

ДИФфуЗИЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ПРОХОЖДЕНИИ  
НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский

Рассмотрена простая модель многократного прохождения нелинейного резонанса. Получены аналитические оценки для границы стохастичности движения и скорости диффузии в стохастической области как при быстром, так и при медленном прохождении резонанса. Приведены результаты численных экспериментов, которые подтверждают аналитические оценки и позволяют получить уточненное полумэмпирическое соотношение для скорости диффузии, которое может быть использовано при анализе «эффектов встречи» в накопительных кольцах.

Светимость, а следовательно, и эффективность установок со встречными пучками частиц определяется в значительной мере так называемыми «эффектами встречи», т. е. электромагнитным взаимодействием встречных сгустков (см., например, [1]). В простейшем приближении слабосильного взаимодействия можно рассматривать динамику одной частицы в заданном поле встречного сгустка, как это и делается до сих пор во всех теоретических и численных исследованиях эффектов встречи. С учетом поля сгустка бетатронные колебания частицы в накопительном кольце становятся нелинейными, а их устойчивость определяется соответственно нелинейными резонансами, взаимодействие которых приводит при определенных условиях к опасной стохастической неустойчивости. Известно также, что низкочастотная модуляция, связанная с синхротронными колебаниями частицы, существенно понижает порог этой неустойчивости (см., например, [2]). Следуя [3], мы рассматриваем ниже действие такой модуляции как результат многократного прохождения нелинейного резонанса бетатронных колебаний частицы. Это позволяет получить эффективные оценки скорости развития стохастической неустойчивости в различных режимах.

Процесс прохождения резонанса связан с изменением частоты бетатронных колебаний частицы и (или) частоты возмущения, так что в какой-то момент времени эти частоты (или их гармоники) совпадают и действие возмущения на частицу резко усиливается. Однократное прохождение резонанса исследовалось во многих работах (см., например, [4-7]). Для нелинейных колебаний наибольший интерес представляет так называемое медленное прохождение резонанса (см. [6] и раздел 2), когда скорость изменения частот за счет внешней (заданной) модуляции значительно меньше, чем за счет фазовых колебаний на резонансе под действием возмущения.

При малом возмущении эффект однократного прохождения резонанса мал. Поэтому более важной представляется задача о многократном прохождении резонанса, когда возможны накапливающиеся эффекты. Последние могут быть как регулярными [5], так и стохастическими [3, 7, 8].

В случае быстрого прохождения резонанса оценка скорости диффузии оказывается относительно простой и неоднократно производилась [3, 7, 8]. Однако при медленном прохождении резонанса задача существенно усложняется, в частности здесь совершенно не применимо широко распространенное квазилинейное приближение или приближение случайных фаз (см., например, [7, 9]). Грубые оценки для этого случая были получены в [3].

Основной задачей настоящей работы является численное моделирование диффузии при многократном медленном прохождении резонанса с целью получения эффективных оценок скорости такой диффузии. Для этого моделирования мы выбрали, по-видимому, простейшую модель, заданную некоторым отображением (раздел 1). Результаты численных экспериментов (раздел 3) подтверждают оценки [3], которые, таким образом, с найденным в этой работе эмпирическим коэффициентом могут быть использованы при анализе «эффектов встречи» в накопительных кольцах и в других задачах [соотношение (16)].

Отметим, что как оценки [3], так и результаты настоящей работы относятся к случаю многократного прохождения одного резонанса. Многократное прохождение нескольких различных резонансов кратко обсуждается в разделе 2.

### 1. Модель

Рассмотрим каноническое отображение, моделирующее действие на частицу одного «толчка» встречного сгустка

$$\bar{I} = I + k \sin(\theta + \lambda \sin \Omega t); \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I}, \quad (1)$$

где  $I$ ,  $\theta$  — переменные действие—фаза, описывающие бетатронные колебания частицы с одной степенью свободы. Как подробно объяснено, например, в [10], отображение такого вида приближенно представляет локальную (в фазовом пространстве) структуру резонансов нелинейных колебаний. Действие  $I$  нормировано здесь таким образом, что оно дает сдвиг фазы бетатронных колебаний  $\theta$  на периоде возмущения  $T$ , который соответствует одной итерации отображения (1). Если положить  $T=1$ , то действие совпадает с частотой бета-

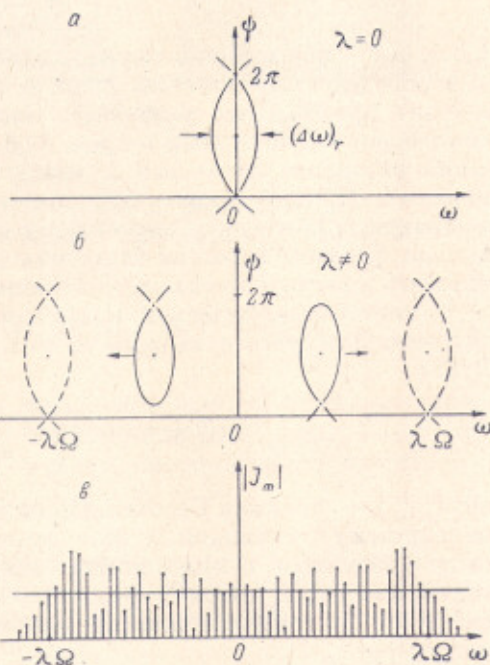


Рис. 1. *a* — сепаратриса отдельного резонанса шириной  $(\Delta\omega)_r$ ; *b* — мгновенные конфигурации сепаратрисы при прохождении резонанса вследствие частотной модуляции возмущения (3): сплошные кривые изображают движущуюся сепаратрису (направление движения показано стрелкой); штриховые кривые соответствуют двум крайним положениям ее сепаратрисы, когда мгновенная скорость ее смещения равна нулю; *c* — спектр частотно-модулированного возмущения (3),  $\lambda=25$ ; горизонтальная прямая показывает среднюю оценку  $\langle J_m^2 \rangle = 1/\pi\lambda$ .

тронных колебаний ( $\omega=1$ ) и автоматически учитывает их нелинейность ( $d\omega/dI \neq 0$ ). Соответственно перенормируется и параметр возмущения  $k$ . Низкочастотная модуляция, связанная с синхротронными колебаниями частицы, описывается параметрами  $\lambda$  и  $\Omega$ . Пример приведения уравнений движения частицы в поле встречного сгустка к отображению типа (1) рассмотрен в [8].

Система (1) допускает точный гамильтониан

$$H = I^2/2 + k \cos(\theta + \lambda \sin \Omega t) \delta_1(t) \quad (2)$$

с периодической (период  $T=1$ )  $\delta$ -функцией  $\delta_1(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n t$ .

Пусть  $k \ll 1$ . Если, кроме того,  $\lambda\Omega \ll 1$ , то в гамильтониане (2) можно произвести усреднение  $\delta$ -функции:  $\delta_1(t) = 1$ . Это приводит к усредненному гамильтониану

$$H = I^2/2 + k \cos(\theta + \lambda \sin \Omega t), \quad (3)$$

который приближенно описывает динамику исходной системы (1).

Пусть теперь  $\lambda=0$ . Тогда имеется единственный резонанс  $\omega=0$ , а движение нашей модели совпадает с движением маятника (3). Характерной особенностью фазовой картины такого движения является наличие особой траектории — сепаратрисы (рис. 1, а), которая ограничивает область нелинейного резонанса (подробнее см., например, в [10]).

Нелинейный резонанс характеризуется двумя основными параметрами, которые нам потребуются в дальнейшем. Это частота (малых) фазовых колебаний

$$\Omega_\phi = \sqrt{k} \quad (4)$$

(частота малых колебаний маятника) и ширина резонанса (полная ширина сепаратрисы маятника по частоте; рис. 1, а)

$$(\Delta\omega)_r = 4\sqrt{k} = 4\Omega_\phi. \quad (5)$$

Если имеет место фазовая (частотная) модуляция возмущения ( $\lambda \neq 0$ ), то условие резонанса  $\dot{\psi}=0$ , где  $\psi = \theta + \lambda \sin \Omega t$  — резонансная фаза, можно записать в виде

$$\omega = \omega_M = -\lambda\Omega \cos \Omega t. \quad (6)$$

Здесь  $\omega_M$  — частота возмущения, явно зависящая от времени. Если  $|\omega| < \lambda\Omega$ , то в определенные моменты времени обе частоты ( $\omega$ ;  $\omega_M$ ) совпадают, т. е. происходит прохождение резонанса. Фазовая картина движения в этом случае изображена схематически на рис. 1, б. Модуляция возмущения вызывает колебания резонанса вдоль оси  $\omega$  между двумя крайними положениями (рис. 1, штрихи). Помимо этого, модуляция приводит к искажению неподвижной сепаратрисы резонанса, зависящему от ее скорости и направления движения. Анализ фазовой картины движения при прохождении резонанса удобно производить простым методом, описанным в [6].

Влияние периодической модуляции возмущения можно исследовать и по-другому. Для этого разложим частотно-модулированное возмущение в (3) в ряд Фурье

$$\cos(\theta + \lambda \sin \Omega t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda) \cos(\theta + m\Omega t), \quad (7)$$

где  $J_m(\lambda)$  — функция Бесселя. При подстановке этого выражения в (3) мы получаем систему стационарных резонансов  $\omega = \omega_m = m\Omega$  или мультиплет. Формально число резонансов в мультиплете бесконечно, однако амплитуда Фурье-гармоник, а значит, и ширина резонансов быстро (экспоненциально) убывает для  $|m| > \lambda$ . Поэтому фактически «работают» примерно  $2\lambda$  резонансов в полосе частот  $|\omega| \leq \lambda\Omega$ .

Пример зависимости амплитуд гармоник ( $J_m(\lambda)$ ) от частоты для  $\lambda=25$  представлен на рис. 1, в. На фазовой плоскости ( $\omega$ ,  $\psi_m$ ) [ $\psi_m = \theta + m\Omega t$ , см. (7)] каждому из этих резонансов соответствует сепаратриса, подобная изображенной на рис. 1, а, но с шириной

$$(\Delta\omega)_m = 4\sqrt{k|J_m(\lambda)|} \approx 4\Omega_\phi/(\pi\lambda)^{1/4}. \quad (8)$$

В последнем выражении использовано среднеквадратичное значение  $\langle J_m^2(\lambda) \rangle \approx 1/\pi\lambda$  ( $\lambda \gg 1$ ;  $|m| < 4$ ). Это значение показано на рис. 1, в горизонтальной прямой. Стационарные резонансы  $\omega = m\Omega$  в нашей модели соответствуют синхробетатронным резонансам частицы в накопителе, тогда как движущийся резонанс на рис. 1, б представляет резонанс бетатронных колебаний.

Подход, основанный на системе стационарных резонансов, особенно удобен для выяснения характера движения, который определяется параметром перекрытия нелинейных резонансов

$$s = (\Delta\omega)_m/\Omega \approx 4\Omega_\phi/(\pi\lambda)^{1/4}. \quad (9)$$

Здесь  $\Omega$  — расстояние между соседними резонансами мультиплета, равно частоте модуляции (рис. 1, в), и использована оценка для ширины резонанса (8). Стохастическое движение возникает при условии  $s > 0.63$  [10].

В стохастическом режиме происходит диффузия системы по действию  $I$  (или частоте  $\omega = I$ ) в пределах интервала колебаний сепаратрисы на рис. 1, б (где только и имеет место прохождение резонанса) или, что то же самое, в пределах ширины мультиплета на рис. 1, в, т. е. в интервале  $|I| = |\omega| \leq \lambda\Omega$ . По-видимому, именно такой режим диффузии наблюдался в [7]. Более опасным является, однако, случай прохождения нескольких соседних бетатронных резонансов, так как диффузия распространяется при этом на значительно большую область. На языке синхро-бетатронных резонансов это соответствует перекрытию соседних мультиплетов. Такой режим отсутствует в усредненной системе

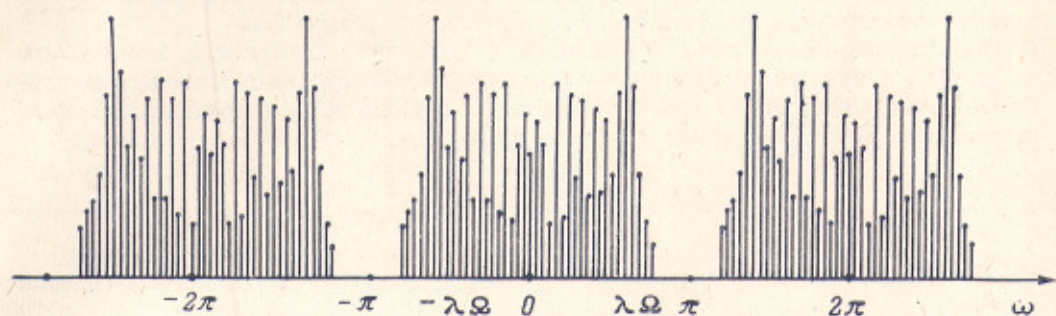


Рис. 2. Спектр возмущения для модели (1) [см. (10)].

(3), которая моделирует только один бетатронный резонанс, однако он возможен в исходной модели (1). Действительно, гамильтониан (2) этой модели можно записать в форме

$$H = \frac{I^2}{2} + k \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} I_m(\lambda) \cos(\theta + m\Omega t + 2\pi n t). \quad (10)$$

Отсюда видно, что полная система резонансов ( $\omega + m\Omega + 2\pi n = 0$ ) модели (1) представляет последовательность мультиплетов на расстоянии  $\delta\omega = 2\pi$  друг от друга (рис. 2). Условие перекрытия соседних мультиплетов имеет вид

$$s_M = 2\lambda\Omega/\delta\omega \geq 1. \quad (11)$$

В картине прохождения системы через резонанс (рис. 1, б) случай  $s_M \leq 1$  означает, что проходит только один резонанс, тогда как при  $s_M \geq 1$  система проходит через много различных резонансов, соответствующих разным мультиплетам.

В последнем случае исследование движения системы значительно усложняется. Заметим, однако, что для распространения диффузии на область нескольких мультиплетов достаточно, чтобы  $s_M$  лишь слегка превышало критическое значение  $s_M^{(cr)} \approx 1$ . С другой стороны, ясно, что при этом скорость диффузии будет определяться с хорошей точностью лишь одним из мультиплетов. Некоторые особенности диффузии при  $s_M \geq 1$  кратко обсуждаются в конце следующего раздела.

## 2. Оценки скорости диффузии

Оценки скорости диффузии при многократном прохождении одного резонанса в стохастическом режиме были получены в [3]. Они существенно зависят от скорости прохождения резонанса, которую удобно характеризовать безразмерным параметром

$$v = |\dot{\omega}_M|/\Omega_\phi^2, \quad (12)$$

где  $\omega_M$  — частота возмущения, явно зависящая от времени вследствие частотной модуляции (6), а  $\Omega_\phi$  — частота фазовых колебаний (4) движущегося бета-

тронного резонанса (рис. 1, б). Параметр  $v$  есть отношение скорости смещения резонансного значения частоты за счет модуляции возмущения к скорости изменения частоты за счет фазовых колебаний (при большой амплитуде последних).

При быстром прохождении резонанса ( $v \gg 1$ ) частота  $\omega$ , изменяющаяся под действием возмущения вследствие нелинейности колебаний, не успевает следить за частотой возмущения  $\omega_M$ . Поэтому результат прохождения будет в первом приближении таким же, как и для линейного осциллятора (см., например, [6])

$$\Delta I \approx \sqrt{2\pi} \frac{k}{\sqrt{|\dot{\omega}_M|}} \sin\left(\psi_r \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad (13)$$

где  $\psi_r$  — значение резонансной фазы  $\psi$  в момент точного резонанса ( $\dot{\psi}=0$ ), а знак определяется направлением прохождения резонанса.

В рассматриваемом режиме быстрого прохождения значение  $\psi_r$  может быть любым [6], и при условии стохастичности  $s > 0.63$  (см. выше) последовательность  $\psi_r$  оказывается близкой к случайной и равномерно распределенной в интервале  $(0, 2\pi)$  [3, 10]. Отсюда скорость диффузии

$$D_f = \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{T/2} \approx \frac{\Omega k^2}{|\dot{\omega}_M|} = \frac{\Omega k^2}{v \Omega_\phi^2}, \quad (14)$$

где  $T = 2\pi/\Omega$  — период модуляции, в течение которого резонанс проходит дважды.

Рассмотренное приближение справедливо при условии, что скорость прохождения резонанса  $v$  мало изменяется за время прохождения, т. е. за время пересечения сепаратрисой на рис. 1, б какой-то точки фазовой плоскости, представляющей систему. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы ширина сепаратрисы была во всяком случае много меньше амплитуды ее колебаний:  $(\Delta \omega_r) \ll \lambda \Omega$ .

Однако и при выполнении этого условия скорость  $v$  будет изменяться в процессе диффузии (для разных прохождений) от максимальной в центре мультиплета до нулевой на его краях. Можно показать, что в широком диапазоне параметров влияние этого эффекта на среднюю скорость диффузии незначительно [11]. В дальнейшем под  $v$  будет пониматься ее максимальное значение  $\lambda \Omega^2 / \Omega_\phi^2$  [см. (6), (12)].

При медленном прохождении резонанса ( $v \ll 1$ ) [3, 6]

$$\Delta I \approx \pm \frac{8}{\pi} \Omega_\phi \sqrt{1 + 2\pi v - \frac{1}{4} \psi_r^2 \pm 2v \Omega_\phi \ln[(v + \psi_r)(4\pi v - \psi_r^2)]}, \quad (15)$$

где фаза  $\psi_r$  может теперь принимать значения только в узком интервале  $-v < \psi_r < \sqrt{4\pi v}$ , а знак в (15) определяется направлением прохождения резонанса.

В пределе  $v \rightarrow 0$  изменение  $\Delta I = \pm 8/\pi \Omega_\phi$  не зависит от скорости прохождения и является полностью обратимым (при  $\Omega = \text{const}$ ). Этот результат совпадает с выводом в работе [5].<sup>1</sup>

С другой стороны, критерий стохастичности, который в нашем случае можно записать в виде  $s^2 \sim \Omega_\phi^2 / \Omega^2 \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} / v \gg 1$ , показывает, что при медленном прохождении резонанса движение является всегда стохастическим.

Разрешение этого кажущегося противоречия состоит в том [3], что при любом конечном  $v \neq 0$  прохождение резонанса не полностью обратимо за счет изменения фазы  $\psi_r$ . Ясно, что скорость диффузии будет зависеть именно от этой необратимой добавки ( $\delta I$ ). Последняя определяется главным образом вто-

<sup>1</sup> Если  $\Omega_\phi^+ \neq \Omega_\phi^-$ , то происходит систематическое изменение  $I$  со средней скоростью  $I = (8/\pi) (\Omega_\phi^+ - \Omega_\phi^-)$ . В [5] рассматривался крайний случай, когда  $\Omega_\phi^+ = 0$ .

рым слагаемым в (15), которое содержит большой логарифм. Из (15) вытекает грубая оценка  $\delta I \sim v \Omega_{\phi} \ln v$ , откуда скорость диффузии [3]

$$D_s \approx C \frac{k^2 \Omega}{\Omega_{\phi}^2} v^2 (\ln v)^2, \quad (16)$$

где  $C=2$  — числовой множитель, значение которого получено из численных экспериментов (раздел 3).

Распространенным методом оценки скорости диффузии динамической системы является так называемое квазилинейное приближение (см., например, [9]). В рассматриваемой задаче оно эквивалентно замене дискретного спектра возмущения  $kJ_m$  (рис. 1, *а*) непрерывным [за счет стохастизации фазы  $\theta$  в гамльтониане (3)] с той же спектральной плотностью  $P=k^2 J_m^2 / \Omega$ . Это приводит к скорости диффузии

$$D_{qt} = \pi P = \pi k^2 J_m^2 / \Omega \approx k^2 / \lambda \Omega = D_f, \quad (17)$$

что совпадает с прямой оценкой (14) для случая быстрого прохождения резонанса.

Однако при медленном прохождении резонанса скорость диффузии резко падает (при той же спектральной плотности возмущения)

$$D_s / D_{qt} \approx C v^3 (\ln v)^2. \quad (18)$$

Это показывает, что квазилинейное приближение в этой области совершенно неприменимо из-за сильных корреляций фазы  $\theta$ . Более того, при медленном прохождении резонанса существует целая область начальных условий, лежащая внутри сепаратрисы и перемещающаяся вместе с ней (рис. 1, *б*), для которой диффузия вообще отсутствует. Это хорошо известная область автофазировки, или захвата, движение в которой является квазипериодическим (раздел 3).

В заключение этого раздела обсудим кратко, насколько изменятся полученные выше оценки в случае сильного перекрытия мультиплетов ( $s_M = 2\lambda \Omega / \delta \omega \gg 1$ ).

В картине стационарных резонансов (рис. 1, *а*; 2) средняя плотность резонансов по частоте возрастает при этом приблизительно в  $s_M$  раз. Во столько же раз увеличивается параметр перекрытия соседних резонансов  $s$  (13)

$$s \approx 8 (\lambda^3 / \pi)^{1/2} (\Omega_{\phi} / \delta \omega); \quad s_M \gg 1, \quad (19)$$

что значительно понижает границу устойчивости.

В квазилинейном приближении скорость диффузии возросла бы во столько же раз. Например, для быстрого прохождения получаем вместо (17)

$$D_f \approx 2k^2 / \delta \omega; \quad s_M \gg 1. \quad (20)$$

В картине прохождения резонансов этот результат соответствует независимому действию  $s_M$  различных резонансов, через которые проходит система в этом режиме. Если такая же независимость сохраняется и при медленном прохождении резонансов, то скорость диффузии тоже возрастает в  $s_M$  раз по сравнению с (16)

$$D_s \approx C (2k^2 / \delta \omega) v^3 (\ln v)^2; \quad s_M \gg 1. \quad (21)$$

Однако условия, при которых различные резонансы действуют независимо, требуют дальнейшего исследования. В частности, неясно, остается ли справедливым квазилинейное приближение даже при быстром прохождении резонансов, если  $s_M \gg 1$ .

### 3. Численные эксперименты

Основной целью численных экспериментов было определение скорости диффузии по  $I$  в зависимости от параметров модели. Скорость диффузии вычислялась по формуле

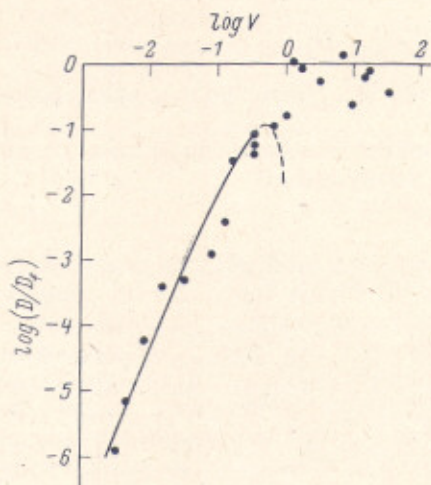
$$D = \langle (I_k - I_l)^2 / (t_k - t_l) \rangle, \quad (22)$$

где  $I_k, I_l$  — значения  $I$ , усредненные по некоторым интервалам времени с центрами в  $t_k, t_l$ , а скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение  $D$  по различным интервалам.

Такое двойное усреднение позволяет значительно снизить влияние всегда присутствующих ограниченных колебаний («фон») и уверенно измерять чрезвычайно малую скорость диффузии (см. ниже и рис. 3). Подробное описание этой техники дано в [10, 12].

При численном счете исходные параметры модели изменялись в интервалах:  $k=10^{-3}-10^{-1}$ ,  $\lambda=3.3 \cdot 10^1-3.3 \cdot 10^4$ ,  $\Omega=10^{-4}-10^{-1}$ . При этом параметр перекрытия резонансов (9) находился в пределах  $s=2.2-705$ , максимальные значения скорости прохождения резонанса  $v=3.3 \cdot 10^{-3}-3.3 \cdot 10^1$  и отношение  $\lambda\Omega/(\Delta\omega)_r = -2.6-26$ . Произведение  $\lambda\Omega=3.3$  оставалось неизменным для всех случаев (рис. 3). Выбор значения  $\lambda\Omega$  обсуждался выше (раздел 1).

Типичное время счета траектории составляло  $t=10^6$  итераций отображения (1). Для малых значений скорости прохождения резонанса время счета было



увеличено до  $3 \cdot 10^6$  итераций из-за очень низкой скорости диффузии по отношению к уровню фона. Например, для минимального  $v=3.3 \cdot 10^{-3}$  и  $k=0.1$  при  $t=10^6$  скорость диффузии составляла  $D \approx 9 \cdot 10^{-8}$ , тогда как при  $t=3 \cdot 10^6$  скорость упала более чем в 20 раз, до значения  $D \approx 3.8 \cdot 10^{-9}$ . Ясно, что предыдущее высокое значение скорости «диффузии» определяется на самом деле исключительно фоном.

Рис. 3. Зависимость нормированной скорости диффузии  $D/D_f$  от скорости прохождения резонанса  $v$  ( $\log$  — десятичный логарифм).

Точки — результаты численного счета, кривая — оценка для  $v \ll 1$  (18) с эмпирическим значением  $C=2.0$ .

С другой стороны, при дальнейшем увеличении времени счета наблюдаемая скорость диффузии изменяется незначительно. Так, при  $t=6 \cdot 10^6$  величина  $D \approx 4.3 \cdot 10^{-9}$ . Остающаяся разница двух последних значений связана, по-видимому, со статистическими флуктуациями. Независимость измеренной скорости диффузии от времени движения, которая проверялась и для других случаев, подтверждает диффузионный характер изучаемого процесса. При скорости  $v=8.3 \cdot 10^{-3}$  и выше для надежного измерения скорости диффузии оказывается достаточным уже и  $10^6$  итераций. Например,  $D \approx 2.9 \times 10^{-7}$  ( $t=10^6$ ),  $D \approx 1.8 \cdot 10^{-7}$  ( $t=3 \cdot 10^6$ ) для  $v \approx 8.3 \cdot 10^{-3}$ . Отметим, что уровень фона зависит не только от  $v$ , но и от других параметров, главным образом от  $k$ . Поэтому, например, очень малая скорость диффузии  $D \approx 1.7 \cdot 10^{-8}$  при  $v=0.33$  оказывается много выше фона из-за малого значения  $k=10^{-3}$ .

Для дополнительного контроля были проведены два специальных эксперимента. В первом из них параметр перекрытия мультиплетов  $s_M=0.80 < 1$ , так что область диффузии была ограничена шириной одного мультиплета. В этих условиях наблюдаемая скорость диффузии должна уменьшаться при увеличении времени движения. Такой эффект действительно наблюдался. Так, при  $v=0.17$  и  $t=10^4$  отношение  $D/D_f \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$  не слишком отличается от случая  $s_M=1.05$  ( $D/D_f \approx 3.3 \cdot 10^{-2}$ ). Это объясняется тем, что за такое короткое время диффузия не успевает заполнить мультиплет. Однако при увеличении времени движения до  $t=10^6$  отношение  $D/D_f \approx 1.9 \cdot 10^{-3}$  падает почти на порядок.

Во втором контрольном эксперименте начальные условия выбирались вблизи центра колеблющейся сепаратрисы резонанса (рис. 1, б), где при достаточно малой скорости  $v$  существует устойчивая область регулярного движения. В этой области диффузия, конечно, отсутствует, а ее наблюдаемое значение определяется исключительно фоном. Так, для  $v=0.17$  скорость «диффузии» (фон) в центре резонанса оказалась равной  $D \approx 10^{-9}$ , тогда как в стохастической компоненте  $D \approx 10^{-4}$ .

Сравнение численных результатов (рис. 3) с теоретическими оценками показывает, что последние удовлетворительно описывают зависимость скорости диффузии от параметров модели. Для быстрого прохождения резонанса ( $v \geq 1.3$ ) среднее значение  $\langle D/D_f \rangle = 0.74 \pm 0.11$ . В случае медленного прохождения резонанса ( $v \leq 0.66$ ) среднее значение численного множителя в оценке (18)  $\langle C \rangle = 2.0 \pm 0.45$ . Область вблизи  $v=1$  не описывается ни одной из оценок (16), (17). В этой области ( $0.66 \leq v \leq 1.3$ ) скорость диффузии резко возрастает с  $v$  примерно на порядок.

Следует отметить значительный разброс точек на рис. 3, природа которого не вполне ясна. Во всяком случае это не объясняется только статистическими флуктуациями. Так, например, для  $v=8.3 \cdot 10^{-2}$  значительное снижение скорости диффузии по отношению к теоретической  $D/D_s=1/6$  ( $C=2$ ) сохраняется для различных траекторий. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Пользуемся случаем выразить нашу искреннюю благодарность Ф. М. Израйлеву и Дж. Теннисону за полезные обсуждения.

#### Литература

- [1] Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction, Edited by M. Month and J. C. Herrera, A. I. P. Conf. Proc. № 57 (1979).
- [2] *F. M. Izrailev*. Physica D, № 3, 243 (1980).
- [3] *Б. В. Чуриков*. Препринт 267. ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск (1969).
- [4] *Ю. А. Митропольский*. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. АН УССР, Киев (1955).
- [5] *K. Symon, A. Sessler*. Proc. CERN Symposium, 1, 44 (1956).
- [6] *Б. В. Чуриков*. ДАН СССР, 125, 1015 (1959).
- [7] *R. Chasman, A. Garren, R. L. Gluckstern, F. E. Mills*. Proc. 9<sup>th</sup> Intern. Conf. on High Energy Accelerators, SLAC, p. 604 (1974).
- [8] *J. Tennyson*. The Instability Threshold for Bunched Beams in ISABELLE, A. I. P. Conf. Proc., № 57, p. 158 (1979).
- [9] *Л. А. Арцимович, Р. З. Сагдеев*. Физика плазмы для физиков. Атомиздат, М. (1979).
- [10] *V. V. Chirikov*. Physics Reports, 52, 265 (1979).
- [11] *Б. В. Чуриков, Д. Л. Шепелянский*. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 80-211, Новосибирск (1980).
- [12] *Г. В. Гадияк, Ф. М. Израйлев, Б. В. Чуриков*. Тр. VII Межд. конф. по нелинейным колебаниям, II-1, 315. Берлин (1975).

Институт ядерной физики  
СО АН СССР  
Новосибирск

Поступило в Редакцию  
7 января 1981 г.