

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Том 5

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1979

УДК 621.039.61

ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОЙ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ
В ОТКРЫТОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

Б. В. ЧИРИКОВ

1. Введение

Устойчивость движения отдельной частицы в магнитной ловушке определяется резонансами между ее колебаниями по трем степеням свободы с частотами ω (ларморовское вращение), Ω (продольные колебания) и Ω_d (дрейфовое вращение). Резонансы приводят к изменению соответствующих переменных действия или адиабатических инвариантов: μ (магнитный момент частицы); J (продольный инвариант); Φ (угловой момент, или потоковый инвариант). Так как обычно колебания по всем трем степеням свободы являются нелинейными, т. е. их частоты зависят от переменных действия, то отдельный нелинейный резонанс вызывает лишь ограниченные колебания последних (см., например, [1, 13]). Однако взаимодействие нескольких нелинейных резонансов приводит к стохастической неустойчивости [1, 13] и как следствие — к выходу частиц из ловушки.

Примером такого процесса являются резонансы вида (n — целое)

$$\omega = n\Omega \tag{1.1}$$

между ларморовским вращением и продольными колебаниями частицы, приводящие к изменению μ и J . Теория этого процесса рассмотрена в [2].

Недавно Рютов обратил внимание, что в длинных амбиполярных ловушках, исследованию которых уделяется сейчас значительное внимание [3, 4], существенную роль играют резонансы между продольными колебаниями и дрейфовым вращением:

$$n\Omega = m\Omega_d, \tag{1.2}$$

где m, n — целые числа. Изменение углового момента частицы Φ под действием этих резонансов может значительно увеличить радиальные потери частиц. Различные режимы диффузии в этих условиях проанализированы Рютовым и Ступаковым [5-7] методом кинетического уравнения. В настоящей работе механизм такой резонансной диффузии исследуется с точки зрения динамики отдельных частиц на простой модели, описанной в [8]. Как отмечено в [7], резонансная диффузия похожа на так называемую «неоклассическую» диффузию в замкнутых магнитных ловушках, которая была впервые рассмотрена Будкером [9] и теория которой была развита Пфиршем и Шлютером [10] для плотной плазмы и Галеевым и Сагдеевым для разреженной плазмы [11] (см. также [12]).

Продольно-дрейфовые резонансы становятся особенно существенными, когда отношение частот Ω_d/Ω или «угол прокручивания» [5] частицы между пробками

$$\Delta\Phi = \pi \frac{\Omega_d}{\Omega} \tag{1.3}$$

становится ≥ 1 . Такое необычное соотношение между частотами возможно по двум причинам: во-первых, из-за большой длины ловушки, что приводит к уменьшению Ω , в особенности для частиц с малой продольной скоростью, и, во-вторых, из-за появления радиального электрического поля [5], которое увеличивает Ω_d .

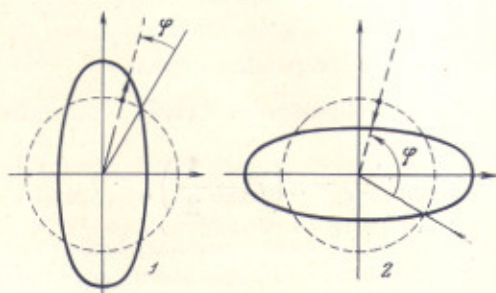


Рис. 1. Геометрия асимметричных магнитных пробок 1, 2 на концах ловушки: пунктирные окружности — значение радиуса частицы r до отражения от пробки; сплошные овалы — после отражения (\bar{r}); стрелки указывают изменение радиуса при отражении ($\Delta r = \bar{r} - r = a \sin 2\varphi$ (1.4)). Фаза φ отсчитывается от линий нулевого возмущения радиуса ($\Delta r = 0$). Как и сами пробки, эти линии повернуты друг относительно друга на 90° , так что зависимость $\Delta r(\varphi)$ одинакова для обеих пробок

Удобной моделью для изучения радиальной динамики частиц в длинных ловушках с аксиально-несимметричными пробками¹ является отображение вида [5-8]:

$$\bar{r} = r + a \sin 2\varphi; \quad \bar{\varphi} = \varphi + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2}, \quad (1.4)$$

где r — расстояние частицы от оси ловушки, а φ — фаза или азимутальный угол частицы в пробке (см. рис. 1, предполагается также, что длина пробки много меньше длины ловушки). Отображение (1.4) является частным случаем так называемого отображения Пуанкаре для системы с двумя степенями свободы² и описывает изменение состояния частицы в переменных r, φ ($r, \varphi \rightarrow \bar{r}, \bar{\varphi}$) за полупериод продольных колебаний $t_{||}$ (время пролета частицы вдоль ловушки).

Первое из уравнений (1.4) описывает «толчок» или «реакцию» пробки, дрейф в которой и приводит собственно к интересующему нас радиальному смещению частицы. Амплитуда смещения $a(v, \rho, r, \theta)$ зависит, вообще говоря, от скорости частицы v , ее ларморовского радиуса ρ , расстояния r и угла наклона скорости к магнитной силовой линии θ . Само смещение ($\bar{r} - r$) зависит также от фазы φ , динамика которой описывается вторым уравнением (1.4). Угол прокручивания $\Delta\varphi(\bar{r}, v, \theta)$ также зависит от скорости, угла θ и, что особенно важно, от \bar{r} . Именно последняя зависимость делает колебания системы (1.4) нелинейными со всеми вытекающими отсюда последствиями [1, 12].

Разумеется, конкретный вид отображения (1.4) является весьма специфичным и приближенным. В частности, учитывается только основная азимутальная гармоника возмущения (для остальных амплитуда a относительно мала, см. [7]), пренебрегается изменением φ в самой пробке и подразумевается определенная конструкция асимметричных пробок: обе пробки идентичны, имеют по две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии и повернуты друг относительно друга на 90° по азимуту. На-

¹ Асимметрия пробок необходима для обеспечения гидродинамической устойчивости плазмы.

² Принимается, что полная энергия частицы и ее магнитный момент сохраняются.

столько же повернуты и линии нулевого возмущения радиуса, от которых производится отсчет фазы φ в каждой из пробок (подробнее см. [2-8], а также рис. 1). Тем не менее общая структура отображения (1.4) оказывается весьма типичной для многих задач об устойчивости нелинейных колебаний. Например, изменение магнитного момента частицы в ловушке также описывается отображением вида (1.4) [2] (другие примеры см. в [13]).

2. Однородная модель

Система резонансов отображения (1.4) определяется условием $\Delta\varphi + \pi/2 = m\pi$ или

$$\Delta\varphi = \pi \left(m - \frac{1}{2} \right), \quad (2.1)$$

которое в свою очередь определяет резонансные значения $r = r_m(v, \theta)$. Если $|\Delta\varphi| \gg 1$, то расстояния между соседними резонансами малы и уравнение для φ (1.4) можно линеаризовать по r :

$$\Delta\varphi(r) \approx \Delta\varphi(r_m) + \Delta\varphi'(r - r_m), \quad (2.2)$$

где штрих означает полную производную по r ($\Delta\varphi' = d(\Delta\varphi)/dr$). Вводя новые переменные

$$p = 2(r - r_m) \Delta\varphi'(r_m); \quad \psi = 2\varphi \quad (2.3)$$

и опуская член $2\Delta\varphi(r_m) + \pi = 2\pi m$, получим из (1.4)

$$\tilde{p} = p + K \sin \psi; \quad \tilde{\psi} = \psi + \tilde{p}, \quad (2.4)$$

где параметр

$$K = 2a(r_m) \Delta\varphi'(r_m). \quad (2.5)$$

Систему (2.4) будем называть *однородной моделью*, так как ее резонансы ($p_m = 2\pi m$) расположены эквидистантно (по p) в отличие от резонансов (2.1). Можно сказать также, что однородная модель (2.4) описывает локальные (по r и θ) свойства исходной модели (1.4). Разумеется, такое локальное описание имеет смысл, если резонансов достаточно много, т. е. если $|\Delta\varphi| \gg 1$.

Преимуществом однородной модели является ее предельная простота, в частности, все ее свойства зависят от единственного параметра (2.5). По этой причине отображение (2.4) называется иногда стандартным [2, 13]. Заметим, что оно является каноническим.

Свойства стандартного отображения хорошо известны [13], в частности, граница устойчивости соответствует

$$K = K_1 \approx 1. \quad (2.6)$$

При $K < 1$ колебания p строго ограничены ($|\Delta p| \leq \sqrt{K}$), тогда как при $K > 1$ для некоторых начальных условий (при $K \gg 1$ — для почти всех начальных условий) имеет место диффузия по p со скоростью [2, 13]

$$D_p = \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{N} \approx \frac{(K-1)^2}{2} \rightarrow \frac{K^2}{2}, \quad (2.7)$$

где $N = t/t_1$ — число итераций отображения (2.4). Последнее значение в (2.7) соответствует случаю больших $K \gg 1$. Будем называть эту скорость диффузии *предельной*³. Из первого уравнения (2.4) видно, что в этом случае движение частицы происходит таким образом, что последовательные значения фазы ψ являются как бы случайными и независимыми (см. раздел 6 ниже).

³ Отметим, что при $|\Delta\varphi| \ll 1$ скорость диффузии может превышать предельную [6]. Это связано с тем, что при $|\Delta\varphi| \rightarrow 0$ резонанс становится линейным и колебания радиуса частицы вблизи резонанса становятся очень большими.

Применительно к плазменным ловушкам модель (2.4) является, однако, слишком упрощенной, так как она описывает движение лишь отдельной частицы. Следующим шагом был бы учет многократного рассеяния при заданной частоте столкновений ν_s . Рассеяние приводит, вообще говоря, к изменению как направления скорости частицы, так и ее величины. Ниже мы ограничимся учетом только первого из этих эффектов, т. е. будем считать, что рассеяние происходит на неподвижных центрах. Тогда скорость частицы $v = \text{const}$, а

$$\langle (\Delta\theta_s)^2 \rangle = \frac{\nu_s t}{2} (\ll 1). \quad (2.8)$$

Усреднение производится здесь по реализации случайного процесса (фазовое среднее), а множитель $1/2$ связан с тем, что нас интересует изменение только полярного угла скорости частицы θ .

Если мы хотим описывать динамику частиц в ловушке с помощью отображения, необходимо потребовать, чтобы средний квадрат угла рассеяния частицы на одном пролете через ловушку был бы мал, т. е. чтобы $\nu_s t_{\parallel} \ll 1$ (разреженная плазма). Обратный предельный случай ($\nu_s t_{\parallel} \gg 1$) соответствует гидродинамическому приближению и является аналогом так называемого режима Пфирша — Шлютера в неоклассической теории диффузии [10].

Комбинация рассеяния и динамического движения (2.4) всегда приводит к некоторой радиальной диффузии частиц, в том числе и при $K \ll 1$, когда в отсутствие рассеяния радиальные колебания частиц строго ограничены. Более того, оценки, полученные в [7], показывают, что скорость диффузии может достигать предельного значения (2.7) даже при относительно малой частоте столкновений ν_s (раздел 6).

Для системы (1.4) рассеяние приводит к дополнительному изменению фазы φ за счет зависимости $\Delta\varphi$ от θ . Можно сказать также, что рассеяние смещает резонансы системы (1.4) по радиусу, так как $r_m = r_m(\theta)$. В результате при любом $K \rightarrow 0$ происходит случайное прохождение резонансов, что и приводит к радиальной диффузии (раздел 4).

Эффект рассеяния может быть легко учтен в рамках однородной модели. Для этого в разложение (2.2) нужно добавить слагаемое $\Delta\theta_s \partial(\Delta\varphi)/\partial\theta$. Введем дополнительную переменную

$$q = 2\Delta\theta_s \partial(\Delta\varphi)/\partial\theta. \quad (2.9)$$

Ее изменение определяется законом многократного рассеяния (2.8) и на периоде отображения (2.4) равно:

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle = 2\nu_s t_{\parallel} \left[\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial\theta} \right]^2 = \frac{1}{\tau}; \quad \Delta q = \frac{\xi}{\sqrt{\tau}}, \quad (2.10)$$

где τ — новый безразмерный параметр модели, а ξ — случайная величина со средним значением $\langle \xi \rangle = 0$ и дисперсией $\langle \xi^2 \rangle = 1$. С учетом рассеяния в принятом приближении однородная модель описывается теперь отображением $(q, p, \psi) \rightarrow (\bar{q}, \bar{p}, \bar{\psi})$, где

$$\bar{q} = q + \frac{\xi}{\sqrt{\tau}}; \quad \bar{p} = p + K \sin \psi; \quad \bar{\psi} = \psi + \bar{p} + \bar{q}. \quad (2.11)$$

Анализ динамики этой системы и является основной задачей данной работы.

3. Один резонанс

При $K \gg 1$ скорость диффузии системы (2.11), так же как и (2.4), является предельной (2.7). Это обеспечивается механизмом перекрытия резонансов [1, 2, 13], который приводит к стохастизации фазы ψ независимо от частоты столкновений ν_s . С другой стороны, при $\tau \ll 1$ фаза ψ стохастич-

зируется за одну итерацию отображения (2.11) вследствие рассеяния, и скорость диффузии будет, следовательно, тоже предельной независимо от K . Рассмотрим поэтому обратный случай:

$$K \ll 1; \quad \tau \gg 1. \quad (3.1)$$

Если, кроме того, $|p| \ll 1$ и $|q| \ll 1$, то разностные уравнения (2.11) можно приближенно заменить дифференциальными:

$$\frac{dq}{dN} \approx \frac{\xi}{\sqrt{\tau}}; \quad \frac{dp}{dN} \approx K \sin \psi; \quad \frac{d\psi}{dN} \approx p + q, \quad (3.2)$$

где N — число итераций — целочисленное время системы (2.11). Заметим, что «непрерывная» система (3.2) имеет всего один резонанс $p_1 = -q$ вместо бесконечной системы резонансов

$$p_m = 2\pi m - q \quad (3.3)$$

отображения (2.11). Уравнения (3.2) описывают движение обычного маятника под действием случайного возмущения. Отметим, что модель маятника является очень удобной для изучения динамики нелинейного резонанса [12].

Введем новые переменные:

$$Q = \frac{q}{\sqrt{K}}; \quad P = \frac{p}{\sqrt{K}}; \quad n = N\sqrt{K}. \quad (3.4)$$

При подстановке их в первое уравнение (3.2) следует учесть, что оно описывает диффузионный процесс, для которого $dq/dN \sim 1/\sqrt{dN}$, откуда $dq/\sqrt{K}dN \approx \xi/\sqrt{\tau}\sqrt{K}$. В результате получаем вместо (3.2)

$$\frac{dQ}{dn} \approx \frac{\xi}{\sqrt{S}}; \quad \frac{dP}{dn} \approx \sin \psi; \quad \frac{d\psi}{dn} \approx P + Q. \quad (3.5)$$

В отличие от (2.11) динамика этой системы определяется единственным параметром

$$S = \tau K^2, \quad S^2 = \tau K^{3/2} \quad (3.6)$$

который описывает, таким образом, некоторую масштабную инвариантность движения в случае одного резонанса.

Параметр S характеризует соотношение динамического и статистического возмущений в системе (2.11), считая невозмущенным движение с $K=1/\tau=0$. Его физический смысл может быть пояснен следующим образом. Динамическое возмущение определяется членом $K \sin \psi$ (2.11). Его действие максимально в резонансе ($|p+q| \ll \sqrt{K}$), где колебания $\Delta p \sim \sqrt{K}$ (см. ниже, раздел 4). Статистическое возмущение (рассеяние) смещает резонанс ($p_1 = -q$), который «диффундирует» со скоростью $\langle (\Delta p_1)^2 \rangle = \langle (\Delta q)^2 \rangle = 1/\tau$ на одну итерацию. Число итераций, за которое резонанс продиффундирует на свою ширину ($\sim \sqrt{K}$), равно $\tau_s \sim K\tau$. С другой стороны, период динамического движения в резонансе (период фазовых колебаний) $\tau_d \sim 1/\sqrt{K}$ (раздел 4). Отсюда $S \sim \tau_s/\tau_d$. При $S \gg 1$ основным является динамическое возмущение, а при $S \ll 1$ — рассеяние.

4. Будкеровская диффузия ($S \gg 1$): резонансные частицы

При $\tau_s \gg \tau_d$ форма орбиты частицы определяется приближенно чисто динамическими уравнениями (2.4), рассеяние же вызывает лишь медленную эволюцию орбиты. Ускорение диффузии по сравнению с «классической» связано с тем, что радиальный размер орбиты, вообще говоря, зна-

чительно превышает ларморовский радиус частицы. Именно на это важное обстоятельство и было впервые указано Будкером еще в 1951 г. (опубликовано в [9]). Поэтому мы будем называть этот режим диффузии ($S \gg 1$) *будкеровским*.

Рассмотрим вначале динамику резонансных частиц, орбиты которых лежат внутри сепаратрисы резонанса системы (3.2) $p_1 = -q$ (рис. 2). Другое название — захваченные (в резонанс), или запертые частицы. Продолжая аналогию с маятником, о которой упоминалось выше (раздел 3), можно сказать, что движение резонансных частиц соответствует колебаниям маятника, а нерезонансных — его вращению (раздел 5). Уравнение сепаратрисы

$$p_{sx} = -q \pm 2\sqrt{K} \sin \frac{\psi}{2} \quad (4.1)$$

получается непосредственно из гамильтониана системы (3.2):

$$H(p, \psi) = \frac{(p+q)^2}{2} + K(1 + \cos \psi) \approx \text{const} \quad (4.2)$$

при $H=2K$ в пренебрежении рассеянием ($q = \text{const}$).

Основной особенностью движения резонансных частиц, существенной для рассматриваемой задачи, является то, что их средний (по времени) импульс $\bar{p} = -q$. Если q медленно изменяется с течением времени, то это равенство приближенно сохраняется, т. е. частица следует за резонансом. Такой процесс хорошо известен в теории современных больших ускорителей и является основой их работы. Это знаменитая автофазировка Векслера — Мак-Миллана. В нашем случае q изменяется вследствие рассеяния случайно и резонанс «диффундирует» по p . В результате за достаточно большое время $\Delta p \approx \Delta \bar{p} \approx -\Delta q$ и скорость диффузии резонансных частиц

$$D_p^{(r)} = \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{N} \approx \frac{\langle (\Delta q)^2 \rangle}{N} = \frac{1}{\tau}. \quad (4.3)$$

Но частица не остается все время внутри резонанса (внутри его сепаратрисы), а под действием рассеяния будет время от времени выходить из резонанса и, наоборот, захватываться в резонанс. Вернемся теперь к отображению (2.11), которое имеет однородную систему резонансов (3.3). В силу эргодичности движения, которая обеспечивается случайным процессом рассеяния, доля времени ε_N , проводимая частицей внутри резонанса, равна доле площади ε_F фазовой плоскости системы (2.11), ограниченной сепаратрисами резонансов. На языке теории вероятностей это утверждение носит название закона больших чисел. Так как расстояние между резонансами по p равно 2π (3.3), то из (4.1) находим

$$\varepsilon_N = \varepsilon_F = \frac{16\sqrt{K}}{(2\pi)^2} = \frac{4\sqrt{K}}{\pi^2}. \quad (4.4)$$

С учетом (4.3) получаем для средней скорости диффузии

$$\langle D_p^{(r)} \rangle = D_p^{(r)} \varepsilon_F = \frac{4\sqrt{K}}{\pi^2} \frac{1}{\tau}. \quad (4.5)$$

Если изобразить орбиты резонансных частиц (рис. 2) в полярных координатах p, ψ , т. е. свернуть ось ψ на рис. 2 в кольцо, то орбиты станут

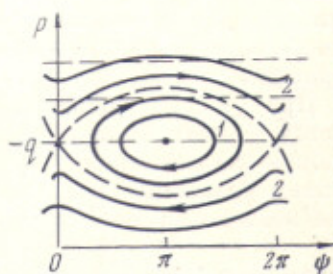


Рис. 2. Орбиты частиц в режиме будкеровской диффузии (разделы 4, 5): 1 — резонансные частицы; 2 — нерезонансные частицы; пунктирные кривые — сепаратриса резонанса (4.1); пунктирные прямые — средний импульс частицы \bar{p} на орбите

похожи (при известном воображении) на бананы. Отсюда другое название рассмотренного режима диффузии — «банановый» — очень популярное в неоклассической теории.

5. Будкеровская диффузия: нерезонансные частицы

Нерезонансными (или пролетными) будем называть частицы, орбиты которых лежат вне сепаратрисы резонанса (рис. 2). Движение таких частиц соответствует вращению «маятника» (4.2). Хотя колебания импульса p для резонансных и нерезонансных частиц вблизи сепаратрисы одного порядка, механизм диффузии у них разный, в частности для нерезонансных частиц $\Delta\bar{p} \neq -\Delta q$.

При $q = \text{const}$ движение системы (4.2) (маятник) полностью описывается в эллиптических функциях. В дальнейшем нам потребуются следующие соотношения, которые получаются непосредственным интегрированием уравнений движения (3.2) при $1/\tau = 0$ (см., например, [13]). Введем новый импульс

$$P = p + q. \quad (5.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{P} = \omega &= \frac{\pi \sqrt{K}}{kF(k)}; & k^2 &= \frac{2K}{H}, \\ I &= \frac{4\sqrt{K}}{\pi} \frac{E(k)}{k}; & \bar{P}^2 = \omega I &= 4K \frac{E(k)}{F(k)k^2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{d\omega}{dH} = \frac{\pi}{4\sqrt{K}} \frac{kE(k)}{(1-k^2)F^2(k)}, \quad \frac{dI}{dk} = -\frac{4\sqrt{K}}{\pi} \frac{F(k)}{k^2}$$

где $F(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; k — их аргумент; ω — основная частота движения, равная среднему импульсу \bar{P} или средней скорости вращения «маятника»; I — действие (адиабатический инвариант).

В отсутствие рассеяния величины H , I , $\omega = \text{const}$. Рассеяние вызывает изменение q на $\Delta q = \xi/\sqrt{\tau}$ (на одну итерацию, см. (2.11)), что приводит в свою очередь к дополнительному изменению импульса на величину $\Delta P = \Delta q$, а значит, и к изменению энергии (4.2) и частоты:

$$\Delta H \approx P(\Delta P)_{\xi} = P\Delta q; \quad \Delta \bar{P} = \frac{d\omega}{dH} P(\Delta q). \quad (5.3)$$

Изменение среднего значения старого импульса p , которое нас как раз и интересует, равно (5.1):

$$\Delta \bar{p} = \Delta \bar{P} - \Delta q = \Delta q \left(P \frac{d\omega}{dH} - 1 \right). \quad (5.4)$$

Так как за достаточно большое время $\Delta p \approx \Delta \bar{p}$, то усредненная по периоду невозмущенного (без рассеяния) движения скорость диффузии

$$\begin{aligned} \bar{D}_p &= \overline{(\Delta \bar{p})^2} = \overline{(\Delta q)^2} \left(P \frac{d\omega}{dH} - 1 \right)^2 = \frac{1}{\tau} \left[1 + \omega \frac{d\omega}{dH} \left(I \frac{d\omega}{dH} - 2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\tau} \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{E(k)}{F^2(k)} \left(\frac{E^2(k)}{F^2(k)} - 2 \right) \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $F^2 = 1 - k^2 = 1 - 2K/H$. В последнем выражении использованы соотношения (5.2), и мы заменили P его невозмущенным значением (без рассеяния), так как влияние последнего мало при $S \gg 1$.

Коэффициент диффузии \bar{D}_p зависит от величины k , которая характеризует расстройку от резонанса (5.2). При $k \ll 1$, т. е. вдали от резонанса,

скорость диффузии быстро падает:

$$\bar{D}_p \rightarrow \frac{k^4}{32\tau} = \frac{K^2}{8H^2\tau}. \quad (5.6)$$

Однако вблизи сепаратрисы $k \rightarrow 1$, $l \rightarrow 0$ коэффициент диффузии резко возрастает:

$$\bar{D}_p \rightarrow \frac{\pi^2}{4\tau l^4 \left(\ln \frac{4}{l}\right)^5}; \quad l^2 = 1 - k^2 \approx \frac{H}{2K} - 1. \quad (5.7)$$

Минимальное значение $l = l_1$ определяется рассеянием на периоде движения $2\pi/\omega$. Грубая оценка l_1 может быть получена следующим образом. Из (5.3) и (5.7) $\Delta l^2 \approx \Delta q P / 2K$ (на одну итерацию). Отсюда

$$l_1^4 \sim \frac{2\pi}{(\Delta l^2)^2 \omega} = \frac{\langle (\Delta q)^2 \rangle}{2} \frac{I}{K^2} \approx \frac{2}{S} \ll 1. \quad (5.8)$$

Скорость диффузии (5.5) зависит от k или от $I(k)$ (5.2), т. е. от начальных условий движения. Изменение импульса p за достаточно большое время будет определяться в силу эргодичности движения средним значением этой скорости по фазовой плоскости однородной модели (2.11) (ср. раздел 4). Элемент фазовой площади можно записать в виде $2\pi I$. Так как скорость диффузии быстро падает с удалением от резонанса, то интегрирование по I можно распространить до бесконечности, но отнормировать его на систему резонансов (3.3), т. е. на половину площади между соседними резонансами ($2\pi^2$). В результате получаем среднюю скорость диффузии нерезонансных частиц в виде

$$D_p^{(n)} = \langle \bar{D}_p \rangle = \int_{I_1}^{\infty} \bar{D}_p \frac{2\pi dI}{2\pi^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \bar{D}_p(k) \frac{dI}{dk} dk = \langle D \rangle_p^{(r)} R(k_1), \quad (5.9)$$

где $\langle D \rangle_p^{(r)}$ — средняя скорость диффузии резонансных частиц (4.5), а $k_1^2 = 1 - l_1^2$ (5.8); $I_1 = I(k_1)$. Интеграл

$$R(k_1) = \int_0^{k_1} \frac{dk F(k)}{k^2} \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{E(k)}{F^3(k)} \left(\frac{E^2(k)}{F^2(k)} - 2 \right) \right] \quad (5.10)$$

определяет относительную добавку к средней скорости будкеровской диффузии за счет нерезонансных частиц:

$$D_p^{(B)} = \langle D_p^{(r)} \rangle (1+R) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\sqrt{K}}{\tau} (1+R). \quad (5.11)$$

Зависимость R от k_1 приведена в таблице. Значения S в последней строке таблицы даны по оценке (5.8). Видно, что до $S \sim 100$ поправка R мала и диффузией нерезонансных частиц можно пренебречь.

Однако при очень больших $S \gg 10^3$ диффузия частиц вблизи сепаратрисы резонанса становится определяющей ($R \gg 1$). Скорость диффузии в этой области можно оценить, используя приближение (5.7):

$$R \approx \frac{\pi^2}{4} \int_{l_1}^1 \frac{dl}{l^3 \left(\ln \frac{4}{l}\right)^4} \approx \frac{\pi^2}{8l_1^2 \left(\ln \frac{4}{l_1}\right)^4} \sim \frac{16\pi^2 \sqrt{2S}}{[\ln(128S)]^4}. \quad (5.12)$$

Точное значение верхнего предела здесь несущественно, так как интеграл определяется областью $l \sim l_1$. Последняя оценка в (5.12) написана согласно (5.8), ее значения также приведены в таблице. Видно, что простая оценка (5.12) может быть использована при $S \gg 1000$.

Для применимости (5.12) необходимо также, чтобы ширина стохастического слоя вокруг сепаратрисы резонанса была бы меньше l_1 , т. е. чтобы параметр K был бы достаточно мал (см. [12]).

Таким образом, при очень больших S будкеровская диффузия определяется в основном областью вблизи сепаратрисы, причем скорость диффу-

Поправка на диффузию перезонансных частиц
в будкеровском режиме

k_1	$R(5.10)$	$R(5.12)$	S
0,5	$2,55 \cdot 10^{-3}$	—	3,6
0,6	$5,03 \cdot 10^{-3}$	—	4,9
0,7	$9,70 \cdot 10^{-3}$	—	7,7
0,8	$1,97 \cdot 10^{-2}$	0,26	15
0,9	$5,06 \cdot 10^{-2}$	0,27	55
0,91	$5,73 \cdot 10^{-2}$	0,27	68
0,92	$6,56 \cdot 10^{-2}$	0,28	85
0,93	$7,62 \cdot 10^{-2}$	0,28	110
0,94	$9,00 \cdot 10^{-2}$	0,29	150
0,95	0,109	0,30	210
0,96	0,136	0,31	330
0,97	0,179	0,34	570
0,98	0,256	0,38	1300
0,99	0,450	0,50	5100
0,999	2,21	1,51	$5 \cdot 10^5$

зии уменьшается с ростом τ значительно медленнее, чем для резонансных частиц ($D_p^{(B)} \sim 1/\sqrt{\tau}$). Похожий режим диффузии в тороидальном стеллараторе был исследован Галеевым, Сагдеевым, Фюртом и Розенблютом [12].

6. Режим Галеева — Сагдеева ($S \ll 1$)

Скорость будкеровской диффузии (4.5) растет с уменьшением τ и при $S \sim 1$ достигает предельного значения (2.7). Что произойдет дальше, в области $S \ll 1$? В неоклассической теории диффузии частиц в замкнутых магнитных ловушках эта область была впервые исследована теоретически Галеевым и Сагдеевым [11], которые обнаружили, что скорость диффузии в этой области не зависит от частоты столкновений. Отсюда название — режим плато, принятое в неоклассической теории для этой области.

Для открытых систем аналогичный результат получен Рютовым и Ступаковым [7]. Из их оценок вытекает также, что скорость диффузии в этом режиме действительно достигает предельной.

С точки зрения движения отдельных частиц механизм диффузии в режиме Галеева — Сагдеева является весьма любопытным. Действительно, с одной стороны, из уравнений движения (2.11) следует, что предельная скорость диффузии соответствует случайным и независимым значениям фазы ψ . С другой стороны, последовательные значения ψ явно коррелированы, так как случайное изменение ψ за одну итерацию (2.11) вследствие рассеяния $\sim 1/\sqrt{\tau} \ll 1$ в рассматриваемом случае $\tau \gg 1$ (3.1).

Для выяснения механизма предельной скорости диффузии в режиме Галеева — Сагдеева рассмотрим фазовые корреляции однородной модели (2.11). Введем коэффициенты корреляции:

$$\rho_h^-(p) = \overline{\cos(\psi_{n+k} - \psi_n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(\psi_{n+k} - \psi_n),$$

$$\rho_h^+(p) = \overline{\cos(\psi_{n+k} + \psi_n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(\psi_{n+k} + \psi_n), \quad (6.1)$$

где ψ_n — значение ψ после n итераций. Для невозмущенной системы

$$\dot{p} = p; \quad \dot{\psi} = \psi + p \quad (6.2)$$

и $p = \text{const}$; $\psi_n = \psi_0 + np$, полагая $q = 0$. В этом случае коэффициент корреляции

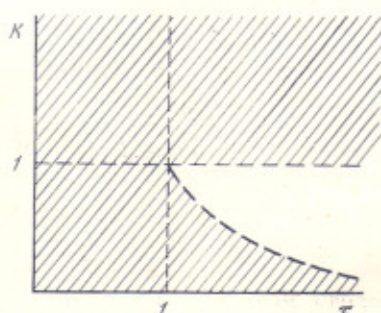
$$\rho_k^-(p) = \cos kp \quad (6.3)$$

естественно не обращается, вообще говоря, в нуль, но является периодической функцией p . Однако нас интересует в первую очередь средняя (по начальным условиям) скорость диффузии (разделы 4, 5), которая определяется средними значениями коэффициентов корреляции:

$$\langle \rho_k^- \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos kp \, dp = 0, \quad k \neq 0; \quad \langle \rho_k^+ \rangle = 0. \quad (6.4)$$

Коэффициент корреляции $\rho_k^+(p)$ зависит от p более сложным образом, однако его среднее значение $\langle \rho_k^+ \rangle$ также обращается в нуль. Это можно получить почленным интегрированием суммы в (6.1). Таким образом, при усреднении по p , т. е. по начальным условиям движения, фазовые корреляции исчезают.

Рис. 3. Структура резонансной диффузии для однородной модели: $K > 1$ — область стохастической неустойчивости; $K \leq \tau^{-1/2}$ (пунктирная кривая) — область Галева — Сагдеева (режим «плато»); $\tau^{-1/2} \leq K \leq 1$ — будкеровская область («банановый» режим). Заштрихована область предельной диффузии



Это справедливо, однако, только для невозмущенной системы ($K = 1/\tau = 0$). При $K \neq 0$ динамическое возмущение $K \sin \psi$ (2.11) будет изменять p , а следовательно, и ψ . Оценим число итераций, за которое изменение ψ станет

существенным. Изменение $\Delta p_j = K \sum_{i=1}^j \sin \psi_i \leq jK$, а изменение

$$\Delta \psi_n = \sum_{j=1}^n \Delta p_j \sim Kn^2. \quad \text{Следовательно, влиянием динамического возмущения}$$

на фазовые корреляции можно пренебречь в течение $n \leq 1/\sqrt{K}$ итераций. Если бы рассеяние отсутствовало, то по прошествии этого времени динамическое возмущение полностью изменило бы фазовые соотношения невозмущенной системы и равенство (6.4) оказалось бы нарушенным. Однако рассеяние, хотя и медленно ($\tau \gg 1$), но стохастизирует фазу ψ . Более того, при $S = \tau_s/\tau_d \ll 1$ (раздел 3) такое стохастическое возмущение сильнее динамического и его действие можно рассмотреть в первом приближении, положив $K = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_{i=1}^j \frac{\xi_i}{\sqrt{\tau}}; & \psi_m - \psi_0 &= \sum_{j=1}^m q_j = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j \xi_i = \\ & & &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{i=1}^m (m+1-i) \xi_i. \end{aligned}$$

Откуда

$$\langle (\psi_m - \psi_0)^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m (m+1-i)^2 \approx \frac{m^3}{3\tau}. \quad (6.5)$$

Стохастизация фазы наступает, следовательно, через $m \sim \tau^{1/3}$ итераций. При $S \ll 1$ время стохастизации фазы m много меньше времени влияния динамического возмущения n , оцененного выше; $m/n \sim \sqrt{K} \tau^{1/3} = S^{1/3} \ll 1$. Иначе говоря, стохастизация фазы ψ наступает в режиме Галеева — Сагдеева значительно раньше, чем успевает проявиться динамическое возмущение. Но после стохастизации фазовые корреляции, естественно, отсутствуют. Поэтому соотношения (6.4) справедливы в этом режиме для любого $k \neq 0$, т. е. в среднем по p фазовые корреляции всегда равны нулю и скорость диффузии оказывается предельной:

$$D_p^{(rc)} = \frac{K^2}{2}. \quad (6.6)$$

Формально это получится следующим образом:

$$\begin{aligned} D_p &= \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{N} = \frac{1}{N} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N K \sin \psi_i \right)^2 \right\rangle = \frac{K^2}{N} \sum_{i,j} \langle \sin \psi_i \sin \psi_j \rangle = \\ &= \frac{K^2}{2N} \sum_{i,j} \langle (\cos(\psi_i - \psi_j) - \cos(\psi_i + \psi_j)) \rangle = \\ &= \frac{K^2}{2} \sum_k \langle (\rho_k^- - \rho_k^+) \rangle \rightarrow \frac{K^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

При усреднении по p все коэффициенты корреляции обращаются в нуль (6.4), кроме $\rho_0^- = 1$.

7. Промежуточная область ($S \sim 1$)

В промежуточной области $S \sim 1$ не удается получить аналитическое выражение для скорости диффузии. Однако простейшая интерполяция двух предельных случаев (5.11) ($R \ll 1$) и (6.6)

$$D_p = \frac{K^2/2}{1 + \frac{\pi^2}{8} \tau K^{3/2}}; \quad \frac{1}{D_p} = \frac{1}{D_p^{(B)}} + \frac{1}{D_p^{(rc)}}, \quad (7.1)$$

принятая в [8], хорошо согласуется с результатами численного счета; среднее отношение численных значений D_p к значениям (7.1) в интервале $0,0075 < S < 316$ составляет 1,05 [8]. Обследованные численно значения S недостаточно велики, чтобы проявился «сепаратрисный» режим диффузии (5.12), так что этот вопрос остается пока открытым.

Приведенные выше оценки получены в приближении одного резонанса (раздел 3): $K \ll 1$; $\tau \gg 1$. Как было объяснено в начале раздела 3, при $\tau < 1$ и (или) $K > 1$ скорость диффузии является предельной. Поэтому в режиме Галеева — Сагдеева ограничения $K \ll 1$, $\tau \gg 1$ отпадают⁴. Однако для будкеровской диффузии условие $K \ll 1$ существенно, в противном случае скорость диффузии возрастет до предельной, хотя конкретный закон этого перехода еще не исследован. Схематически структура резонансной диффу-

⁴ При этом, однако, плазма по-прежнему предполагается достаточно разреженной ($v_e t_d \ll 1$, см. раздел 2), что совместимо с $\tau \ll 1$ при $|\partial(\Delta\varphi)/\partial\theta| \gg 1$ (2.10).

зии на плоскости параметров K , τ однородной модели изображена на рис. 3.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Д. Д. Рютову и Г. В. Ступакову за полезные обсуждения.

Институт ядерной физики
СО АН СССР
г. Новосибирск

Поступила в редакцию
10 августа 1978 г.

Литература

1. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков. УФН, 105, 3, 1971.
2. Б. В. Чириков. Физика плазмы, 4, 521, 1978.
3. Г. И. Димов, В. В. Закайдаков, М. Е. Кишиневский. Физика плазмы, 2, 597, 1976.
4. Т. К. Fowler, B. G. Logan. Comments Plasma Phys. and Controlled Fus., 2, 167, 1977.
5. Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков. Письма в ЖЭТФ, 26, 186, 1977.
6. Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков. Физика плазмы, 4, 501, 1978.
7. Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков. ДАН СССР, 240, 1086, 1978.
8. М. Е. Кишиневский, П. Б. Лысянский, Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков, Б. М. Фомель, Б. В. Чириков, Г. И. Шульженко. VII Междунар. конф. по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Инсбрук, 1978.
9. Г. И. Будкер. Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном магнитном термоядерном реакторе. В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Изд-во АН СССР, М., 1958, т. 1, стр. 73.
10. D. Pfirsch, A. Schlüter. Report of the Max-Planck-Institute. München, MPI/PA/7/62, 1962.
11. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев. ЖЭТФ, 53, 348, 1967. Неоклассическая теория диффузии. В сб.: Вопросы теории плазмы. М., Атомиздат, 1973, в. 7, стр. 205.
12. А. А. Galeev, R. Z. Sagdeev, H. P. Furth, M. N. Rosenbluth. Phys. Rev. Lett., 22, 544, 1969.
13. Б. В. Чириков. Нелинейный резонанс. Новосибирск. гос. ун-т, 1977; Взаимодействие нелинейных резонансов. Там же, 1978.