

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

534 2

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ*Г. М. Заславский, Б. В. Чуриков*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического возмущения	7
3. Основные понятия эргодической теории	13
4. Численные эксперименты	25
5. Стохастическое ускорение Ферми	26
6. Стохастический слой и условие перекрытия резонансов	28
7. Приближение хаотических фаз и основное кинетическое уравнение (master equation)	33
Цитированная литература	37

1. ВВЕДЕНИЕ

Предмет настоящего обзора является относительно новым и малоизвестным, особенно для физиков. Поэтому мы начнем с простого примера. Представим себе движение некоторого нелинейного осциллятора, например обычного маятника, но без затухания, под действием внешней очень слабой периодической силы. Уравнение движения такой системы можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \varepsilon F(t), \quad (1.1)$$

где φ — угол отклонения маятника от положения равновесия, ω_0 — частота малых колебаний, а $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть сначала возмущение является гармоническим:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t. \quad (1.2)$$

Решение последней задачи хорошо известно (см., например, ² и § 2.2), и мы опишем качественно случай, близкий к резонансу, когда частота возмущения Ω равна приблизительно частоте невозмущенного движения осциллятора $\omega(a)$, которая, в силу нелинейности, зависит от амплитуды колебаний a ($\omega(0) = \omega_0$). В отличие от линейного резонанса, частота нелинейного осциллятора изменяется под действием резонансного возмущения из-за изменения амплитуды колебаний. В результате амплитуда и частота осциллятора, в свою очередь, испытывают колебания (биения) в некотором интервале Δa , $\Delta \omega$.

Представим себе теперь, что возмущение $F(t)$ содержит много гармоник:

$$F(t) = \sum_n F_n \cos n\Omega_0 t, \quad (1,3)$$

причем расстояние между ними по частоте (Ω_0) много меньше интервала биений $\Delta\omega$, так что в резонансе находятся одновременно несколько гармоник периодического возмущения (1,3). Как будет колебаться маятник в этом случае? Несмотря на малость возмущения ($\varepsilon \rightarrow 0$), до сих пор не удалось получить строго решения этой задачи. Однако полукачественная теория, изложению которой и посвящен, в значительной степени, настоящий обзор, а также численные эксперименты (гл. 4) приводят к довольно неожиданному выводу: маятник будет колебаться так, как будто на него действует «случайная» сила. В частности, энергия колебаний будет расти в среднем пропорционально времени, несмотря на нелинейность системы (при отсутствии затухания). Этот особый тип движения колебательной системы мы будем называть *стохастичностью*.

Изучение явления стохастичности интересно прежде всего с чисто физической точки зрения, поскольку оно связывает две, казалось бы, довольно различные области физики — теорию нелинейных колебаний и статистическую механику и представляет собой по существу один из возможных механизмов возникновения статистических законов в динамической системе. С этой точки зрения выяснение основных особенностей стохастического движения имеет существенное значение и для общей теории нелинейных колебаний. Не меньшее значение имеет стохастичность и с точки зрения приложений главным образом к проблеме устойчивости нелинейных колебаний консервативных систем, которая возникает в самых различных областях физики и техники.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

Наиболее трудным в проблеме устойчивости колебаний является как раз случай консервативной системы. В этом случае возможна лишь так называемая *нейтральная устойчивость*, когда малые возмущения начальных условий вызывают ограниченные колебания вокруг невозмущенного решения, не нарастающие, но и не затухающие со временем. Это означает, в частности, что любой сколь угодно малый неучтенный фактор может превратить такую нейтральную устойчивость в неустойчивость. В этом — одна из причин, вследствие которой мы до сих пор не имеем общей теории устойчивости нелинейных колебаний консервативных систем, несмотря на значительные усилия в этом направлении, особенно в последнее десятилетие. Другая причина состоит в том, что основная область приложений теории нелинейных колебаний была связана до недавнего времени с автоколебательными или авторегулируемыми системами, которые не являются консервативными. Эта преимущественная ориентация теории колебаний хорошо заметна по монографиям (см., например, ⁵⁰) и привела к тому, что даже такие гибкие новые методы, как асимптотическое разложение Крылова — Боголюбова — Митропольского (метод КБМ ^{1,2}), использовались очень ограниченно, а весь предмет теории нелинейных колебаний был искусственно сужен до проблемы существования и устойчивости периодических решений. С другой стороны, в небесной механике (которая, как это ни парадоксально, не включается обычно в общие курсы нелинейных колебаний ⁵⁰) оказалось возможным, в силу краткости человеческого жизни, ограничиться построением приближенных решений лишь для очень коротких (в характерном масштабе) интервалов времени. Это обстоятельство является весьма специфической особенностью современной

небесной механики, особенностью, которая привела к отказу от первоначальной программы Пуанкаре построения общей, хотя бы качественной, теории движения консервативной системы.

В последнее время, однако, появились новые важные приложения теории нелинейных колебаний, связанные с проблемой длительного удержания заряженных частиц в ограниченной области пространства с помощью электромагнитного (обычно, магнитного) поля специальной конфигурации. Это — магнитные ловушки для термоядерного реактора⁵⁵, ускорители заряженных частиц⁶ и, особенно, накопители для встречных протонных и протон-антипротонных пучков⁵⁶. Сюда же можно отнести и проблему нелинейного взаимодействия волн в плазме (см., например,³³). Эти приложения выдвигают задачу изучения движения нелинейной колебательной системы *в целом*, т. е. на неограниченном временном интервале и для произвольных начальных условий. С другой стороны, уже первые эксперименты^{9,57} и расчеты¹⁰ в области новых приложений указали на связь проблемы устойчивости нелинейных колебаний с проблемой появления статистических законов в динамической системе. Далее оказалось, что подобная связь была обнаружена еще Хедлундом и Хопфом¹² в рамках так называемой *эргодической теории* (см. гл. 3) — специального раздела математики, возникшего из попыток обосновать законы термодинамики и статистической физики на чисто механической основе. Первое и до недавнего времени единственное приложение этого важного результата Хедлунда и Хопфа к проблемам физики было произведено Крыловым¹³, который исследовал статистическое поведение молекулярных систем. Математические и физические работы последнего времени, обзор которых дается в настоящей статье, следует рассматривать как развитие или, лучше сказать, возрождение этого направления. В частности, в последнее время бурно развивается эргодическая теория главным образом в связи с работами Колмогорова³¹, Аносова и Синая¹⁴⁻¹⁶ (п. 3.5), оставляя далеко позади породившую ее статистическую механику. Однако современная эргодическая теория описывает лишь предельный, часто принципиально недостижимый, случай максимальной неустойчивости движения и поэтому сама по себе недостаточна для решения упомянутых прикладных задач. С другой стороны, в последнее время возникла стимулируемая отчасти небесной механикой математическая теория, рассматривающая как раз обратный предельный случай максимальной устойчивости нелинейных колебаний гамильтоновой системы. Эта весьма общая теория была начата также Колмогоровым⁵⁸ и развита Арнольдом⁵⁹ и Мозером⁶⁰ (теория КАМ). Очевидно, что для решения практических задач необходимо объединение обеих крайних теорий. К сожалению, строгое построение такой объединяющей теории в настоящий момент невозможно в силу больших принципиальных трудностей. Однако удается развить полукачественную теорию, которую мы будем называть *теорией стохастичности*. Эта теория позволяет представить себе общую картину неустойчивости нелинейных колебаний, дополненную оценками по порядку величины. Часто этого оказывается достаточным для приложений, во всяком случае, в комбинации с экспериментами, численными или «настоящими».

Основным понятием теории является понятие *нелинейного резонанса* (п. 2.2). Это интересное явление, пример которого описан выше, было исследовано впервые, по-видимому, Лагранжем в небесной механике, где оно получило название либрационного движения планет (см., например,³) и, в более явной форме, в теории ускорителей в связи с открытым Векслером и Мак-Милланом механизмом автофазировки^{4,5} (см. также⁶). Мы вводим и исследуем ниже нелинейный резонанс на примере сравнительно простых одномерных моделей, начиная с довольно общего случая

нелинейного осциллятора под действием внешнего периодического возмущения (п. 2.1) и кончая «элементарной» моделью (п. 3.1). Основным методом исследования служат аналитические оценки, базирующиеся отчасти на современной эргодической теории (гл. 3), подкрепленные численными экспериментами с «элементарной» моделью (гл. 4).

Теория стохастичности дает возможность представить себе общую структуру фазового пространства нелинейной колебательной системы, которое оказывается пронизанным всюду плотной системой (п. 2.4) нелинейных резонансов. Вследствие взаимодействия этих резонансов в окрестности сепаратрисы каждого из них всегда появляется так называемый *стохастический слой*, который представляет собой зародыш неустойчивости. Это обстоятельство было в общем известно еще Пуанкаре ⁶¹ и детально исследовалось Мельниковым ⁶², которому удалось вычислить так называемое расщепление сепаратрисы, характеризующее нижнюю границу ширины стохастического слоя. Верхняя граница была оценена с помощью теории стохастичности в работах ^{20,8} и оказалась совпадающей по порядку величины с расщеплением сепаратрисы. Недавно Алексеев строго доказал существование в стохастическом слое квазислучайных траекторий ⁶³, что и оправдывает название слоя.

В случае системы с одной степенью свободы достаточно тонкие стохастические слои разных резонансов не пересекаются на фазовой плоскости (см., например, рис. 1). Поэтому неустойчивость локализована в пределах одного стохастического слоя и с практической точки зрения не является опасной. Строгое рассмотрение этой проблемы в теории КАМ ⁵⁹ позволяет сформулировать и доказать в этом случае теорему о вечной (для $t \rightarrow \infty$) устойчивости движения. Такая же ситуация возникает и для автономной системы с двумя степенями свободы, так как ее движение ограничено в фазовом пространстве поверхностью постоянной энергии. Оба эти случая мы будем называть *одномерными*. В многомерном случае стохастические слои различных резонансов, вообще говоря, пересекаются между собой, образуя запутанную систему «каналов», по которым возможна диффузия на большие расстояния, т. е. реальная неустойчивость. Первый пример такой неустойчивости был построен Арнольдом ³⁵, поэтому она называется обычно *диффузией Арнольда*. Полукачественная теория этой неустойчивости развита в работе ⁸.

Ширина нелинейного резонанса и его стохастического слоя определяется величиной «возмущения» по отношению к «невозмущенной» системе, в качестве которой мы подразумеваем так называемую максимально устойчивую систему (п. 3.3), т. е. систему с разделяющимися переменными. При достаточно большом возмущении соседние в фазовом пространстве резонансы перекрываются (п. 2.3), а стохастические слои расширяются до размера своих резонансов, образуя в фазовом пространстве сплошную стохастическую область. При этом возникает сильная *стохастическая неустойчивость* (в том числе и в одномерном случае), которая является наиболее опасной неустойчивостью нелинейных колебаний. Настоящий обзор посвящен главным образом описанию именно этой неустойчивости на примере простых моделей (гл. 2, 3) и некоторых приложений (гл. 5, 6).

Для удобства читателя мы даем также сводку основных идей и понятий современной эргодической теории (гл. 3).

Теория стохастичности позволяет не только получить практически важные критерии и характеристики неустойчивости нелинейных колебаний, но и детально проследить переход от динамического к статистическому описанию движения механической системы. Последнее представляется существенным для более глубокого и правильного понимания ста-

стистических моделей. Этот вопрос обсуждается кратко в гл. 7, а также в п. 3.6. Читателей, интересующихся этой проблемой более детально, мы отсылаем к прекрасной монографии Крылова¹³, работы которого явились, на наш взгляд, первым шагом на пути построения физической теории стохастичности.

2. ОДНОМЕРНЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Основной задачей настоящего обзора является демонстрация феномена стохастической неустойчивости нелинейных колебаний на возможно более простых, но в то же время физических (т. е. имеющих отношение к реальным механическим системам) моделях. Одной из таких моделей является одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического возмущения, описанный во Введении. Картина движения такой модели очень наглядна, но, как мы увидим, совсем не тривиальна. К этой модели могут быть сведены важные практические задачи. Некоторые из них — в том числе и многомерные (в первом приближении) — рассматриваются ниже. Конечно, это совершенно не означает, что с помощью рассматриваемой модели можно решить все задачи нелинейных колебаний, однако она даст возможность, как мы увидим ниже, изучить основные особенности нелинейных колебаний, с помощью которых можно приступить к решению более сложных задач. К числу последних относится, например, так называемая диффузия Арнольда — особая форма стохастической неустойчивости многомерных систем. Мы не будем касаться ее сколько-нибудь подробно и отсылаем интересующихся читателей к специальным работам^{35,8} (см. также гл. 6).

В дальнейшем мы будем всегда считать возмущение малым, чтобы иметь возможность использовать приближенные методы. По этой причине основной эффект возмущения связан с резонансом. Для нелинейной системы такое утверждение не столь очевидно, как для линейной, но тем не менее оно оказывается правильным (п. 2.2).

2.1. И з о л и р о в а н н ы й н е л и н е й н ы й р е з о н а н с

Наиболее удобными переменными для описания движения нелинейного осциллятора являются переменные действие (I) — угол (θ). Действие связано с энергией системы W соотношением

$$\frac{dW(I)}{dI} = \omega(I), \quad \theta = \omega t + \varphi,$$

где $\omega(I)$ — частота нелинейных колебаний. При наличии возмущения уравнения движения осциллятора в переменных (I, θ) невозмущенного движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \vartheta)}{\partial \theta}, \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \vartheta)}{\partial I}, \quad \dot{\vartheta} = \Omega, \\ \mathcal{H}(I, \theta, \vartheta) &= \mathcal{H}_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где \mathcal{H} — гамильтониан, а возмущение εV является малым ($\sim \varepsilon \ll 1$) и периодическим по θ, ϑ с периодом 2π . Фаза ϑ характеризует внешнее возмущение с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Под нелинейностью осциллятора будем

понимать его *неизохронность*, т. е. зависимость частоты колебаний от энергии. Характеристикой нелинейности служит безразмерный параметр:

$$\alpha = \left| \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} \right| = \left| 2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial I^2} \left| \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial (I^2)} \right| \right|. \quad (2,2)$$

Ангармоничность колебаний, т. е. присутствие высших гармоник, не обязательно связано с нелинейностью. Так, вращение релятивистской частицы в магнитном поле дает пример нелинейного, но гармонического осциллятора. С другой стороны, движение ультрарелятивистской частицы в прямоугольной потенциальной яме представляет собой ангармонические колебания с постоянной частотой.

В общем случае возмущение εV разлагается в двойной ряд Фурье:

$$V(I, \theta, \vartheta) = \sum_{m, n} \frac{V_{mn}(I)}{2} e^{i(m\vartheta + n\theta)} + \text{к. с.} \quad (2,3)$$

Резонанс (m, n) (m — гармоники колебаний осциллятора с n -й гармоникой внешнего возмущения) определяется условием

$$m\Omega + n\omega \approx 0. \quad (2,4)$$

Требуемая точность этого равенства зависит от ширины резонанса (см. ниже п. 2.2).

Простейшим является случай единственного резонанса: $m, n = \pm 1$ ($\omega \approx \Omega$). В сумме (2,3) остается при этом два (действительных) слагаемых, одно из которых с аргументом $\vartheta - \theta$ ($\omega, \Omega > 0$) является собственно резонансным, в то время как другое ($\vartheta + \theta$) представляет высокочастотное возмущение. В первом приближении последним слагаемым можно пренебречь, например, на основании метода усреднения КБМ (Крылова — Боголюбова — Митропольского, ^{1,2}). Более тонкие эффекты влияния такого возмущения будут рассмотрены ниже (см. гл. 6).

Если ширина резонансов достаточно мала, то при заданных начальных условиях может осуществляться только один резонанс, который мы будем называть *реальным* или просто резонансом (2,4). Всем другим членам в сумме (2,3) соответствуют при этих начальных условиях *виртуальные резонансы* *). Естественно, что виртуальные резонансы влияют на движение, однако в нелинейной системе это влияние не сводится к тривиальной суперпозиции, и мы будем называть его *взаимодействием резонансов*.

В случае, если расстояние между резонансами «достаточно велико» — термин, который будет уточнен ниже (п. 2.3), — должно тем не менее выполняться приближение изолированного резонанса, когда можно пренебречь взаимодействием резонансов. Это соответствует обычному методу усреднения КБМ. Оставляя в сумме (2,3) только одно резонансное слагаемое и вводя резонансную фазу $\psi_{mn} = m\vartheta + n\theta$, получим из (2,1) уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon n V_{mn} \sin \psi_{mn}, \\ \dot{\psi}_{mn} &= m\Omega + n\omega(I) + \varepsilon n V'_{mn} \cos \psi_{mn}, \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

где штрих означает производную по действию I .

*) Заметим, что не каждый виртуальный резонанс может стать реальным, так как условие (2,4) выполняется, вообще говоря, не для всех m, n .

2.2. Фазовые колебания в приближении умеренной нелинейности

Пусть параметр α (2,2) удовлетворяет условию умеренной нелинейности:

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon. \tag{2,6}$$

Как будет видно из дальнейшего, изменение $\Delta I = I - I_p$ в этом случае всегда мало ($|\Delta I| \ll I_p$), где значение I_p соответствует точному резонансу ($m\Omega + n\omega(I_p) = 0$). Поэтому независимо от вида функций $\omega(I)$. $V_{mn}(I)$ движение вблизи нелинейного резонанса (2.5) описывается приближенно следующим (сохраняющимся) универсальным гамильтонианом:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_y &= n\omega' \frac{(\Delta I)^2}{2} + \varepsilon n V_{mn}(I_p) \cos \psi_{mn}, \\ \omega' &= (d\omega/dI)_{I=I_p}. \end{aligned} \right\} \tag{2,7}$$

Система (2,7) похожа на маятник с массой $(n\omega')^{-1}$ в поле тяжести с ускорением $g = \varepsilon n^2 \omega' V_{mn}$. Картина траекторий на фазовой плоскости I, ψ_{mn}

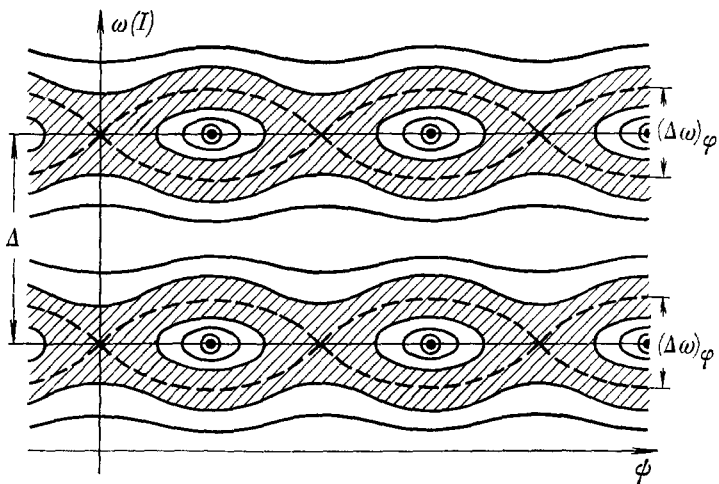


Рис. 1. Схема фазовых траекторий в окрестности двух резонансов при умеренной нелинейности (2,6).

$(\Delta\omega)_\varphi$ — ширина нелинейного резонанса; Δ — расстояние (по частоте) между соседними резонансами. Пунктиром показаны сепаратрисы первого приближения; в следующих приближениях они разрушаются и на их месте образуются стохастические слои, которые показаны штриховкой (п. 6.1).

показана на рис. 1 для двух нелинейных резонансов без учета взаимодействия между ними. На исходной фазовой плоскости осциллятора (I, θ) цепочка резонансов замкнута и содержит n областей. В каждой такой области имеется устойчивое положение равновесия, или эллиптическая неподвижная точка *) ($\psi_{mn} = \pi; g > 0$), обозначенная на рис. 1 значком \odot . Соседние области разделяются неустойчивым положением равно-

*) Под устойчивостью везде в этой работе понимается так называемая нейтральная устойчивость, при которой малые возмущения не нарастают и не затухают со временем.

весия, или гиперболической неподвижной точкой ($\psi_{mn} = 0$; $g > 0$, знак \times на рис. 1). Траектория, соединяющая две соседние гиперболические точки и обозначенная на рис. 1 пунктиром, называется *сепаратрисой*. Она ограничивает область нелинейного резонанса, внутри которой имеют место *фазовые колебания*, т. е. ограниченное изменение фазы ψ_{mn} . Вне сепаратрисы фаза меняется со временем монотонно. Максимальная ширина нелинейного резонанса (размер сепаратрисы) определяется из (2,7):

$$\left. \begin{aligned} (\Delta I)_\varphi &= 4V\sqrt{\varepsilon V'_{mn}/\omega'}, \\ (\Delta\omega)_\varphi &= \omega' (\Delta I)_\varphi = 4V\sqrt{\varepsilon\omega'V'_{mn}} = \frac{4\Omega_{mn}}{n}, \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

где Ω_{mn} — частота малых фазовых колебаний. При умеренной нелинейности (2,6) изменение как I , так и ω мало:

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{V'_{mn}}{\omega I}}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \sqrt{\varepsilon\alpha V'_{mn}/\omega I},$$

что и оправдывает универсальное описание нелинейного резонанса с помощью гамильтониана (2,7).

Физический смысл фазовых колебаний можно пояснить следующим образом. Изменение амплитуды колебаний в резонансе вызывает, вследствие нелинейности, уход частоты колебаний от резонансного значения и, следовательно, прекращает дальнейшее изменение амплитуды колебаний. Однако возникающая при этом частотная расстройка приводит к уходу резонансной фазы, так что амплитуда колебаний начинает изменяться в конце концов в противоположном направлении, частота колебаний снова возвращается к резонансному значению и т. д.

Хотя нелинейность и *стабилизирует* таким образом изолированный резонанс, т. е. ограничивает изменение ΔI , последнее оказывается согласно (2,8) существенно больше, чем в нерезонансном случае: $\Delta I \sim \varepsilon I$. Это оправдывает выделение резонансов в нелинейной системе. По той же причине фактическим параметром разложения при $\alpha \sim 1$ является $\sqrt{\varepsilon}$, а не ε . В частности, в первом приближении по $\sqrt{\varepsilon}$ можно пренебречь последним слагаемым в уравнении для $\dot{\psi}_{mn}$ (2,5), которое представляет собой линейную поправку к частоте *). Ее нужно учитывать только при $\varepsilon \gtrsim \alpha$. В частности, условие стабилизации резонанса нелинейностью может быть получено приближенно из оценки **)

$$\varepsilon n V'_{mn} \lesssim n (\Delta\omega)_\varphi,$$

или

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \lesssim \frac{\omega V'_{mn}}{I (V'_{mn})^2}. \quad (2,9)$$

Нелинейный резонанс был исследован впервые, по-видимому, Лагранжем в связи с так называемым либрационным движением планет³ и, в более явной форме, в теории ускорителей в связи с открытием Векслером и Мак-

*) Это слагаемое сохраняется и для линейного осциллятора.

**) Подробное исследование резонанса при слабой нелинейности проведено Шохом⁶⁶ и Мельниковым⁶²; качественно новое явление — сохранение значительной области стохастичности при сколь угодно слабой нелинейности — обнаружено недавно Фордом и Лансфордом⁸⁵.

Милланом механизмом автофазировки^{4,5} (см. также⁶). Из последних работ мы заимствуем основную терминологию, относящуюся к нелинейному резонансу. Универсальная теория нелинейного резонанса в приближении умеренной нелинейности была дана в работе⁷ (см. также⁸).

2.3. Взаимодействие нелинейных резонансов

Взаимодействие нелинейных резонансов — основной эффект, на который мы хотим обратить внимание в этой работе. Его значение состоит в том, что при достаточно сильном взаимодействии возникает очень опасная *стохастическая неустойчивость* нелинейных колебаний.

Очевидно, что взаимодействие резонансов зависит от отношения ширины резонанса $(\Delta\omega)_\Phi$ (2,8) к расстоянию до ближайшего соседнего резонанса $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$ (см. рис. 1).

Величину

$$s = \frac{(\Delta\omega)_\Phi}{\Delta} \tag{2,10}$$

назовем *константой связи резонансов*.

Приближение изолированного резонанса соответствует условию: $s \ll 1$. С другой стороны, при $s \gtrsim 1$, которое означает *перекрывание* соседних резонансов, картина движения должна существенно измениться. Действительно, как показывает универсальный гамильтониан (2,7), изолированный нелинейный резонанс эквивалентен движению системы в некоторой потенциальной «яме». При наличии нескольких резонансов имеется столько же потенциальных «ям» (см. рис. 1). Если $s \gtrsim 1$, соседние «ямы» сливаются, так что система может переходить из одной «ямы» в другую *). Очевидно, что это означает развитие некоторой неустойчивости. Наше основное утверждение состоит в том, что при константе связи $s \gtrsim 1$ возникает стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний, т. е. движение становится сильно нерегулярным, похожим на случайное (см. п. 3.6). Поэтому константу связи s можно назвать также *параметром стохастичности*.

Условие

$$s \sim 1 \tag{2,11}$$

будем называть *границей стохастичности*.

Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний, по-видимому, впервые наблюдалась в численных экспериментах Говарда и Хайна⁹, которые получили также критерий неустойчивости вида (2,11). Аналитические оценки даны в работе¹⁰, где были приведены также аргументы в пользу того, что эта неустойчивость является стохастической. Последняя точка зрения подтвердилась в дальнейшем в ряде работ, обзор которых можно найти в монографиях^{8,11} (см. также ниже). Оказалось, что стохастическая неустойчивость является частным случаем проявления статистических законов. Связь последних с неустойчивостью была замечена впервые на специально сконструированном примере Хедлундом и Хопфом¹², детально проанализирована Крыловым¹³ для случая молекулярных столкновений и строго доказана при весьма общих условиях Аносовым и Синаем¹⁴⁻¹⁶.

Ниже мы опишем основные особенности, механизм и природу стохастической неустойчивости на примере простых моделей.

*) Заметим, что при этом одновременно несколько соседних резонансов становятся реальными.

2.4. Основная модель стохастичности гамильтоновой системы

Рассмотрим специальный случай периодического возмущения нелинейного осциллятора в виде очень коротких «толчков», зависящих только от фазы θ : $V(I, \theta, \theta) \rightarrow TV(\theta) \sum_k \delta(t-kT)$ (2,1). Уравнения движения можно записать тогда в форме канонического преобразования $I, \theta \rightarrow \bar{I}, \bar{\theta}$:

$$\bar{I} = I - \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta} = I - \varepsilon I_0 f(\theta), \quad \bar{\theta} = \theta + T\omega(\bar{I}) \quad (2,12)$$

с производящей функцией $F(\bar{I}, \theta) = \bar{I}\theta + T(\mathcal{H}_0(\bar{I}) + \varepsilon V(\theta))$. Это преобразование описывает изменение величин I, θ под действием одного «толчка», или, как мы будем говорить в дальнейшем, на одном шаге. При $T \rightarrow 0$ преобразование (2,12) переходит, разумеется, в гамильтоновы уравнения (2,1), но без линейной поправки к частоте в силу принятого нами условия $\partial V / \partial I = 0$. Последнее выражение для \bar{I} , где $f(\theta) \sim 1$ — безразмерная функция фазы, а I_0 — постоянная размерности действия, введено для большей наглядности.

Рассмотрим, далее, частный случай, когда $f(\theta) = \sin \theta$, т. е. возмущение имеет всего одну гармонику. Условие резонанса может быть записано в виде $T\omega = 2\pi m$, где m — целое. В терминах дифференциальных уравнений (2,1), или, как мы будем говорить, *непрерывного времени*, эта система резонансов соответствует разложению в ряд Фурье периодической δ -функции:

$$\sum_k \delta(t-kT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\Omega t}}{T},$$

причем расстояние между резонансами равно $\Delta = 2\pi/T = \Omega$, а $V_{m1} = 2I_0/T$ (2,3), (2,12). Параметр стохастичности (2,10) принимает вид

$$s^2 = \left| \frac{8}{\pi^2} \varepsilon \omega' I_0 T \right|. \quad (2,13)$$

Покажем прежде всего из простых физических соображений, что при $s \gg 1$ движение системы (2,12), которую мы будем называть *основной моделью стохастичности* *), действительно похоже на случайное¹⁰. Для этого обратим внимание на то, что обе переменные I, θ играют совершенно различную роль в движении системы (2,12). Фазовое пространство системы представляет собой цилиндр, замкнутый по θ и бесконечный по I . Изменение I за один шаг всегда мало, так как $\varepsilon \ll 1$. Однако этого нельзя сказать об изменении θ , если $T\omega \gg 1$. Нетрудно видеть, что преобразование фазы имеет при этом в основном характер расширения, коэффициент которого мы определим как]

$$K(\theta) \equiv \frac{d\bar{\theta}}{d\theta} - 1 = -\varepsilon \omega' I_0 T f'(\theta). \quad (2,14)$$

Последнее выражение получается из (2,12). Сравнивая с (2,13), находим $|K| \sim s^2$.

При $K \gg 1$ имеют место два существенных процесса. Первый из них — локальная неустойчивость движения, означающая экспонен-

*) Смысл этого термина выясняется ниже (п. 6.3), после того как мы увидим, какие свойства стохастичности описываются этой моделью и какие нет; основная модель введена в¹⁰.

циальную расходимость близких траекторий по крайней мере по фазе $(\Delta\theta)_n = (\Delta\theta)_0 (\bar{K})^n$, где $\bar{K}(\theta)$ — среднее геометрическое значение коэффициента расширения вдоль траектории, а n — номер шага преобразования, или дискретное время. Второй процесс — так называемое *перемешивание* — в данном случае распределение траекторий, вышедших из небольшой области $\Delta\theta \ll 2\pi/|K|$, по всему интервалу фаз 2π уже после одного шага. Легко представить себе, что это ведет к исчезновению корреляций в последовательности фаз $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$, т. е. движение по фазе становится как бы «случайным». Разумеется, приведенные соображения являются слишком упрощенными, но зато, как нам кажется, очень наглядными. Это особенно важно потому, что строгая математическая теория движения даже такой простой модели, как (2,12), наталкивается пока что на непреодолимые трудности. Тем не менее оказывается возможным несколько углубить эти наглядные соображения с помощью современной эргодической теории (гл. 3). Представим себе на минуту, что мы уже доказали «случайность» движения по фазе. Тогда мы приходим к типичной ситуации в современной статистической механике при выводе кинетического уравнения в приближении хаотических фаз. Обычно постулируется, что угловые переменные являются случайными величинами, и это дает возможность написать кинетическое уравнение для функции распределения от переменных действия, которые служат интегралами движения невозмущенной системы. За подробностями получения кинетического уравнения мы отсылаем читателя к специальным работам^{17,18,27} (см. также гл. 7).

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Эргодическая теория является разделом математики, изучающим дискретные или непрерывные преобразования с сохраняющейся мерой (интегральным инвариантом). Как показывает название, эргодическая теория возникла из попыток обосновать статистические законы, т. е. вывести их из динамических уравнений движения. Наиболее интересным ее объектом в настоящее время (по крайней мере для физиков) является случай максимальной неустойчивости движения гамильтоновой системы. Противоположный случай максимальной устойчивости рассматривается теорией КАМ (см. п. 6.1). Согласно теореме Лиувилля интегральным инвариантом (и мерой пространства) служит фазовый объем, элемент которого обозначим посредством $d\Gamma$. Полный объем ограниченного фазового пространства системы положим $\Gamma = 1$.

Цель этой главы — пояснить на простых примерах основные понятия и язык современной эргодической теории и тем самым облегчить чтение специальных работ в этой области. Мы убеждены, что знакомство с этой теорией является сейчас насущной необходимостью для всех занимающихся проблемой устойчивости нелинейных колебаний и смежными вопросами.

Кроме того, мы воспользуемся последними результатами эргодической теории для более подробного анализа движения основной модели (2,12) (см. п. 3.5).

3.1. Элементарная модель стохастичности

Прежде всего нам придется еще более упростить основную модель (2,12). Это связано с тем, что эргодическая теория применима главным образом к системам с конечным фазовым пространством, что не выполняется для основной модели. Движение последней распадается фактически

на два существенно различных процесса (при $s \gg 1$): динамическое движение в ограниченной области фазового пространства, приводящее к образованию «случайной» последовательности фаз $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$, и неограниченная диффузия по I . Только первый из этих процессов имеет отношение собственно к эргодической теории, тогда как второй описывается кинетическим уравнением. Покажем, как можно разделить оба процесса на примере основной модели. Для удобства записи преобразования перейдем прежде всего к новой фазе $\psi = \theta/2\pi$ с периодом 1, который удобно задавать с помощью операции взятия дробной части: $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x . Введем теперь вместо I новую переменную $\varphi = \{T\omega(I)/2\pi\}$. Смысл ее состоит в том, что мы хотим выделить только такие изменения I , которые приводят к изменению фазы ψ , и таким образом исключить диффузионный процесс. В новых переменных преобразование принимает вид

$$\bar{\varphi} = \{\varphi + kf(\psi)\}, \quad \bar{\psi} = \{\psi + \bar{\varphi}\} \quad (3,1)$$

и также является каноническим. Здесь $k = \varepsilon\omega'I_0T/2\pi$. Фазовое пространство системы (3,1) ограничено теперь единичным квадратом с попарно отождествленными сторонами, или единичным тором. Модель (3,1) будем называть *элементарной*.

В этой главе мы используем ее наряду с другими простыми моделями для иллюстрации основных понятий современной эргодической теории.

Подчеркнем во избежание недоразумений, что мы не собираемся приводить не только доказательства теорем эргодической теории, но даже и их точные формулировки. Наша основная цель — по возможности наглядно пояснить, если так можно выразиться, физический смысл эргодической теории.

Читателям, интересующимся собственно математической стороной этой теории, мы рекомендуем в первую очередь книгу Халмоша²³, по-видимому, наиболее доступную из специальных руководств. Современное состояние теории изложено достаточно полно в обзорах Рохлина и Аносова и Синая¹⁶.

3.2. Методы описания движения в эргодической теории

Исходным является фазовая траектория движения, т. е. траектория в фазовом пространстве системы $x(t)$, где x означает фазовый вектор (совокупность координат фазового пространства). Для элементарной модели (3,1) $x = (\varphi, \psi)$, а время дискретно: $t = n$ — целое. Такое движение будем называть *каскадом*¹⁶. Движение с непрерывным временем, заданное, например, дифференциальными уравнениями, называется *поток*ом.

Другой способ описания движения связан с использованием некоторой функции точки фазового пространства $f(x)$, вообще говоря комплексной. Последняя может представлять любую величину, например энергию системы. Ниже, однако, мы будем считать ради наглядности, что $f(x)$ является обычной для статистической механики функцией распределения в фазовом пространстве, или (фазовой) *плотностью*²².

Сингулярная плотность ($f = \delta(x - x_0(t))$) эквивалентна описанию в терминах единственной траектории. В эргодической теории используется обычно несингулярная плотность $f(x)$, исключая особые траектории на множестве меры нуль. Заметим, однако, что несингулярная

плотность является принципиально ненаблюдаемой (неосуществимой) *) и может использоваться поэтому лишь в качестве вспомогательного, промежуточного, понятия.

Изменение фазовой плотности $f(x, t)$ со временем определяется движением системы вдоль фазовых траекторий:

$$f(x, t + T) = \hat{S}_T f(x, t) \equiv f(\hat{T}x, t); \tag{3,2}$$

здесь \hat{T} — оператор сдвига фазовой точки вдоль траектории за время T , а \hat{S}_T — оператор изменения функции за то же время (классический аналог S -матрицы; см., например, ²⁴). В случае каскада оператор \hat{T} задается преобразованием, например (3,1). Смысл введения нового оператора \hat{S}_T состоит в том, что он является линейным, а для обратимого и сохраняющего меру преобразования также и унитарным.

Важной характеристикой оператора \hat{S}_T является его спектр. Определим вначале *скалярное произведение* двух векторов гильбертова пространства посредством

$$\langle g, f \rangle = \int gf d\Gamma. \tag{3,3}$$

Для дальнейшего нам будет удобно ввести коэффициент *корреляции функции* g, f **): $\rho(g, f) = \langle g, f \rangle - \langle g \rangle \langle f \rangle$.

В частном случае, когда $g = \hat{S}_T f$, говорят об *автокорреляции*, которая и определяет спектр $S(\omega)$ согласно теореме Хинчина ^{25, 26}:

$$\langle \hat{S}_T f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega T} S(\omega) d\omega; \tag{3,4}$$

здесь T является переменным параметром, так что автокорреляция есть функция от T и функционал от f . Корреляционный спектр $S(\omega)$ зависит, конечно, от f , однако *тип* спектра в известных пределах ¹⁶ не зависит от f . В дальнейшем мы будем иметь дело с двумя основными типами спектра — дискретным и непрерывным. В первом случае спектральная плотность $S(\omega) = \sum_k C_k \delta(\omega - \omega_k)$; во втором случае функция $S(\omega)$ непрерывна и ограничена.

3.3. Э р г о д и ч н о с т ь д в и ж е н и я, и л и к а к п о я в л я е т с я в е р о я т н о с т ь в д и н а м и ч е с к о й т е о р и и

Эргодичность движения является, пожалуй, наиболее известным свойством статистической системы. Это понятие было введено в физике Больцманом и связывается обычно с представлением о траектории движения, равномерно (по инвариантной мере) заполняющей весь доступный фазовый объем. Более точно эргодичность означает, что в пределе при $t \rightarrow \infty$ доля времени (t_A/t) пребывания системы в любом элементе (A)

*) Это следует уже из того факта, что несингулярная плотность не подчиняется возвратной теореме Пуанкаре, справедливой для любой гамильтоновой системы (см. п. 3.4).

***) Иногда употребляется еще *нормированный* коэффициент корреляции: $\rho(g, f) = \frac{\langle g, f \rangle - \langle g \rangle \langle f \rangle}{\{[(g^2) - \langle g \rangle^2] \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2\}^{1/2}}$. Здесь и ниже: $\langle f \rangle = \int f d\Gamma$; иногда применяется другое обозначение: $\langle f, 1 \rangle$ (3.3).

фазового пространства пропорциональна фазовому объему этого элемента Γ_A :

$$w_A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_A}{t} = \frac{\Gamma_A}{\Gamma}. \quad (3,5)$$

Существование предела (3,5) является центральной теоремой (Биркгофа — Хинчина) классической эргодической теории и позволяет ввести понятие *вероятности* для единственной динамической траектории²⁵. В (3,5) w_A означает вероятность попадания системы в область A *). Соответствие введенной таким образом вероятности с нашим эмпирическим представлением об этой величине будет обсуждаться в п. 3.6.

Существование предела (3,5) следует по теореме Биркгофа — Хинчина²⁵ только из существования конечной инвариантной меры. Поэтому в некотором смысле все гамильтоновы системы являются эргодическими. Чтобы разъяснить это странное на первый взгляд утверждение, необходимо уточнить понятие «доступный фазовый объем», фигурирующее в приведенном выше определении эргодичности. В некоторых случаях, например для элементарной модели (3,1), это может быть все фазовое пространство. Обычно, однако, «доступным» является лишь некоторое подпространство, выделяемое *однозначными интегралами движения*²⁸. У автономной (замкнутой) системы всегда есть по крайней мере один такой интеграл — энергия W , который и выделяет в фазовом пространстве энергетическую поверхность $W = \text{const}$ с числом измерений $2N - 1$, где N — число степеней свободы системы.

Назовем систему *максимально устойчивой*, если она имеет N однозначных интегралов. «Доступный фазовый объем» сводится в этом случае к поверхности N измерений, которая в разделяющихся переменных действие — угол является N -мерным *тором*:

$$I = \text{const}, \quad \theta_k = t\omega_k \quad (I_1, \dots, I_N) + \theta_{k0}.$$

Большее число однозначных интегралов вплоть до $2N - 1$ возможно только на резонансных торах $\sum_{k=1}^N n_k \omega_k = 0$ (n_k — целые)²⁸, мера которых в фазовом пространстве системы равна нулю.

На нерезонансных торах, мера которых в фазовом пространстве равна 1, фазовая траектория незамкнута и покрывает весь тор. Последнее свойство называется *транзитивностью* (на торе). Согласно теореме Биркгофа²⁵ транзитивность эквивалентна эргодичности. Несколько упрощенно можно сформулировать эту теорему следующим образом: если траектория заполняет какую-либо область фазового пространства, то она заполняет ее равномерно (по *наведенной* на ней мере, см. следующее примечание). В физике, однако, под эргодичностью понимают такой случай, когда движение транзитивно на энергетической поверхности **). Если это условие не выполняется, то система может быть всегда разложена на *эрго-*

*) Для системы, состоящей из очень большого числа $N \rightarrow \infty$ одинаковых подсистем — «частиц», возможно другое определение вероятности в фазовом пространстве одной «частицы» (так называемое μ -пространство): $w_a = \lim_{N \rightarrow \infty} N_a/N$. Это есть

обычный способ введения функции распределения в μ -пространстве. Однако в этом случае приходится принимать дополнительные предположения о допустимых начальных условиях, от которых зависит w_a при любом $N \rightarrow \infty$ ²⁷. Фазовое пространство всей системы, в котором определена вероятность (3.5), называется Γ -пространством.

**) Так как инвариантным является полный фазовый объем, то наведенная мера определяется в данном случае объемом слоя между двумя близкими энергетическими поверхностями $\Delta W = \text{const} \rightarrow 0$ или $\Gamma(S) \propto S/\text{grad } W(x)$, где S — площадь энергетической поверхности.

дические компоненты. Это значит, что всегда все фазовое пространство можно представить в виде суммы (объединения) конечного или счетного числа, или даже континуума подпространств, в каждом из которых движение транзитивно и, следовательно, эргодично. Примером может служить упомянутое выше множество (континуум) торов максимально устойчивой системы.

Таким образом проблема эргодичности сводится к отысканию максимальной области транзитивности движения.

На спектральном языке эргодичность эквивалентна условию, чтобы число 1 являлось невырожденным собственным значением оператора \hat{S}_T . Это условие обеспечивает транзитивность движения. В противном случае появляются инвариантные при движении подпространства и происходит распад на эргодические компоненты по числу различных собственных функций, соответствующих собственному значению 1.

Равномерное заполнение фазового пространства траекторией приводит к релаксации любой начальной функции распределения $f(x, t)$ к константе²³; последняя всегда является собственной функцией оператора \hat{S}_T с собственным значением 1, как это следует из выражения (3,2). Это свойство эргодического движения может быть выражено равенством

$$\left. \begin{aligned} \overline{f(x, t)} &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{S}_{kT} f(x, t) = \langle f(x, t) \rangle, \\ \hat{S}_{kT} f(x, t) &= f(x, t + kT), \end{aligned} \right\} \quad (3,6)$$

где черта означает, как это видно из определения, усреднение по времени с шагом T . Равенство $\bar{f} = \langle f \rangle$ имеет место почти всюду в фазовом пространстве, т. е. за исключением, быть может, множества точек меры нуль. Последняя оговорка является типичной для всей эргодической теории.

Соотношение (3,6) выражает хорошо известное в статистической физике равенство временных (\bar{f}) и фазовых ($\langle f \rangle$) средних. Существенно подчеркнуть, однако, что релаксация в эргодической системе имеет место только в среднем по времени, между тем как функция $f(x, t)$ изменяется, вообще говоря, квазипериодически, так как ее спектр может быть дискретным (см. выше).

Условие эргодичности (на данном множестве) можно выразить также с помощью коэффициента корреляции функций $f(x, t), g(x)$ ($\rho_T(f, g) \equiv \rho(S_T f, g)$) (п. 3.2) в виде

$$\overline{\rho_T(f, g)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{kT}(f, g) = 0. \quad (3,7)$$

В частном случае $g(x) = f(x, 0)$ получаем аналогичное соотношение для автокорреляции.

Наконец, введем еще одну важную величину — вероятность перехода $w_{ik}(T)$ между двумя областями фазового пространства A_i, A_k . Основанием для введения такой величины служит тот факт, что для эргодического движения всегда существуют траектории, соединяющие обе области. Пусть $\hat{T}A_i$ — область, в которую перешла область A_i через время T в результате движения по траекториям. Меру пересечения ее с областью A_k *): $\Gamma_{ik}(T) = \Gamma(\hat{T}A_i \cap A_k)$, и назовем вероятностью перехода:

$$w_{ik}(T) \equiv \Gamma_{ik}(T).$$

*) То есть общую часть областей $\hat{T}A_i, A_k$.

Оказывается ²³, эргодичность означает, что

$$\overline{w_{ik}(T)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \Gamma_{ik}(lT) = \Gamma_i \Gamma_k = w_i w_k, \quad (3,8)$$

где w_l — вероятность попадания траектории в область A_l , равная мере этой области Γ_l ($\Gamma = 1$) (см. выше).

Соотношение (3,8) может быть получено непосредственно из (3,7), если в качестве функций $f(x, 0)$, $g(x)$ взять так называемые характеристические функции областей A_i , A_k , т. е. функции, равные 1 внутри соответствующей области и нулю вне ее.

3.4. Движение с перемешиванием, или турбулентность фазового потока

Согласно предыдущему разделу (п. 3.3) спектр эргодической системы может быть дискретным, а значит, движение ее — квазипериодическим. Характерной особенностью такого движения является его регулярность, означающая, в частности, возврат траектории к начальной точке с заданной точностью на определенном, ограниченном сверху, интервале времени. Примером может служить движение по поверхности двумерного тора с постоянными частотами ω_1 , ω_2 , отношение которых иррационально. Частоты спектра в этом случае равны: $\omega_{kl} = k\omega_1 + l\omega_2$; k, l — целые. При $\omega_1 \ll \omega_2$ или $\omega_2 \ll \omega_1$ регулярность обхода тора особенно наглядна. Картина движения в этом случае напоминает развертку луча на экране телевизора и не имеет ничего общего с нашим интуитивным представлением о случайном процессе. Следовательно, эргодичность является слишком слабым свойством с точки зрения моделирования случайного процесса. Используя гидродинамическую аналогию, можно сказать, что *фазовый поток*, т. е. совокупность всех траекторий в фазовом пространстве системы, является в этом случае *ламинарным*. *Турбулентный* фазовый поток называется *перемешиванием* ²³ (ср. п. 2.4). Это — одно из основных понятий современной эргодической теории в отличие от классической, которая останавливалась на эргодичности. Точное определение перемешивания на языке соответственно релаксации плотности, корреляции и вероятности перехода имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) &= \langle f(x, t) \rangle, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \rho_T(f, g) &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} w_{ik}(T) &= w_i w_k. \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

Характерной особенностью этих соотношений является необратимость процесса релаксации при перемешивании, в отличие от квазипериодического изменения величин $f(x, t)$, $\rho_T(f, g)$, $w_{ik}(T)$ со временем при наличии только эргодичности (3,6)—(3,8). Иными словами, при эргодичности предельные значения достигаются только *в среднем* по времени, а при перемешивании они имеют место асимптотически для достаточно большого времени. Это уже значительно ближе к нашему интуитивному представлению о случайном процессе. В частности, перемешивание приводит не только к понятию вероятности, но и к понятию статистически независимых событий (для единственной траектории!), каковыми являются, например, попадания траектории в различные участки фазового пространства (последнее соотношение (3,9)). Заметим, что второе соотношение (3,9)

представляет собой хорошо известный в статистической механике закон расщепления временных корреляций.

Введем еще одно вспомогательное понятие, которое поможет глубже уяснить механику перемешивания. Это — так называемое *слабое перемешивание*, определяемое эквивалентными условиями

$$\left. \begin{aligned} \overline{|f(x, t) - \langle f(x, t) \rangle|} &= 0, \\ \overline{|\rho_T(f, g)|} &= 0, \\ \overline{|w_{ik}(T) - w_i w_k|} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,10)$$

На первый взгляд это очень похоже на эргодичность (ср. (3,6)—(3,8)). Существенное отличие, однако, состоит в том, что здесь берутся *абсолютные значения* величин, стремящихся к нулю. Поэтому на самом деле свойство слабого перемешивания ближе к перемешиванию (3,9), чем к эргодичности.

При слабом перемешивании возможен возврат плотности $f(x, t)$ т. е. сильное отклонение ее от равновесного (предельного) значения при любых $t \rightarrow \infty$, однако частота этих отклонений, или их длительность, должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Согласно эргодической теории ²³ слабое перемешивание эквивалентно непрерывному спектру оператора \hat{S}_T . Отсюда вытекает, что сильное перемешивание также имеет непрерывный спектр. Это следует непосредственно и из необратимого характера процесса релаксации (3,9).

Необратимость процесса релаксации согласно соотношениям (3,9) не противоречит возвратной теореме Пуанкаре ²³, поскольку последняя относится к фазовой траектории движения, а не к функции распределения (см. п. 3.2 *)). Остановимся на этом вопросе несколько подробнее, так как в физической литературе получило распространение неправильное понимание возвратной теоремы как утверждения о квазипериодичности движения (см., например, ^{19, 29, 30}). Если понимать последний термин буквально, он эквивалентен дискретному спектру движения **) ³⁶ и автокорреляций. Между тем при перемешивании спектр непрерывный, хотя возвратная теорема Пуанкаре, опирающаяся только на существование инвариантной меры, остается, разумеется, справедливой. Возможно, что указанная ошибка является в значительной мере терминологической, проистекающей от расширения понятия квазипериодического движения. Важно подчеркнуть, что возврат траекторий имеет существенно различный характер при дискретном и непрерывном спектре движения. В первом случае возврат является регулярным в том смысле, что при заданной точности возврата существует нижняя *ненулевая* граница частоты возврата. Иными словами, возврат обязательно происходит в течение *конечного* интервала времени. Во втором случае нижняя граница частоты возврата равна нулю, несмотря на то, что согласно теореме Пуанкаре возврат будет иметь место бесконечное число раз ²³. Движение по траектории носит в последнем случае нерегулярный («аперiodический») характер, нисколько не противоречащий «настоящему» случайному процессу и, в частности, статистически равновесному состоянию (с флуктуациями!). Поэтому встречающиеся иногда утверждения о неприменимости статистических

*) Заметим, что эта теорема иногда формулируется неточно (см., например, ⁵¹).

**) Точнее, термин квазипериодический означает даже некоторый специальный вид дискретного спектра с конечным числом основных частот: $\omega_{n_1 \dots n_N} = n_1 \omega_1 + \dots + n_N \omega_N$. В общем случае дискретного спектра говорят о почти-периодической функции.

представлений на достаточно больших интервалах времени, превышающих цикл Пуанкаре ³⁰, ошибочны уже по существу *). Соотношения (3,9) показывают, что дело обстоит как раз наоборот: чем больше интервал времени, тем точнее статистические понятия в механике.

3.5. К - энтропия и кинетическое уравнение

В результате перемешивания происходит релаксация к статистически равновесному состоянию. Однако этого свойства, вообще говоря, недостаточно для получения кинетического уравнения, описывающего сам процесс релаксации. Дело в том, что статистическое описание в динамической системе возможно только после выполнения с заданной точностью предельных соотношений вида (3,9). Пусть это происходит за время $\sim \tau_n$. Тогда характерное время диффузии, определяемое кинетическим уравнением, должно быть много больше: $\tau_D \gg \tau_n$. Выполнение этого неравенства возможно благодаря тому, что диффузия и перемешивание могут относиться к различным координатам фазового пространства. Такая ситуация имеет место, например, для нашей основной модели (2,12). Диффузия идет здесь по I и характеризуется масштабом времени: $\tau_D \sim \varepsilon^{-2}$ (шагов). Перемешивание же касается в основном фазы θ и происходит за время $\tau_n \sim 1$ (более подробное обсуждение этого вопроса см. в гл. 7).

Немаловажное значение имеет и закон релаксации (расщепления корреляций) при перемешивании (3,9). Дело в том, что диффузия приводит в обычных условиях (в частности, в ограниченном объеме) к экспоненциальной релаксации. Отсюда ясно, что если мы хотим иметь статистическое описание с достаточной точностью, то расщепление корреляций должно происходить по крайней мере тоже по экспоненциальному закону (но, конечно, с меньшим характерным временем). Оказывается, что такой закон перемешивания действительно обычно имеет место для реальных механических систем. Этот факт был установлен впервые Крыловым ¹³. Впоследствии, независимо от работ Крылова, Колмогоров ³¹ ввел специальную величину — *энтропию* динамической системы (h), которая равна по порядку величины обратному времени расщепления корреляций. В дальнейшем мы будем называть эту величину энтропией Крылова — Колмогорова, или K -энтропией **).

Строгое определение K -энтропии удобно связать со свойством локальной неустойчивости движения (п. 2.4), которая характеризует разбегание близких траекторий. Локальную неустойчивость можно исследовать с помощью линеаризованных уравнений движения, или уравнений в вариациях, которые называются также *касательным преобразованием* ***)

Рассмотрим вначале случай каскада, определяемого некоторым преобразованием. Пусть l, \bar{l} — длина касательного вектора (расстояние между двумя траекториями) до и после преобразования. Тогда K -энтропия каскада может быть определена посредством ¹⁵

$$h = \lim_{l \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\bar{l}}{l} \right), \quad (3,11)$$

*) Заметим, однако, что *кинетическое уравнение* действительно становится неприменимым на больших временах, так как оно не описывает флуктуации, существенные на таких временах. Но это не означает, конечно, неприменимости статистического описания вообще.

**) По поводу связи ее с термодинамической энтропией см. ниже.

***) Говорят, что это преобразование действует в *касательном пространстве*

где черта означает усреднение по времени (п. 3.3), т. е. вдоль траектории движения. Это выражение удобно для экспериментального нахождения энтропии, например, путем численного решения уравнений движения (гл. 4). В рассматриваемом случае каскада K -энтропия характеризует согласно (3,11) среднее разбегание близких траекторий за один шаг.

Перейдем теперь к потоку, который представим себе как предел каскада, длительность шага которого $T \rightarrow 0$. Тогда из (3,11) имеем

$$h = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{T} \lim_{l \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\bar{l}}{l} \right) \right). \quad (3,11a)$$

Это выражение немедленно приводит к экспоненциальному закону развития локальной неустойчивости:

$$l(t) = l(0) e^{ht}.$$

Согласно (3,11a) K -энтропия равна среднему значению инкремента этой неустойчивости.

Теория¹⁵ позволяет получить более удобное для аналитических расчетов выражение для K -энтропии непосредственно через параметры системы. Для каскада это может быть сделано следующим образом. Как и всякое линейное преобразование, касательное преобразование характеризуется матрицей, произведение характеристических чисел которой $\prod_i \lambda_i = 1$ в силу сохранения фазового объема. Если бы коэффициенты преобразования, а значит, и λ_i были постоянными, то неустойчивость соответствовала бы просто действительным λ_i , в то время как комплексно-сопряженные λ_i отвечали бы локальной устойчивости. Пример такой простейшей ситуации дает элементарная модель (3,1) с $f(\psi) = \psi$. Несложные вычисления приводят к собственным значениям и векторам:

$$\lambda = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{K \left(1 + \frac{K}{4} \right)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K, \\ K^{-1}, \end{array} \right\} \quad (3,12)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{K}{\lambda - 1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - 1/K, \\ -K, \end{array} \right\}$$

где $K(\psi) = kf'(\psi) = k$ в рассматриваемом случае; θ — угол между осью ψ и собственным вектором с $\lambda > 1$; последние выражения дают предельные значения при $K \rightarrow \infty$. Локальная устойчивость соответствует интервалу $-4 < K < 0$. (3,13)

Для остальных значений K движение неустойчиво.

Трансформация небольшого участка фазового пространства в последнем случае изображена схематически на рис. 2. Участок экспоненциально ($\sim \lambda^n$) расширяется вдоль собственного вектора с $\lambda^+ > 1$ и сжимается вдоль вектора с $\lambda^- < 1$. Процесс перемешивания начинается после того, как длина участка достигает максимального размера фазовой области системы (рис. 2, ср. п. 2.4).

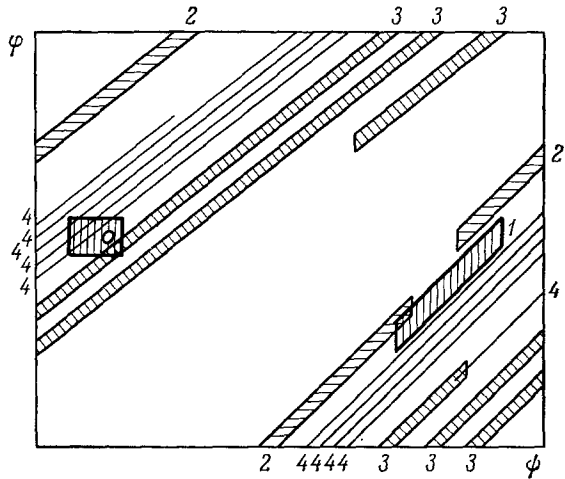


Рис. 2. Схематическое изображение процесса перемешивания для элементарной модели (3,1) с $f(\psi) = \psi$ ($k \gg 1$).

Начальная область — квадрат; цифры указывают номер шага. Направление растяжения совпадает приблизительно с диагональю фазового квадрата, а направление сжатия — с осью ψ .

Легко видеть, что при $t \rightarrow \infty$ направление почти любого касательного вектора будет стремиться к направлению собственного вектора расширения; поэтому (3,11) переходит в

$$\dot{h} = \ln \lambda^+ \quad (3,14)$$

В типичном случае переменных (по фазовому пространству) коэффициентов касательного преобразования проблема локальной неустойчивости значительно усложняется. С одной стороны, неустойчивость может иметь место и для комплексно-сопряженных значений λ за счет параметрического резонанса. С другой стороны, действительные $\lambda(x)$ еще не гарантируют локальной неустойчивости, так как из-за поворота собственных векторов расширение фазового участка может сменяться его сжатием, что может привести, в свою очередь, к ограниченным колебаниям близких траекторий, т. е. к локальной устойчивости *). В этом случае необходимо найти решение линеаризованных уравнений на всей временной оси. Заметим, что аналогичная процедура уже давно используется в гидродинамике ³² для получения критерия возникновения турбулентности.

С другой стороны, локальная неустойчивость возможна и при $\dot{h} = 0$, хотя и развивается в этом случае неэкспоненциально. Например, для любых нелинейных колебаний формально существует локальная неустойчивость $l \propto t$ за счет сдвига частоты между траекториями. Однако по всем разумным критериям такое движение должно считаться устойчивым. Напротив, есть примеры перемешивания (т. е. несомненной неустойчивости движения) с $\dot{h} = 0$. Это показывает, что свойство локальной неустойчивости должно использоваться с известной осторожностью. Строгое математическое исследование этого вопроса для широкого класса динамических систем было произведено лишь сравнительно недавно Аносовым и Синаем ¹⁴⁻¹⁶. Они показали, что экспоненциальная локальная неустойчивость для *всех* начальных условий как в основном, так и в касательном пространствах действительно влечет за собой статистические свойства — положительную K -энтропию **), перемешивание и эргодичность.

Теория Аносова — Синая позволяет несколько усилить приведенный выше результат относительно элементарной модели. Именно Оселедец и Синай показали, что движение этой модели обладает статистическими свойствами, если

$$|f'(\psi)| \geq C, \quad (3,15)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Смысл последнего условия состоит в том, что при достаточно больших $k > 4/C$ устойчивые области (3,13) отсутствуют.

Этот результат — максимум того, что может дать современная эргодическая теория для колебательной системы. Из-за взятия дробной части в (3.1) возмущение оказывается при условии (3,15) негладким. В реальном случае при любом $k \rightarrow \infty$ могут существовать устойчивые области вблизи точек $f' = 0$, что исключает возможность строгого применения современной теории ***). С другой стороны, размер этих областей стремится

*) Последний эффект можно наблюдать, в частности, на примере ⁸⁶ специального нелинейного преобразования, сконструированного Мак-Милланом.

**) В дальнейшем будем говорить просто K -энтропия, подразумевая всегда $h > 0$.

***) Для полноты картины отметим, что в другой механической системе — сталкивающиеся шарики. — которая в известном смысле моделирует молекулярные системы, нет устойчивых областей; это дало возможность Синаю строго доказать ее статистические свойства ³⁴.

к нулю с возрастанием k :

$$\Delta\psi \approx \frac{4}{kf''}. \quad (3,16)$$

Поэтому можно думать, что фактически, несмотря на неприменимость строгой теории, влиянием устойчивых областей можно пренебречь, если только $k \gg 1$. Численные эксперименты с элементарной моделью подтверждают в конечном счете этот вывод, хотя и показывают, что он является далеко не тривиальным (гл. 4). Принимая этот вывод, мы можем определить по порядку величины положение границы стохастичности для элементарной модели как $K \sim 4$. Для основной модели (2,12) получаем, используя (2,13): $s \sim 2$ в соответствии с первоначальной оценкой (2,11). Уточнение последней оценки не имеет смысла, так как само понятие границы стохастичности является приближенным. На самом деле имеется целая переходная зона ($s \sim 1$) с весьма сложной структурой фазовой плоскости.

В рассматриваемом случае переменных $\lambda(x)$ К-энтропия выражается через некоторое среднее значение от $\lambda^+(x)$ по фазовому пространству¹⁵. Для элементарной модели при $K \gg 1$ общая ситуация несколько упрощается, так как направление собственных векторов остается в этом случае почти постоянным (3,12), за исключением узкого интервала фаз ($\Delta\psi \sim 1/k$) вблизи области устойчивости (3,13). Общая теория^{15,8} приводит к выражению

$$h \approx \langle \ln \lambda^+(x) \rangle \approx \langle \ln |K(\psi)| \rangle. \quad (3,17)$$

Для основной модели получаем аналогично

$$h \approx \ln |\varepsilon \omega' I_0 T| + \langle \ln |f'(\theta)| \rangle. \quad (3,18)$$

Рис. 2 наглядно демонстрирует, что локальная неустойчивость движения в сочетании с ограниченностью фазового пространства системы непосредственно приводит к перемешиванию траекторий. Можно сказать поэтому, что локальная неустойчивость является первопричиной процесса перемешивания, а значит, и всех статистических свойств динамической системы. Вот почему К-энтропия является наиболее существенной статистической характеристикой динамической системы, как это было подчеркнуто еще Крыловым¹³.

Экспоненциальная локальная неустойчивость движения является, как показал Аносов¹⁴, причиной еще одного весьма важного свойства стохастической системы — ее *грубости*, или *структурной устойчивости*. Последняя означает, как известно (см., например,⁵⁰), независимость топологической структуры фазовых траекторий от малых изменений уравнений движения. Это дает возможность ограничиться при исследовании стохастичности первым приближением теории возмущения, а также широко использовать различные приближенные модели.

Пример на рис. 2 показывает, что грубое перемешивание больших (~ 1) областей фазового пространства происходит за время $\tau_n \sim h^{-1}$. Кроме того, общая картина развития локальной неустойчивости позволяет заключить, что тонкое перемешивание, т. е. перемешивание малых участков, происходит с запаздыванием: $t(\Delta_0) \sim \frac{|\ln \Delta_0|}{h}$, где Δ_0 — начальный размер участка. Эта оценка характеризует также зависимость пространственного масштаба перемешивания от времени ($\Delta_0(t)$).

Остановимся в заключение на связи К-энтропии с обычной термодинамической энтропией⁸. Последняя характеризует, как известно,

статистическое состояние системы и зависит только от функции распределения ²²:

$$H = - \int d\Gamma f \ln (f\Gamma_0); \quad (3,19)$$

здесь Γ_0 — некоторая постоянная, имеющая размерность объема фазового пространства. В статистической физике эта постоянная определяется квантованием фазового пространства: $\Gamma_0 = (2\pi\hbar)^N$. Физический смысл величины Γ_0 состоит в том, что она характеризует минимальную ячейку разбиения фазового пространства. В классическом случае также можно ввести минимальную ячейку из следующих соображений. По своему физическому смыслу энтропия характеризует статистические свойства системы, возникающие вследствие процесса перемешивания. Но для последнего характерен масштаб $\sim \Delta_0$ (см. выше). Поэтому можно положить $\Gamma_0 \sim \Delta_0(t)$.

Определенная таким образом новая энтропия $H(f, \Delta_0)$ характеризует теперь уже не только статистическое состояние системы (в зависимости от f), но и динамику перемешивания (в зависимости от $\Delta_0(t)$). При произвольном фиксированном Δ_0 мы возвращаемся к обычной термодинамической энтропии (3,19), которая определяется в классической физике с точностью до произвольной постоянной ($-\ln \Gamma_0$). Это значит, что мы пренебрегаем в этом случае остаточными динамическими корреляциями в областях масштаба Δ_0 . При заданном f , т. е. при фиксированном статистическом состоянии системы, мы получаем еще одну энтропию, которая характеризует процесс перемешивания. В последнем случае удобно выбрать $f = 1$, т. е. состояние статистического равновесия. Определенная таким образом энтропия $H(1, \Delta_0)$ монотонно возрастает для любой системы с перемешиванием. В случае же экспоненциальной локальной неустойчивости движения величина $H(1, \Delta_0)$ оказывается асимптотически пропорциональной времени. Поэтому в качестве характеристики перемешивания естественно ввести среднюю скорость ее изменения:

$$-\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int d\Gamma \ln \Delta_0(t) = h. \quad (3,20)$$

Это и есть динамическая энтропия, введенная Колмогоровым для описания процесса перемешивания ³¹.

3.6. Является ли движение с перемешиванием настоящим случайным процессом?

Этот вопрос выходит за рамки чисто математической теории, однако он является существенным для физики. Формальное определение случайного процесса включает в себя два основных требования (см., например, ³⁷). Первое — возможность введения вероятности; это обеспечивается существованием предела (3,5) для эргодической системы. Второе требование — так называемая *иррегулярность* процесса, означающая в конечном счете отсутствие алгоритма этого процесса. Очевидно, что для динамических систем второе требование нарушается по определению. Однако это требование не является убедительным с точки зрения физики. Более того, можно думать, что воображаемое свойство иррегулярности относится к числу принципиально ненаблюдаемых. Действительно, любая *конечная* (по времени) реализация даже «абсолютно» случайного процесса всегда может быть аппроксимирована некоторой регулярной функцией, например рядом Фурье или Тейлора. Мы можем, конечно, убедиться в *регулярности* некоторого процесса путем предсказания его будущего

хода. Однако любая кажущаяся нерегулярность может оказаться на самом деле реализацией достаточно сложного алгоритма. Поэтому мы думаем, что требование иррегулярности может быть исключено из определения случайного процесса^{8*}). Вместо этого в основу определения случайного процесса может быть положено движение эргодической динамической системы с перемешиванием и K -энтропией. Такие системы называются в эргодической теории K -системами по имени открывшего их Колмогорова³¹.

Правда, движение K -системы в определенном смысле регулярно, и это проявляется, в частности, в остаточных автокорреляциях. Однако эти корреляции затухают со временем экспоненциально, так что ими можно пренебречь при условии $ht \gg 1$. Можно возразить, что такое определение случайного процесса было бы несовершенным. Но ведь именно это мы и наблюдаем в эксперименте, так как в процессе статистической релаксации всегда сохраняется, хотя и экспоненциально малый, вклад начального состояния.

«Настоящий» случайный процесс, заданный, скажем, с помощью вероятности перехода (марковский процесс), можно рассматривать при этом как предельный случай движения K -системы, когда можно пренебречь регулярной фазой развития экспоненциальной неустойчивости (см. п. 3.5), а значит, и остаточными корреляциями. В соответствии с этим энтропия «настоящего» случайного процесса $h = \infty$.

Таким образом, на наш взгляд, не исключено, что любой случайный процесс в природе реализуется движением некоторой K -системы. Мы далеки, однако, от мысли, что это единственная возможность в настоящее время. Поэтому для K -системы и ее движения мы употребляем термин *стохастичность*, сохранив за понятием *случайность* его прежнее несколько мистическое содержание.

Стохастичность возможна только в нелинейной системе, так как линейная система является всегда максимально устойчивой (п. 3.3). Поэтому стохастичность дает возможность построить *нелинейную модель статистических законов*. Упомянем для полноты картины, что существует также *квазилинейная модель статистических законов*, введенная Боголюбовым³⁸ и положенная сейчас в основу статистической механики. Она базируется на использовании бесконечно большого термостата ($N \rightarrow \infty$) со случайными начальными условиями^{40,27}. Подробное сравнение обеих моделей дано в⁸.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Как отмечалось выше (п. 3.5), проблема движения даже элементарной модели (3,1) с гладким возмущением оказывается неразрешимой для современной эргодической теории из-за областей устойчивости вблизи точек $f' = 0$. Возникающие здесь трудности оказываются весьма глубокими и связаны с очень сложной структурой фазового пространства системы³⁹. С другой стороны, при $k \rightarrow \infty$ размер устойчивых областей по фазе для гладкой $f(\psi)$ стремится к нулю ($\Delta\psi \sim 1/k$) (3,15)). Поэтому разумно предположить, как это и было сделано выше (п. 3.5), что при $k \gg 1$ устойчивыми областями можно просто пренебречь. Для проверки этого предположения естественно обратиться к эксперименту, «настоящему» или численному. Основная проблема здесь — выбор оптимальной модели. Нам кажется, что нет необходимости работать с очень сложными моделями, обязательно близкими к реальным механическим системам,

*) К аналогичному выводу пришел ранее Постников³⁷.

хотя некоторые контрольные эксперименты с такими моделями весьма желательны (см. гл. 5) *). Мы думаем, что элементарная модель достаточно полно представляет феномен стохастической неустойчивости во всей его сложности и многообразии. Это станет особенно очевидным несколько позже, когда мы познакомимся со стохастическим слоем вблизи сепаратрисы (п. 6.1).

Детальные численные эксперименты с элементарной моделью, описанные в ³⁹, подтверждают, что при $k \gg 1$, (фактически уже при $k > 6$ **) движение элементарной модели становится стохастическим.

5. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ФЕРМИ

Прежде чем перейти к более детальному описанию механизма стохастической неустойчивости (гл. 6), рассмотрим простой пример реальной механической системы, в которой возникает такая неустойчивость.

В 1949 г. для объяснения происхождения космических лучей Ферми предложил механизм стохастического ускорения при столкновении заряженных частиц с движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве ⁴⁹. Объясняя этот механизм, Ферми использовал аналогию с молекулярными столкновениями, рассматривая магнитное облако как гигантскую частицу. Поскольку, однако, такое облако является макроскопическим объектом, движение которого определяется, казалось бы, динамическими законами, возникает вопрос, применимы ли в данном случае, и если да, то в какой степени, статистические законы? Только в 1961 г. Улам попытался выяснить этот вопрос путем численных экспериментов на простейшей модели.

5.1. Одномерная модель Улама ⁴⁴

Модель представляет собой частицу, движущуюся между двумя плоскопараллельными бесконечно тяжелыми и абсолютно упругими стенками, одна из которых неподвижна, а другая колеблется по определенному заданному закону. Последняя и моделирует, таким образом, движущееся магнитное облако. Численный расчет движения такой системы ⁴⁴ привел к отрицательному результату — ускорение практически не наблюдалось. Скорость частицы иногда достигала 3—4 скоростей стенки и в большинстве случаев была порядка скорости стенки, в то время как согласно механизму Ферми средняя скорость частицы должна была бы неограниченно возрастать пропорционально времени ⁴⁹.

Ниже мы даем краткий анализ движения этой модели, следуя работе ⁴⁵.

Пусть стенка колеблется по «пилообразному» закону таким образом, что ее скорость изменяется линейно со временем в течение каждого полупериода. Пусть, далее, минимальное расстояние между стенками равно l , а амплитуда колебаний одной из них — a . Тогда движение частицы между ними можно описать следующим приближенным преобразованием ***) , справедливым при условии $a \ll l$, случай, который оказывается наиболее интересным (см. ниже):

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= v + V(\psi - 1/2), \\ \bar{\psi} &\approx \left\{ \psi + \frac{IV}{16av} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (5,1)$$

*) В последнее время стохастическая неустойчивость исследовалась в большой серии экспериментов с электронным пучком в накопителе ⁸⁴.

**) Напомним, что граница стохастичности лежит при $k \sim 4$ (п. 3.5).

***) Точные уравнения движения для этой модели см. в ⁴⁵.

здесь v , \bar{v} — абсолютная величина скорости частицы до и после соударения со стенкой; $V/4$ — амплитуда скорости стенки; ψ — фаза колебаний стенки в момент удара, определенная на интервале $(0,1)$. Приближенным является второе уравнение (5,1), которое учитывает набег фазы только

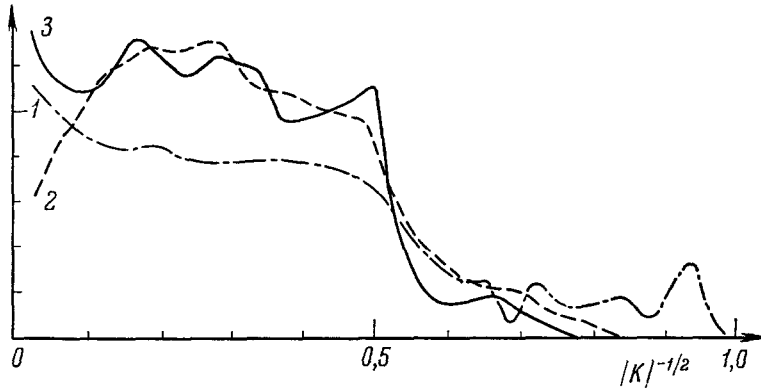


Рис. 3. Функция распределения частиц в модели Улама по скорости $v \propto |K|^{-1/2}$ (5,2).
 1 — $a/l = 2,5 \cdot 10^{-3}$; 2 — $a/l = 10^{-4}$; 3 — $a/l = 2,5 \cdot 10^{-5}$.

при минимальной длине пути частицы между столкновениями $2l$, пренебрегая дополнительным малым отрезком $\sim a$.

Преобразование (5,1) того же типа, что и основная модель (2,12). Условие стохастичности проще всего найти, воспользовавшись соотношением (2.14)

$$s^2 \sim |K| = \left| \frac{d\bar{\psi}}{d\psi} - 1 \right| \approx \frac{l}{16a} \left(\frac{V}{v} \right)^2 \gg 4. \tag{5,2}$$

Отсюда находим область стохастичности по скорости

$$\frac{4v}{V} \lesssim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{a}}. \tag{5,3}$$

Для получения значительного ускорения ($v \gg V$) должно выполняться довольно неожиданное условие: $a \ll l$.

На рис. 3 приведена функция распределения частиц по скорости, выраженной через параметр K , при различных значениях отношения a/l . Данные эти получены в ⁴⁵ путем численного интегрирования точных уравнений движения модели Улама.

Функция распределения строилась по одной траектории и определялась как отношение числа соударений частицы со стенкой, приводящих частицу в заданный интервал скорости, к полному числу соударений, равному 10^5 . Видно, что обрыв функции распределения приходится довольно точно на значение $|K| = 4$.

5.2. Многомерный случай

В случае двух (и более) измерений ситуация существенно изменяется. В частности, Синай строго доказал ³⁴, что при упругом столкновении любых тел с выпуклой поверхностью всегда имеет место стохастичность. Этот результат можно наглядно представить себе как следствие экспоненциальной расходимости близких траекторий из-за рассеяния на

выпуклой поверхности. Наличие же вогнутых участков поверхности может привести, напротив, к появлению областей устойчивости. Простейшим примером может служить модификация модели Улама, в которой одна из стенок слегка вогнута и рассматривается многомерная задача. Ясно, что поперечное движение будет в этом случае устойчивым и, следовательно, будет существовать граница стохастичности, как и в одномерном случае.

5.3. С т о х а т р о н

Еще в 1948 г. Бурштейн, Векслер и Коломенский предложили использовать обычные ускорители типа фазотрона или синхротрона в стохастическом режиме⁴⁶. Для этого предполагалось подавать ускоряющее высокочастотное напряжение со случайной фазой. Используя стохастическую неустойчивость, можно осуществить такой режим ускорения с обычным (регулярным) ВЧ напряжением, что, по-видимому, более удобно практически.

Получим условия стохастического ускорения, ограничиваясь ради простоты случаем однородного магнитного поля B^*). Уравнения движения можно записать в виде преобразования типа основной модели:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= W + eU \cos \psi, \\ \bar{\psi} &= \psi + \frac{2\pi\omega}{\omega_B(\bar{W})}, \end{aligned} \right\} \quad (5,4)$$

где W — полная энергия частицы; U , ω — амплитуда и частота ускоряющего напряжения; $\omega_B = eBc/W$ — ларморовская частота релятивистской частицы. Условие стохастичности получаем аналогично (5,2): $|K| = 2\pi q (eU/W) |\sin \psi| \gtrsim 4$, или

$$q \gtrsim \frac{W}{eU}, \quad U \gtrsim \frac{Bc}{\omega}, \quad (5,5)$$

где $q = \omega/\omega_B$ — кратность высокой частоты.

Легко видеть, что граница стохастичности (5,5) соответствует условию так называемого микротронного ускорения⁴⁷, при котором происходит монотонное изменение энергии, весьма необычное для нелинейной системы.

Неравенство (5,5) показывает, что при увеличении ускоряющего напряжения или частоты, или при уменьшении магнитного поля микротрон превращается в стохатрон.

Наконец, упомянем еще своеобразный вариант стохатрона, примененный в работе⁴⁸ для предварительного нагрева плазмы в stellaratorе.

6. СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛОЙ И УСЛОВИЕ ПЕРЕКРЫТИЯ РЕЗОНАНСОВ

Перейдем теперь к более детальному описанию механизма стохастической неустойчивости. Как будет видно ниже, центральным местом выяснения этого механизма является исследование поведения системы в области на фазовой плоскости, лежащей вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса. Этот анализ мы проведем на примере движения заряженной частицы в поле двух плоских волн²¹.

*) Более реалистические оценки приведены в⁸.

6.1. Движение частицы в поле двух плоских волн

Рассматриваемая система, с одной стороны, описывается общими уравнениями нелинейного резонанса (2,1), а с другой стороны, представляет самостоятельный интерес для физики плазмы. Пусть одна из волн является малым возмущением. Уравнения движения запишем в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -eE_0 \sin k_0 x - eE_1 \sin (k_1 x - vt), \\ \varepsilon &= E_1/E_0 \ll 1 \end{aligned}$$

или в безразмерной форме

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 \frac{dv}{dt} &= -\sin \xi - \varepsilon \sin \left(\frac{k_1}{k_0} \xi - vt \right), \\ \xi &= k_0 x, \quad v = \tau_0 k_0 \dot{x}, \quad \tau_0 = \sqrt{m/eE_0 k_0}, \end{aligned} \right\} \quad (6,1)$$

где $2\pi\tau_0$ — период малых невозмущенных колебаний. Траектории невозмущенного движения на фазовой плоскости аналогичны изображенным на рис. 1, если по осям абсцисс и ординат отложить соответственно ξ , v . С помощью обычных операций мы можем ввести новые переменные действие (I) — угол (θ) и переписать уравнение (6.1) в форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\varepsilon}{\omega\tau_0^2} v \sin \left(\frac{k_1}{k_0} \xi - vt \right), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \right\} \quad (6,2)$$

где $\omega = \omega(I)$ есть нелинейная частота невозмущенных колебаний частицы в потенциальной яме. Вблизи дна ямы $\omega \rightarrow 2\pi/\tau_0$, а при приближении к сепаратрису $\omega \rightarrow 0$.

Опишем качественно возмущенное поведение частицы вблизи сепаратрисы (при этом $\omega\tau_0 \ll 1$). Частица проводит сравнительно мало времени ($\sim \tau_0$) вблизи центра ямы, и ее скорость v близка при этом к своему максимальному значению. Наоборот, большую часть времени ($\sim 2\pi/\omega \gg \tau_0$) частица находится вблизи точек поворота, где ее скорость близка к нулю. Это обстоятельство может быть также легко установлено формально из точного решения невозмущенной задачи. Если теперь в правую часть (6,2) подставить невозмущенную скорость v , то силу, действующую на частицу, можно представить в виде последовательности узких импульсов, следующих друг за другом с очень большим интервалом $\sim \omega^{-1}$. Изменение действия в результате толчка можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta I &= \frac{\varepsilon}{\tau_0 \omega(I)} \int dt v(t) \sin \vartheta, \\ \vartheta &= \frac{k_1}{k_0} \xi - vt, \end{aligned} \right\} \quad (6,3)$$

где интегрирование ведется по интервалу времени, содержащему один толчок. В действительности основной вклад в интеграл дает узкий участок по t вблизи максимума $v(t)$ ²⁰. Поэтому фаза ϑ в (6,3) берется в точке экстремума $\xi = \xi_0$. Движение (6,2) может быть записано приближенно в виде следующего канонического преобразования (на один шаг):

$$\left. \begin{aligned} \bar{I} &= I - \frac{\partial V(\bar{I}, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta - \pi v/\omega(\bar{I}) + \frac{\partial V(\bar{I}, \vartheta)}{\partial \bar{I}}, \end{aligned} \right\} \quad (6,4)$$

где производящая функция V равна

$$V = -\frac{\varepsilon}{\tau_0 \omega(I)} \int dtv(t) \cos \vartheta.$$

Поскольку возмущение $V \sim \varepsilon$, можно в уравнениях (6,4) заменить $V(I, \vartheta)$ на $V(\bar{I}, \vartheta)$ с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$.

Система (6,4) аналогична основной модели (2,12). Условие стохастичности найдем из (6,4) с помощью выражения (2,14):

$$K(\vartheta) = \left| \frac{d\bar{\vartheta}}{d\vartheta} - 1 \right| \approx \pi v \frac{\omega'}{\omega^2} \Delta I \gg 4. \quad (6,5)$$

При достаточно общих условиях вблизи сепаратрисы имеет место асимптотическое выражение

$$\omega \approx \pi/\tau_0 \ln \left(\frac{32W_0}{|W - W_0|} \right), \quad (6,6)$$

где W — энергия частицы, а W_0 — энергия на сепаратрисе. Учитывая, что $\Delta I \sim \varepsilon/\tau_0 \omega$, при условии $v\tau_0 \ll 1$ получим из (6,5) границу стохастичности в виде ^{8,21}

$$\left. \begin{aligned} \omega &\ll \pi/\tau_0 \ln \frac{16\pi}{\varepsilon}, \\ |I_0 - I| &\ll \varepsilon I_0, \quad |W - W_0| \ll \varepsilon W_0, \end{aligned} \right\} \quad (6,7)$$

где I_0 — значение действия частицы на сепаратрисе. Граница стохастичности определяется с помощью (6,7) симметрично относительно сепаратрисы для захваченных и пролетных частиц. Таким образом, можно утверждать вообще, что вокруг сепаратрисы образуется слой конечной ширины разрушенных интегралов движения, который мы называем *стохастическим слоем* (см. рис. 1). При $v\tau_0 \gg 1$ относительная величина стохастического слоя экспоненциально мала и имеет порядок ^{8,21}:

$$|W - W_0| \sim W_0 e^{-v\tau_0}. \quad (6,7a)$$

Ширина стохастического слоя согласно оценкам (6,7), (6,7 а) совпадает по порядку величины с расщеплением сепаратрисы, полученным Мельниковым ⁶². Заметим, что весьма обстоятельные исследования Мельникова не позволили тем не менее оценить действительную ширину неустойчивой области вблизи сепаратрисы, величина расщепления которой дает лишь нижнюю границу этой ширины. Более того, существовали серьезные опасения, что неустойчивость может захватить практически всю резонансную область. Оценки (6,7), (6,7а) показывают, однако, что эти опасения были напрасными и что ширина стохастического слоя, вообще говоря, мала.

Рассмотренная задача интересна также с точки зрения общей теории нелинейного резонанса, поскольку она может быть интерпретирована как случай взаимодействия двух резонансов. При такой интерпретации расстояние между резонансами по частоте равно v , а ширина каждого из резонансов согласно (2,8) равна соответственно $4/\tau_0$ и $4/\tau_1 = \sqrt{eE_1 k_1/m}$. При $\varepsilon \sim 1$ и $v\tau_0 \ll 1$ происходит полное перекрытие резонансов. Одновременно происходит их полное разрушение согласно (6,7а)*). Этот результат подтверждает критерий стохастичности (2,11) и дает возможность распространить его на общий случай взаимодействия резонансов. Заметим, что при $\varepsilon \ll 1$ относительная ширина стохастического слоя всегда мала,

*) Этот вывод был недавно подтвержден в работе ⁸⁷ с помощью численного эксперимента.

так что внутренняя область резонансов остается устойчивой, независимо от расстояния между резонансами. Поэтому критерий стохастичности (2,11) подразумевает перекрытие резонансов одного порядка по величине. В общем случае возможно возникновение стохастической неустойчивости за счет пересечения узких стохастических слоев, но только при специальных начальных условиях. Критерий такой *слабой стохастичности* исследовался в ^{64,65,8}.

6.2. Броуновское движение частицы в поле волнового пакета

Проведенное выше исследование является основным элементом, позволяющим перейти к построению общего условия возникновения стохастической неустойчивости. Можно считать, что при движении частицы в сложных полях фазовые траектории частицы имеют следующую топологию на фазовой плоскости: вся плоскость делится на большое число ячеек, связанных с различными сепаратрисами, и на области между сепаратрисами. С каждой сепаратрисой связан стохастический слой, ограниченный «хорошими» траекториями с сохраняющимися интегралами движения. Отдельные сепаратрисы могут перекрываться, и тогда образуется более широкая область стохастического движения. Таким образом, критерием стохастической неустойчивости является условие перекрытия сепаратрис, или, иначе, условие перекрытия резонансов (2,11).

Проиллюстрируем сказанное на примере движения частицы в поле волнового пакета

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \sum_k E_k \cos(kx - \omega_k t) \tag{6,8}$$

с характерным расстоянием Δk между волновыми числами соседних гармоник, входящих в пакет. Каждая плоская волна в отдельности порождает на фазовой плоскости сепаратрису, внутри которой находятся траектории частиц, захваченных волной. Размер сепаратрисы определяет также ширину резонанса между частицей и волной. Для определения ширины резонанса перепишем уравнение (6,8) в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= \sum_k V_k \cos \vartheta_k, & V_k &= \frac{e}{m} E_k, \\ \dot{\vartheta}_k &= kv - \omega_k \equiv \omega_k(v), & \vartheta_k &= kx - \omega_k t, \end{aligned} \right\} \tag{6,9}$$

откуда видно, что скорость аналогична переменной I в уравнениях (6,2). Ширина сепаратрисы равна, очевидно,

$$\delta v_k \sim \sqrt{V_k \left| \frac{d\omega_k(v)}{dv} \right|} = \sqrt{V_k/k} = \frac{1}{k\tau_k},$$

$$\frac{1}{\tau_k} = \sqrt{keE_k/m}.$$

Расстояние между ближайшими резонансами равно

$$\Omega_k = \omega_{k+\Delta k}(v) - \omega_k(v) = \Delta k (v - d\omega_k/dk),$$

и условие возникновения стохастической неустойчивости принимает вид ^{21, 52}

$$K = \left(\frac{k\delta v_k}{\Omega_k} \right)^2 = \frac{1}{\tau_k \Omega_k} \gg 1. \tag{6,10}$$

Пусть критерий (6,10) выполняется для всех волн в пакете, имеющих фазовые скорости от некоторого v_{\min} до v_{\max} . Тогда ясно, что в этом интервале скоростей фазы ϑ_k являются стохастическими, а движение частицы аналогично броуновскому, и ее скорость растет в среднем со временем.

Заметим, что в случае очень больших $K \gg N$ (где N — число волн) стохастичность может исчезать⁸. Это легко понять в предельном случае $K \gg N$, когда все волны образуют для частицы единую потенциальную яму с медленно меняющимися параметрами. В связи с этим критерий (6,10) следует дополнить неравенством

$$\frac{1}{\tau_k \Omega_k} \ll N, \quad (6,10a)$$

которое было получено ранее в работе⁵³ из несколько иных соображений.

Неравенства (6,10), (6,10a) являются условиями применимости так называемого квазилинейного приближения в нелинейной теории плазмы⁵³.

6.3. Обсуждение свойств основной модели (2,12)

Приведенные в этой главе примеры позволяют высказать следующие соображения:

1) Разрушение сепаратрисы описывается с помощью уравнений (6,4), эквивалентных основной модели (2,12).

2) Перекрывание сепаратрис (резонансов) (2,10) является условием возникновения стохастической неустойчивости движения динамической системы.

3) В тех случаях, когда движение системы может быть приведено к виду (2,12), удается оценить корреляционную функцию фаз⁵⁴:

$$R_n = R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_m e^{-i\psi_m} e^{i\psi_{m+n}} \sim e^{-n \ln K} = e^{-t \Omega \ln K} \quad (6,11)$$

и определить время перемешивания

$$\tau_n \sim (\Omega \ln K)^{-1}, \quad (6,12)$$

а следовательно, и K -энтропию (см. гл. 3). Этой информации вполне достаточно не только для того, чтобы перейти к статистическому описанию системы с помощью кинетического уравнения (гл. 7), но также и для анализа некоторых тонких деталей такого перехода.

4) Определим область применимости основной модели. Пусть возмущение системы таково, что на интервалах времени T_1, T_2, \dots изменение состояния системы является адиабатическим ($I = \text{const}$), а на границах интервалов T_i происходит существенное (неэкспоненциально малое) изменение действия I . Области времени, внутри которых I существенно изменяется, обозначим через Δt_i . Тогда при условии

$$\Delta t \ll T \quad (6,13)$$

можно перейти от дифференциальных уравнений к уравнениям в конечных разностях типа (2,12), т. е. к основной модели. Это достигается следующим образом⁵⁴: на интервалах T_i решение записывается в ВКБ-приближении, и решения на соседних интервалах T_i сшиваются с учетом изменения действия ΔI и фазы $\Delta \vartheta$. Если условие (6,13) не выполнено, вычисление времени перемешивания и K -энтропии не удастся провести в общем виде. Тем не менее условие перекрывания резонансов всегда допускает хотя бы грубую оценку, и факт перемешивания может быть установлен.

5) При отсутствии перекрытия резонансов ($s \ll 1$) стохастическая область вырождается в систему экспоненциально узких (см. (6,7a)) стохастических слоев. В одномерном случае (2,1) эти слои не пересекаются на фазовой плоскости и движение становится устойчивым для любых $t \rightarrow \infty$. Этот результат строго доказан в теории Колмогорова — Арнольда — Мозера для достаточно малых, но конечных s . Численные эксперименты (гл. 4) показывают, что граница такой вечной устойчивости лежит вблизи границы стохастичности $s \sim 1$.

В многомерном случае стохастические слои различных резонансов всегда пересекаются при сколь угодно малых s . Это может приводить к диффузионному движению системы вдоль этих слоев в достаточно большом объеме фазового пространства. Первый пример такой неустойчивости был построен Арнольдом³⁵. Такая неустойчивость, получившая название диффузии Арнольда, может оказаться существенной для различных физических приложений⁸.

7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ И ОСНОВНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ (MASTER EQUATION)

7.1. Анализ потери памяти о начальных условиях

Приведенные выше результаты позволяют по-новому подойти к выводу основного кинетического уравнения в статистической механике. Центральным местом вывода подобных уравнений является гипотеза о хаотических фазах в начальный момент времени (см., например, ²⁷). Это обстоятельство обычно называется приближением хаотических фаз (ПХФ), и его формальное содержание для частного случая, рассматриваемого ниже, выглядит следующим образом. Пусть $f(I, \vartheta, t)$ есть функция распределения от совокупности действий (I_1, I_2, \dots) и фаз ($\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$). Тогда ПХФ заключается в том, что f не зависит от фаз при $t = 0$, т. е.

$$f(I, \vartheta, 0) = f(I). \tag{7,1}$$

Вместе с тем рассмотренные ранее примеры показывают, что можно непосредственно из уравнений движения установить критерий стохастичности фаз и, как видно ниже, найти критерий, при котором условие (7,1) справедливо с необходимой точностью. Особенностью такого подхода является более тщательный, чем это делалось до сих пор, анализ движения системы.

Проиллюстрируем на простом примере, каким образом анализ стохастических свойств системы позволяет получить кинетическое уравнение при произвольных начальных условиях⁶⁹ (см. также ^{64,20}).

Рассмотрим снова нелинейный осциллятор, возмущаемый периодически δ -функциональными толчками:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \sin \vartheta \equiv \varepsilon V(I, \vartheta, t), \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I), \end{aligned} \right\} \tag{7,2}$$

где ε — малый параметр, и запишем уравнение непрерывности в фазовом пространстве

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I} (Vf) = 0. \tag{7,3}$$

Разложим f и V в ряд Фурье:

$$\left. \begin{aligned} f(I, \vartheta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(I, t) e^{in\vartheta}, \\ V(I, \vartheta, t) &= \sum_{n, k=-\infty}^{\infty} V_{n, k}(I) e^{i(n\vartheta+k\Omega t)} \quad (\Omega = 2\pi/T) \end{aligned} \right\} \quad (7,4)$$

(в рассматриваемом случае имеются только члены с $n = \pm 1$). Подставляя (7,4) в (7,3), получаем уравнение для f_n :

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + in\omega f_n = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n', k} V_{n', k} f_{n-n'}. \quad (7,5)$$

Заметим, что переход в уравнении (7,5) к представлению взаимодействия осуществляется с помощью преобразования

$$f_n \rightarrow f_n \exp \left\{ -in \int_0^t \omega dt \right\},$$

так как согласно уравнениям движения (7,2) частота зависит от времени вследствие нелинейности. Это приводит к дополнительным трудностям при выводе кинетического уравнения, однако в дальнейшем мы будем пользоваться неравенством

$$\left. \begin{aligned} |\Delta\vartheta - \omega t| &\ll \omega t, \\ \Delta\vartheta = \vartheta(t) - \vartheta(0) &= \int_0^t dt \omega. \end{aligned} \right\} \quad (7,6)$$

Условие (7,6) фактически эквивалентно ВКБ-приближению.

Теперь удобно перейти к представлению Лапласа для f_n :

$$g_n(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_n(I, t) dt,$$

и привести уравнение (7,5) с учетом неравенства (7,6) к виду

$$g_n(p) = \frac{f_n(0)}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{m, k} [V_{mk} g_{n-m}(p + i(n-m)\omega - ik\Omega)], \quad (7,7)$$

где сокращенно обозначено

$$g_n(I, p) \equiv g_n(p), \quad f_n(I, 0) \equiv f_n(0).$$

В дальнейшем нас будет интересовать асимптотика $t \rightarrow \infty$, что эквивалентно $p \rightarrow 0$. С учетом этого произведем итерацию уравнения (7,7) и удержим при этом только главные (резонансные) члены. Это дает для g_0 :

$$\begin{aligned} g_0(p) &= \frac{1}{p} f_0(p) - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n, k > 0} \left[\frac{V_{n, k} f_n(0)}{p + i(n\omega - k\Omega)} + \frac{V_{-n, -k} f_{-n}(0)}{p - i(n\omega - k\Omega)} \right] + \\ &+ 2 \frac{\varepsilon^2}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n, k > 0} \frac{|V_{n, k}|}{p^2 + (n\omega - k\Omega)^2} \frac{\partial}{\partial I} |V_{n, k}| f_0(0) + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

или, возвращаясь к t -представлению при $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n, k > 0} [V_{n, k} f_n(0) e^{i(n\Delta\vartheta - k\Omega t)} + V_{-n, -k} f_{-n}(0) e^{-i(n\Delta\vartheta - k\Omega t)}] + \\ &+ 2\pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n, k > 0} |V_{n, k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} |V_{n, k}| f_0 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (7,8)$$

Из (7,8) видно, что члены порядка ε (а также все остальные нечетные по ε члены) содержат осциллирующие множители, входящие одновременно с начальными условиями $f_n(0)$ (причем $n \neq 0$, так как V зависит от ϑ). Отсюда сразу следует, что в линейном случае, когда $\omega = \text{const}$ и $\Delta\vartheta = \omega t$, разность $(n\omega - k\Omega)$ может быть сколь угодно малой (резонанс) и от осциллирующих слагаемых в (7,8) нельзя избавиться никакой подходящей процедурой усреднения по заданному конечному интервалу времени. В этом заключается основная трудность вывода основного кинетического уравнения, которая разрешается с помощью ПХФ. Действительно, условие (7,1) для f_n принимает вид $f_n(0) = f_0(0) \delta_{n,0}$.

Ситуация становится совершенно иной в нелинейном случае, когда $\omega = \omega(I)$. Для того чтобы понять это, введем для больших $t \approx NT$ ($N \gg 1$) дискретную шкалу времени с интервалом T и выразим $\vartheta(t) = \vartheta_N$ через начальную фазу $\vartheta(0) = \vartheta_0$. Это можно сделать, исходя из уравнений (7,2). Для этого необходимо проинтегрировать систему, аналогичную (2,12):

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{m+1} &\approx \vartheta_m + \omega T + K_m \sin \vartheta_m, \\ I_{m+1} &= I_m + \varepsilon I_m \sin \vartheta_m, \\ K_m &= \varepsilon \frac{I_m}{\Omega} \frac{d\omega(I_m)}{dI_m}. \end{aligned} \right\} \quad (7,9)$$

Заметим, что преобразование (7,9) получается приближенно из основной модели (2,12), если в последней учесть малость изменения $|\bar{I} - I| \ll I$. Преобразование в форме (7,9) оказывается удобным при оценке корреляционной функции

$$R(t) \equiv R_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta_0 e^{i(\vartheta_N - \vartheta_0)}.$$

Можно показать⁵⁴, что при $K \gg 1$

$$R(t) \sim e^{-\Omega + i\ln K + i\omega t}. \quad (7,10)$$

Если теперь ввести функцию распределения

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0 d\vartheta_0,$$

то для F из (7,8) при $K \gg 1$ сразу следует кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n, k > 0} |V_{n, k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} |V_{n, k}| F. \quad (7,11)$$

Полезно отметить следующие два обстоятельства: 1) при $K \ll 1$ усреднение по ϑ_0 ни к чему не приводит, так как в этом случае $R(t) \sim \sim e^{i\omega t} [1 + O(K)]$; 2) в силу эргодичности движения при $K \gg 1$ усреднение по ϑ_0 эквивалентно усреднению по времени, много большему T . Последнее означает, что уравнение (7,8) можно усреднять по ϑ_0 , если время диффузии в (7,1) много больше T (п. 3.5). Иначе говоря, кинетическое уравнение (7,11) справедливо для времен $t \gg T$. Этим оно отличается от кинетического уравнения, полученного методом ПХФ, которое справедливо для $t \gg t_{вз}$, где время взаимодействия $t_{вз}$ в данном случае равно длительности толчка ($t_{вз} \ll T$). Таким образом, дополнительное предположение о хаотичности фаз в начальный момент времени позволяет расширить область применимости кинетического уравнения по времени.

7.2. Временные масштабы

Как уже отмечалось, главной особенностью существующих методов вывода основного кинетического уравнения является использование в той или иной форме ПХФ (см. обзор ⁷⁰). Не обсуждая вопроса о целесообразности гипотезы хаотических фаз для построения основного кинетического уравнения, заметим лишь, что в обычных теориях она является не только удобной, но, возможно, и необходимой. Последнее связано с тем, что проводимый анализ динамических уравнений движения системы является по существу линейным и не позволяет учесть неустойчивости, приводящей к перемешиванию. Формально это связано с тем, что при решении уравнений движения частоты считаются постоянными. Поэтому такой подход можно назвать квазилинейной моделью статистических законов.

Современная эргодическая теория позволяет не только восполнить этот пробел, но и провести более детальный анализ тех функций распределения, для которых может быть получено основное кинетическое уравнение. Поскольку перемешивание в эргодической теории существенно связано с нелинейностью системы, естественно говорить в этом случае о нелинейной модели статистических законов.

Мы уже видели в п. 7.1, что кинетическое уравнение марковского типа выводится для «грубой» функции распределения $F(I, t)$, получающейся из $f(I, \vartheta, t)$ усреднением по фазам ϑ в интервале от 0 до 2π . При этом мы отделяем процесс динамического перемешивания от статистической релаксации (п. 3.5). В действительности, однако, процесс перемешивания происходит не только по фазе ϑ , но и, в меньшей степени, по I . Поэтому в общем случае кинетическое уравнение справедливо для функции распределения, усредненной также и по конечному интервалу Δ_I . Из уравнений движения (7,9) вытекает, что при расширении ϑ на $\sim 2\pi$ действие I меняется на

$$\Delta_I^2 \sim 2\pi\epsilon I/K. \quad (7,12)$$

Очевидно, что эта величина и определяет ячейку усреднения функции распределения. При этом перемешивание происходит согласно (7,10) за время

$$\tau_n \sim T/\ln K, \quad (7,13)$$

т. е. практически за один шаг. Если мы уменьшим размер ячейки Δ_I по сравнению с (7,12), то перемешивание дополнительно запаздывает (см. п. 3.5) на время (число шагов)

$$n_0 \approx \left(\ln \frac{2\pi\epsilon I}{K\Delta_I} \right) / \ln K. \quad (7,14)$$

Максимальное допустимое запаздывание определяется из условия применимости кинетического уравнения

$$n_0 T \ll \tau_D \sim T/\epsilon^2, \quad (7,15)$$

откуда сразу следует минимальный размер ячейки усреднения

$$\min \Delta_I \sim \frac{2\pi\epsilon I}{K} \exp\left(-\frac{\ln K}{\epsilon^2}\right). \quad (7,16)$$

Отметим теперь характерные временные масштабы, которые используются при выводе кинетического уравнения, и расположим их в порядке возрастания времен.

- 1) $t_{вз}$ — время взаимодействия, которое в рассмотренном примере есть длительность толчка и является самым малым временем.
- 2) $\tau_n = T/\ln K$ — время перемешивания, или время расцепления корреляции фаз для максимальной ячейки усреднения (7,12).
- 3) $\tau_\Delta = n_0 T + T/\ln K$ — время перемешивания ячеек $\Delta_l = 2\pi\epsilon l/K^{n_0}$ с учетом запаздывания. При $n_0 = 0$ имеем $\tau_\Delta = \tau_n$. Если же n_0 определено выражением (7,14), то $\tau_\Delta = \tau_D$. Вообще, $\tau_n \ll \tau_\Delta \ll \tau_D$.
- 4) $\tau_D = T/\epsilon^2$ — время диффузии.

* * *

Мы рассмотрели выше лишь некоторые простейшие задачи, в которых играет роль стохастическая неустойчивость. Упомянем еще разрушение магнитных поверхностей стелларатора под действием различных возмущений^{64, 67, 20, 68}; взаимодействие нелинейных волн и проблема Ферми — Паста — Улама^{71-77, 81-83}; слабую турбулентность⁶⁹ и др. Мы надеемся, что этот краткий обзор привлечет внимание к рассматриваемой проблеме и будет способствовать ее дальнейшему развитию.

Пользуясь случаем, выражаем нашу искреннюю благодарность Б. Б. Кадомцеву, Я. Г. Синаю и Ф. А. Цельнику, просмотревшим рукопись этой статьи и сделавшим ряд ценных замечаний.

Институт ядерной физики СО АН СССР
Институт физики СО АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, Изд-во АН УССР, 1937.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Физматгиз, 1958.
3. И. И. Путилин, Малые планеты, М., Гостехиздат, 1953.
4. В. И. Векслер, ДАН СССР 43, 346; 44, 393 (1944).
5. E. M. McMillan, Phys. Rev. 68, 143 (1945).
6. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей, М., Физматгиз, 1962.
7. Б. В. Чириков, ДАН СССР 125, 1015 (1959).
8. Б. В. Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Докторская диссертация (Новосибирск, 1969).
9. F. K. Goward, Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону на 25 Гэв с сильной фокусировкой (Женева, октябрь 1953); M. G. Hipe, там же.
10. Б. В. Чириков, Атомная энергия 6, 630 (1959); Кандидатская диссертация (Новосибирск, 1959).
11. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, М., «Наука», 1970.
12. G. Hedlund, Bull. Amer. Math. Soc. 45, 241 (1939); E. Hopf, Math. Ann. 117, 590 (1940); УМН 4, 129 (1949).
13. Н. С. Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
14. Д. В. Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова 90, 3 (1967).
15. Я. Г. Синай, Изв. АН СССР, сер. матем. 30, 15 (1966).
16. Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, УМН 22, 197 (1967); В. А. Рохлин, там же, стр. 3.
17. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, Кинетическое уравнение для электронного газа при редких столкновениях, в сборнике «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 330.
18. R. Broot, I. Prigogine, Physica 22, 621 (1956).
19. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., ИЛ, 1947.
20. N. N. Filonenko, R. Z. Sagdeev, G. M. Zaslavsky, Nucl. Fusion 7, 253 (1967).

21. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ 54, 1590 (1968).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1951.
23. П. Р. Халмош, Лекции по эргодической теории, М., ИЛ, 1959.
24. К. П. Гуров, Основания кинетической теории (метод Н. Н. Боголюбова), М., «Наука», 1966.
25. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1947.
26. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, М., Физматгиз, 1962.
27. И. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, М., «Мир», 1964.
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., Физматгиз, 1958.
29. Дж. Уленбек, Дж. Форд, Лекции по статистической механике. М., «Мир», 1965.
30. R. Valessi, Physica 36, 433 (1967).
31. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР 119, 861 (1958).
32. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР 30, 299 (1941); Л. Д. Ландау, ДАН СССР 44, 339 (1944); Липнь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической неустойчивости, М., ИЛ, 1958.
33. Б. Б. Кадомцев, В сб. «Вопросы теории плазмы», т. 4, М., Атомиздат, 1964, стр. 188.
34. Я. Г. Синай, ДАН СССР 153, 1261 (1963); УМН 25, 141 (1970).
35. В. И. Арнольд, ДАН СССР 156, 9 (1964); Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем, Доклад на Международном съезде математиков, Москва, 1966.
36. Г. Бор, Почти-периодические функции, М.—Л., ГНТИ, 1934; Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., Гостехиздат, 1953.
37. А. Г. Постников, Арифметическое моделирование случайных процессов, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова 57, 3, 1960.
38. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Киев, Изд-во АН УССР, 1945.
39. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством, препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.
40. L. Van Nove, Physica 21, 517 (1955).
41. B. Chirikov, E. Keil, A. Sessler, Stochasticity in Many-Dimensional Nonlinear Oscillating Systems, CERN Report, 1969.
42. А. В. Комин, Л. С. Красицкая, В. П. Минаев, Магнитные поверхности тороидального магнитного поля вблизи сепаратрисы, препринт № 225 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.
43. L. J. Laslett, A Computational Investigation of a Nonlinear Algebraic Transformation, 1967 (не опубликовано).
44. S. M. Ulam, Proc. 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. 3, 1961, p. 315 (см. перевод: Математика 7, 137 (1963)).
45. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, ДАН СССР 159, 306 (1964).
46. Э. Л. Бурштейн, В. И. Векслер, А. А. Коломенский, Стохастический метод ускорения частиц, в сборнике «Некоторые вопросы теории циклических ускорителей», М., Изд-во АН СССР, 1955.
47. С. П. Капица, В. Н. Мелехин, Микротрон, М., «Наука», 1969.
48. В. Н. Бочаров, В. И. Волосов, А. В. Комин, В. М. Панасюк, Удержание плазмы в стеллараторе при различных значениях длины свободного пробега, Fusion-III, Д-7, Новосибирск, 1968.
49. E. Fermi, Phys. Rev. 75, 1169 (1949).
50. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М., Физматгиз, 1959; О. Блэкьер, Анализ нелинейных систем, М., «Мир», 1969.
51. I. Prigogine, Introduction to Nonequilibrium Statistical Physics, Proc. Intern. School of Nonlinear Mathematics and Physics, Physics Session, Munich, 1966.
52. R. Z. Sagdeev, A. A. Galeev, Nonlinear, Plasma Theory, Benj. Inc., N.Y., Amsterdam, 1969.
53. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 1, 82 (1961).
54. Г. М. Заславский, ПМТФ 2, 16 (1967).
55. Л. А. Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, М., Физматгиз, 1961.
56. Г. И. Будкер, УФН 89, 533 (1966).
57. С. Н. Родионов, Атомная энергия 6, 623 (1959).
58. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР 98, 527 (1954).
59. В. И. Арнольд, УМН 18, 91 (1963).

60. J. Moser, A Rapidly Convergent Iteration Method and Nonlinear Differential Equations. II, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie III*, v. 20, Fasc. III, 1966.
 61. H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1—3, Paris, 1892, 1893, 1899 (Reprinted by Dover, N.Y., 1957).
 62. В. К. Мельников, *ДАН СССР* **148**, 1257 (1963).
 63. В. М. Алексеев, *ДАН СССР* **177**, 495 (1967); *Матем. сб.* **76** (118), 72 (1968); **77** (119), 545 (1968); **78** (120), 3 (1969).
 64. M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, J. B. Taylor, G. M. Zaslavsky, *Nuclear Fusion* **6**, 297 (1966).
 65. G. Contopoulos, *Bull. Astronomique. ser. 3*, **2**, 223 (1967).
 66. A. Schösch, *CERN Report* 57—21 (1958).
 67. A. Gibson, *Phys. of Fluids* **10**, 1553 (1967).
 68. Б. В. Чириков, *ДАН СССР* **174**, 1313 (1967).
 69. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *ЖЭТФ* **52**, 1081 (1967).
 70. Дж. Честер, *Теория необратимых процессов*, М., «Наука», 1966.
 71. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems. I*, Los Alamos Scientific Report LA-1940 (1955).
 72. J. Ford, *J. Math. Phys.* **2**, 387 (1961); J. Ford, J. Waters, *J. Math. Phys.* **4**, 1293 (1963).
 73. E. A. Jackson, *J. Math. Phys.* **4**, 581, 686 (1963).
 74. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, *ДАН СССР* **166**, 57 (1966).
 75. Ф. М. Израйлев, А. И. Хисамутдинов, Б. В. Чириков, *Численные эксперименты с нелинейной цепочкой*, препринт № 252 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.
 76. Ф. М. Израйлев, *Исследование стохастичности колебаний струны с квадратичной нелинейностью*, препринт № 77 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1966.
 77. H. Nishiooka, N. Saito, *J. Phys. Soc. Japan* **26**, 624 (1969).
 78. W. E. Drummond, D. Pines, *Nucl. Fusion, Suppl.*, Pt. 3, 1049 (1962).
 79. А. А. Галеев, В. И. Карпман, *ЖЭТФ* **44**, 592 (1963).
 80. N. J. Zabusky, *J. Math. Phys.* **3**, 1028 (1962).
 81. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, *ЖЭТФ* **56**, 1064 (1969).
 82. Н. Н. Филоненко, *Препринт ИЯФ СО АН СССР № 282*, Новосибирск, 1969.
 83. Г. П. Берман, Г. М. Заславский, *ЖЭТФ* **58**, 1453 (1970).
 84. Г. Н. Кулипанов, С. И. Мишнев, А. Н. Скринский, *Излучение стохастической неустойчивости бетатронных колебаний электронного пучка в накопителе*, Доклад на Международной конференции по ускорителям, Ереван, 1969.
 85. J. Ford, G. H. Lunsford, *Phys. Rev.* **A1**, 59 (1970).
 86. E. M. McMillan, *Some Thoughts on Stability in Nonlinear Periodic Focusing Systems*, UCRL-17795, Berkeley (1967); L. J. Laslett, E. M. McMillan, J. Moser, *Long-term Stability for Particle Orbits*, NYO-1480-101, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1968.
 87. G. H. Walker, J. Ford, *Phys. Rev.* **188**, 416 (1969).
-