I2, 550 (I965).
98. M.G.N.Hine, частное сообщение, 1967.
99. E.Fermi, Phys. Rev., 75, II69 (I949).
100. Э.Л.Бурштейн, В.И.Векслер, А.А.Коломенский. Стохастический метод ускорения частиц. Сб. Некоторые вопросы теории циклических ускорителей. АН СССР, 1955.
101. В.Н.Цытович. Статистическое ускорение частиц в плазме. Труды ФИАН, XXXII, 130 (1966).
102. S.Ulam, Proc. 4-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, I961, 3, 3I5; (перевод: Математика 7, 5, 137 (1963)).
103. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков. ДАН 159, 306 (1964).
104. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. ЖЭТФ, 52, 1083 (1967).
105. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, ЖЭТФ, 54, 1590 (1968).
106. Я.Г.Синай. ДАН , 153, 1261 (1963).
107. В.И.Болосов, А.И.Комин. ЖТФ 38, в .5, 846 (1968).
108. В.Н.Бочаров, В.И.Болосов, А.В.Комин, В.М.Панасюк, Ю.Н.Юдин. Удержание плазмы в стеллараторе при различных значениях длины свободного пробега., Fusion III , Д-7, Новосибирск, 1968.

109. C.J.H.Watson, The Thermonuclear Prospects of Various Confinement Schemes, Preprint, Culham Lab, 1968.
110. А.П.Попрядухин. Атомная энергия 18, 96 (1965).
111. Д.К.Акулина, Г.М.Батанов, М.С.Бережецкий, С.Е.Гребенщиков, М.С.Рабинович, И.С.Сбитникова, И.С.Шлигель. Внешняя инжекция и удержание плазмы в стеллараторе с двухзаходным витковым полем, II, CN-21/244, Culham, 1965.
112. Г.В.Скорняков. ЖТФ 32, 261, 777 (1962).
113. Л.М.Коврижных, ЖТФ 32, 526 (1962).
114. F.K.Goward, Конференция по протонному синхротрону на 20-30 Бэв, Женева, 1953; M.G.N.Hine, там же.
115. А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. Геометрия магнитного поля. Вопросы теории плазмы, вып. 2, Госатомиздат, 1963.
116. A.Gibson, Physics of Fluids, 10, I553 (1967).
117. Г.И.Будкер. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую. Сб.Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т.III, 3, 1958.
118. О.Б.Фирсов. Отталкивание заряженной частицы от областей с сильным магнитным полем (О точности адиабатического инварианта), там же, т.III, 259, 1958.
119. А.А.Андронов, М.А.Леонович, Л.И. Мандельштам. Ж. русского физ.-хим.общества 60, 413 (1928).
120. В.И.Арнольд, ДАН, 142, 758 (1962).
121. С.Н.Родионов, Атомная энергия, 6, 623 (1958).
122. G.Gibson, W.Jordan, E.Lauer, Phys.Rev.Lett., 5, I4I (1960).
123. A.Garren et al, Proc. 2nd Intern. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, 31, 65 (1958).
124. R.J.Hastie, G.D.Hobbs, J.B.Taylor, Non-Adiabatic Behavior of Particles in Inhomogeneous Magnetic Fields, Fusion III, C-6, Novosibirsk, 1968.
125. Report on the Design Study of Intersecting Storage Rings for the CERN PS, CERN, 1964.
126. Г.И.Будкер, Атомная энергия, 22, 346 (1967).
127. Proposal for a High-Energy Electron-Positron Colliding Beam Storage Ring at the SLAC, 1966.
128. R.S.Mulliken, Spectroscopy, Molecular Orbitals, and Chemical Bonding, Nobel Lecture; перевод: УФН, 94, 585 (1968).
129. А.Пуанкаре, Лекции по небесной механике, Наука, 1965.
130. S.Beer, Cybernetics and Management, London, 1959.
131. В.Балбеков, Н.Семашко, Nuclear Fusion, 7, 207 (1967).
132. D.H.Lehmer, Annals Comp. Laboratory, Harvard University, 26, I4I (1951).

133. Г.Н.Кулипанов, С.И.Мишинев, С.Г.Попов, Г.М.Тумайкин, Экспериментальное изучение эффектов встречи в накопителе, Доклад на Всесоюзном совещании по ускорителям, Москва, 1968.
134. В.Л.Ауслендер, Г.Н.Кулипанов, С.И.Мишинев, А.А.Наумов, С.Г.Попов, А.Н.Скрипинский, Г.М.Тумайкин, Атомная энергия, 20, 213 (1966).
135. E.Bofinger, V.Bofinger, J. Assoc. Comp. Mach., 10, 131 (1963).
136. M.Greenberger, *ibid*, 8, 163 (1961).
137. J.Allard, A.Dobell, T.Hull, *ibid*, 10, 131 (1963).
138. И.М.Соболь, Теория вероятностей и ее применения, 9, 367 (1964).
139. Г.А.Чеботарев, Аналитические и численные методы небесной механики, Наука, 1965.
140. А.М.Молчанов, ДАН, 168, 284 (1966); сб. "Проблемы движения искусственных небесных тел", АН СССР, 1963, стр.42.
141. О.Ю.Шмидт, Четыре лекции о теории происхождения Земли, 1948.
142. А.Н.М.Леонтович, ДАН, 143, 525 (1962).
143. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958.
144. М.Л.Лидов, сб. "Проблемы движения искусственных небесных тел", АН СССР, 1963, стр.119.
145. Э.В.Шпольский, Атомная физика, II, 1951.
146. V.F.Weisskopf, Physics Today, 14, N7, 1961.
147. И.И.Путилин, Малые планеты, Гостехиздат, 1953.
148. K.Hirayama, Ann. Obs. Astr. Tokyo, доп. 4, 1918.
149. Эфемериды малых планет (Ежегодник), 1965.
150. Г.М.Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, 1968.
151. D.Brouwer, Astronomical Journal, 68, 152 (1963).
152. J.Moser, Comm. on Pure and Appl. Math., VIII, 409 (1955).
153. L.D.Landau, Phys. Zeitschr. Sow., 10, 67 (1936).
154. Л.С.Кассель, Кинетика гомогенных реакций, 1937.
155. N.B.Slater, Theory of Unimolecular Reactions, London, 1959.
156. D.L.Bunker, Journ. Chem. Phys., 40, 1946 (1964).
157. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков, Релятивистская астрофизика, Наука, 1967.
158. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960.
159. Е.М.Лифшиц, В.В.Судаков, И.М.Халатников, ЖЭТФ, 40, 1847 (1961).
160. Л.Б.Окунь, УФН, 95, 402 (1968).
161. Ta You-Wu, Kinetic Equations of Gases and Plasmas, 1966.
162. G.Lüdwig, Zeitschrift für Physik, 135, 483 (1953).
163. P.C.Hemmer, L.C.Maximon, H.Wergeland, Phys.Rev. III, 689 (1958).

164. Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИИЛ, 1958.
165. E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam, Studies of Nonlinear Problems I, Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955.
166. N.J.Zabusky, M.D.Kruskal, Phys. Rev. Lett., I5, 240 (1965).
167. N.J.Zabusky, Phenomena Associated with the Oscillations of a Nonlinear Model String (The Problem of Fermi, Pasta and Ulam), Proc. Conf. on Math. Models in the Physical Sciences, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
168. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, ДАН, 166, 57 (1966).
169. Ю.А.Березин, В.И.Карпман, ЖЭТФ, 51, 1557 (1966).
170. H.Hirooka, N.Saito, Computer Studies on the Approach to Thermal Equilibrium in Coupled Anharmonic Oscillators, I, Two Dimensional Case, Waseda University, 1968.
171. M.D.Kruskal, N.J.Zabusky, J. Math. Phys., 5, 231 (1964).
172. П.Л.Капица, УФН, 44, 7 (1951).
173. E.D.Courant, M.S.Livingston, H.S.Snyder, Phys. Rev., 88, II90 (1952).
174. В.А.Амбарцумян, Эволюция звезд и астрофизика, Ереван, 1947.
175. Р.З.Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, сб. "Вопросы теории плазмы", Атомиздат, 1964.

Ответственный за выпуск Чириков Б.В.

Подписано к печати 27.1.1969 г.

Усл. 15 печ. л., тираж 100 экз. Бесплатно.

Заказ № 267

Отпечатано на ротопринте в ИЯФ СО АН СССР