Dynamische und statistische Gesetze in der klassischen Mechanik[1]

B. V. Chirikov

Es sollen hier Forschungsergebnisse zu Stabilitätsproblemen nichtlinearer Schwingungen vorgetragen und auf einige sich daraus ergebende sehr allgemeine Schlußfolgerungen zum Verhältnis dynamischer und statistischer Gesetze in der klassischen Mechanik eingegangen werden.

1. Ergebnisse

Vor einiger Zeit wurde im Institut für Kernphysik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Nowosibirsk damit begonnen, Stabilitätsbedingungen für geladene Teilchen in zyklischen Beschleunigern zu untersuchen. Die Bewegung eines Teilchens im Beschleuniger kann näherungsweise als Oszillatorschwingung mit zwei Freiheitsgraden betrachtet werden, die wegen der Unvollkommenheit des beschleunigten Magnetfeldes periodischen Störungen unterliegt. Uns hat vor allen Dingen folgende Frage bewegt: Unter welchen Bedingungen sind die Schwingungen der Teilchen um ihre Gleichgewichtsbahn stabil, so daß die Teilchen dem Beschleunigungsvorgang nicht verlorengehen?

Die Stabilitätsuntersuchungen wurden damals in der Regel in der sog. linearen Näherung vorgenommen, d. h. es wurde angenommen, daß die Schwingungsfrequenz nicht von der Amplitude abhängig sei. Das gilt beispielsweise für die Schwingungen eines gewöhnlichen Pendels bei hinreichend kleinen Amplituden. In diesem Falle stellen Resonanzen die größte Gefahr dar, d. h. das Zusammenfallen der Frequenz der äußeren Erregung mit der Schwingungsfrequenz. Das führt zu einem linearen Anwachsen der Amplitude in der Zeit ($\sim t$). Die Teilchen treten aus dem Beschleuniger heraus.

Im allgemeinen Fall handelt es sich aber um nichtlineare Schwingungen. Ihre Frequenz hängt von der Amplitude ab. Die Frequenz einer Pendelschwingung verringert sich dann mit Anwachsen der Schwingungsamplitude und geht gegen Null, wenn die Amplitude dem Maximum zustrebt.

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob das die Gefahr der Resonanzen beseitigt, weil die Frequenzänderung den Oszillator aus dem Resonanzbereich herausführt und das Anwachsen der Schwingungsamplitude begrenzt. Allerdings haben bereits die ersten Untersuchungen gezeigt, daß dabei eine neue, für die Mechanik außerordentlich ungewöhnliche Instabilität auftaucht. Die Schwingungen werden regellos, und ihre Amplitude wächst im Mittel (mit großen Fluktuationen) proportional $\sqrt{t}$. Es kommt zu einer solchen Osszillatorbewegung als ob eine zufällige Störung wirkt. Tatsächlich aber ist die Störung streng periodisch in der Zeit. Wir haben diesen ungewöhnlichen Prozeß als *stochastische Instabilität* nichtlinearer Schwingungen bezeichnet.

Die Untersuchung dieser Instabilität hat ergeben, daß die Bewegung eines streng determinierten mechanischen Systems zumindest der eines Zufallsprozesses sehr ähnlich werden kann. Ein solcher Bewegungstyp kommt dann und nur dann zustande, wenn das mechanische System instabil ist. Wir waren also folglich auf einen Mechanismus für die Entstehung statistischer Gesetze in einem dynamischen System gestoßen. Wegen der offenkundigen Bedeutung des alten und ewig jungen Problems der Wechselbeziehungen dynamischer und statistischer Gesetze haben wir uns entschlossen, das Phänomen der stochastischen Instabilität detailliert zu untersuchen.

Wahrscheinlich ist der deutsche Mathematiker Hopf 1939 erstmalig auf den Zusammenhang statistischer Gesetze mit Instabilitäten mechanischer Bewegung gestoßen.[2] Diesem Problem hat auch der junge Leningrader Physiker N. S. Krylov sein Hauptaugenmerk gewidmet. Sein früher Tod (1947) hat verhindert, daß diese wichtigen Arbeiten fortgesetzt wurden, die aber auch unvollendet[3] außerordentlich interessant und auf ihre Weise einzigartig sind. Er war vermutlich der einzige Physiker, der sich mit diesem Problem befaßt hat. Diese Forschungsrichtung ist in letzter Zeit von vielen Mathematikern intensiv entwickelt worden, vor allen Dingen von den sowjetischen Mathematikern Kolmogrov, Sinai und Anosov. Es entstand die moderne Ergodentheorie.

Wollen wir nun versuchen, an Hand eines einfachen Beispiels den Entstehungsmechanismus einer stochastischen Bewegung und ihren Zusammenhang mit der Instabilität eines dynamischen Systems zu verstehen. Die Bewegung eines Systems sei durch die Transformation

$$x(t) = \{kx(t-1)\} \qquad (1)$$

gegeben, wobei k eine Konstante ist. Die Klammern $\{\ \}$ verweisen darauf, daß nur die Ziffern nach dem Komma berücksichtigt werden. Auf diese Weise erhalten wir eine Zustandfolge des Systems (Lagepunkte) für die Zeitpunkte $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

[1] Mitschrift eines Vortrags, den der Autor am 26. 4. 74 in einem gemeinsamen Kolloquium des Bereichs Philosophische Probleme der Wissenschaftsentwicklung am Zentralinstitut für Philosophie der AdW der DDR und dem Bereich Philosophische Probleme der Wissenschaften der Sektion marxistisch-leninistische Philosophie an der Humboldt-Universität zu Berlin gehalten hat. Übersetzung von U. Röseberg

[2] Hopf, E.: Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 91 (1939) S. 261.

[3] Krylov, N. S.: Raboty po obosnovaniju statističeskoi fiziki. Moskau Leningrad 1950

Ist beispielsweise $x(0) = \pi = 3{,}1415926536\ldots$ und $k = 10$, dann ergibt sich:

$x(1) = 0{,}415926536\ldots$
$x(2) = 0{,}15926536\ldots$
$x(3) = 0{,}5926536\ldots$

Betrachten wir nun zwei benachbarte Bahnen dieses Systems, deren Abstand sehr klein ist:

$$|\delta x(t)| \ll 1 .$$

Untersuchen wir, wie sich dieser Abstand mit der Zeit verändert:

$$\delta x(t) = k\delta x(t-1) = k^2\delta x(t-2) = k^t\delta x(0),$$
$$\delta x(t) = \delta(0) \cdot c^{t \cdot lnk}. \tag{2}$$

Bei $k > 1$ divergieren benachbarte Bahnen dieses Systems expotentiell, d. h. das System ist instabil. Warum ist nun eine solche Bwegung stochastisch? Das Gebiet möglicher Bewegungen des Systems (1) ist auf das Intervall (0, 1) begrenzt. Deshalb beginnen sich die Bahnen zu vermischen, die auf eine Entfernung $\delta x \sim 1$ auseinandergelaufen sind. Regellosigkeit der Bewegung ist die Folge. Man kann das auch anders erklären: Eine beliebig kleine Änderung des Anfangszustandes $\delta x(0)$ im System verändert die Lage des Systems vollständig in der Zeit

$$t \sim -\frac{ln\delta x(0)}{lnk}. \tag{3}$$

D. h. die Korrelation zwischen den Zuständen des Systems zu verschiedenen Zeitpunkten verliert sich. Und das bedeutet, daß wir es mit einem Zufallsprozeß zu tun haben.

Die Größe

$$h = ln\,k \tag{4}$$

heißt KS — Entropie (Entropie nach Krylov — Kolmogorov — Sinai) und ist eine der grundlegenden Charakteristika der stochastischen Bewegung. Eine genauere Bestimmung wird später noch gegeben.

Das Modell (1) ist selbstverständlich zu stark vereinfacht und kann nur schwer einem realen mechanischen System zugeordnet werden.[4] Deshalb haben wir unseren Untersuchungen ein etwas komplizierteres Modell zugrundegelegt, das durch die Transformationsbeziehung

$$p(t) = \{p(t-1) + kf[x(t-1)]\},$$
$$x(t) = \{x(t-1) + p(t)\} \tag{5}$$

gegeben ist. Bei $k \ll 1$ kann man die Bewegung dieses Modells näherungsweise durch das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{dt} \approx kf(x),$$
$$\frac{dx}{dt} = p \tag{6}$$

darstellen. In diesem Grenzfall liegt eine freie Schwingung eines Oszillators mit einem Freiheitsgrad vor, die natürlich stabil ist. Dabei entspricht x der Koordinate des Oszillators und p seinem Impuls.

Wenn beispielsweise $f(x) = \sin x$, dann haben wir es mit einer Pendelschwingung zu tun. Das Modell allerdings wird durch die Beziehung (5) beschrieben. Das bedeutet, daß die Kraft $kf(x)$ nicht stetig wirkt wie das für (6) der Fall ist, sondern durch Stöße mit der Periode 1. Am Beispiel des Pendels kann man sich vorstellen, daß seine Achse periodisch angestoßen wird, d. h., daß das Pendel erzwungene Schwingungen ausführt.

Wir haben diese Schwingungen gründlich untersucht, indem wir die Bahnen des Systems (5) auf einem Rechner für verschiedene Werte des einzigen Parameters in diesem Modell k, für verschiedene Anfangswerte und verschiedene Funktionen $f(x)$ ermittelt haben. Solche Untersuchungen sind für uns Zahlenexperimente. Sie kommen „echten" Experimenten sehr nahe. Hier sei lediglich darauf verwiesen, daß ein derartiger Standpunkt nicht allgemein akzeptiert ist und verschiedentlich heftig kritisiert wird. Diese Frage ist in einer anderen Arbeit des Verfassers[5] diskutiert.

Wenn man die Bewegung des Systems (5) in der Phasenfläche (x, p) betrachtet, wird deutlich, daß über ein großes Gebiet der Phasenfläche die Punkte regellos verteilt sind. Im Mittel sind sie gleichmäßig verteilt und verfügen über deutlich ausgeprägte Fluktuationen, die einem Zufallsprozeß entsprechen. Andererseits gibt es ein relativ großes Stabilitätsgebiet. Das ist für dynamische Systeme des Typs (5) charakteristisch. Die Grenze zwischen dem Gebiet stabiler und stochastischer Bewegung scheint zunächst relativ einfach zu sein. Eine detailliertere Untersuchung jedoch zeigt, daß deren Struktur in Wirklichkeit außerordentlich kompliziert ist. Es handelt sich dabei um einen Wechsel stabiler und stochastischer Streifen immer kleineren Maßstabes. Das ist nicht verwunderlich, da die Grenze eines stochastischen Gebietes selbst eine stochastische Kurve sein muß. Verwunderlich ist etwas anderes: Das ungewöhnlich komplizierte Verhalten eines außerordentlich einfachen Systems (5). Das hat uns damals so überrascht, daß wir eine unserer Arbeiten mit den Worten beendeten: „Der Natur gilt unser Dank für die unerschöpfliche Vielfalt ihrer einfachsten Erscheinungen."[6]

Es sei vermerkt, daß die unglaubliche Kompliziertheit der Struktur des Phasenraumes stochastischer Schwingungen das Haupthindernis für die Anwendung der modernen Ergodentheorie auf derartige Systeme ist.

Jetzt wollen wir nun genauer bestimmen, was unter stochastischer Bewegung zu verstehen ist. Stochastische Bewegungen verfügen über folgende Eigenschaften:

1. *Ergodizität.* Das bedeutet, daß ein bestimmtes Gebiet im Phasenraum gleichmäßig mit Bahnkurven bedeckt ist. Das allein genommen ist eine schwache Forderung, die noch keinesfalls unserer Vorstellung von einem Zufallsprozeß entspricht. Die Bewegung des Elektronenstrahls einer Bildröhre im Fernsehgerät ist auch ergodisch, wird aber wohl kaum als zufällig anzusehen sein.
2. *Vermischung.* Das ist die eigentlich für die Zufälligkeit der Bewegung charakteristische Eigenschaft. Etwas genauer bedeutet die Eigenschaft der Ver-

[4] Es sei aber darauf verwiesen, daß die Transformation (1) als sogenannter Zufallszahlengenerator recht häufig benutzt wird.

[5] Chirikov, B. V.: Issledowanie po teorii nelineinogo rezonansa i stochastičnosti. Nowosibirsk 1969.

[6] Chirikov, B. V.; Izraelev, F. M.: Some numerical Experiments with a Nonlinear Mapping, Stochastic Component, Int. Conf. Toulouse, France 1973.

mischung, daß eine beliebige Verteilungsfunktion $f(x, p, t)$ zur Gleichgewichtsverteilung relaxiert

$$f(x, p, t) \rightarrow f_0 \quad \text{bei} \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

wobei im Falle des Systems (5) $f_0 = \text{const}$

Wir wollen unterstreichen, daß im Grenzfall $t \rightarrow \pm\infty$ Relaxation nach beiden Zeitrichtungen in die Zukunft und die Vergangenheit in Übereinstimmung mit der Reversibilität der dynamischen Gleichungen erfolgt. Der Umkehrprozeß innerhalb eines *endlichen* Zeitintervals entspricht der Entstehung von Fluktuationen in Abhängigkeit von konkreten Anfangsbedingungen. Diese Fluktuationen werden letztlich beseitigt und relaxieren.

3. *Positive KS-Entropie* ($h > o$). Das gewährleistet eine exponentielle Relaxation.
4. *Kontinuierliches Fourierspektrum der Bewegung.* Hierbei handelt es sich um einen *aperiodischen* und gleichzeitig *stationären* Prozeß zufälliger Zitterbewegungen. Das entspricht aperiodischer Relaxation $f(x,p) \rightarrow fo$

Wesentlich ist, daß all diese Eigenschaften stochastischer Bewegung — wie der Mathematiker sagt — „fast überall" gelten. Das heißt, es existieren solche besonderen Anfangsbedingungen, solche Punkte auf der Phasenfläche (x_o, p_o) für die die durchgehenden Bahnen nicht stochastisch, sondern beispielsweise periodisch sind. Die Fläche (ihr Maß) all dieser Punkte aber muß 0 sein.

Hier stoßen wir auf eine bedeutsame Frage. Können wir davon überzeugt sein, daß in jedem konkreten Fall die Anfangsbedingungen in unserem System nicht derartige Ausnahmen bilden? Die Antwort auf diese Frage ist damit verbunden, daß unter den Bedingungen stochastischer Bewegung und folglich exponentieller Instabilitäten (2) kein System — mit Ausnahme des gesamten Weltalls — als geschlossenes System angesehen werden kann. Das läßt sich an folgendem Beispiel erläutern. Betrachten wir die dynamische Bewegung von Gasmolekülen, die, wie Sinai streng gezeigt hat[7], stochastisch ist. Als äußere minimal schwache Störung nehmen wir die Gravitationswechselwirkung der Moleküle dieses Gases mit einem Proton am „anderen Ende des Weltalls", d. h. in einer Entfernung von 10^{10} Lichtjahren an. Es zeigt sich, daß diese geringfügige Wechselwirkung die dynamische Bahn des Moleküls vollständig verändert für

$$n \sim 60 \text{ Molekularstöße.} \tag{7}$$

oder für etwa $10^{-?}$s (Gas unter Normalbedingungen). Deshalb führt die oben formulierte Frage zum Problem der Anfangsbedingungen des Weltalls als Ganzes und kann folglich im Rahmen der klassischen Mechanik auch nicht beantwortet werden.[8]

Uns erscheint in der modernen Ergodentheorie die Schlußfolgerung sehr bedeutsam, daß stochastische Bewegung und damit *statistische Gesetze in außerordentlich einfachen dynamischen Systemen* bis hin zum Oszillator mit *einem* Freiheitsgrad bei äußerer periodischer Störung oder mit *zwei* Freiheitsgraden für ein geschlossenes System auftauchen können. Das unterscheidet sich grundsätzlich von den Vorstellungen der modernen statistischen Physik. Dort wird angenommen, daß statistische Gesetze nur im Grenzfall — streng genommen — einer unendlich großen Zahl von Freiheitsgraden gelten.

Nicht weniger wichtig ist auch eine andere Schlußfolgerung: *Statistische Gesetze sind Spezialfälle der Gesetze der klassischen Mechanik bei Instabilitäten dynamischer Bewegung.* Instabilität einer dynamischen Bewegung ist nicht nur durch die Parameter eines Systems bestimmt [zum Beispiel k in (5)], sondern auch durch die Anfangsbedingungen. Im letzten Falle ist besonders offensichtlich, daß dynamisches und statistisches Bewegungsregime Spezialfälle einheitlicher mechanischer Gesetze sind.

2. Annahmen

Nun wollen wir zu allgemeineren Fragen übergehen, deren Antworten nicht unmittelbar aus den hier dargestellten Ergebnissen mathematischer und physikalischer Untersuchungen folgen.

Ist die stochastische Bewegung ein „wirklicher" Zufallsprozeß? Ein „wirklicher" soll hier ein solcher Zufallsprozeß sein, wie er nach unseren Vorstellungen in der Natur selbst abläuft. Die stochastische Bewegung ist natürlich auch Teil der Natur. Gibt es aber in der Natur vielleicht „noch zufälligere" Prozesse? Der Begriff „wirklich" ist hier in Anführungszeichen gesetzt, weil eigentlich nicht völlig klar ist, was er bedeutet. Gleiches gilt für „noch zufälliger".

Man könnte versuchen diesen Wörtern einen konkreteren Sinn zuzuordnen, indem man dem Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie nach Mises folgt. Er hat postuliert, daß ein „wirklicher" Zufallsprozeß auch der Forderung nach Regellosigkeit im Sinne der Nichtexistenz eines Algorithmus für diesen Prozeß genügen muß. D. h. es ist unmöglich seinen Verlauf vorherzusagen. Für die stochastische Bewegung ist die Forderung der Regellosigkeit *per Definition* verletzt, weil die dynamischen Gleichungen einen solchen Algorithmus darstellen.

Man könnte meinen, daß die von Mises geforderte Eigenschaft der Regellosigkeit deshalb *unbeobachtbar* ist, weil wir niemals Sicherheit dafür haben, ob ein zufällig scheinender Prozeß nicht in Wirklichkeit doch einem komplizierten Algorithmus genügt. Mehr noch, ein beliebiger Prozeß über ein *endliches Zeitintervall* kann immer *mit beliebigem Genauigkeitsgrad* durch irgendeine reguläre Funktion, beispielsweise eine Fourierzerlegung, dargestellt werden. Deshalb scheint mir, daß es keinen Grund gibt anzunehmen, daß die in der Natur beobachteten Zufallsprozesse der Miseschen Forderung der Regellosigkeit genügen. Letztere ist vielmehr eine subjektive Vorstellung darüber, wie ein „wirklicher" Zufallsprozeß *sein soll*, als eine Abbildung tatsächlicher Eigenschaften von Zufallsprozessen in der Natur.

Andererseits wird, wie oben gezeigt werden konnte, die *praktische* Nichtvoraussagbarkeit der stochastischen Bahn durchaus vollständig durch exponentielle Instabilität der Bewegung und die Nichtexistenz geschlossener Systeme erklärt. Deshalb scheint es durchaus begründet, die stochastische Bewegung eines dynamischen Systems als Arbeitsmodell für die in der Natur beobachteten Zufälle zu benutzen. Es scheint auch vernünftig zu sein zu versuchen, den Anwendungs-

[7] Sinai, J. G.: DAN 153 (1963), 1261.

[8] Vgl. Krylov, N. S.: Raboty po obosnovaniju statističeskoi fiziki. A. a. O.

bereich dieses Modells soweit zu erweitern, wie das ohne Widerspruch zur Erfahrung möglich ist.

Versuchen wir nun die Frage nach der Ursache von Zufälligkeiten im dynamischen System von einem ganz anderen Standpunkt anzugehen. Weiter oben war darauf verwiesen, daß die Transformation (1) bei $k > 1$ eine stochastische Folge von Zahlen $x_0, x_1, \ldots x_n \ldots$ liefert. Setzt man $k = 10$, dann stellen diese Zahlen immer fernere Bruchteile der Ausgangszahl x_0 dar. Offensichtlich ist die Folge der ersten Stellen dieser Zahlen, die nichts anderes als eine Folge der Stellen von x_0 ist, auch stochastisch. Für $x_0 = \pi$ z. B. wird das die Folge 3,1,4,1,5, 9, 2,5,3,6,... sein. Das aber heißt, daß fast jede reelle Zahl in sich bereits einen Zufallsprozeß birgt.

Der Terminus „fast" heißt hier wie auch früher mit Ausnahme einer bestimmten Menge vom Maß Null, beispielsweise aller rationaler Zahlen. Erinnern wir uns nun daran, daß die Bahn eines dynamischen Systems durch die Anfangsbedingungen vollständig gegeben wird. Das heißt, sie wird von einigen reellen Zahlen bestimmt. Daraus folgt, daß der Begriff einer *bestimmten* Bahn den Begriff der *Zufälligkeit* schon in gewisser Weise in sich enthält. Allerdings muß die Bewegung instabil sein, damit diese verborgene Zufälligkeit zutage tritt. Nur in diesem Falle hängt die Bewegung von der *genauen* Angabe der Anfangsbedingungen ab, d. h. von *allen* Stellen der Zahlen, die die Bahn bestimmen.

3. Vermutungen

U. Röseberg hat in einer Arbeit, in der auch unsere Ergebnisse berücksichtigt sind, zum Verhältnis dynamischer und statistischer Gesetze zusammenfassend festgestellt: „Gezeigt ist, daß in dynamischen Systemen statistische Gesetze auftauchen können ... Das ist aber lediglich *ein* Mechanismus zur Entstehung statistischer Gesetze. Es ist damit keineswegs bewiesen, daß statistische Gesetze nur in dynamischen Systemen auftauchen können."[9]

Vom Standpunkt einer allgemeinen Analyse der Situation kann dem voll zugestimmt werden. Mehr noch: In der Quantenmechanik liegt — so will es scheinen — ein Beispiel für statistische Gesetze völlig anderer Natur vor. Als Physiker jedoch habe ich einen einfachen und recht allgemeinen Mechanismus zur Entstehung statistischer Gesetze in einer zur Vermischung führenden Instabilität dynamischer Bewegung untersucht. Warum sollte nicht angestrebt werden, diesen Mechanismus zur Erklärung eines möglichst großen Bereichs statistischer Erscheinungen in der Natur zu nutzen? Dabei wollen wir eine gewisse Vorsicht walten lassen.

Fragen wir also: Können die quantenmechanischen statistischen Gesetzmäßigkeiten durch den Mechanismus der Vermischung erklärt werden? Die Analyse dieser Frage hat Krylov zu einer unerwarteten Schlußfolgerung geführt.[10] In der Quantenmechanik ist Vermischung überhaupt nicht möglich. Genauer gesagt verfügen die Ψ-Funktionen als Lösungen der Schrödinger-Gleichung nicht über diese Eigenschaften. Das folgt aus dem durch die Mathematik eindeutig erwiesenen Fakt, daß das Spektrum eines beliebigen Quantensystems in einem begrenzten Raum (Analogon zum klassischen System von Teilchen in einem „Kasten") stets diskret ist. Vermischung ist aber immer einem stetigen Spektrum äquivalent. So ist also die Quantenmechanik „weniger statistisch" als die klassische Mechanik. Zeigt das nicht ein weiteres Mal, daß die Gesetze der Quantenmechanik von völlig anderer Natur sind? Wir wollen aber keine vorschnellen Schlüsse ziehen.

Vor allen Dingen ist zu fragen: Woher kommen die statistischen Gesetze der Quantenmechanik? Dabei sind die universellen statistischen Gesetze gemeint, die in einem beliebigen, selbst dem einfachsten System der Quantenmechanik in Übereinstimmung mit der Interpretation der Quantenmechanik auftauchen. Es ist bekannt, daß diese Gesetze während des Meßprozesses wirken. Was aber ist eine Messung in der Quantenmechanik? Worin besteht ihre physikalische Natur? Auf diese Frage kann gegenwärtig wohl kaum jemand antworten. Wir wissen nur, daß die Messung eine besondere Wechselwirkung von Mikroobjekten mit einem makroskopischen System ist. Man kann vermuten, daß das Wesen dieser besonderen Wechselwirkung einer außerordentlich starken Instabilität gleichkommt. Ein Prozeß, ausgelöst durch ein Mikroteilchen zeitigt makroskopische Wirkungen. Wenn das so ist, dann sind die Bedingungen für eine Vermischung der dynamischen Bewegung eines Makrosystems, des „Meßgerätes" gegeben. Der letzte Ausdruck ist in Anführungszeichen gesetzt, weil für die Physik nicht die Bezeichnung des Systems von Bedeutung ist, sondern seine Eigenschaften und sein Zustand. Sollte deshalb die Hypothese nicht berechtigt sein, daß *die statistischen Gesetze der Quantenmechanik durch den Mechanismus der Vermischung aus der klassischen Mechanik* erklärt werden wie wir ihn in 1. kennengelernt haben? Durch diesen Mechanismus wären die Phasenkorrelationen zwischen den Komponenten der Ψ-Funktion zerstört, der reine Quantenzustand in ein Gemisch verwandelt, was zur irreversiblen Reduktion der Wellenfunktion führt. In diesem Bild sind jene Bedingungen am unverständlichsten, die im Quantensystem zur klassischen Vermischung führen. Man kann lediglich vermuten, daß das ein Effekt quaisisklassischer Näherung im Bereich zwischen dem quantenmechanischen und dem klassisch-mechanischen Gebiet ist.

Ein anderes interessantes Problem ist mit der Frage aufgeworfen: Welche Gesetzestypen — die dynamischen oder die statistischen — sind die fundamentaleren? Die Ergodentheorie gibt dabei den dynamischen Gesetzen den Vorzug. Die Frage ist aber weitaus komplizierter. Jetzt wissen wir oder besser haben wir verstanden, daß so wie in dynamischen Gesetzen unter bestimmten Bedingungen statistische Gesetze auftauchen, im statistischen System dynamische Prozesse entstehen können. Interessanterweise passiert das wiederum unter der Voraussetzung der Instabilität des statistischen Zustandes. Das einfachste Beispiel ind Instabilitäten eines Gases im Gravitationsfeld. Unter bestimmten Bedingungen, die insbesondere von der Temperatur des Gases abhängen, wachsen die Dichtefluktuationen so, daß das homogene Gas in einzelnen Verdichtungen (Straten) zerlegt wird. Deren Bewegung im Gravitationspotential wird durch dynamische Gleichungen beschrieben.

Ein interessanteres Beispiel sind die selbständig auf-

---

[9] Röseberg, U.: Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Nat. R. XXII (1973) 1, S. 91.
[10] Krylov, N. S.: Raboty A. a. O.

tretenden periodischen chemischen Reaktionen in ursprünglich homogenen Gemischen von Reagenzien. Eine Theorie solcher Prozesse, die erstrangige Bedeutung für die Biologie besitzt, ist von Prigogine und seinen Mitarbeitern entwickelt worden.[11] Unter bestimmten Bedingungen können solche Schwingungen ihrerseits stochastisch werden, sie induzieren statistische Gesetze zweiter Ordnung (bezogen auf die ursprünglichen statistischen Gesetze). Der letzte Prozeß wird in der gegenwärtigen Theorie solcher Reaktionen noch nicht genügend berücksichtigt.

Versucht man ein allgemeines Bild des Verhältnisses dynamischer und statistischer Gesetze zu entwerfen, so kommt man zu einer Hierarchie einander ablösender dynamischer und statistischer Gesetze, von denen jedes folgende das vorangegangene als Spezialfall enthält. Wir wissen nicht, womit diese Hirarchie enden könnte und was dem ganzen zugrunde liegt. Wir wissen überhaupt nicht ob es ein solches Ende gibt.

Es soll speziell hervorgehoben sein, daß die Möglichkeit zu einem dynamischen Prozeß innerhalb eines statistischen Systems zu gelangen, unbedingt ein Reservoir potentieller Energie voraussetzt. Im Fall der Instabilität, die zur Stratenbildung führt, ist das beispielsweise die Energie der Gravitationswechselwirkung. Die dynamische Bewegung erfaßt in einem solchen System in der Regel eine relativ geringe Zahl seiner Freiheitsgrade, während die anderen weiterhin durch ihr statistisches Verhalten charakterisiert sind. Daraus resultiert eine ständige Dissipation von Energie aus den dynamischen Freiheitsgraden in die statistischen, was Prigogine veranlaßte, den Terminus „dissipative Strukturen" zu prägen. Das Entstehen dissipativer Strukturen bringt auch für das alte Problem vom „Wärmetod des Weltalls" eine Lösung. Erstmals haben J. B. Zeldovic und J. D. Norikov in ihrer „Relativistischen Astrophysik" (Nauka 1967, Ergänzung XIII) darauf verwiesen.

Gestatten Sie mir nun noch einige Bemerkungen zum Kausalprinzip, das in der wissenschaftlichen Forschung bekanntlich von außerordentlicher Bedeutung ist und eine Vielzahl philosophischer Probleme aufwirft. Der Begriff des Kausalprinzips wird in den verschiedensten Bedeutungen benutzt. Hier soll nur seine eingeschränkte, für die physikalische Forschung entscheidende Bedeutung betrachtet werden. Danach besagt das Kausalprinzip: „Die Ursache geht immer der Wirkung voraus". Das so verstandene Kausalprinzip legt also scheinbar eine Zeitrichtung fest — von der Ursache zur Wirkung. Das ist der sog. Eddingtonsche Zeitpfeil. Diese Gerichtetheit der Zeit steht zu allen elementaren dynamischen Gesetzen im Widerspruch, die symmetrisch gegenüber Zeitinterversion sind. Woher stammt also die zeitliche Asymmetrie in den Kausalrelationen?

Es fällt ins Auge, daß noch eine — scheinbar speziellere — Gruppe von Erscheinungen existiert, die durch zeitliche Asymmetrie charakterisiert sind. Das sind die statistischen Prozesse, deren Richtung durch den Satz von der Zunahme der Entropie festgelegt ist. Damit muß man sich fragen, ob der II. Hauptsatz der Thermodynamik und das Kausalprinzip zusammenhängen.

Klären wir zunächst erst einmal, woher wir die Überzeugung von der Notwendigkeit des so bestimmten Kausalprinzips nehmen. Viele stimmen darin überein, daß das Wesentliche dabei die Unbestimmtheit darstellt, mit der Ursachen wirken können. Das läßt sich am einfachsten für das menschliche Handeln erklären. Charakterisiert man das Handeln des Menschen durch sog. „Willensfreiheit", dann heißt das, der Mensch kann bestimmte Ursachen wirken lassen, kann in bestimmter Weise handeln, muß es aber nicht notwendig. Er hat auch andere Handlungsmöglichkeiten. Stellen wir uns vor, das Kausalprinzip sei in dem Sinne verletzt, daß unter bestimmten Bedingungen die Wirkung der Ursache vorausgänge. Der Mensch, verantwortlich für die Wirkung seines Handelns, könnte es sich anders überlegen und gar nicht handeln, die Ursache also gar nicht wirken lassen. Das wäre paradox. Der Mensch wäre für eine Handlung verantwortlich, die gar nicht stattgefunden hat. Es versteht sich, daß für diese Überlegungen keinesfalls notwendig ist, daß eine Ursache unbedingt vom Menschen zur Wirkung gebracht wird. Es genügt, wenn Ursachen zufällig wirken. In diesem Falle führt eine Verletzung des Kausalprinzips zu logischen Widersprüchen. Das kennzeichnet einen merkwürdigen Sachverhalt: In der streng determinierten Laplaceschen Welt, die keinen Zufall kennt, ist das Kausalprinzip in seiner hier untersuchten Bestimmung nicht notwendig. Die Reihenfolge der Ereignisse in der Zeit ist in dieser Welt unerheblich. Sie erfolgen alle unabdingbar. Das Kausalprinzip wird lediglich in statistischen Prozessen notwendig, die durch Wahrscheinlichkeitsunbestimmtheiten charakterisiert sind. Von diesem Standpunkt ist die hier benutzte „Willensfreiheit" als Unbestimmtheit der Auswahl festgelegt, die letztlich auf statistische Gesetze zurückgeht. Die vorgetragene Auffassung über die Natur der Kausalität kommt m. E. dem Standpunkt von H. Hörz zu dieser Frage sehr nahe.[12]

Um den aufgezeigten Zusammenhang von Kausalität und statistischem Gesetz zu demonstrieren, soll folgendes Beispiel angeführt werden. Betrachten wir die elektromagnetische Strahlung eines geladenen Teilchens. Bekanntlich zwingt uns das Kausalprinzip, die retardierte Welle auszuschalten und nur die avancierte zu berücksichtigen. Andererseits ist man gezwungen für den Fall eines geschlossenen Gefäßes beide zu berücksichtigen. Das verlangen die entsprechenden Randbedingungen. Physikalisch ist das mit der Reflexion der Wellen an der Gefäßwand verbunden. Wie wirkt in diesem Fall das Kausalprinzip, wenn die Bewegung des strahlenden Teilchens stochastisch ist? Anscheinend wird es, wenn die Abmaße des Gefäßes so groß sind, daß die reflektierte Welle zur ausstrahlenden Ladung erst nach einer Zeit zurückkehrt, die größer als die für die Vermischung charakteristische ist, keinerlei Korrelation mehr mit der Ladungsbewegung geben. Diese darf deshalb nicht mehr als Ursache der Welle angesehen werden, sondern bildet einen Hintergrund der Wärmebewegungen.

Ist nun mit dem Kausalprinzip und dem II. Hauptsatz der Thermodynamik tatsächlich eine bestimmte Zeitrichtung festgelegt? In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Ergodentheorie ist die statistische Relaxation asymptomisch für beide Zeitrichtungen ($t \to \pm\infty$). Diese Konsequenz der modernen Ergoden-

---

[11] Glansdorf, P.; Prigogine, I.: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. New York 1971.

[12] Hörz, H.: Materiestruktur. Berlin 1971.

theorie kann hier nicht näher ausgeführt werden. Damit ist aber offenkundig, daß so die ausgewählte Zeitrichtung nicht begründbar ist. Wie steht es mit dem Kausalprinzip? Woher stammt da die Asymmetrie? Es ist möglich, daß deren Quelle in der Trennung von Ursache und Wirkung selbst begründet liegt. – Die Ursache bringt eine Wirkung hervor. Die Wirkung aber beeinflußt die Ursache nicht, mindestens aber wirkt sie in gänzlich anderer Weise als die Ursache. Eine „Begründung" der Zeitrichtung wäre dann durch das Kausalprinzip auch nicht gegeben. All diese philosophisch brisanten physikalischen Probleme konnten nur angesprochen werden, um zu zeigen, welches weite Feld die Wissenschaftler erwartet, die daran gehen, die Geheimnisse des Zufalls zu enträtseln.

Anschrift des Verfassers:

B. V. Chirikov, Institut für Kernphysik der Sibirischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Nowosibirsk