

IX  
МЕЖДУНАРОДНАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО НЕЛИНЕЙНЫМ  
КОЛЕБАНИЯМ



ТОМ  
2

КАЧЕСТВЕННЫЕ  
МЕТОДЫ  
ТЕОРИИ  
НЕЛИНЕЙНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

ACADEMY OF SCIENCES OF THE UKRAINIAN SSR  
INSTITUTE OF MATHEMATICS  
NATIONAL COMMITTEE OF THE USSR ON THEORETICAL  
AND APPLIED MECHANICS

IX  
МЕЖДУНАРОДНАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО НЕЛИНЕЙНЫМ  
КОЛЕБАНИЯМ

ТОМ  
2

КАЧЕСТВЕННЫЕ  
МЕТОДЫ  
ТЕОРИИ  
НЕЛИНЕЙНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ

Под редакцией Ю. А. Митропольского

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1984

THE 9TH  
INTERNATIONAL  
CONFERENCE  
ON NONLINEAR  
OSCILLATIONS

VOLUME

2

QUALITATIVE  
METHODS  
OF THE THEORY  
OF NONLINEAR  
OSCILLATIONS

Edited by *Yu. A. Mitropolsky*

KIEV NAUKOVA DUMKA 1984

УДК 517.9

**IX Международная конференция по нелинейным колебаниям:** В 3-х т./ Под ред. Ю. А. Митропольского.— Киев: Наук. думка, 1984.— Т. 2. 488 с.

В сборнике, состоящем из трех томов, помещены доклады советских и зарубежных специалистов в области теории нелинейных колебаний и теории нелинейных дифференциальных уравнений, представленные на IX Международную конференцию по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа — 6 сентября 1981 г.).

Во второй том включены доклады, посвященные общей теории динамических систем, в особенности теории бифуркаций, изучению периодических, почти периодических, асимптотически периодических и других типов нелинейных колебаний в дифференциальных, дифференциально-функциональных, интегродифференциальных уравнениях, исследованию стохастического поведения в детерминированных системах. Приведены также доклады по теории устойчивости, относящиеся как к традиционным проблемам, так и к новым направлениям.

Для математиков и специалистов, использующих теорию нелинейных колебаний.

Библиогр. в конце статей.

Редакционная коллегия

*А. Н. Шарковский* (ответственный редактор тома), *А. А. Бerezовский*, *В. С. Королюк*, *В. Б. Ларин*, *И. А. Луковский*,  
*О. Б. Лыкова*

Редакция информационной литературы

## ПРЕДИСЛОВИЕ

С 30 августа по 6 сентября 1981 г. в Киеве состоялась IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Конференция была организована Академией наук УССР при содействии Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, а также при участии Академии наук СССР, Академии наук ГДР, Польской и Чехословацкой академий наук. Подготовку и проведение этой конференции осуществлял Институт математики АН УССР.

Научная программа конференции, а также круг приглашенных ученых были определены Международным научным комитетом в следующем составе: Н. Н. Боголюбов (председатель, СССР), Ю. А. Митропольский (зам. председателя, СССР), С. Дядьков (ЧССР), С. Земба (ПНР), М. Картрайт (Великобритания), Г. Кноблох (ФРГ), Р. Конти (Италия), С. Крэдалл (США), Ж. Мавин (Бельгия), Ч. Хаяши (Япония), Дж. Хейл (США), Г. Шмидт (ГДР).

С целью организации конференции Президиумом АН УССР был утвержден Национальный организационный комитет конференции из представителей научных школ по нелинейным колебаниям: председатель Оргкомитета акад. АН УССР Ю. А. Митропольский, заместители председателя акад. АН УССР В. С. Королюк, д-р физ-мат. наук, проф. И. А. Луковский, чл.-кор. АН УССР А. Н. Шарковский.

В работе конференции приняли участие 565 делегатов из 30 стран мира: Австралии — 1, Австрии — 1, Бельгии — 4, Венесуэлы — 1, Венгрии — 2, ГДР — 10, Голландии — 3, Греции — 1, Западного Берлина — 1, Индии — 1, Ирана — 2, Иордании — 1, Испании — 3, Италии — 3, Канады — 2, Китая — 2, Нигерии — 1, Болгарии — 10, Перу — 1, Польши — 27, Румынии — 1, Вьетнама — 1, СССР — 412, США — 15, Югославии — 5, Франции — 19, ФРГ — 5, Чехословакии — 14, Швейцарии — 2, Японии — 14. Из 412 советских делегатов в работе конференции приняли участие представители научных учреждений, высших учебных заведений, конструкторских бюро и заводов из различных городов Советского Союза.

Основная цель конференции предусматривала подведение итогов исследований по теории нелинейных колебаний и ее приложений, выяснение перспектив дальнейшего развития этой теории, координации работ и расширения сотрудничества между различными научными центрами.

В соответствии с программой проведения конференции состоялось 2 пленарных заседания и 57 заседаний секций и подсекций. Всего на конференции было заслушано 422 доклада, в том числе пять пленарных и 105 получасовых.

На конференции обсуждались актуальные вопросы теории нелинейных колебаний и ее приложений в различных областях естествознания и техники.

Работа конференции проходила на пленарных заседаниях и в четырех секциях: 1) аналитические методы теории нелинейных колебаний; 2) качественные методы теории нелинейных колебаний; 3) применение теории нелинейных колебаний в механике; 4) применение теории нелинейных колебаний в физике, электронике, электротехнике, биологии.

Труды IX Международной конференции по нелинейным колебаниям объединены в три тома, каждый из которых рассматривает определенный круг вопросов.

В первый том, кроме докладов, прочитанных на первой секции, включены речи на закрытии конференции, а также пленарные доклады: «Развитие метода усреднения» (проф. Ю. А. Митропольский), «Обобщенные периодические системы» (проф. Д. Пшеворска-Ролевич), «Метод отображений в применении к решениям некоторых типов нелинейных дифференциальных уравнений» (проф. Ч. Хаяши, проф. М. Абе, проф. К. Ошима, проф. Х. Каваками), «Негауссовские замкнутые алгоритмы в применении к решениям некоторых типов нелинейных дифференциальных уравнений» (проф. С. Крэдалл).

В первом томе помещены доклады, посвященные традиционным направлениям развития асимптотических методов нелинейной механики (дальнейшей разработке, обоснованию и расширению области приложения асимптотических методов, метода усреднения и метода интегральных многообразий), построению асимптотических разложений, дальнейшему развитию метода усреднения и, в частности, многомерного усреднения, а также доклады, посвященные разработке новых алгоритмов асимптотических методов и их применению к решению задач нелинейной механики.

В первом томе рассмотрены также вопросы приложения асимптотических методов и метода усреднения к дифференциальным уравнениям с частными производными, к дифференциальным уравнениям с квазипериодическими коэффициентами, интегродифференциальным и дифференциально-функциональным уравнениям, к стохастическим дифференциальным уравнениям, к дифференциальным уравнениям в абстрактных функциональных пространствах, к теории краевых задач, а также вопросы развития теории и применений метода интегральных многообразий, теории периодических, квазипериодических и почти-периодических решений, применение методов нелинейной механики к исследованию сингулярно возмущенных систем, исследование колебаний в системах со сложными нелинейностями, разработка линейных методов исследования нелинейных задач и новых аналитических методов, получение точных выражений решений задач нелинейной механики и физики.

Во втором томе содержатся доклады, посвященные общей теории динамических систем и теории бифуркаций различных типов решений; исследованию перехода между детерминированным поведением и стохастичностью; странным аттракторам и их роли в механизмах возникновения стохастических и турбулентных движений динамических систем; некоторым аспектам солитонной тематики.

Во втором томе рассмотрены также вопросы теории устойчивости, относящиеся как к традиционным проблемам (второй метод Ляпунова; построение бифуркационных диаграмм для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка; характеристические показатели Ляпунова; метод интегральных неравенств), так и к новым направлениям (матричные методы решения задач устойчивости параметрических и нелинейных систем; обобщенный матричный критерий устойчивости Эрмита — Раусса — Гурвица).

Кроме того, во второй том включены доклады, посвященные разработке методов качественного исследования дифференциально-функциональных уравнений, описывающих колебания в системах с последствием; установлению признаков существования и изучению асимптотического поведения различных видов колебаний (периодических, почти-периодических, быстро и медленно осциллирующих, релаксационных).

Третий том содержит доклады, освещающие применение теории нелинейных колебаний в механике, физике, электронике, электротехнике, биологии. В этот том вошли доклады, посвященные развитию теории колебаний нелинейных систем при учете свойств источника энергии, исследованию нелинейных колебаний в динамике спутников, исследованию управления колебаниями механических систем; разработке методов решения нелинейных задач динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью; исследованию гироскопических систем. Рассмотрены вопросы автоматизации построения математических моделей пространственной системы твердых тел, управления такими системами с приложением к проблеме создания роботов и манипуляторов.

Кроме того, в третьем томе рассмотрены вопросы дальнейшего развития асимптотических и численно-аналитических методов решения нелинейных задач теории колебаний для сис-

тем с сосредоточенными и распределенными параметрами, актуальные для современной инженерной практики (электротехники, электроники, радиофизики); нелинейные колебания в математической экологии, автоволновые механизмы внутриклеточной подвижности и другие биологические процессы; а также методы анализа систем с автостохастическим поведением и их приложения в радиофизике, биологии, химии, механике и электромеханике.

Доклады опубликованы на языке, на котором они были представлены конференции.

Труды IX Международной конференции по нелинейным колебаниям являются ценным вкладом в современную литературу по теории нелинейных колебаний и ее приложениям, а также по смежным областям математики и механики.



## PREFACE

The Ninth International Conference on Nonlinear Oscillations was held in Kiev from August 30 to September 6, 1981.

The Conference was organized by the Ukrainian Academy of Sciences with assistance of the USSR National Committee on the theoretical and applied mechanics and in cooperation with the GDR Academy of Sciences, the Polish Academy of Sciences and the ČSSR Academy of Sciences.

The Institute of Mathematics of the Ukrainian SSR Academy of Sciences was chiefly entrusted with the organizational aspects of the conference.

The scientific programme of the Conference as well as the list of invited scientists were determined by the International Scientific Committee in such a body: N. N. Bogoliubov (Chairman, USSR), Yu. A. Mitropolsky (Vice-Chairman, USSR), S. Djād'kov (ČSSR), S. Ziemba (PNR), M. L. Cartwright (Great Britain), H. W. Knobloch (BRD), R. Conti (Italia), St. H. Crandall (USA), J. Mawhin (Belgique), Ch. Hayashi (Japan), J. K. Hale (USA), G. Schmidt (DDR).

On purpose to organize the conference the Presidium of the Ukr. SSR Academy of Sciences confirmed the National Organizing Committee of the conference consisting of representatives of scientific schools: chairman of the Organizing Committee Academician of the Ukr. SSR Academy of Sciences Yu. A. Mitropolsky, Vice-chairmans Academician of the Ukr. SSR Academy of Sciences V. S. Koroljuk, Dr. of phys.-math. sciences, professor I. A. Lukovsky, corresponding member of the Ukr. SSR Academy of Sciences A. N. Sharkovsky.

565 delegates from 30 countries: Austria — 1, Australia — 1, Belgium — 4, Bulgaria — 10, Venezuela — 1, Hungary — 2, Vietnam — 1, DDR — 10, Holland — 5, Greece — 1, West Berlin — 1, India — 1, Jordan — 1, Iran — 2, Spain — 3, Italy — 3, Canada — 2, China — 2, Nigeria — 1, Peru — 1, Romania — 1, Soviet Union — 412, USA — 15, France — 19, BRD — 5, ČSSR — 14, Switzerland — 2, Yugoslavia — 5, Japan — 14 took part in the work of the conference. 412 Soviet delegates, participating in the work of the Conference represented scientific institutions, higher educational establishments, design offices and plants from different cities of the Soviet Union.

The main purpose of the conference was to review the recent progress in oscillation theory and its applications and to outline the prospects in its further achievements; then to coordinate and direct research in this field and to extend cooperation between various scientific institutions.

According to the programme of the conference two plenary meetings and 57 Section and Subsection Meetings took place.

All together 422 talks were delivered at the Conference including 5 plenary and 105 half-an-hour ones.

The conference focused on central problems in the theory of nonlinear oscillations and its applications to different fields of science and engineering.

The work of the conference proceeded in plenary meetings and in four sections:

1. Analytic Methods of the Theory of Nonlinear Oscillations.
2. Qualitative Methods of the Theory of Nonlinear Oscillations.
3. Application of the Theory of Nonlinear Oscillations to Mechanics.
4. Application of the Theory of Nonlinear Oscillations to Electroengineering, Electronics and Biology.

All papers submitted at the 9th International conference on nonlinear oscillations are included in the Proceedings of the conference issued in 3 volumes. Each volume deals with a certain number of problems.

The first volume along with the papers presented at the first section, contains greetings to the IX International conference, speeches delivered at the Closing Session and plenary talks: «The development of averaging method» (prof. Yu. A. Mitropolsky), «Generalized periodic systems» (prof. Przeworska-Rolewicz D.), «The method of mapping as applied to the solution for certain types of nonlinear differential equations» (prof. Hayashi Ch., prof. Oshima K., prof. Kawakami H.), «Non-Gaussian closure techniques for stationary random vibration» (prof. Crandall St. H.).

The first volume contains the papers devoted to traditional trends in the development of the asymptotic methods of nonlinear mechanics (further elaboration, justifying and broadening the sphere of application of the asymptotic methods, averaging method and method of integral manifolds); to construction of asymptotic expansions; to further elaboration of averaging method including many-dimensional averaging; to further elaboration of new algorithms of asymptotic methods as applied to the solution of problems in nonlinear mechanics.

The first volume includes also the problems concerning the application of asymptotic methods and method of averaging to partial differential equations, to differential equation with quasi-periodic coefficients, to integro-differential and difference functional equations, to stochastic differential equations, to differential equations in abstract functional spaces; to the theory of boundary value problems. A number of papers deals with the development of the theory and application of the method of integral manifolds, of the theory of periodic, of quasiperiodic and almost periodic methods of nonlinear mechanics as applied to investigation of singularly perturbed systems; oscillations in the systems with complicated nonlinearities; of elaboration of linear methods in studying linear problems and of new analytic methods; obtaining exact solutions of problems in nonlinear mechanics and physics.

The second volume contains papers dealing with the problems of: the general theory of dynamical systems and bifurcation theory of various types of solutions; investigation of transition from deterministic behavior to stochastic one; strange attractors and their role in appearance of stochastic and turbulent motion of dynamic systems; some aspects of soliton problems.

The second volume contains also the issues concerning both the traditional problems (Lyapunov's second method; construction of bifurcation diagrams for the second order nonlinear differential equations; Lyapunov's characteristic indexes; method of integral inequalities) and new trends of investigations (matrix methods in the problems of stability of parametric and nonlinear systems; generalized matrix criterion of the Hermite — Routh — Hurwitz stability).

Furthermore the second volume includes the papers devoted to the development of the methods of qualitative analysis of difference — functional equations describing oscillations in systems with the lag; the determination of tests of existence and investigation of asymptotic behavior of various oscillations (periodic, almost periodic, fast and slowly oscillating, relaxational, etc.).

The third volume contains papers dealing with the application of the theory of nonlinear oscillations to mechanics, physics, electronics, electroengineering and biology. In this volume one finds papers devoted to: the development of the theory of oscillations on nonlinear systems where characteristics of sources of energy are taken into account; investigation of nonlinear oscillations in satellite dynamics; investigation of control of mechanical system oscillations; elaboration of methods for the solution of nonlinear problems in dynamics of liquid in restricted volume with the free surface; investigation of gyroscopic systems; studying the problems of automatical construction of mathematical models for space solid systems governing by them and application to the robots and manipulators construction problems.

Furthermore the third volume considers problems which are very urgent for contemporary engineering, electronics and radio — physics. That is: further development of asymptotic and

numerically — analytical methods of solution of nonlinear oscillation problems with finite and infinite number of parameters.

In this volume there are papers dealing with: nonlinear oscillation in mathematical oecology, intrawave mechanisms of intracell activity and other biological processes; methods of analysis of the systems with autostochastic behavior and its application to radiophysics, biology, chemistry, mechanics and electromechanics.

The papers are printed in the language they were presented to the conference.

The Proceedings of the IX-th International Conference on Nonlinear Oscillations are a valuable contribution to the contemporary literature on the theory of nonlinear oscillations and its applications as well as on some closely connected branches of mathematics and mechanics.

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Предисловие . . . . .  | 5  |
| <i>Адрианова Л. Я.</i> Об аппроксимации линейных систем последовательностями периодических . . . . .   | 11 |
| <i>Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.</i> Функционально-дифференциальные уравнения . . . . .  | 13 |
| <i>Амелькин В. В.</i> О колебаниях периодических систем с многомерным временем . . . . .   | 16 |
| <i>Анапольский Л. Ю.</i> О периодических интегральных многообразиях релейных систем с гистерезисом . . . . .   | 18 |
| <i>Анашкин О. В.</i> К задаче об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений . . . . .  | 21 |
| <i>Арансон С. Х., Гринес В. З.</i> Классификация динамических систем на двумерных многообразиях . . . . .  | 23 |
| <i>Аржеми Ж., Россетто Б.</i> Бифуркации периодических решений для сингулярной аппроксимации автономной динамической системы, определенной в $\mathbb{R}^3$ . . . . .  | 25 |
| <i>Арино О., Анебали Э.-а.</i> Замечания о теореме Мавина-Уиллема . . . . .  | 26 |
| <i>Арино О., Сегье П.</i> Некоторые результаты поведения решений в бесконечности . . . . .   | 29 |
| <i>Аудьбах Б.</i> Обобщение метода Зубова . . . . .  | 31 |
| <i>Афраймович В. С.</i> Принцип кольца и квазиаттракторы . . . . .   | 34 |
| <i>Байнов Д. Д., Захариев А. И., Мышкис А. Д.</i> Осцилляционные и асимптотические свойства решений одного класса операторно-дифференциальных неравенств . . . . .     | 36 |
| <i>Байнов Д. Д., Захариев А. И., Мышкис А. Д.</i> Осцилляционные свойства решений одного класса интегродифференциальных уравнений нейтрального типа . . . . .          | 39 |
| <i>Бастен А., Дельшамбр М.</i> Определяющие кривые уравнения Ван дер Поля третьего порядка с запаздыванием: численные результаты . . . . .                             | 40 |
| <i>Баутин А. Н.</i> О методе малого параметра (модификация с введением второго малого параметра и применение к новому кругу задач) . . . . .                           | 42 |
| <i>Белых В. Н.</i> О качественных структурах и бифуркациях некоторых конкретных динамических систем . . . . .  | 45 |
| <i>Белюстина Л. Н.</i> Периодические решения некоторых нелинейных неавтономных систем второго порядка . . . . .  | 48 |
| <i>Беляков Л. А.</i> О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса . . . . .  | 53 |
| <i>Бибииков Ю. Н., Белькович А. А.</i> Квазипериодические решения систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым параметром . . . . .                     | 55 |
| <i>Бигун Я. И., Бортей М. С., Черевко И. М.</i> Исследование некоторых классов систем с запаздыванием методом интегральных многообразий и методом усреднения . . . . . | 59 |
| <i>Бойчук А. А.</i> Функции Ляпунова для линейных периодических систем . . . . .   | 61 |
| <i>Бондарчук В. С.</i> Периодическая задача вариационного исчисления и деформации гамильтоновых систем . . . . .   | 65 |
| <i>Бронштейн И. У.</i> Трансверсальность влечет структурную устойчивость . . . . .   | 67 |
| <i>Быков В. В.</i> О нетривиальных бифуркационных множествах многомерных динамических систем . . . . .   | 69 |
| <i>Васильев С. Н.</i> Вывод и обращение теорем об универсальных динамических свойствах с вектор-функциями Ляпунова . . . . .   | 71 |
| <i>Ведь Ю. А.</i> Критерий существования решений с ненулевыми пределами дифференциальных систем с последствием на полуоси . . . . .                                    | 73 |
| <i>Верхалст Ф.</i> Нормализация и интегрируемость гамильтоновых систем . . . . .   | 76 |

|  |     |
|--|-----|
| Вивальди Ф., Форд Дж., Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Модуляционная диффузия в нелинейных колебательных системах   | 80  |
| Гаврилов Н. К. О бифуркациях состояний равновесия коразмерности два  | 84  |
| Гайден У., Вальтер Г. О. Хаос в дифференциальных уравнениях с запаздыванием  | 88  |
| Гонченко С. В. О бифуркациях удвоения в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой   | 91  |
| Громова П. С. Об устойчивости в целом систем с запаздыванием   | 93  |
| Грючи Л. Т. Об асимптотической устойчивости многомерных сингулярно возмущенных систем с недифференцируемыми нелинейностями   | 95  |
| Гумовски И. Некоторые соотношения между дифференциальными уравнениями, точечными отображениями и функциональными итерациями  | 98  |
| Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И. О синхронизмах квазигамильтоновых систем  | 103 |
| Гутовски Р. Исследование уравнения нелинейных колебаний струны методом интегральных неравенств   | 105 |
| Дахия Р. С. Теоремы об осцилляции решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием  | 111 |
| Дельшамбр М., Бастен А. Исследование решений систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием   | 114 |
| Джая Ч. Некоторые свойства квазистойчивых по Ляпунову движений   | 115 |
| Долов М. В., Косарев В. В. Интегралы Дарбу и предельные циклы  | 117 |
| Домшлак Ю. И. Точные оценки промежутков осцилляции систем, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом  | 119 |
| Драхлин М. Е. Об осцилляционных свойствах уравнений нейтрального типа  | 122 |
| Ефремова Л. С. Периодические точки непрерывного отображения окружности   | 124 |
| Жийо Ч. Последовательности вращения и некоторые свойства топологической энтропии эндоморфизмов отрезка $[0, 1]$  | 126 |
| Задорожний В. Г. Ограниченные решения $V$ -диссипативных дифференциальных уравнений  | 128 |
| Задорожний В. Ф., Одарич О. Н. Почти-периодические колебания оптимальных систем, сохраняющих меру  | 130 |
| Заславский Г. М. Особенности возникновения стохастичности в негамильтоновых системах   | 132 |
| Зевин А. А. Оценка периодических колебаний некоторых нелинейных систем   | 137 |
| Зубов Н. В. Критерии существования и экспоненциальной устойчивости периодических решений в системах с последствием   | 140 |
| Зубова А. Ф. Исследование колебательных систем   | 142 |
| Иванов А. Ф. Периодические решения одного класса дифференциально-разностных уравнений  | 144 |
| Изобов Н. А. Минимальный показатель линейной дифференциальной системы  | 147 |
| Иртегов В. Д., Новиков М. А. Построение функций Ляпунова и нормализация  | 149 |
| Исе А. Ф. Асимптотическое поведение и устойчивость возмущенных нелинейных нейтральных дифференциально-функциональных уравнений   | 152 |
| Искандаров С. Об ограниченности решений интегродифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра   | 156 |
| Иошизова Т. Асимптотические свойства неавтономных систем   | 159 |
| Каваками Х. Бифуркационная модель периодических решений уравнения Дюффинга   | 162 |
| Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом  | 166 |
| Касаль А., Сомолинос А. Приложения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием   | 167 |
| Касати Дж. Затухание корреляций и статистические свойства динамических систем  | 169 |
| Кашченко С. А. Существование и асимптотика периодических решений некоторых уравнений с последствием  | 173 |
| Кириченко Н. Ф. Практическая устойчивость, фильтрация и идентификация в динамических системах  | 175 |
| Клерк Р. Л., Хартман К., Разафимандимби В. Граница области влияния одномерного инвариантного многообразия действительного двумерного эндоморфизма                              | 178 |
| Клерк Р. Л., Хартман К. Исследование субгармонических резонансов дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами методом автономной рекуррентной последовательности | 181 |
| Клоден П. Е. Циклы и хаос в разностных уравнениях высших размерностей  | 184 |
| Козлов Р. И., Матросов В. М. Способы построения и приложения векторных функций Ляпунова  | 187 |
| Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость систем нейтрального типа с произвольным последствием  | 192 |
| Кузнецова И. В. Достаточные условия устойчивости системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, зависящие от свойств запаздывания                              | 196 |
| Куленович М. Р., Грамматикопулос М. К. Сохранение асимптотического поведения нелинейных дифференциальных неравенств под влиянием запаздывания                                  | 199 |
|  | 457 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Кунцевич В. М., Лычак М. М.</i> Некоторые вопросы теории эволюции множеств (асимптотические оценки движения систем, описываемых разностными включениями)           | 202 |
| <i>Куо Ж.</i> Многомерные инвариантные плотности дискретных динамических систем   | 206 |
| <i>Курихара М.</i> Асимптотическое поведение решений линейных дифференциально-функциональных уравнений  | 209 |
| <i>Кусано Т.</i> Осцилляционные теоремы типа сравнения для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами                           | 211 |
| <i>Ладас Г., Ставрулакис И. П.</i> О дифференциальных неравенствах с несколькими отклоняющимися аргументами   | 215 |
| <i>Латинов Х. Р., Косс М. Ш.</i> Об интегральных прямых одного дифференциального уравнения  | 219 |
| <i>Лерман Л. М., Уманский Я. Л.</i> О топологической структуре интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы   | 222 |
| <i>Ле Суан Кан.</i> Исследование квазипериодических колебательных процессов в нелинейных неавтономных системах с запаздыванием при наличии резонанса                  | 224 |
| <i>Лисана Пеня М.</i> Существование почти-периодических и периодических решений сложных систем функционально-дифференциальных уравнений                               | 227 |
| <i>Лихтарников А. Л., Якубович В. А.</i> Абсолютная устойчивость по выходу нелинейных систем с запаздывающим аргументом   | 229 |
| <i>Лось Г. А.</i> Устойчивость по почти первому приближению   | 234 |
| <i>Лукьянов В. И.</i> О периодических возмущениях автономных систем с петлей сепаратрисы седло-узла   | 236 |
| <i>Лункевич В. А.</i> Аффинно-инвариантные интегралы системы с квадратичными нелинейностями в случаях центра  | 238 |
| <i>Мазко А. Г.</i> Обобщение теоремы Ляпунова для нового класса областей комплексной плоскости  | 240 |
| <i>Майстренко Ю. Л.</i> Колеблющиеся решения дифференциально-разностных уравнений, близких к вполне интегрируемым   | 243 |
| <i>Мартынюк А. А., Косолапов В. И.</i> Об устойчивости нелинейных систем с интегрируемым приближением   | 247 |
| <i>Мартынюк Д. И., Данканич В. А.</i> Метод Галеркина построения квазипериодических решений систем с запаздыванием  | 251 |
| <i>Медведев В. С.</i> Об исчезновении замкнутой траектории потоков на многообразиях   | 253 |
| <i>Медведь М.</i> Векторные поля с особенностью коразмерности 3 и их параметрические деформации   | 255 |
| <i>Мельников Г. И.</i> Оценки устойчивости колебаний методом дифференциальных неравенств  | 257 |
| <i>Менько Я. П., Лейфура В. Н.</i> Об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом | 260 |
| <i>Миллиончиков В. М.</i> Бэровские классы функций и показатели Ляпунова  | 262 |
| <i>Милушева С. Д., Байнов Д. Д.</i> Обоснование частично мультипликативного усреднения для одного класса функционально-дифференциальных уравнений с импульсами        | 263 |
| <i>Мира К.</i> Хаотическая динамика при точечных отображениях   | 265 |
| <i>Молчанов А. М.</i> Матричное уравнение Риккати   | 271 |
| <i>Морозов А. Д., Федоров Е. Л. К.</i> исследованию автоколебательных уравнений, близких к нелинейным интегрируемым   | 274 |
| <i>де Моттони П.</i> Бифуркация периодических решений периодических квазилинейных параболических уравнений и систем   | 276 |
| <i>Мэджирос Д. Г.</i> Сепаратрисы динамических систем   | 280 |
| <i>Неймарк Ю. И.</i> Хаотические и стохастические автоколебания   | 288 |
| <i>Нехорошев Н. Н.</i> Факторы, влияющие на устойчивость систем, близких к интегрируемым  | 292 |
| <i>Носов В. Р.</i> Периодические решения автономных квазилинейных систем с последствием произвольного типа  | 294 |
| <i>Оболенский А. Ю., Никитина Н. Б., Вербицкий В. Г.</i> Нелинейные системы сравнения в задачах об устойчивости движения  | 297 |
| <i>Оравски В.</i> Матричное решение задач о многочастотных нелинейных колебаниях  | 300 |
| <i>Осипенко Г. С.</i> О бифуркациях частично гиперболических систем   | 302 |
| <i>Осипов А. В.</i> Тангенциальные поверхности и исключительные направления особой точки автономной системы   | 303 |
| <i>Парасюк И. О.</i> Проводимость и устойчивость по мере гамильтоновых систем   | 304 |
| <i>Пелюх Г. П.</i> Построение общего решения одного класса нелинейных интегрофункциональных уравнений в окрестности особых точек                                      | 307 |
| <i>Перов А. И.</i> Вариационные методы в теории нелинейных колебаний  | 310 |
| <i>Пиллюгин С. Ю.</i> Структура границы притягивающего множества многомерной системы  | 315 |
| <i>Плисс В. А.</i> Интегральные множества систем дифференциальных уравнений   | 318 |
| <i>Пльскин Р. В.</i> Гиперболические аттракторы дифференцируемых динамических систем  | 323 |
| <i>Пустовойтов Н. А.</i> Об анализе устойчивости систем, зависящих от параметров  | 328 |
| <i>Рейзинь Л. Э., Петтерге Г. Я.</i> Распределение типовых чисел  | 330 |

|  |     |
|--|-----|
| Рожков В. И., Королев М. Ф. Периодические и почти периодические решения систем с малой разностью   | 333 |
| Розет И. Г. Исследование интегральных многообразий динамических систем методом секущих поверхностей  | 336 |
| Ролевич С. О достаточных условиях оптимальности  | 338 |
| Романенко Е. Ю. Быстро осциллирующие решения дифференциально-разностных уравнений  | 340 |
| Рубаник В. П. Колебания сложных нелинейных систем, содержащих звенья с распределенными параметрами и звенья с запаздыванием                              | 345 |
| Румянцев В. В. Об устойчивости и колебаниях неавтономных систем  | 347 |
| Самойло К. А., Федосова Т. С., Самойло А. К. Определение областей глобальной устойчивости системы третьего порядка с двумя периодическими нелинейностями | 353 |
| Сасагава Т. О периодических решениях матричных уравнений Риккати   | 355 |
| Сержизель Р. Обобщение индекса Пуанкаре  | 358 |
| Сибирский К. С. Общая цикличность фокусов системы с квадратичными нелинейностями   | 360 |
| Слюсарчук В. Е. Ограниченные решения импульсных систем   | 365 |
| Смирнов Е. Я. О свойствах инвариантного множества системы дифференциальных уравнений, содержащей нелинейности гистерезисного типа                        | 367 |
| Стахи А. М., Щербаков Б. А. Устойчивость инвариантных множеств неавтономных динамических систем  | 369 |
| Стрижак Т. Г. Минимаксный признак устойчивости   | 371 |
| Тареев В. П. О некоторых основных бифуркациях в двумерных комплексных системах   | 373 |
| Терды М., Вейвода О. Периодические решения слабо возмущенных автономных функционально-дифференциальных уравнений   | 375 |
| Тибо Р. Влияние разрывов производных в разностных уравнениях второго порядка   | 379 |
| Токарев С. П. Гладкая эквивалентность некоторых систем дифференциальных уравнений  | 383 |
| Тонков Е. Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости почти периодической системы  | 385 |
| Федоренко В. В. Гладкость отображений с замкнутым множеством периодических точек   | 387 |
| Фельштын А. Л. Неравенства Морса для систем Морса — Смейла   | 389 |
| Фещенко Т. С. Представление общего решения начальной задачи для одного класса дифференциально-функциональных уравнений с сингулярностью                  | 391 |
| Харитонов В. Л. Метод матричных уравнений при анализе локальных колебаний  | 394 |
| Хибник А. И. О вычислительных алгоритмах исследования нелинейных колебаний   | 396 |
| Хино И. Тотальная устойчивость и равномерная асимптотическая устойчивость в случае уравнений с запаздыванием   | 398 |
| Хираи К., Ушио Т., Иваи М. Катастрофа и хаос в нелинейных системах с дискретным временем   | 400 |
| Хсу К. С. Применение отображений «клетка в клетку» для глобального исследования нелинейных систем  | 404 |
| Хусаинов Д. Я. Об исследовании устойчивости решений дифференциально-функциональных уравнений методом функций Ляпунова                                    | 413 |
| Чантурия Т. А. О колеблемости решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом  | 415 |
| Черкас Л. А. Бифуркация предельных циклов аналитических автономных систем на плоскости   | 417 |
| Чернышев В. Е. Рождение замкнутой траектории из восьмерки траекторий, двоякоасимптотических к состоянию равновесия типа седло                            | 420 |
| Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса                                    | 421 |
| Чурип Ю. В. Исчезновение периодических решений квазиоднородных систем  | 425 |
| Шарипов Ш. Р. К качественной теории обобщенно-однородной динамической системы  | 427 |
| Шарковский А. Н. Колебания типа релаксационных и турбулентных: дифференциально-разностные модели   | 430 |
| Шевело В. Н., Варех Н. В. Некоторые результаты исследования осцилляции систем, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом      | 435 |
| Шильников Л. П. Теория бифуркаций и странные аттракторы  | 437 |
| Шленк В. Абсолютно непрерывные меры, инвариантные относительно рациональных преобразований сферы $S^2$   | 442 |
| Шнайдер К. П. Возмущенные центральные подмногообразия и применение к бифуркации Хопфа  | 450 |

## CONTENTS

|  |    |
|--|----|
| <i>Preface</i> .....   | 8  |
| <i>Adrianova L. Ya.</i> On the approximation of linear systems by sequences of periodic systems  | 11 |
| <i>Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F.</i> Differential — functional equations  | 13 |
| <i>Amelkin V. V.</i> On oscillations of periodic systems with multidimensional time  | 16 |
| <i>Anapolsky L. Yu.</i> On the periodic integral manifolds of the relay systems with hysteresis  | 18 |
| <i>Anashkin O. V.</i> On the problem for solution stability in systems of differential equations   | 21 |
| <i>Aranson S. Kh., Grines V. Z.</i> Classification of dynamic systems on two-dimensional manifolds   | 23 |
| <i>Argemi J., Rossetto B.</i> Bifurcations of periodic solutions for a singular approximation of an autonomous dynamic systems defined in $R^3$                          | 25 |
| <i>Arino O., E. Hanebaly.</i> Remarque sur le théorème de Mawhin-Willem  | 26 |
| <i>Arino O., Seguer P.</i> Some results on the solutions behaviour at the infinity   | 29 |
| <i>Aulbach B.</i> Extensions of Zubov's Method   | 31 |
| <i>Afraimovich V. S.</i> The ring principle and quasi-attractors   | 34 |
| <i>Bainov D. D., Zakhariev A. I., Myshkis A. D.</i> Oscillation and asymptotic properties of solutions of a class of operator-differential inequalities                  | 36 |
| <i>Bainov D. D., Zakhariev A. I., Myshkis A. D.</i> Oscillation properties of solutions of a class of integro-differential equations of neutral type                     | 39 |
| <i>Bastin H., Delchambre M.</i> Response curves of the third order Van der Pol equation with delay: numerical results  | 40 |
| <i>Bautin A. N.</i> On the small parameter method (modification with additional small parameter and application to the new type of problems)                             | 42 |
| <i>Belykh V. N.</i> On qualitative structures and bifurcations of some concrete dynamic systems  | 45 |
| <i>Belyustina L. N.</i> Periodic solutions of some second-order nonlinear nonautonomous systems  | 48 |
| <i>Belyakov L. A.</i> On the structure of bifurcation sets in systems with a separatrix loop of the «saddlefocus»  | 53 |
| <i>Bibikov Yu. N., Belkovich A. A.</i> Quasi-periodic solutions of systems of neutral differential equations with a small parameter                                      | 55 |
| <i>Bigun Ya I., Bortei M. S., Cherevko I. M.</i> Investigation of certain classes of systems with time delay by the method of integral manifolds and by averaging method | 59 |
| <i>Boichuk A. A.</i> The Liapunov functions for linear periodic systems  | 61 |
| <i>Bondarchuk V. S.</i> The periodic problem of variational calculation and the deformations of hamiltonian systems  | 65 |
| <i>Bronshtein I. U.</i> Transversality implies lattice stability   | 67 |
| <i>Bykov V. V.</i> On the nontrivial bifurcation sets of multidimensional dynamic systems  | 69 |
| <i>Vasiliev S. N.</i> The establishment and inversion of theorems on universal dynamic properties with Liapunov vector — functions                                       | 71 |
| <i>Ved Yu. A.</i> Existence criterion for solutions with nonzero limits of differential systems with aftereffect on the semi-axis  | 73 |
| <i>Verhulst F.</i> Normalization and integrability of Hamiltonian systems  | 76 |
| <i>Vivaldi F., Ford J., Izrailev F. M., Chirikov B. V., Shepelyansky D. L.</i> The modulation diffusion in nonlinear oscillation systems                                 | 80 |
| <i>Gavrilov N. K.</i> On codimension two bifurcations of equilibrium state   | 84 |
| <i>Heiden U., Walther H. O.</i> Chaos in differential delay equations  | 88 |
| <i>Gonchenko S. V.</i> On doubling bifurcations in systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve  | 91 |
| <i>Gromova P. S.</i> On the global stability of systems with delay   | 93 |
| <i>Grujić L. T.</i> On asymptotic stability of large-scale singularly perturbed systems with undifferentiable nonlinearities   | 95 |



|  |     |
|--|-----|
| <i>Gumowski I.</i> Some relations between differential equations, recurrences and functional iterates  | 98  |
| <i>Gurtownik A. S., Neimark Yu. I.</i> On synchronisms of quasi-hamiltonian systems  | 103 |
| <i>Gutowski R.</i> Investigation of the equation of nonlinear string vibration by the method of integral inequalities  | 105 |
| <i>Dahiya R. S.</i> Oscillation theorems for nonlinear delay differential equations  | 111 |
| <i>Delchambre M., Bastin H.</i> Study of a second order nonlinear system with delay  | 114 |
| <i>Djaja Ch.</i> Some properties of motions quasistable by Liapunov  | 115 |
| <i>Dolov M. V., Kosarev V. V.</i> Darboux's integrals and limit cycles   | 117 |
| <i>Domshlak Yu. I.</i> The accurate estimates of oscillation intervals of systems described by differential equations with a deviating argument                                      | 119 |
| <i>Drakhlín M. E.</i> On oscillation properties of neutral type equations  | 122 |
| <i>Ejremova L. S.</i> Periodic points of the continuous circle mapping   | 124 |
| <i>Gillot Ch.</i> Rotation sequences and some aspects of the topological entropy function of a class of $[0, 1]$ -endomorphism   | 126 |
| <i>Zadorozhny V. G.</i> Bounded solutions of $V$ -dissipative differential equations   | 128 |
| <i>Zadorozhny V. F., Odarich O. N.</i> Almost periodic oscillations of optimal systems retaining the measure   | 130 |
| <i>Zaslavsky G. M.</i> Peculiarities of the stochasticity appearance in non-hamiltonian systems  | 132 |
| <i>Zevin A. A.</i> The estimations of periodic oscillations of certain nonlinear systems   | 132 |
| <i>Zubov N. V.</i> Existence and exponential stability criteria of periodic solutions in systems with aftereffect  | 137 |
| <i>Zubova A. F.</i> Investigation of oscillation systems   | 140 |
| <i>Ivanov A. F.</i> Periodic solutions of a class of difference-differential equations   | 142 |
| <i>Izobov N. A.</i> Minimal index of the linear differential system  | 144 |
| <i>Irtegov V. D., Novikoo M.</i> Construction of Liapunov functions and normalization  | 147 |
| <i>Izé A. F.</i> Asymptotic behaviour and stability of perturbed nonlinear neutral functional differential equations   | 152 |
| <i>Iskandarov S.</i> On the boundedness of solutions of second order integro-differential equations of Volterra type   | 156 |
| <i>Yoshizawa T.</i> Asymptotic properties in nonautonomous systems   | 159 |
| <i>Kawakami H.</i> The bifurcation pattern of periodic solutions observed in Duffing's equation  | 162 |
| <i>Kamensky G. A., Skubachevsky A. L.</i> On periodic solutions of nonlinear differential equations with deviating arguments   | 166 |
| <i>Casal A., Somolinos A.</i> Entrainment of a nonlinear second order delay differential equation  | 167 |
| <i>Casati G.</i> Decay of correlations and statistical properties of dynamic systems   | 169 |
| <i>Kashchenko S. A.</i> Existence and asymptotics of periodic solutions of certain equations with aftereffect  | 173 |
| <i>Kirichenko N. F.</i> Practical stability, filtration and identification in dynamic systems  | 175 |
| <i>Clerc R. L., Hartmann Ch., Razafimandimby B.</i> Boundary of the influence domain of a one-dimensional invariant manifold occurring in a real-valued two-dimensional endomorphism | 178 |
| <i>Clerc R. L., Hartmann Ch.</i> Search of subharmonic resonances of differential equations with periodic coefficients by the method of associated autonomous recurrence             | 181 |
| <i>Ktoeden P. E.</i> Cycles and chaos in higher dimensional difference equations   | 184 |
| <i>Kozlov R. I., Matrosov V. M.</i> Methods of construction of Liapunov's vector functions and their applications  | 187 |
| <i>Kolmanovskiy V. B., Nosov V. R.</i> Stability of neutral systems with arbitrary aftereffect   | 192 |
| <i>Kuznetsova I. V.</i> Sufficient conditions for stability of the system of differential equations with retarded argument depending on properties of retardation                    | 196 |
| <i>Kulenovich M. R., Grammatikopulos M. K.</i> Maintenance of asymptotic behaviour of nonlinear differential inequalities under delay influence                                      | 199 |
| <i>Kuntsevich V. M., Lychak M. M.</i> Some problems of the theory of sets evolution (asymptotic estimates of systems motion described by difference equations)                       | 202 |
| <i>Couot J.</i> Multidimensional invariant densities of discrete dynamic systems   | 206 |
| <i>Kurikara M.</i> Asymptotic behaviour in linear functional differential equations  | 209 |
| <i>Kusano T.</i> Oscillation theorems of comparison type for nonlinear functional-differential equations with deviating arguments  | 211 |
| <i>Ladas G., Stavroulakis I. P.</i> On differential inequalities with several deviating arguments  | 215 |
| <i>Latipov K. R., Koss M. Sh.</i> On integral straight lines of one differential equation  | 219 |
| <i>Lerman L. M., Umansky Ya L.</i> On the topological structure of the integrable hamiltonian systems with two degrees of freedom  | 222 |
| <i>Le Suan Kan.</i> Investigation of quasi-periodic oscillation processes in nonlinear nonautonomous systems with delay in presence of resonance                                     | 224 |
| <i>Lizana Peña M.</i> Existence of almost periodic and periodic solutions of composite systems of functional differential equations  | 227 |
| <i>Likhtarnikov A. L., Yakubovich V. A.</i> Absolute output stability of nonlinear systems with a delaying argument  | 229 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Los G. A.</i> Stability by the almost first approximation . . . . .  | 234 |
| <i>Lukiyarov V. I.</i> On periodic perturbations of autonomous system with a separatrix loop of the «saddle — node» . . . . .   | 236 |
| <i>Lunkevich V. A.</i> Affine — invariant integrals of the system with quadratic nonlinearities in cases of the centre . . . . .  | 238 |
| <i>Mazko A. G.</i> Generalization of the Liapunov theorem for a new class of the complex plane domains . . . . .  | 240 |
| <i>Maistrenko Yu. L.</i> Oscillating solutions of difference — differential equations close to entirely integrable ones . . . . .   | 243 |
| <i>Martynyuk A. A., Kosolapov V. I.</i> On stability of nonlinear systems with the integrable approximation . . . . .   | 247 |
| <i>Martynyuk D. I., Dankanich V. A.</i> Galerkin's method for the construction of quasi-periodic solutions of the systems with time delay . . . . .                           | 251 |
| <i>Medvedev V. S.</i> On the disappearance of closed orbits of flows on manifolds . . . . .   | 253 |
| <i>Medved M.</i> Vector fields with codimension 3 singularity and their parametric deformations . . . . .   | 255 |
| <i>Melnikov G. I.</i> Estimations of oscillation stability by the method of differential inequalities . . . . .   | 257 |
| <i>Menko Ya. P., Leifura V. N.</i> On asymptotic solution of the problem of optimal control of the system of linear differential equations with a delaying argument . . . . . | 260 |
| <i>Millionshchikov V. M.</i> Baire's classes of functions and Liapunov's exponents . . . . .  | 262 |
| <i>Milusheva S. D., Bainov D. D.</i> The proof of partially-multiplicative averaging for a class of differential-functional equations with impulses . . . . .                 | 263 |
| <i>Mira Ch.</i> Chaotic dynamics in point mappings: relations between one-dimensional endomorphism and two-dimensional diffeomorphism . . . . .                               | 265 |
| <i>Molchanov A. M.</i> On Riccati matrix equation . . . . .   | 271 |
| <i>Morozov A. D., Fedorov E. L.</i> On the investigation of autooscillative equations close to nonlinear integrable ones . . . . .  | 274 |
| <i>de Mottoni P.</i> Bifurcation of periodic solutions for periodic quasi-linear parabolic equations and systems . . . . .  | 276 |
| <i>Magiros D. G.</i> Separatrices of dynamic systems . . . . .  | 280 |
| <i>Neimark Yu. I.</i> Chaotic and stochastic autooscillations . . . . .   | 288 |
| <i>Nekhoroshev N. N.</i> Factors influencing stability of systems close to integrable ones . . . . .  | 292 |
| <i>Nosov V. P.</i> Periodic solutions of autonomous quasi-linear systems with an arbitrary aftereffect . . . . .  | 294 |
| <i>Obolensky A. Yu., Nikitina N. V., Verbitsky V. G.</i> Comparison nonlinear systems in the problems on the motion stability . . . . .                                       | 297 |
| <i>Oravsky V.</i> Matrix solution of polyharmonic problems of nonlinear oscillations . . . . .  | 300 |
| <i>Osipenko G. S.</i> On bifurcation of partly hyperbolic systems . . . . .   | 302 |
| <i>Osipov A. V.</i> Tangential surfaces and exceptional directions of a singular point of an autonomous system . . . . .  | 303 |
| <i>Parasyuk I. O.</i> Reducibility and stability of measure of hamiltonian systems . . . . .  | 304 |
| <i>Pelyukh G. P.</i> Construction of the general solution of a class of nonlinear integro-functional equations in the neighbourhood of singular points . . . . .              | 307 |
| <i>Perov A. I.</i> Variational methods in the theory of nonlinear oscillations . . . . .  | 310 |
| <i>Pilyugin S. Yu.</i> Structure of the attractive set boundary in multidimensional system . . . . .  | 315 |
| <i>Pliss V. A.</i> Integral sets of the systems of differential equations . . . . .   | 318 |
| <i>Plykin R. V.</i> Hyperbolic attractors of differentiable dynamic systems . . . . .   | 323 |
| <i>Pustovoytov N. A.</i> On analysis of the system stability depending on parameters . . . . .  | 328 |
| <i>Reizin L. E., Pettere G. Ya.</i> Distribution of standard numbers . . . . .  | 330 |
| <i>Rozhkov V. I., Korolev M. F.</i> Periodic and almost periodic solutions of systems with a small difference . . . . .   | 333 |
| <i>Rozet I. G.</i> Investigation of integral manifolds of dynamic systems by the secant surface method . . . . .  | 336 |
| <i>Rozvich S.</i> On sufficient conditions for optimality . . . . .   | 338 |
| <i>Romanenko E. Yu.</i> Quickly oscillating solutions of difference — differential equations . . . . .  | 340 |
| <i>Rubanik V. P.</i> Oscillations of complex nonlinear system containing links with distributed parameters and links with delay . . . . .                                     | 345 |
| <i>Rumyantsev V. V.</i> On stability and oscillations of non-holonomic systems . . . . .  | 347 |
| <i>Samoylo K. A., Fedosova T. S., Somoylo A. K.</i> Determination of global stability domains of third order systems with two periodic nonlinearities . . . . .               | 353 |
| <i>Sasagawa T.</i> On the periodic solutions of matrix Riccati equations . . . . .  | 355 |
| <i>Sergysels R.</i> Generalization of Poincaré's index . . . . .  | 358 |
| <i>Sibirsky K. S.</i> General cyclicity of focuses of the systems with quadratic nonlinearities . . . . .   | 360 |
| <i>Slyusarchuk V. E.</i> Restricted solutions of impulse systems . . . . .  | 365 |
| <i>Smirnov E. Ya.</i> On properties of the invariant set of differential equations with hysteresis nonlinearities . . . . .   | 367 |
| <i>Stakhi A. M., Shcherbakov B. A.</i> Stability of invariant sets of nonstationary dynamical systems . . . . .   | 369 |
| <i>Strizhak T. G.</i> The minimax stability criterion . . . . .   | 371 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Tareev V. P.</i> On certain basic bifurcations of two-dimensional complex systems . . . . .  | 373 |
| <i>Tordj M., Vejvoda O.</i> Periodic solutions of weakly perturbed autonomous functional-differential equations . . . . .                                       | 375 |
| <i>Thibault R.</i> Influence of derivative discontinuities in second order recursive equations . . . . .  | 379 |
| <i>Tokarev S. P.</i> Smooth equivalence of some systems of differential equations . . . . .   | 383 |
| <i>Tonkov E. L.</i> Dynamic system of shifts and problems of uniform controllability of quasi-periodic system . . . . .   | 385 |
| <i>Fedorenko V. V.</i> Smoothness of mappings with the closed set of periodical points . . . . .  | 387 |
| <i>Felshhtyn A. L.</i> Mors inequality for Mors — Smail systems . . . . .   | 389 |
| <i>Feshchenko T. S.</i> Representation of the general solution of initial problem for a class of functional — differential equations with singularity . . . . . | 391 |
| <i>Khariionov V. L.</i> The method of matrix equations in local oscillations analysis . . . . .   | 394 |
| <i>Khibnik A. I.</i> On calculation algorithms for the investigation of nonlinear oscillations . . . . .  | 396 |
| <i>Hino Y.</i> Total stability and uniform asymptotic stability for retarded equations . . . . .  | 398 |
| <i>Hirai K., Ushio T., Iwai M.</i> Catastrophe and chaos in nonlinear discrete-time systems . . . . .   | 400 |
| <i>Hsu C. S.</i> Cell-to-cell mappings for global analysis of nonlinear systems . . . . .   | 404 |
| <i>Khusainov D. Ya.</i> Investigation of Stability for functionabl-differential equation solution by Liapunov's functions method . . . . .                      | 413 |
| <i>Chanturia T. A.</i> On variability of solutions of differential equations with a deviating argument . . . . .  | 415 |
| <i>Cherkas L. A.</i> Bifurcations of limit cycles of autonomous analytical systems on a plane . . . . .   | 417 |
| <i>Chernyshev V. E.</i> Rise of a closed orbit from eight-like orbits being double-asymptotic to the saddle equilibrium state . . . . .                         | 420 |
| <i>Chirikov B. V., Shepelyansky D. L.</i> Poincare's returns statistics and stochastic layer structure of nonlinear resonance . . . . .                         | 421 |
| <i>Churin Yu. V.</i> Disappearance of periodic solutions of quasihomogeneous systems . . . . .  | 425 |
| <i>Sharipov Sh. R.</i> On the qualitative theory of a generalized homogeneous dynamic system . . . . .  | 427 |
| <i>Sharkovskiy A. N.</i> Oscillations of relaxation and turbulence type: difference — differential models . . . . .   | 430 |
| <i>Shevelo V. N., Varekh N. V.</i> Some results of studying oscillation in systems goverened by differential equations with a deviating argument . . . . .      | 435 |
| <i>Shilnikov L. P.</i> The bifurcation theory and strange atractors . . . . .   | 437 |
| <i>Szlenk W.</i> Absolutely continuous invariant measures for rational mappings of the sphere . . . . .   | 442 |
| <i>Schneider K. R.</i> Perturbed center submanifolds and application to Hopf bifurcation . . . . .  | 450 |

(1) при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(\varepsilon)x + X(x, y, z, \varepsilon)x, \\ \dot{y} &= \gamma(\varepsilon)y + Y(x, y, z, \varepsilon)y, \end{aligned}$$

$$\dot{z} = \mu(\varepsilon)z + Z(x, y, z, \varepsilon)z, \text{ если } |x|, |y|, |z| < \rho,$$

где  $X(0, 0, 0, \varepsilon) = Y(0, 0, 0, \varepsilon) = Z(0, 0, 0, \varepsilon)$  и  $\lambda(\varepsilon), \gamma(\varepsilon) > 0$ , а  $\mu(\varepsilon) < 0$ .

При сделанных предположениях при достаточно малых  $\varepsilon$  определено отображение  $H_\varepsilon$  по траекториям системы (1) секущей площадки  $S = \{(x, y, z) \mid |x|, |z| \leq r, y = r\}$ . Если рассмотреть пространство непрерывных функций  $z = g(y), |y| \leq r$ , удовлетворяющих условию Липшица с достаточно малой константой, то отображение  $H_\varepsilon$  порождает отображение в себя некоторого шара этого пространства. Непосредственные оценки решений системы (1) позволяют доказать, что  $H_\varepsilon$  — сжимающее отображение, если константа Липшица достаточно мала. неподвижная точка  $q_\varepsilon(y)$  этого отображения дает инвариантную поверхность  $L_\varepsilon$  системы (1).

Отображение по траекториям  $H_\varepsilon^{-1}$  на кривой  $z = g_\varepsilon(y)$  является сжимающим, из чего следует существование неподвижной точки отображения  $H_\varepsilon$ , или, что то же самое, замкнутой траектории  $l_\varepsilon$  системы (1).

Заметим, что поверхность  $L_\varepsilon$  является неустойчивым многообразием траектории  $l_\varepsilon$ .

1. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. Дополнение 2 к книге Дж. Марсдена и М. Мак-Кракен «Бифуркации рождения цикла и ее приложения». — М.: 1980. — 368 с.
2. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. — Мат. сб., 1968, 77, (119), № 3, с. 461—472.

УДК 530.182

## Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский

Новосибирск, СССР

### СТАТИСТИКА ВОЗВРАТОВ ПУАНКАРЕ И СТРУКТУРА СТОХАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

1. Резонанс нелинейных колебаний гамильтоновой системы может быть описан и исследован в приближении маятника (например, [1]):

$$H_r(p, \psi, t) = \frac{p^2}{2M} + \varepsilon V_r \cdot \cos \psi + \varepsilon V [\cos(\nu\psi - \Theta) + \cos(\nu\psi + \Theta)]. \quad (1)$$

Первые два слагаемых соответствуют изолированному нелинейному резонансу, причем импульс  $p$  характеризует отклонение невозмущенных переменных действия от их резонансных значений; «масса»  $M$  связана с нелинейностью колебаний и выражается через производные от невозмущенных частот по действиям;  $\varepsilon$  — малый параметр возмущения, а  $V_r$  и  $\psi$  — соответственно амплитуда и фаза резонансной гармоники возмущения. Последнее слагаемое в (1) описывает взаимодействие данного резонанса с остальными. Фаза возмущения  $\Theta = \Omega t + \Theta_0$ , а частота  $\Omega$  характеризует отстройку от основного резонанса;  $\nu$  — некоторая действительная постоянная, зависящая от геометрии резонансов. В дальнейшем положим  $M = V_r = 1$  и  $\varepsilon V = \eta \sim \varepsilon \ll 1$ . При этом частота фазовых колебаний на резонансе  $\Omega_\Phi = \sqrt{\varepsilon}$ . Основным малым параметром взаимодействия резонансов является отношение  $1/\lambda = \Omega_\Phi/\Omega \ll 1$ . Малость  $1/\lambda$  означает, что резонансы хорошо разделены друг от друга.

Формальный математический анализ «простой» системы (1) наталкивается на значительные и все еще непреодолимые трудности, так как взаимодействие резонансов приводит к «расщеплению» невозмущенной сепаратрисы каждого из них и образованию сложной гомоклинической структуры. Эти трудности можно, однако, обойти, построив приближенно модифицированное отображение Пуанкаре в плоскости  $\Psi = \pi$  [1]. Для системы (1) отображение имеет вид

$$\bar{w} = w + \xi \cdot \sin \Theta; \quad \bar{\Theta} = \Theta + \lambda \cdot \ln \frac{32}{|w|}, \quad (2)$$

где  $w = \frac{H_r}{\varepsilon} - 1$  — смещение относительно невозмущенной сепаратрисы;  $\Theta$  — фаза возмущения в плоскости  $\Psi = \pi$ , а

$$\xi = -2\pi \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{(2\lambda)^{2\nu}}{\Gamma(2\nu)} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (3)$$

естественный малый параметр возмущения, по которому можно производить асимптотическое разложение. Вводя новую переменную  $y = w/\xi$  и пренебрегая постоянным сдвигом фазы  $\Theta$ , получаем отображение

$$\bar{y} = y + \sin \Theta; \quad \bar{\Theta} = \Theta - \lambda \cdot \ln |\bar{y}|, \quad (4)$$

которое и будет исследовано ниже.

2. Важнейшей характеристикой гомоклинической структуры в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса является ее полная ширина. Ввиду сложности этой структуры пока не удалось получить строгую оценку ее ширины. Приближенное решение этой задачи [1] возможно путем линеаризации отображения (4) по переменной и приведения его к так называемому стандартному отображению

$$\bar{P} = P + K \cdot \sin \Theta; \quad \bar{\Theta} = \Theta + \bar{P}, \quad (5)$$

где  $K = \lambda/y$  — параметр, характеризующий локальную структуру стохастического слоя, а  $P$  — новое действие.

Рис. 1. Равновесная функция распределения в стохастическом слое при  $\lambda = 9$ ; ломаная линия —  $10^7$  итераций; кружки —  $4 \times 10^6$ ; кривая (6) с  $\delta = 1/2$ ;  $C = 1,3$ . Ячейка гистограммы  $\Delta(y/\lambda) = 0,01$ .

Динамика (5) весьма подробно, хотя еще не полностью, изучена как численно, так и аналитически (например, [1, 2]).

В частности, надежно установлено, что граница стохастичности движения с точностью порядка нескольких процентов лежит при  $K \approx 1$ . Отсюда следует, что ширина стохастического слоя ( $|y| < y_m$ ) приблизительно равна  $y_m \approx \lambda$ ;  $w_m \approx \lambda \xi$ , т. е. в  $\lambda$  раз больше, чем расщепление сепаратрисы. При дополнительном условии  $\eta \ll \varepsilon$  точность последней оценки  $\sim 1/\lambda$  [1]. В случае  $\eta \geq \varepsilon$  оценка для  $y_m$  справедлива только по порядку величины [1] как и все более ранние оценки ширины стохастического слоя. Отметим, что при  $\eta \geq \varepsilon \lambda / v^2$  конфигурация стохастического слоя существенно изменяется за счет появления устойчивой области в окрестности  $\Psi = 0$  вследствие динамической фокусировки, которая сохраняется до  $\eta \leq \varepsilon \lambda^2 / v^2$ .

3. Глобальная структура стохастического слоя характеризуется, в частности, равновесной функцией распределения  $f_0(y/\lambda)$  усредненной по фазе  $\Theta$ . На рис. 1 приведен пример такого распределения, полученного по одной траектории. Видно, что в соответствии с результатами [1] слой состоит из двух весьма различных по своей структуре частей — центральной ( $|y/\lambda| \leq 0,4$ )

с постоянной в пределах стохастических флуктуаций плотностью распределения и периферической, где  $f_0$  изменяется с  $y$  существенно немонотонно, уменьшается, в среднем, к краю слоя ( $y = y_m \approx 1,18 \lambda$  в рассматриваемом случае). Средний ход плотности в периферической части слоя можно аппроксимировать эмпирическим выражением

$$f_0(x) \approx C \cdot x^\delta; \quad x \approx \frac{y_m - |y|}{\lambda}, \quad (6)$$

которое показано на рис. 1 для  $C = 1,3$ ;  $\delta = 1/2$ . Нерегулярное уменьшение  $f_0$  на периферии слоя связано с наличием здесь устойчивых областей, или «дырок» (в стохастической компоненте) сложной формы, которые при проектировании на ось  $y$  (усреднение по  $\Theta$ ) и вызывают понижение  $f_0$ .

Отметим, что неоднородность  $f_0(y)$  указывает в данном случае на нарушение детального равновесия и приводит к появлению недиффузионного потока  $Q(y) \cdot f(y)$  (в дополнение к диффузионному —  $D(y) df/dy$ ) [4]. Функция  $Q(y)$  может быть выражена через равновесное распределение [3]:  $Q = (D/f_0) \times (df_0/dy)$ . Замена переменной  $y \rightarrow \mu(y)$ ,  $d\mu/dy = f_0(y)$ , восстанавливает детальное равновесие, при этом  $f_0(\mu) = \text{const}$  и  $Q = 0$ .

4. Для дальнейшего исследования структуры периферической части стохастического слоя мы использовали статистику возвратов Пуанкаре. Этот метод был подсказан работой [5], в которой изучалась фактически та же задача, хотя авторы и не говорят об этом явно. Метод состоит в численном определении функции распределения времени возврата ( $\tau$ ) траектории отобращения (4) в центр стохастического слоя  $y = 0$  независимо от  $\Theta$ . Для упрощения обработки рассматривалась совместная статистика возвратов в обеих половинах стохастического слоя ( $y > 0$  и  $y < 0$ ), движение в которых отличается только сдвигом по фазе ( $\Theta \rightarrow \Theta + \pi$ ). Время возврата принималось равным числу итераций отображения (4) между двумя последовательными прохождениями через центр слоя. Интегральное распределение  $F(\tau)$  вычислялось по одной траектории как отношение числа возвратов  $N_\tau$  через время  $> \tau$  к полному числу возвратов  $N_0$  за все время движения  $T$ .

Гистограммы распределения  $F(\tau)$  приведены на рис. 2. Видно, что при достаточно малых  $\tau < \tau_0(\lambda)$  распределение  $F(\tau)$  хорошо описывается функцией  $1/\sqrt{\tau}$  ( $\tau \geq 1$ ) в согласии с результатами [5]. Однако при больших  $\tau$  функция  $F(\tau)$  убывает значительно быстрее и может быть грубо аппроксимирована выражением

$$F(\tau) \approx A(\lambda) \cdot \tau^{-p}; \quad \tau \gg \tau_0(\lambda). \quad (7)$$

Среднее значение по всем численным данным  $\langle p \rangle = 1,45 \pm 0,05 \approx 3/2$ . Эмпирическая зависимость  $A(\lambda)$  грубо описывается выражением  $A(\lambda) \approx 3,5\lambda$ . Следует отметить, что действительное распределение  $F(\tau, \lambda)$  значи-

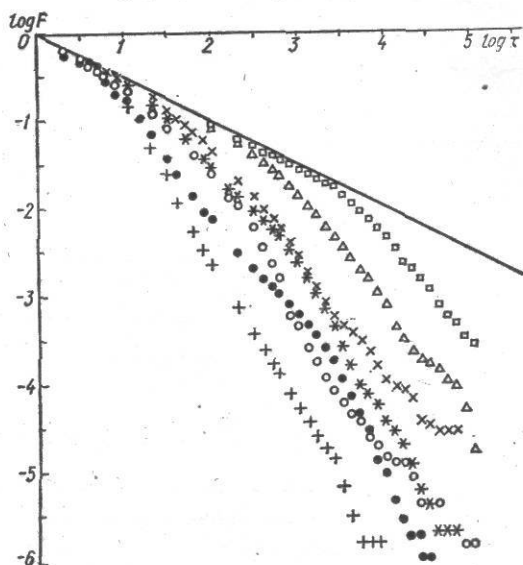


Рис. 2. Распределение возвратов траектории в стохастическом слое:

$\lambda = 1$  (+); 3 (·); 5 (o); 7 (\*) 10 (X); 30 (Δ); 100 (□). прямая —  $F(\tau) = 1/\sqrt{\tau}$ ;  $T = 10^7$ . Логарифм десятичный;

тельно сложнее, в частности, кривые с различными  $\lambda$  пересекаются в нескольких точках (рис. 2) и как бы стягиваются.

Начальная зависимость  $F(\tau) \approx 1/\sqrt{\tau}$  естественно объясняется свободной диффузией в центральной части слоя, пока его ширина еще не существенна (например, [6]), т. е. для  $\tau \ll \lambda^2$ . Действительно, численные данные показывают, что граница этой области  $\tau_0 \approx 0,3\lambda^2$ . Если бы зависимость  $F = 1/\sqrt{\tau}$  сохранялась при любых  $\tau$ , то среднее  $\langle \tau \rangle$  расходилось бы [5]. Однако при  $\tau \gg \tau_0$  показатель  $p > 1$ , так что  $\langle \tau \rangle$  оказывается конечным:  $\langle \tau \rangle \sim \sqrt{\tau_0} \sim \lambda$ . Численные эксперименты дают  $\langle \tau \rangle \approx 3,2\lambda$  (без случая  $\lambda = 1$ ). Отметим, что хотя  $\langle \tau \rangle$  конечно,  $\langle \tau^2 \rangle$  расходится при  $p = 3/2$ . Это приводит к увеличению флуктуаций, что, по-видимому, наблюдалось в [5].

Локальные свойства отображения (4) и, в частности, коэффициент диффузии по  $y$ , характеризуются параметром  $K = \lambda/y \approx \frac{1}{1-x}$  (см. (5)). Предположим что при  $x \rightarrow 0$   $D_x(x) = D_x(x) \cdot \lambda^2 \sim x^\alpha$ , так что скорость диффузии быстро падает к краю слоя. Тогда в качестве грубого приближения можно принять, что время возврата  $\tau$  (при  $\tau \rightarrow \infty$ ) определяется, по порядку величины, средним временем диффузии из области  $x \rightarrow 0$  до центра слоя. Последнее оценивается как  $\tau \sim x^2/D_x \sim \lambda^2 x^{2-\alpha}$ .

Следовательно, возвраты со временем  $> \tau$  связаны с попаданием траектории в область  $x \leq (\lambda^2/\tau)^{1/(\alpha-2)}$ . Однако мера этой области связана с распределением  $F(\tau)$  посредством  $\mu(x) \sim F \cdot \tau(x)/\langle \tau \rangle$  вследствие эргодичности движения. Наконец,  $\mu(x) \sim x^{1+\delta}$  получается из (6). Окончательно находим (при  $\alpha > 2$ )

$$F(\tau) \sim \lambda^\alpha \cdot \tau^{-p}; \quad p = 1 + \frac{1+\delta}{\alpha-2}; \quad \kappa = 2p - 1, \quad (8)$$

т. е. распределение  $F(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  оказывается степенным, а не экспоненциальным, как обычно считается (например, [5]). Это связано с тем, что при  $\alpha > 2$  траектория не достигает края слоя ( $x = 0$ ) за конечное время. При  $\alpha < 2$  время диффузии поперек слоя конечно и тогда, как известно, распределение  $F(\tau)$  убывает экспоненциально вследствие флуктуаций диффузии. Можно показать, что при  $\alpha = 2$  зависимость  $F(\tau)$  также является экспоненциальной, хотя среднее время диффузии до края слоя оказывается бесконечным. Если использовать приведенные выше эмпирические значения  $p = 3/2$ ,  $\delta = 1/2$ , то  $\alpha = 5$ ,  $\kappa = 2$ .

Таким образом, как результаты численных экспериментов, так и оценки показывают, что флуктуации времени возврата траектории в стохастическом слое убывают неэкспоненциально. Этот результат сохраняется, по-видимому, и для границы стохастической компоненты более общего вида.

1. Chirikov B. V. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems.— Phys. Reports, 1979, 52, N 5, p. 263—279.
2. Greene J. M. A Method for Determining a Stochastic Transition.— J. Math. Phys., 1979, 20, p. 1183—1196.
3. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.— 513 с.
4. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса.— Препринт Ин-та ядерной физики СО АН СССР, 80—211.1980.— 26 с.
5. Channon S. R., Lebowitz J. L. Numerical Experiments in Stochasticity and Heteroclinic Oscillations.— Annals of the New York Acad. of Sci., 1980, 357, p. 108—121.
6. Боровков А. А. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1976.— 373 с.