

Sonderdruck aus

**VII. Internationale Konferenz
über nichtlineare Schwingungen**

Band II, 1

Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften
der DDR

Abteilung Mathematik – Naturwissenschaften –
Technik

Jahrgang 1977 · Nr. 5 N



Akademie-Verlag · Berlin 1977

Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда)

Диффузия Арнольда является универсальной, очень слабой неустойчивостью нелинейной колебательной системы с несколькими степенями свободы ($N \cong 3$ для консервативной системы и $N \cong 2$ для неконсервативной) [1–3]. Эта неустойчивость приводит (для очень специальных начальных условий) к медленному стохастическому обмену энергией между степенями свободы и (в неконсервативной системе) к стохастическому изменению полной энергии системы. В принципиальном отношении *диффузия Арнольда интересна, как весьма тонкий механизм взаимодействия нелинейных резонансов*, который до самого последнего времени ускользал от внимания математиков и механиков в этой классической области теории нелинейных колебаний.

Впервые на возможность такой неустойчивости обратил внимание Арнольд [1]; он же высказал предположение об универсальности этого механизма диффузии в динамических системах с большим числом степеней свободы [2]. В [3] получены грубые оценки скорости диффузии Арнольда для широкого класса нелинейных гамильтоновых систем. Строгие оценки, но только сверху, были даны недавно Нехорошевым [4].

Как было сказано выше и будет показано ниже, *диффузия Арнольда имеет место только для очень специальных начальных условий малой меры, внутри так называемого стохастического слоя в окрестности сепаратрисы нелинейных резонансов* [3]. Может показаться поэтому, что никакого практического значения эта неустойчивость не имеет. Это, однако, не всегда так. Дело в том, что обычно в реальных системах имеет место более или менее сильная глобальная (для любых начальных условий) диффузия, вызванная теми или иными случайными возмущениями. Такая глобальная диффузия рано или поздно приводит систему к ближайшему стохастическому слою, после чего возможна более быстрая диффузия Арнольда вдоль слоя.

Насколько нам известно, до сих пор нет убедительных экспериментальных данных по диффузии Арнольда, хотя можно предполагать, что именно это явление наблюдалось в экспериментах по длительному удержанию электронов в магнитной ловушке [5–8] (особенно это касается [8]), а также в некоторых численных экспериментах [9–11]. Есть подозрения, что диффузия Арнольда может играть определенную роль еще в двух процессах [3]. Один из них — *гибель астероидов, частоты вращения которых попадают в резонанс с Юпитером* (так называемые «люки» в энергетическом спектре астероидов [14]). Второй — *очень медленное расширение пучка протонов в наопителе ЦЕРНа за время порядка суток* [15]. Оба явления пока не нашли удовлетворительного объяснения.

Настоящая работа является продолжением [11]. Используя близкую методика, мы показываем, что обнаруженная в [11] очень слабая неустойчивость действительно является диффузией Арнольда. Далее, исследуются ее качественные особенности и определяется зависимость ее скорости от различных параметров системы.

1. Модель

Мы используем близкую к [11] модель с двумя степенями свободы, описываемую нелинейным преобразованием $p_i, x_i \rightarrow \bar{p}_i, \bar{x}_i$:

$$\bar{p}_1 = p_1 - x_1^3 + \mu x_2 + f_1(t), \quad \bar{p}_2 = p_2 - x_2^3 + \mu x_1 + f_2(t), \quad \bar{x}_1 = x_1 + \bar{p}_1, \quad \bar{x}_2 = x_2 + \bar{p}_2. \quad (1.1)$$

Выбор дискретной модели (преобразование) вместо непрерывной (дифференциальные уравнения) дает возможность максимально ускорить счет и уменьшить его ошибки. Последние сводятся для (1.1) только к ошибкам округления. Основным недостатком дискретной модели является ее собственный «фон», связанный с тем, что дискретная модель эквивалентна непрерывной системе с сильным периодическим возмущением в виде коротких толчков. Можно было бы наблюдать эволюцию дискретной системы под действием этого же «фонового» возмущения, как это и было сделано в [11]. Однако сравнение с теорией в этом случае сильно затруднено, так как «фоновое» возмущение не является слабым. Поэтому в отличие от [11] мы ввели дополнительные слабые силы (1.1). Для уменьшения фона необходимо, чтобы собственные частоты системы были малы по сравнению с частотой фонового возмущения (1.3).

Нелинейное преобразование (1.1) представляется нам простейшей моделью диффузии Арнольда. В то же время эта модель, по крайней мере качественно, соответствует некоторым реальным механическим системам, например, частице в ускорителе или накопительном кольце [11].

Для выяснения физического смысла модели перейдем от преобразования (1.1) к дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -x_1^3 + \mu x_2 + f_1(t); & \dot{x}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_2 &= -x_2^3 + \mu x_1 + f_2(t); & \dot{x}_2 &= p_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Это справедливо при условии:

$$\frac{dp_i}{p_i} = \frac{\bar{p}_i - p_i}{p_i} \ll 1; \quad \frac{dx_i}{x_i} = \frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} \ll 1. \quad (1.3)$$

Время t измеряется здесь в числе шагов преобразования, так что $dt = 1$. Система (1.2) имеет гамильтониан:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - x_1 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2. \quad (1.4)$$

Теперь ясно, что наша модель представляет собой два нелинейных осциллятора с линейной связью, на каждый из которых действует внешняя сила. Импульсы и координаты осцилляторов равны p_1, p_2, x_1, x_2 , соответственно; μ — коэффициент

связи. Внешние силы f_1, f_2 выбраны в виде «пилы» с периодами T_1, T_2 (или основными частотами $\Omega_1 = 2\pi/T_1; \Omega_2 = 2\pi/T_2$), причем на каждом периоде сила имеет вид:

$$f_i(t) = f_{i0} \frac{t-t_{0i}}{T_i}; \quad -\frac{T_i}{2} \leq t-t_{0i} < \frac{T_i}{2}. \quad (1.5)$$

Величины t_{0i} определяют фазы сил.

Диффузия Арнольда идет вдоль резонансов системы — резонансов связи ($n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \approx 0$) или внешних резонансов ($n_1\omega_1 \approx m_1\Omega_1; n_2\omega_2 \approx m_2\Omega_2$) (рис. 1). В этой работе мы ограничимся исследованием диффузии Арнольда вдоль основного резонанса связи: $\omega_1 = \omega_2$.

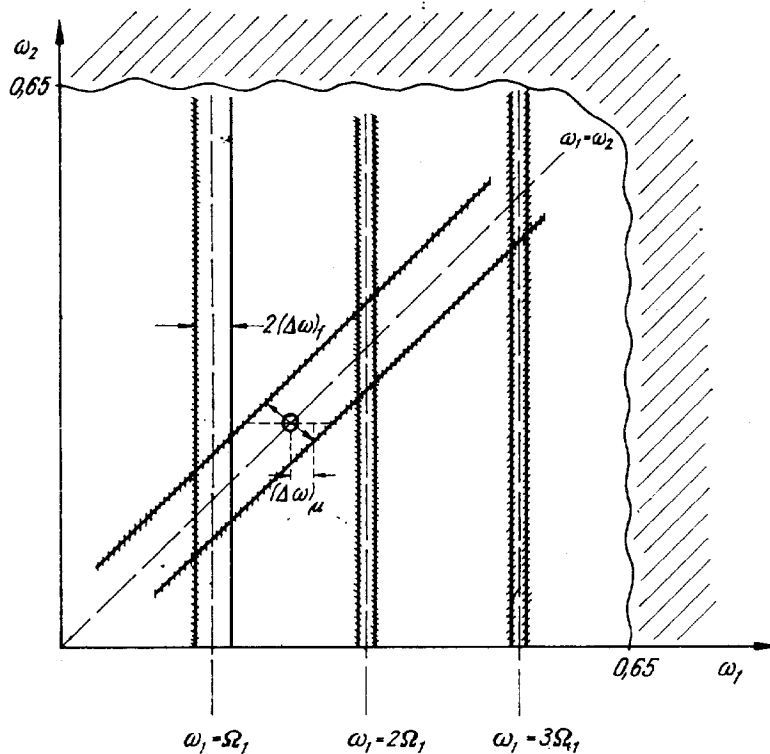


Рис. 1. Схема резонансов: ω_1, ω_2 — частоты колебаний осцилляторов; Ω_1 — частота внешней силы, действующей на I-й осциллятор; $(\Delta\omega)_\mu, (\Delta\omega)_f$ — ширина резонанса связи и внешнего резонанса. Пунктиром показаны линии точного резонанса; заштрихованные линии — проекции стохастических слоев, ограничивающих резонансы на плоскость частот; заштрихованная область $\omega > 0.65$ — область «гибели» системы вследствие «фоновой стохастичности». Кружком отмечены типичные начальные условия ($x_0 \approx 0.37; \omega_0 \approx 0.31$).

Переходя к переменным действие-угол для «сглаженной» системы (1.4), можно оценить ширину резонанса связи (при $f_{0i} = 0, \mu \rightarrow 0$):

$$(\Delta\omega)_\mu \approx \sqrt{\mu} \cdot \frac{\omega_0}{x_0} \quad (1.6)$$

и ширину внешнего резонанса (при $\mu = 0, f_{01} = f_0; f_{02} = 0$):

$$(\Delta\omega)_f \approx \frac{0.88}{m} \sqrt{\frac{f_0}{\Omega}}, \quad (1.7)$$

где использовано: $x_{01} \approx x_{02} \approx x_0 \approx \text{const}; \omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0 \approx \text{const}; \omega_0 = m\Omega$. Для справедливости полученных выражений необходимо прежде всего выполнение условия (1.3) перехода к «сглаженной» системе, которое можно записать в виде: $\omega \ll 1$. Численные эксперименты в [11, 13] показали, что если $\omega \geq 0.65$, то даже для $\mu = f_0 = 0$ начинается сильная стохастическая неустойчивость за счет фонового возмущения (дискретности системы). Область этой «фоновой стохастичности» показана на рис. 1. Кроме того, необходимо, чтобы возмущения μ, f_0 были доста-

точно малы, точнее, необходимо, чтобы ширина резонансов была мала по сравнению с «расстоянием» (по частоте) до соседних резонансов: $(\Delta\omega)_\mu, (\Delta\omega)_f \ll \Omega$.

При достаточно большой величине возмущений μ , f_0 происходит перекрытие резонансов и возникает стохастическая неустойчивость [12]. Начало стохастичности (для $\mu = 0$) соответствует касанию сепаратрис двух соседних внешних резонансов, это дает следующую оценку для критического значения силы:

$$f_c \approx 1.2 \left[\frac{m(m+1)}{2m+1} \right]^2 \cdot \Omega^3 \cdot S_f^2. \quad (1.8)$$

В обратном предельном случае при $f_0 \ll \mu$ критическое значение для μ_c равно:

$$\mu_c \approx 0.35 \Omega^2 \cdot S_\mu^2. \quad (1.9)$$

Ожидаемое значение параметра перекрытия резонансов: $S_f \approx S_\mu \approx 1$. При $S_\mu, S_f > 1$ соседние резонансы уже должны накладываться друг на друга. В общем случае для $f_0 \sim \mu$ граница стохастичности определяется соотношением:

$$S = \frac{2(\Delta\omega)_\mu + (\Delta\omega)_f^{(m)} + (\Delta\omega)_f^{(m+1)}}{\Omega} \approx 1.7 \frac{\sqrt{\mu_c}}{S_\mu \cdot \Omega} + 0.9 \frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{\sqrt{f_c}}{\Omega^{3/2} S_f} \approx 1. \quad (1.10)$$

Последнее соотношение получено для одной внешней силы, в случае двух сил параметр перекрытия S определяется наибольшей силой. Так как стохастическая неустойчивость значительно сильнее диффузии Арнольда, последнюю можно наблюдать только в области $S < 1$.

2. Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились на БЭСМ-6 Вычислительного центра СО АН СССР. Программа счета и обработки результатов написана на языке АЛГОЛ за исключением основного цикла преобразования (1.1), который для ускорения счета написан в кодах машины. Это дало возможность максимально сократить время счета. Большинство расчетов проводилось на время $t = 10^6$ шагов.

Обработка включала:

1. Измерение частот ω_1, ω_2 по числу проходов координат осцилляторов через нуль с усреднением на интервале $T_\omega = 10^4$.
2. Зависимость полного гамильтониана «сглаженной» системы (1.4) от времени через 10^4 шагов (рис. 4).
3. Вычисление среднего коэффициента диффузии по H :

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{T_n} \cdot \overline{(\Delta H)^2}, \quad (2.1)$$

где $T_n = 10^n$ — интервал усреднения Гамильтониана; $\Delta \bar{H}$ — разница средних значений Гамильтониана на соседних интервалах. Верхняя черта означает усреднение по всем интервалам в пределах одного счета. Обычно вычислялось два коэффициента диффузии для $n = 4; 5$. Если их значения близки, это дополнительно указывает на диффузионный характер изменения $H(t)$; если же они различаются примерно на порядок, то это свидетельствует о периодических колебаниях H (главным образом за счет дискретности преобразования).

Основной результат численных экспериментов — обнаружение очень слабой неустойчивости в отсутствие перекрытия резонансов ($S < 1$). На рис. 2 представлена зависимость коэффициента диффузии от амплитуды одной из сил (вторая сила равна нулю). Кривая $\mu = 0$ характеризует колебания одного осцилля-

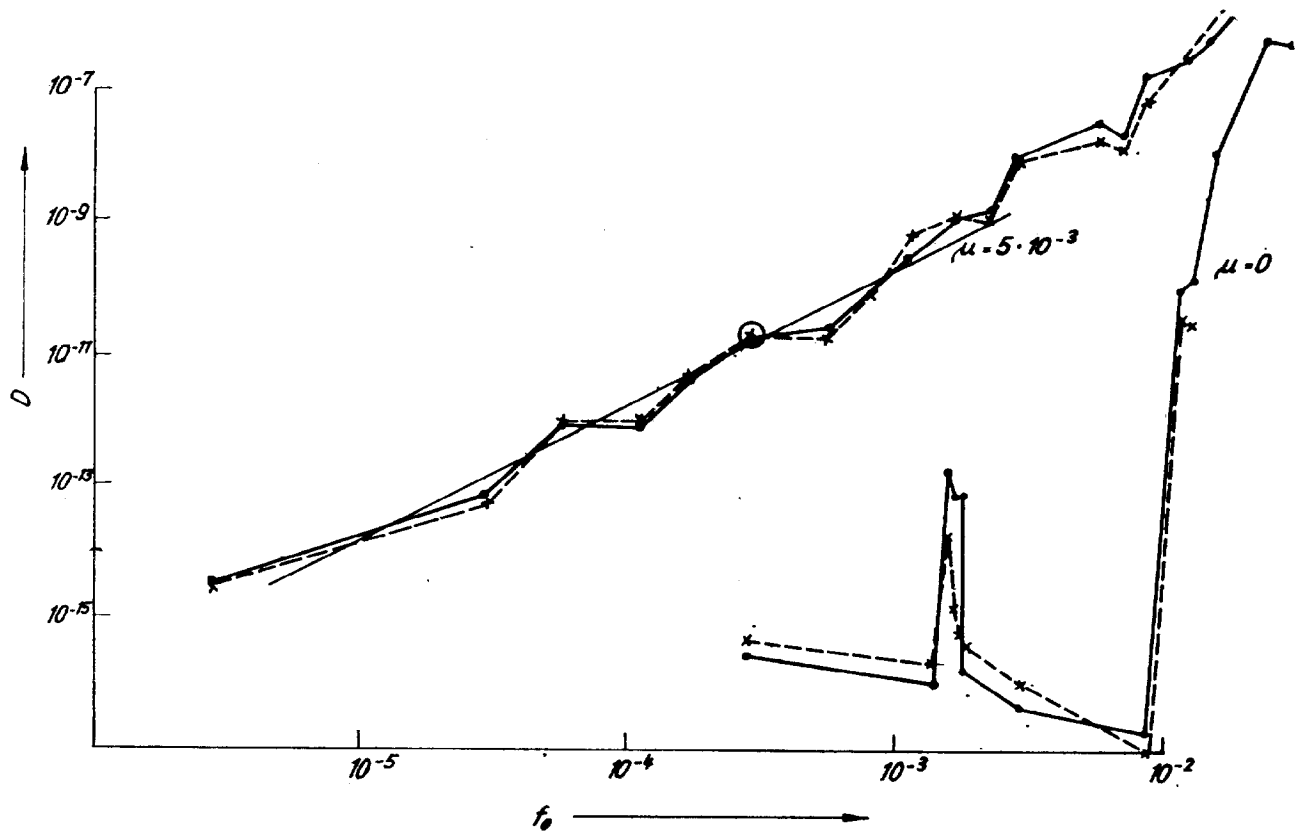


Рис. 2. Зависимость коэффициента диффузии от амплитуды силы f_1 ($f_2=0$); μ — коэффициент связи (1.4). Сплошные ломаные — для D_4 ; пунктир — для D_5 . Прямая линия соответствует зависимости $D \sim f_0^k$; $k \approx 2.06$. Кружком отмечено значение f_0 , для которого снята зависимость $D(\mu)$ (рис. 3).

тора. Резкий рост D обусловлен перекрытием внешних резонансов. Сравнение экспериментального критического значения $f_c^0 \approx 10^{-2}$ с оценкой (1.8) дает $S_f \approx 2$ ($m = 1$). Хотя для оценки это не столь уже большое различие с ожидаемым $S_f \approx 1$, можно предположить, что оно связано со специальными начальными условиями счета, требующими большего перекрытия резонансов для попадания в стохастическую область.

Как известно, для одного осциллятора существует граница (по f_0) вечной устойчивости (теория КАМ, см., например [12]). В работе [13] показано, что эта граница совпадает по порядку величины с оценкой по перекрытию резонансов.

Причина резкого выброса D при $f_0 \sim 10^{-3}$ осталась невыясненной. При $\mu \neq 0$ диффузия, превышающая фон на несколько порядков, продолжается в области столь малых f_0 , где перекрытие внешних резонансов полностью исключено. Коэффициент диффузии в этой области изменяется по закону: $D \sim f_0^2$ (рис. 2).

На рис. 3 приведена зависимость коэффициента диффузии от параметра связи μ . Резкое увеличение диффузии при $1/\sqrt{\mu} < 12$ ($\mu > 0,007$) объясняется перекрытием резонанса связи с внешними резонансами. Однако диффузия продолжается и при

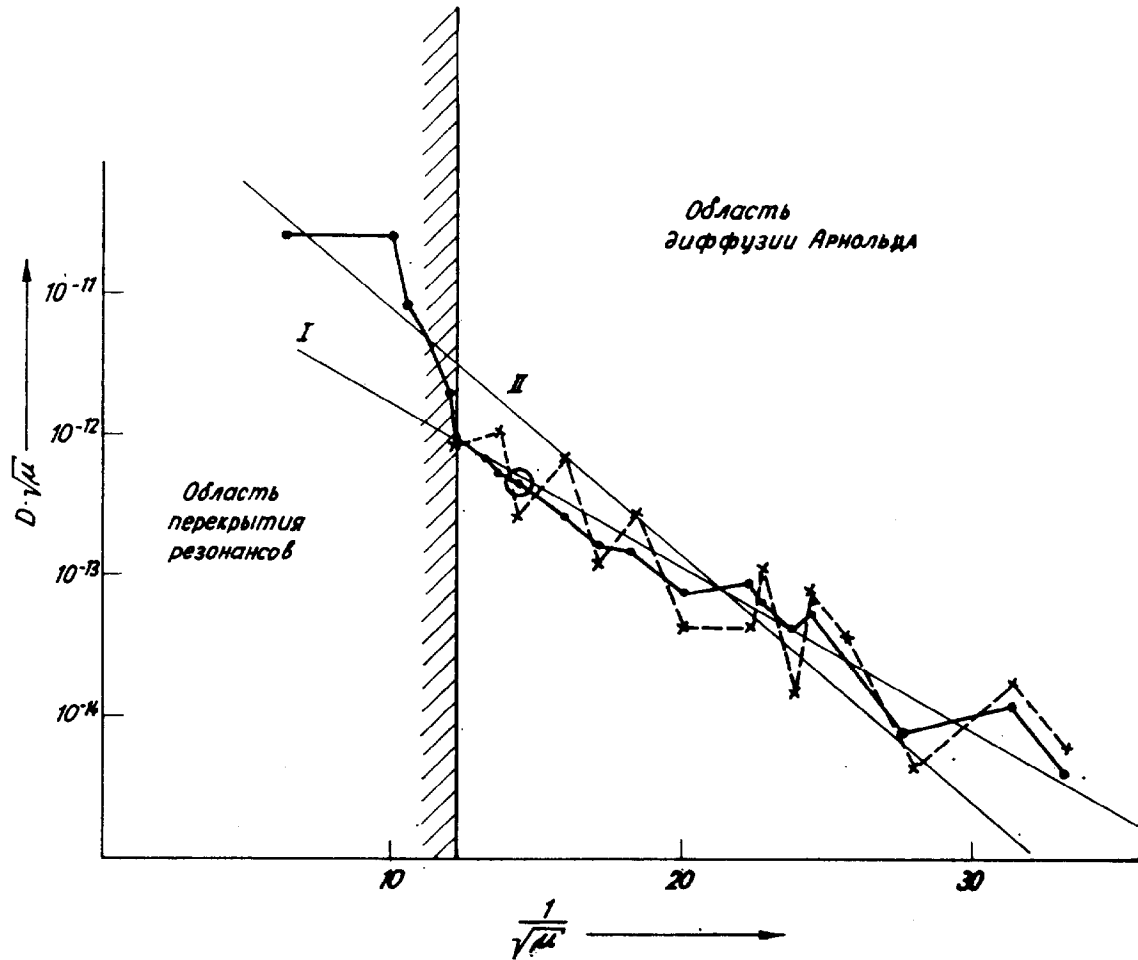


Рис. 3. Зависимость коэффициента диффузии от параметра связи μ : $f_0 = 2.9 \cdot 10^{-4}$ (вторая сила равна нулю). Сплошная линия — для D_4 ; пунктир — для D_5 . Прямая I соответствует эмпирической зависимости: $D(\mu) = 2.1 \cdot 10^{-11} \mu^{-1/2} \exp(-0.27\mu^{-1/2})$. Прямая II — теоретическая: $D(\mu) = 5.2 \cdot 10^{-10} \mu^{-1/2} \exp(-0.40\mu^{-1/2})$. Кружком отмечено значение μ , для которого снята зависимость $D(f_0)$ (рис. 2). Заштрихованная вертикальная линия показывает ориентировочно границу между областями диффузии Арнольда и перекрытия резонансов.

значительно меньших μ , убывая приблизительно по экспоненциальному закону (рис. 3). Ориентировочная граница области перекрытия резонансов показана на рис. 3 вертикальной заштрихованной линией. Если в (1.10) использовать экспериментальное значение $S_\mu = S_f = 2$, то $S \approx 0.45$; если положить $S_\mu = S_f = 1$, то $S \approx 0.89$. В последнем случае имеет место вполне удовлетворительное согласие с ожидаемыми значениями: $S_\mu = S_f = 1$. Между тем в первом случае значения S для разных резонансов расходятся между собой, что косвенно указывает на неправильное значение $S_f = 2$, связанное, по-видимому, как уже говорилось выше, со специальными начальными условиями.

Комбинируя эмпирические законы, представленные на рис. 2, 3 прямыми линиями получим:

$$D^a(\mu, f_0) \approx \frac{A \cdot f_0^2}{\sqrt{\mu}} e^{-\frac{b}{\sqrt{\mu}}}, \quad (2.2)$$

$$A \approx 2.5 \cdot 10^{-4}; \quad b \approx 0.27.$$

Постоянные A, b зависят, вообще говоря, от x_0, Ω . Обнаруженная диффузия не является локальной и при достаточной длительности счета приводит к «гибели» системы, т. е. к попаданию ее в область «фоновой стохастичности» (рис. 1). В численных экспериментах счет прекращался, если одна из величин p_i, x_i превышала по модулю 1. Соответствующее число шагов можно назвать временем «жизни» системы. Для $\mu = 0$ диффузия прекращается (время жизни $T > 10^7$) при $f_0 < f_c \approx 10^{-2}$ — значение, хорошо согласующееся с данными по коэффициенту диффузии (рис. 2). При $\mu \neq 0$ время жизни системы остается конечным и при $f_0 \ll f_c$.

Пример зависимости энергии системы от времени приведен на рис. 4 (кривая II). Ясно виден нерегулярный характер изменения энергии, а также резкое увеличение скорости диффузии вблизи границы «фоновой стохастичности».

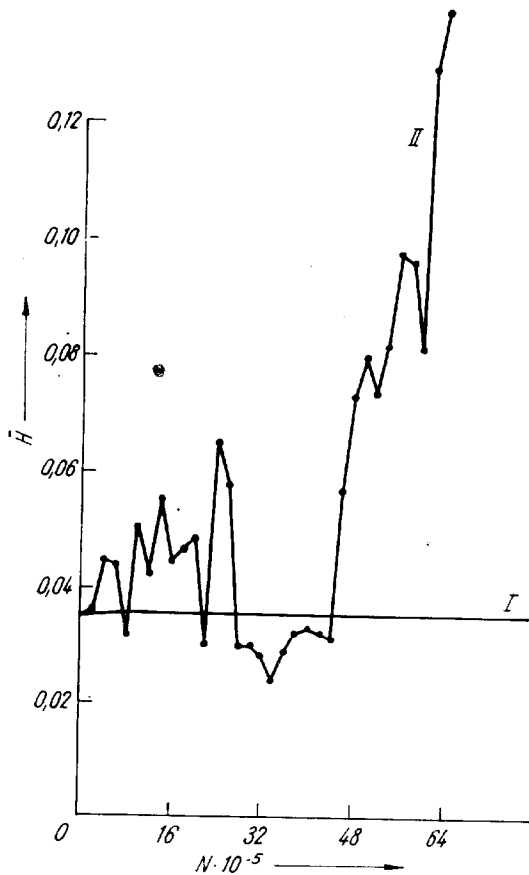


Рис. 4. Пример зависимости энергии системы от времени в области диффузии Арнольда: I — внутри резонанса ($x_1(0) = x_2(0)$); II — на сепаратрисе ($x_1(0) = -x_2(0)$) ($N \equiv T$).

Обычно счет производился при следующих начальных условиях:

$$p_1(0) = p_2(0) = 0; \quad x_1(0) = -x_2(0) = x_0 \approx 0.37.$$

Условие на знаки $x_i(0)$ обеспечивало попадание системы на сепаратрису резонанса связи. Для контроля производился счет с другими начальными условиями:

$$p_1(0) = p_2(0) = 0; \quad x_1(0) = x_2(0) = x_0 \approx 0.37.$$

В этом случае система оказывается в центре резонанса связи. Для $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ и $f_0 = 2.9 \cdot 10^{-4}$ коэффициент диффузии падает при этом с $\mathcal{D}_4 \approx \mathcal{D}_5 \approx 10^{-11}$ до $\mathcal{D}_4 \approx 4 \cdot 10^{-17}$, последнее значение вполне объясняется фоном ($\mathcal{D}_5 \approx 2 \cdot 10^{-18}$). Это же иллюстрирует кривая I на рис. 4, которая получена для начальных условий: $x_1(0) = x_2(0)$.

Более тонкая проверка природы обнаруженной неустойчивости состояла в определении области начальных условий, для которых она имеет место. Для этого снималась зависимость коэффициента диффузии от $x_2(0)$ при фиксированном значении $x_1(0) \approx 0.312$ и $p_1(0) = p_2(0) = 0$. Знаки x_1, x_2 выбирались одинаковыми, так что при $x_1 = x_2$ система находилась в центре резонанса. Однако при увеличении расстройки ($x_2 - x_1$) она попадала на сепаратрису, двигаясь вдоль оси ω_2 на рис. 1. В результате было получено, что диффузия имеет место лишь в относительно узком интервале начальных условий: $(\Delta x_2)_c^2 \approx 0.046$. Эту величину можно рассматривать как некоторую меру ширины стохастического слоя в окрестности сепаратрисы резонанса связи.

3. Обсуждение результатов

Аналитическая оценка для коэффициента диффузии Арнольда [3] дает:

$$\mathcal{D} = \frac{4f_0^2 x_0^2 \Omega^2}{L \cdot \Omega_\mu} e^{-\frac{\pi|\delta\omega_0|}{\Omega_\mu}}, \quad (3.1)$$

где $L = \ln \frac{87}{w_c}$; w_c — полуширина сепаратрисы; $\delta\omega_0 = \omega - n\Omega$. Отличие экспериментального значения w_c^a от теоретического w_c^T незначительно и, если воспользоваться значением $w_c^a \approx 0.65$, то выражение (3.1) приводит к следующим значениям коэффициентов эмпирической формулы (2.2):

$$\begin{aligned} A(x_0, \Omega) &= \frac{4x_0^3 \Omega^2}{L\omega_0} \approx 6 \cdot 10^{-3}, \\ b(\delta\omega_0) &= \frac{\pi x_0 |\delta\omega_0|}{\omega_0} \approx 0.40. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Несмотря на то, что теоретическая формула правильно описывает порядок величины коэффициента диффузии Арнольда, необходимо отметить существенные различия между эмпирическими и теоретическими значениями коэффициентов A, b , которые трудно объяснить случайными ошибками. На рис. 3 отложена теоретическая зависимость $\mathcal{D}(\mu)$ (3.1) (прямая II). Видно, что в средней части теория удовлетворительно согласуется с экспериментом, а по краям наблюдаются значительные расхождения. Понижение скорости диффузии при больших μ объясняется, возможно, переходом системы с резонанса связи на внешний резонанс $\omega_1 = \Omega$, что наблюдалось в некоторых контрольных экспериментах. Что же касается малых μ , то здесь нарушается условие применимости теории ($f_0 \ll \mu$). Действительно, на рис. 2 видно, что при больших f_0 зависимость $\mathcal{D}(f_0)$ отклоняется от квадратичной в сторону более быстрой диффузии. Значительные отклонения начинаются при $f_0 \sim 10^{-3} \sim \mu x_0$. На рис. 3 этому условию соответствует значение $\mu \sim 10^{-3}(1/\sqrt{\mu} \approx 30)$, т. е. как раз последние точки кривой.

Несмотря на указанные расхождения с теорией, факт наблюдения диффузии Арнольда представляется нам бесспорным. Вместе с тем желательны дальнейшие более аккуратные эксперименты в условиях применимости теории диффузии Арнольда.

Пользуемся случаем выразить нашу признательность В. И. Арнольду за ценные замечания.

Литература

- [1] Арнольд, В. И., ДАН СССР **156**, 9 (1964)
- [2] Арнольд, В. И., Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем, Доклад на Международном съезде математиков, Москва 1966
- [3] Чириков, Б. В., Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск 1969
- [4] Нехорошев, Н. Н., Функциональный анализ и его применения, **5**, 82 (1971); Ю. Мозер, Лекции о гамильтоновых системах, МИР 1973, добавление, стр. 150
- [5] GIBSON, G.; JORDAN, W.; LAUER, E., Phys. Fluids **6**, 116, 133 (1963)
- [6] БАЛБЕКОВ, В.; СЕМАШКО, Н., Nuclear Fusion **7**, 207 (1967)
- [7] ДУБИНИНА, А. Н.; КРАСИЦКАЯ, Л. С., Письма Журн. exper. теор. Физ. **5**, 230 (1967)
- [8] Пономаренко, В. Г.; Трайнин, Л. Я.; Юрченко, В. И.; Яснецкий, А. Н., Журн. exper. и теор. Физ. **55**, 3 (1968)
- [9] COURANT, E. D., IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-12, 550 (1965)
- [10] REES, J., Proc. Intern. Symposium on Electron-Positron Storage Rings, Saclay, (1966) (Presses Universitaires de France, 1966) VI-7.
- [11] ШИРИКОВ, В. В., КЕЛ, Е., SESSLER, A. M., Journal of Statist. Phys. **3**, 307 (1971)
- [12] ЗАСЛАВСКИЙ, Г. М. Чириков, Б. В., Успехи физ. наук **105**, 3 (1971)
- [13] ГАДИЯК, Г. В. Израйлев, Ф. М., Переходная зона нелинейного резонанса, ДАН СССР **218**, 1302 (1974)
- [14] Путилин, И. И., Малые планеты, Москва 1953
- [15] КЕЛ, Е., Incoherent space charge phenomena in the ISR, VIIIth. Intern. Conf. on High Energy Accelerators (Geneva, Switzerland) 1971

Anschriften:

Др. Г. В. Гадияк, др. Ф. М. Израйлев, др. Б. В. Чириков,
Новосибирск 90, Ин-т ядерной физики, СССР.