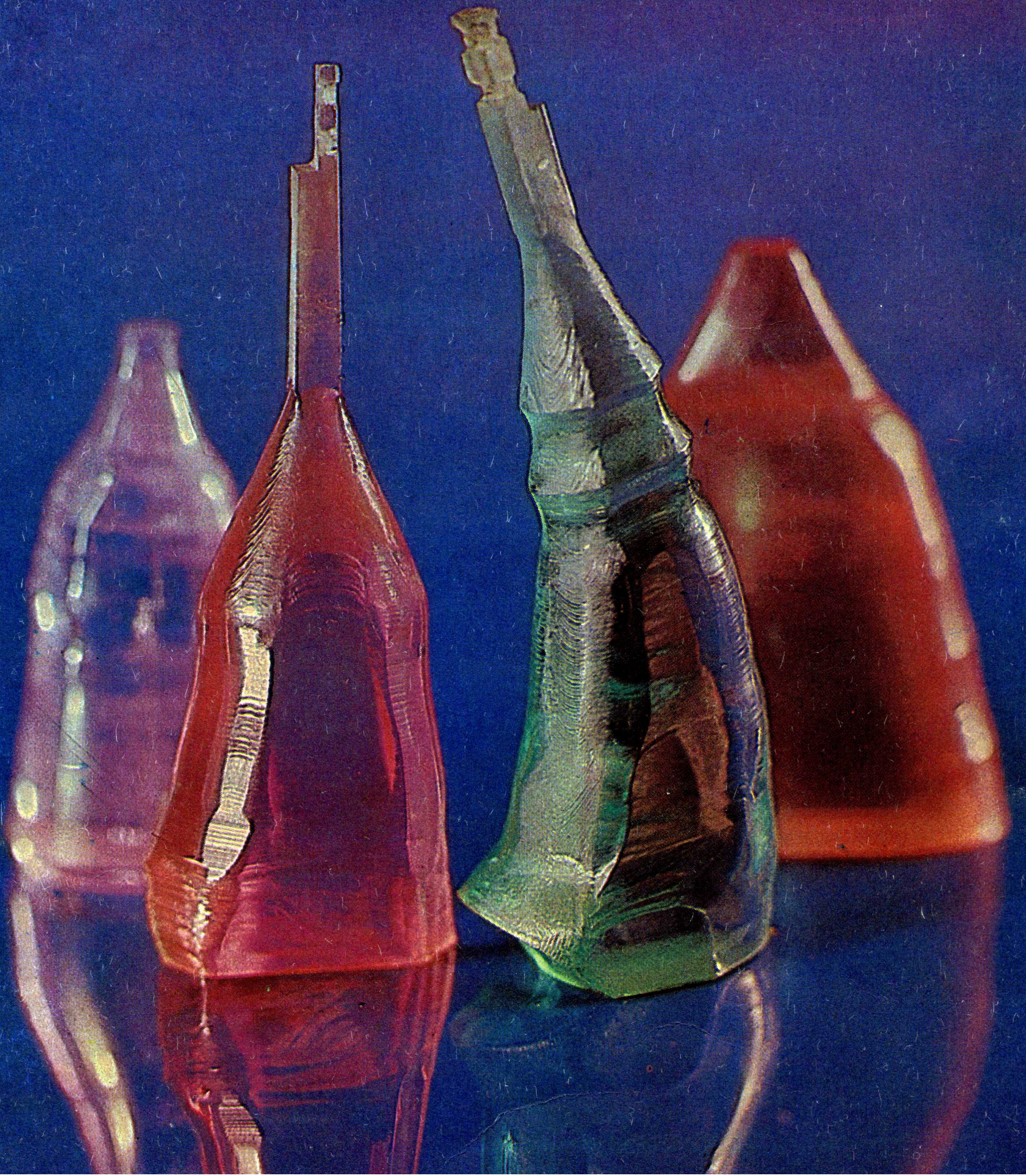
ISSN 0032—874X

# 7 1982 ПРИРОДА



# ПРИРОДА

Ежемесячный
популярный
естественнонаучный
журнал
Академии наук СССР

Основан в 1912 году



МАБ — символ межправительственной программы ЮНЕСКО «Человек и биосфера» (The Man and the Biosphere). Этим символом обозначены материалы, которые журнал «Природа» публикует в рамках участия в деятельности этой программы.

**На первой странице обложки.** Кристаллы александрита, хризоберилла и берилата лантана, выращенные в Институте геологии и геофизики СО АН СССР. См. в номере: Колонин Г. Р., Птицын А. Б. Самоцветы рождаются в Новосибирске.
Фото В. Н. Машатина.

**На четвертой странице обложки.** Весной кусты рододендрона сихотинского обильно покрываются цветками. См. в номере: Зорикова В. Т. Редкие рододендроны Приморья.
Фото Ю. Т. Васьковского

№ 7 (803)

Июль 1982 года

# В НОМЕРЕ

К 60-ЛЕТИЮ СССР — **АКАДЕМИЧЕСКАЯ НАУКА СИБИРИ**

**Коптюг В. А.** Сибирской науке— четверть века 2

**Жарков М. А., Мерзляков Г. А., Яншин А. Л.** Открытие калийных солей в Сибири 6

**Чириков Б. В.** Нелинейные резонансы и динамическая стохастичность 15

**Васильевский Р. С.** Загадочные памятники Хоккайдо 26

**Колонин Г. Р., Птицын А. Б.** Самоцветы рождаются в Новосибирске 32

КРАСНАЯ КНИГА — **Зорикова В. Т.** Редкие рододендроны Приморья 43

**Зотов И. А.** Трансмагматические флюиды в геологии 48

**Матвеенко Л. И.** Сверхдальняя радиоинтерферометрия 56

**Иоффе Б. В., Исидоров В. А.** Органические соединения в атмосфере Земли 68

Из «Природы» 1912 года 67, 77

**Иваницкий В. В.** Этология: от «для чего?» к «почему?» 78

**Филов В. А., Лютова К. В., Лебедев Д. В.** Библиотека Академии наук СССР 87

**Газенко О. Г., Гюрджиан А. А.** У истоков космической биологии 94

**Гаврюшин Н. К.** Мир как целое. Н. Н. Страхов о развитии естествознания 100

НОВОСТИ НАУКИ 108

**Александр Васильевич Сидоренко** 119

КНИГИ, ЖУРНАЛЫ — **Чуянов В. А.** Сложность кажущейся простоты (120). **Огурцов А. П.** Новое направление историко-научных исследований (121) 120

НОВЫЕ КНИГИ 124

В КОНЦЕ НОМЕРА — **Кедров Б. М.** Нешуточная пьеса в одном действии. Что такое химия, или чертова дюжина в издательском деле 127

# Нелинейные резонансы и динамическая стохастичность

Б. В. Чириков

Борис Валерианович Чириков, доктор физико-математических наук, заведующий сектором Института ядерной физики СО АН СССР. Область научных интересов — классическая и квантовая динамика и статистическая физика.

Недавно изобретенный термин «динамическая стохастичность», использованный в названии этой статьи (как и его более или менее распространенные синонимы — «стохастическая, или хаотическая, динамика», «детерминированный хаос» и др.), все еще, вероятно, вызывает недоумение. Действительно, под динамикой понимается обычно (в том числе и в этой статье) полностью детерминированный процесс эволюции некоторой физической системы, все прошлое и будущее которой однозначно определяется уравнениями движения и начальными условиями, причем последние могут быть заданы в любой момент времени. В простейшем случае классической механики (но не обязательно только в ней) динамический процесс представляет собой движение системы по определенной траектории. С другой стороны, понятие «стохастичность»[1] явно ассоциируется сейчас с присутствием какого-то случайного элемента, какой-то неопределенности. Возможно ли, чтобы строго детерминированный процесс был бы в то же время случайным? Некоторые физические и особенно математические исследования последних лет показывают, что это не только возможно, но при определенных условиях и неизбежно (по крайней мере, в случае классической, неквантовой, механики). Выражаясь несколько более определенно, можно утверждать, что случайные, или стохастические, процессы являются крайней, но все же частной формой детерминированного классического движения и как таковые могут быть полностью объяснены без каких-либо дополнительных статистических гипотез. Именно к такому случаю и относится внешне противоречивый термин «стохастическая динамика» (или «динамическая стохастичность»).

Здесь предпринята попытка рассказать об этих интересных результатах с точки зрения естественного развития классической теории нелинейных колебаний[2]. При этом мы ограничимся только динамически-

[1] Любопытно отметить, что буквально греческое слово στόχαστὶκος означает меткий, догадливый. Столь кардинальная трансформация семантики отражает, по-видимому, глубокое убеждение в том, что и самый меткий иногда промахивается, а самый догадливый — ошибается, мудрость, которую можно считать опытной основой теории вероятностей.

[2] В ином плане близкий круг вопросов рассмотрен в статье: Синай Я. Г. Случайность неслучайного.— Природа, 1981, № 3, с. 72.

ми системами без диссипации, точнее, так называемыми гамильтоновыми системами[3].

Хорошо известно, что случайные процессы исследуются статистическими, или вероятностными, методами. Наиболее разработанная и фундаментальная область приложения этих методов — статистическая физика макроскопических тел, состоящих из огромного числа атомов и молекул, в частности теория тепловых процессов. С самого начала для многих (хотя и не для всех) физиков было интуитивно ясно, что статистические законы, несмотря на всю их специфику и необычность, должны как-то объясняться на основе механики молекулярного движения. Представления механической теории теплоты своими корнями уходят в глубокую древность, а в современном виде были сформулированы Л. Больцманом еще в конце прошлого века.

И все-таки первая попытка решения этой проблемы — вывода статистических законов из механики — не удалась. Решение соответствующей механической задачи неожиданно оказалось очень сложным. Впрочем, может быть это и не так уж удивительно, если вспомнить безуспешные попытки решения неизмеримо более простой задачи — о движении всего трех частиц, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона, знаменитой проблемы трех тел! Невелики были и успехи старой, классической эргодической теории — специального раздела математики, возникшего из попыток обосновать статистические законы. На развитие самой статистической физики все эти неудачи не оказали заметного влияния, так как физики сумели достаточно четко и правдоподобно сформулировать дополнительные статистические гипотезы (такие, например, как гипотеза «молекулярного хаоса»), которые и восполнили недостающее звено динамической теории.

В последнее время, однако, возникла и быстро развивается совершенно новая область применения статистической теории — к динамике очень простых механических систем, имеющих всего несколько степеней свободы. Примером может служить движение отдельных (невзаимодействующих) заряженных частиц в постоянном, но пространственно неоднородном магнитном поле ускорителя или плазменной ловушки (всего три степени свободы!). Эта задача, поставленная в свое время Г. И. Будкером, положила начало исследованиям феномена динамической стохастичности в Институте ядерной физики СО АН СССР. Еще более простые примеры будут рассмотрены ниже. Здесь уже заранее совершенно не очевидно, действуют ли вообще в таких простых системах статистические законы и если да, то какие именно. На эти два основных вопроса и должна дать ответ динамическая теория.

Именно такого рода задачи в значительной мере стимулировали бурное развитие современной эргодической теории, которая переживает сейчас свое второе рождение. Наиболее значительные успехи этой теории связаны прежде всего с именами советских математиков, особенно А. Н. Колмогорова и его школы, хотя и физики тоже внесли определенный вклад в развитие этого интересного и важного направления. Бесспорным пионером в этой области среди физиков был Н. С. Крылов[4]. Особого упоминания заслуживают также исследования американского физика Э. Лоренца[5].

## НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС

Теория колебаний вообще и нелинейных колебаний в частности является классическим примером теории, «пронизывающей» все разделы физики и других наук. Формально единство описания колебательных процессов различной природы основано на сходстве математических уравнений, но не исчерпывается им. По крайней мере, поскольку это касается физической теории, не менее важным является система понятий, моделей и приближений, позволяющая ориентироваться в сложном многообразии нелинейных динамических процессов.

Одним из центральных в современной теории колебаний является понятие нелинейного резонанса. Введение этого понятия с самого начала предполагает уже некоторый физический подход, основанный на разделении исследуемой колебательной системы (осциллятора) на «невозмущенную часть» и «возмущение». Основное «свойство» невозмущенной системы

---

[3] Об особенностях стохастической динамики диссипативных систем см.: Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Хаотическая динамика простых систем. — Природа, 1981, № 2, с. 54.

[4] Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М., 1950.

[5] Об этих исследованиях см.: Синай Я. Г. Случайность неслучайного.

заключается в том, что ее движение нам полностью известно. Возмущение же обычно (хотя и не всегда) приходится считать малым, чтобы его влияние можно было анализировать с помощью того или иного приближенного метода, или теории возмущений.

Под резонансом понимается такая ситуация, когда некоторые частоты невозмущенной системы близки между собой или к частотам внешнего возмущения. Для линейных колебаний, как хорошо известно, действие возмущения приводит в этом случае к полному обмену энергией между соответствующими степенями свободы системы — резонанс связи — или к неограниченному росту полной энергии системы — внешний резонанс. В нелинейной системе, однако, все происходит совсем по-другому.

Нелинейность невозмущенных колебаний, которая формально означает нелинейность соответствующих уравнений движения, характеризуется, с физической точки зрения, двумя совершенно различными свойствами. Это, во-первых, ангармоничность колебаний, т. е. наличие в их спектре частот, кратных основной (фурье-гармоник, или обертонов), и, во-вторых, неизохронность, т. е. зависимость частот (как основных, так и, конечно, гармоник) от амплитуды или энергии колебаний. Для динамической стохастичности решающее значение имеет именно неизохронность. В самом деле, эффект возмущения (например, увеличение или уменьшение энергии колебаний) определяется его фазами. Фазы же, в свою очередь, зависят от частот, которые в силу неизохронности изменяются под действием возмущения. При определенных условиях такая «обратная связь» и приводит к очень запутанной (в частности, случайной) картине движения.

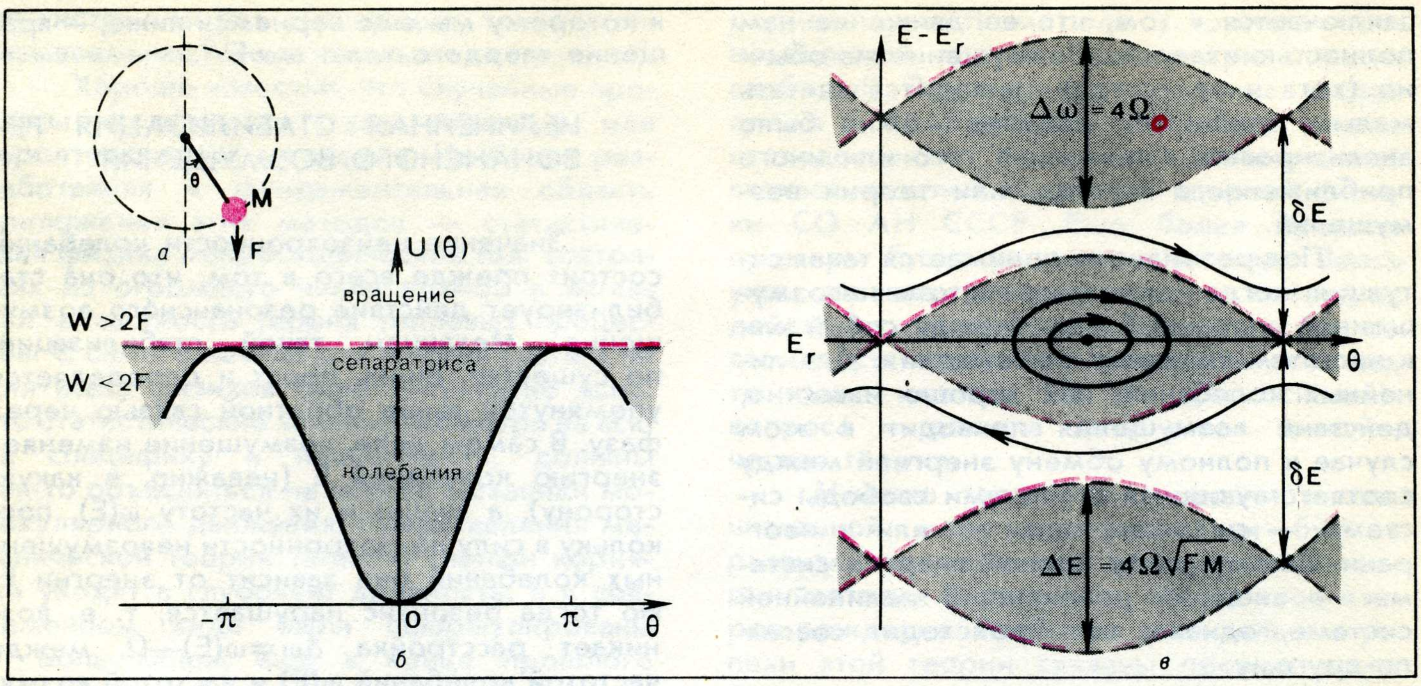
Классический пример нелинейных колебаний, с которого фактически и начались современная механика и физика,— движение двух тел, взаимодействующих по закону тяготения. Согласно третьему закону Кеплера, частота колебаний (вращения) тел зависит от их полной энергии E, а именно пропорциональна $|E|^{3/2}: \omega \propto |E|^{3/2}$. Отметим, что для круговой орбиты колебания являются чисто гармоническими и, таким образом, неизохронность не связана, вообще говоря, с ангармоничностью. Аналогично обстоит дело и при вращении релятивистской заряженной частицы в постоянном магнитном поле: в этом случае $\omega \propto E^{-1}$. Наконец, совсем простой пример, к которому мы еще вернемся ниже,— вращение твердого тела: $\omega \propto E^{1/2}$.

## НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕЗОНАНСНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Значение неизохронности колебаний состоит прежде всего в том, что она стабилизирует действие резонансного возмущения. Механизм такой стабилизации, по существу, очень прост и определяется упомянутой выше обратной связью через фазу. В самом деле, возмущение изменяет энергию колебаний E (неважно, в какую сторону), а значит и их частоту $\omega(E)$, поскольку в силу неизохронности невозмущенных колебаний она зависит от энергии E. Но тогда резонанс нарушается, т. е. возникает расстройка $\Delta\omega = \omega(E) - \Omega$ между частотой колебаний $\omega(E)$ и частотой возмущения $\Omega$, и изменение энергии E прекращается — происходит стабилизация резонансного возмущения. Подробный анализ такого процесса показывает, что изменение E носит в этом случае характер устойчивых ограниченных колебаний вокруг резонансного значения $E = E_r$, при котором частота нелинейного осциллятора в точности равна частоте возмущения: $\omega(E_r) = \Omega$. Оказывается, что во многих случаях динамику нелинейного резонанса можно описать с помощью модели маятника, полная энергия которого сохраняется:

$$W = M\dot{\theta}^2/2 + F \cdot (1 - \cos\theta) = \mathrm{const}.$$

Кинетическая энергия маятника $M\dot{\theta}^2/2$ характеризует отклонение энергии колебаний E от резонансного значения $E = E_r$, а потенциальная энергия $F \cdot (1 - \cos\theta)$ описывает резонансное возмущение. Сохранение полной энергии маятника W соответствует, таким образом, периодическому обмену энергией между возмущением и осциллятором. В отсутствие резонансного возмущения ($F = 0$) маятник свободно вращается с частотой $\omega$, зависящей от его кинетической энергии, — это невозмущенные нелинейные (неизохронные) колебания. При достаточно сильном возмущении ($2F > W$) маятник «захватывается» в резонанс с возмущением — его свободное вращение переходит в колебания в ограниченном интервале углов $\theta$. Угол отклонения маятника $\theta$ отсчитывается от положения устойчивого равновесия ($\theta = 0$) и в рассматриваемой модели равен разности фаз колебаний осциллятора и резонансного возмущения, а угловая скорость $\dot{\theta} = \omega(E) - \Omega$, пропорциональная $E - E_r$, характеризует расстройку осциллятора по частоте. Положение устой-




**Модель маятника для описания нелинейного резонанса (а). Свободное (F=0) вращение маятника соответствует невозмущенным колебаниям нелинейного осциллятора (вращению его фазы $\theta$). Потенциальная энергия маятника $U(\theta)=F(1-\cos\theta)$ в однородном поле силы F (например, силы тяжести) представляет резонансное возмущение (б). Угол $\theta$ в этом случае соответствует разности фаз осциллятора и возмущения, а неподвижное положение маятника (синхронное вращение обеих фаз) — точному резонансу ($\omega$ равна частоте возмущения $\Omega$). Область нелинейного резонанса (режим колебаний фазы $\theta$) ограничена на фазовой плоскости $(E-E_r, \theta)$ (в) сепаратрисой (пунктирная линия). Черными линиями показаны отдельные траектории движения маятника: замкнутые линии соответствуют колебаниям маятника, а незамкнутые — его вращению. За ширину нелинейного резонанса по энергии осциллятора ($\Delta E$) или по его частоте ($\Delta\omega \simeq \Delta E \cdot d\omega/dE$) принимается максимальный размер сепаратрисы (здесь все резонансы считаются одинаковой ширины). При перекрытии резонансов ($\Delta E \gg \delta E$) движение становится стохастическим. Если же $\Delta E \ll \delta E$, то взаимодействие резонансов приводит к образованию лишь узкого стохастического слоя вокруг невозмущенной сепаратрисы, ширина которого экспоненциально убывает с ростом отношения $\delta E/\Delta E$.**

чивого равновесия маятника соответствует точному резонансу и такому соотношению фаз, при котором обмен энергией между возмущением и осциллятором отсутствует. Момент инерции маятника $M=|\Omega\cdot(d\omega/dE)|^{-1}_{\omega=\Omega}$ зависит от неизохронности колебаний осциллятора, определяемой производной $d\omega/dE$. Чем она больше, тем меньше инерция маятника и тем быстрее осциллятор выходит из резонанса. В обратном пределе изохронных (линейных) колебаний ($d\omega/dE \to 0$) момент инерции неограниченно растет ($M \to \infty$) и резонанс сохраняется неопределенно долго.

Значение величин $\dot\theta$ и $\theta$ в начальный момент времени, для которых имеют место колебания фазы $\theta$, определяют область нелинейного резонанса. Она ограничена (отделена от области вращения фазы $\theta$) особой траекторией, называемой сепаратрисой, которая соответствует движению маятника из точки неустойчивого равновесия ($\theta=\pi$; $\dot\theta=0$; $W=2F$; маятник направлен вертикально вверх).

Максимальное изменение энергии осциллятора E или его частоты $\omega(E)$ в области нелинейного резонанса (т. е. при колебаниях маятника) называется шириной нелинейного резонанса и описывается соотношениями:

$$\Delta E=4\Omega\sqrt{FM};\ \Delta\omega=4\sqrt{F/M}=4\Omega_0.$$

Здесь $\Omega_0$ — частота малых ($W \ll F$) колебаний маятника вблизи положения устойчивого равновесия. Колебания маятника также являются нелинейными, их частота уменьшается с ростом амплитуды от $\Omega_0$ до нуля на сепаратрисе, где амплитуда максимальна.

По-видимому, впервые некоторые характеристики нелинейного резонанса были исследованы более 200 лет тому назад в знаменитой задаче трех тел. Тогда Л. Эйлер нашел неустойчивые периодические решения, аналогичные точке $\theta=\pi$ в рассмотренной модели маятника. Несколько позднее Ж. Лагранж получил устойчивые периодические решения (подобные $\theta=0$ для маятника). Сейчас известна целая группа малых планет (астероидов), захваченных в резонанс с Юпитером и вращающихся вокруг Солнца с той же средней скоростью, что и Юпитер (так называемые «греки» и «троянцы»).

Не менее интересными и важными явились исследования нелинейного резонанса между вращением релятивистской частицы в магнитном поле (нелинейный осциллятор!) и ускоряющим ее высокочастотным электрическим полем — знаменитая автофазировка Векслера — Макмиллана. В этих исследованиях, выполненных в основном физиками, наглядная аналогия с механическим маятником использовалась с самого начала, хотя в полной мере значение такой модели для теории нелинейных колебаний выяснилось много позднее[6].

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Описанная выше наглядная и, я бы сказал, приятная картина стабилизации резонанса нелинейностью, к сожалению, осуществляется далеко не всегда. Дело в том, что стабилизация имеет место только в том случае, когда возмущение эффективно действует только на одной частоте, т. е. имеется только один резонанс. Если же их хотя бы два, то картина движения кардинально меняется. Анализ возникающего при этом взаимодействия нелинейных резонансов (или, короче, резонансный анализ) является одним из основных физических подходов к проблемам нелинейных колебаний гамильтоновых систем. Иначе говоря, физик прежде всего старается выяснить, какие резонансы играют роль в той или иной системе и как они взаимодействуют друг с другом.

Роль этого взаимодействия удобно проследить на модели, движение которой описывается так называемым отображением (преобразованием) ее динамических переменных, например таким:

$$\bar{E}=E+k\sin\theta;\ \bar{\theta}=\theta+T\omega(\bar{E}),$$

где k — малый параметр возмущения. При таком методе описания движения, восходящем еще к работам А. Пуанкаре и получившем в последнее время широкое распространение, динамическое состояние системы, например фаза $\theta$ и энергия E, фиксируется не непрерывно, а лишь в определенные моменты времени, в данном случае через один и тот же интервал времени T. Отображение связывает состояние системы $(\theta, E)$ в данный момент времени и через период T, когда динамические переменные имеют значение $\bar{\theta}$, $\bar{E}$. Такой метод описания движения можно назвать также стробоскопическим, поскольку мы как бы наблюдаем систему только в моменты очень коротких вспышек света, следующих друг за другом периодически.

Возможна другая интерпретация отображения, которую мы и используем ниже. Можно считать, что отображение как бы заменяет непрерывное возмущение эквивалентным коротким «толчком», который изменяет энергию E сразу на конечную величину $\Delta E=\bar{E}-E=k\sin\theta$. Точно так же, вообще говоря, сложное изменение фазы между толчками $(\Delta\theta=\bar{\theta}-\theta)$ заменяется на равномерное вращение фазы с некоторой эффективной частотой $\omega(\bar{E})$, зависящей от значения энергии после первого толчка.

Чтобы задать отображение, т. е. найти связь между переменными $(\theta, E)$ через интервал времени T, нужно каким-то образом проинтегрировать уравнения движения исходной системы на этом интервале, т. е. частично уже решить исходную задачу. По этой и по другим причинам, исследование отображения много проще, чем исходных непрерывных уравнений движения. Такое «разделение труда» оказывается в ряде случаев очень эффективным[7].

Разумеется, не любая динамическая система может быть описана таким простым отображением, как приведенное выше, однако во многих интересных случаях это оказывается возможным. Более того, это отображение можно еще упростить, сведя его к так называемому стандартному отображению:[8]

$$\bar{\omega}=\omega+K\sin\theta,$$
$$\bar{\theta}=\theta+\bar{\omega}=\theta+\omega+K\sin\theta,$$

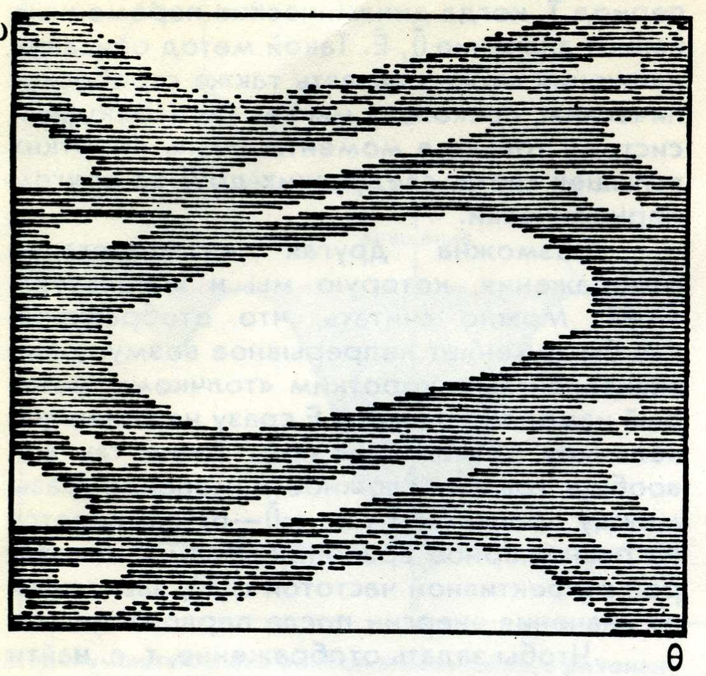
где $\omega$ имеет смысл некоторой эффективной частоты колебаний осциллятора, если за единицу времени выбрать период между толчками: $T=1$. Динамика этой модели полностью определяется единственным параметром возмущения K. Возмущение изменяет здесь непосредственно частоту $\omega$, что в явном виде выражает нелинейность моделируемых колебаний.

---

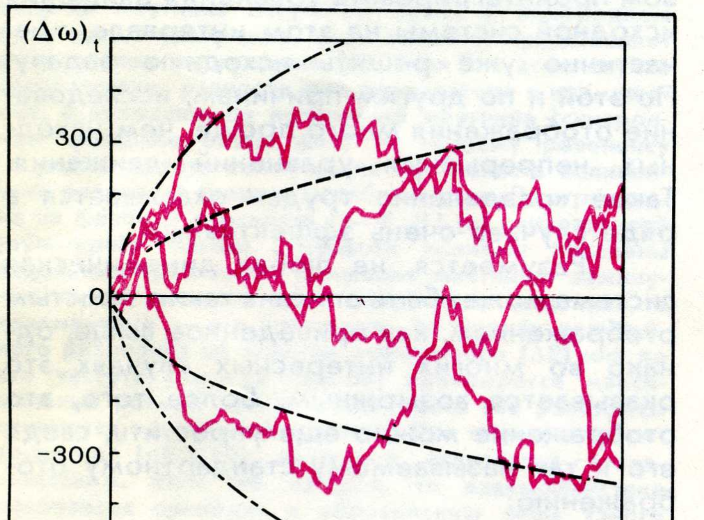
6 Чириков Б. В. Нелинейный резонанс. Новосибирск, 1977, с. 31; Chirikov B. V.— Phys. Reps., 1979, v. 52, № 5, p. 278.

7 Пожалуй, наиболее интересная задача, которую удалось решить таким методом, связана с оценкой ширины стохастического слоя вокруг сепаратрисы нелинейного резонанса, о чем будет рассказано ниже.

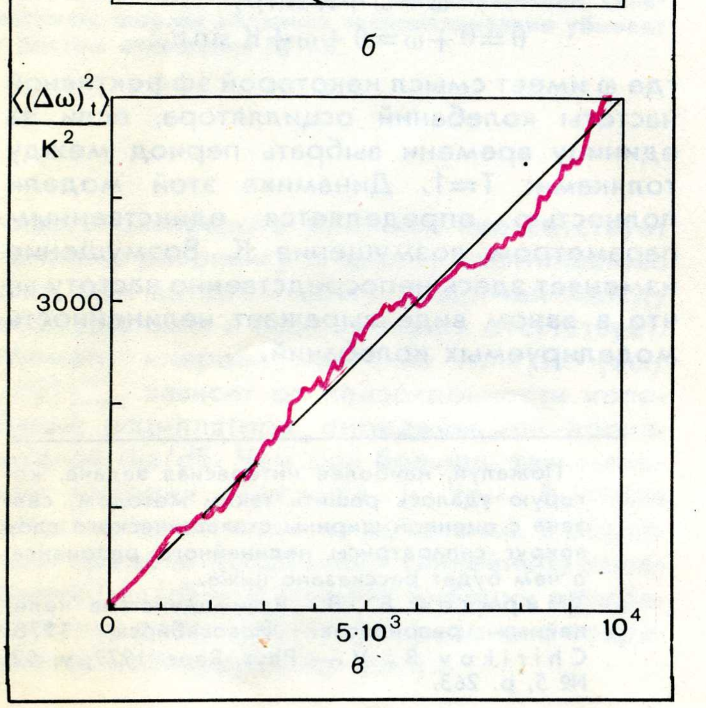
8 Чириков Б. В. Взаимодействие нелинейных резонансов. Новосибирск, 1978; Chirikov B. V.— Phys. Reps. 1979, v. 52, № 5, p. 263.



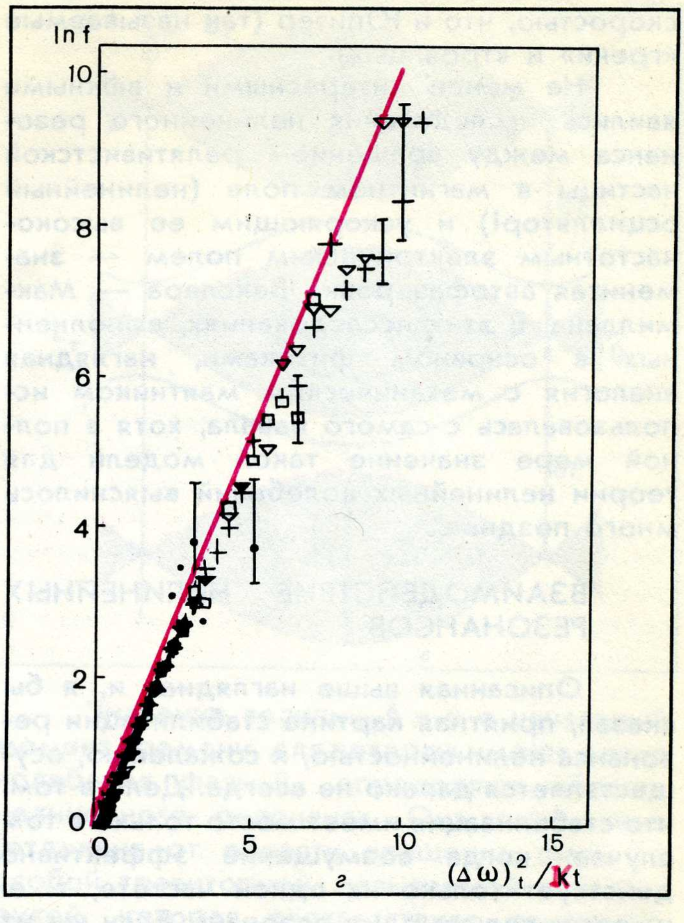

а




б




в




г

**Результаты численного итерирования стандартного отображения $\bar{\omega} = \omega + K \sin \theta, \bar{\theta} = \theta + \bar{\omega}$ на ЭВМ. Участок фазовой плоскости (а) стандартного отображения при $K = 1{,}13$: область стохастического движения заштрихована и по площади примерно равна дополнительной области устойчивого (квазипериодического) движения. При $K = 5$ область стохастического движения занимает уже 98% всей площади. Движение в этой области становится неограниченным при $K > 1$ и имеет характер диффузии по $\omega$. Отдельные стохастические траектории (цветные линии на рис. б) существенно нерегулярны, однако среднее значение $\langle (\Delta\omega)_t^2 \rangle$, вычисленное по 100 траекториям с различными начальными условиями (цветная линия на рис. в), растет приблизительно пропорционально времени $t$, которое измеряется в числе итераций отображения; $(\Delta\omega)_t$ — изменение $\omega$ за $t$ итераций. Прямая $\langle (\Delta\omega)_t^2 \rangle / K^2 = t/2$ дает среднюю скорость диффузии для случайных значений фазы $\theta$. Этой прямой на рисунке (б) соответствуют две пунктирные кривые (среднеквадратичные флуктуации $(\Delta\omega)_t$); штрихпунктирные кривые показывают асимптотически максимальные флуктуации $[(\Delta\omega)^2_{max} / \langle (\Delta\omega)_t^2 \rangle \to 2 \ln \ln t;\ t \to \infty)$. Функция распределения $f((\Delta\omega)_t, t)$ — вероятность различных значений $(\Delta\omega)_t$ — близка к гауссовой (прямая на рис. г). Данные на рис. б, в и г получены при $K = 5$.**

Посмотрим прежде всего, какие резонансы действуют в рассматриваемой модели. Условие резонанса состоит в том, чтобы фаза возмущения изменялась между толчками на величину, кратную $2\pi$. Это дает для резонансного значения частоты выражение $\omega_r = n\Omega = 2\pi n$, где $n$ — любое целое число, а $\Omega$ — основная частота внешнего возмущения (толчков), равная в данном случае $2\pi$. Итак, резонансов теперь бесконечно много и все они расположены на одинаковом расстоянии друг от друга: $\delta\omega = 2\pi$. Поскольку ширина каждого резонанса ($\Delta\omega \simeq 4\sqrt{K}$) растет с ростом возмущения, ясно, что при достаточно большом $K$ (большем, чем $\pi^2/4$) вместо стабилизации резонансного возмущения движение будет совершенно иным.

Качественно его можно представить себе следующим образом. Пусть вначале система находилась точно в одном из резонансов ($\omega_0 = 2\pi n_0$). Под действием возмущения система, как и прежде, начнет выходить из этого резонанса, однако, в отличие от случая единственного резонанса, она попадет теперь в область соседнего резонанса. После этого, в зависимости от конкретных значений фазы, система может либо вернуться назад, в исходный резонанс, либо проследовать дальше, в область соседнего резонанса. Такая ситуация называется перекрытием резонансов. То, что при этом траектория движения будет иметь довольно сложный вид, кажется вполне понятным. Удивительно другое — при $K \gg 1$ движение модели, заданной стандартным отображением, допускает очень простое статистическое описание. Согласно множеству численных экспериментов[9], последовательные значения фазы $\theta$ в этом случае можно с хорошей точностью считать случайными и независимыми, равномерно распределенными во всем интервале $(0, 2\pi)$. В свое время все это казалось настолько странным, что многие просто отказывались верить, искали какие-то побочные эффекты, например ошибки счета (в частности, округления[10]), чтобы как-то понять простой и ясный результат численного моделирования стандартного отображения — случайный характер движения этой несложной на вид и, казалось бы, полностью детерминированной системы.

Статистические свойства стандартного отображения характеризуются, в частности, тем, что изменение частоты $\omega$ от времени происходит по закону диффузии со скоростью

$$D = \frac{\langle (\Delta\omega)_t^2 \rangle}{t} \simeq \frac{K^2}{2} \quad (K \gg 1).$$

Здесь $(\Delta\omega)_t$ — изменение $\omega$ за $t$ итераций (периодов отображения, $t \to \infty$), а усреднение производится по многим траекториям с произвольными начальными условиями или по отрезкам одной стохастической траектории. Диффузия означает, в свою очередь, апериодическое убывание автокорреляций фазы, а значит, и непрерывный спектр движения. В этом — одно из характерных отличий стохастического движения от регулярного (квазипериодического), спектр которого является дискретным. Более того, вероятность различных значений $(\Delta\omega)_t$, флуктуации диффузии, описываются законом Гаусса:

$$f((\Delta\omega)_t, t) = \frac{e^{-(\Delta\omega)_t^2/2Dt}}{\sqrt{2\pi Dt}}.$$

Это уже очень сильное статистическое свойство, именуемое в теории вероятностей центральной предельной теоремой.

## НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ПРИРОДЕ ХАОСА

Многочисленные исследования, подобные описанным выше, убедительно свидетельствуют, что при определенных условиях движение даже очень простых (с малым числом степеней свободы) динамических систем удивительно похоже на случайное. Более глубокое изучение этого вопроса привело к неожиданному выводу: такое движение не только похоже, но и принципиально неотличимо от случайного. Этот фундаментальный результат получается при так называемом алгоритмическом подходе к теории динамических систем, который сравнительно недавно был

[9] Там же.

[10] Не имея возможности подробно обсуждать здесь этот интересный вопрос, заметим только, что так называемые ошибки округления на цифровой ЭВМ приводят к прямо противоположному результату — после достаточно большого числа итераций любая траектория становится периодической! Этот неожиданный на первый взгляд результат, вообще говоря, хорошо известен из теории и практики так называемых генераторов псевдослучайных чисел (см., напр.: Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на ЭВМ. М., 1965, с. 59). Применительно к численному моделированию динамических систем этот вопрос обсуждается в работах: Rannou F.— Astron. and Astrophys, 1974, v. 31, p. 289; Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Переходная стохастичность в квантовой механике. Препринт Института ядерной физики. Новосибирск, 1980, № 80—210, с. 33.

предложен А. Н. Колмогоровым и развивается его учениками и последователями[11].

Откуда же берется все то бесконечное разнообразие и невообразимая сложность, которые мы привыкли ассоциировать со случайными процессами? Оказывается, что источником и первопричиной случайности является непрерывность фазового пространства динамической системы (т. е. обычного пространства и пространства скоростей, или, точнее, импульсов системы). Именно в силу этой непрерывности начальные условия движения, те самые, которые полностью определяют все прошлое и будущее детерминированной системы, задаются в виде нескольких иррациональных чисел, т. е. в виде бесконечной непериодической последовательности цифр. Эта последовательность и содержит в себе уже с самого начала весь будущий (и прошлый) случайный процесс на данной траектории. Иными словами, почти любая точка непрерывного пространства уже таит в себе бесконечный случайный процесс. Оговорка «почти» относится к некоторым исключительным точкам (которые соответствуют, например, рациональным числам), однако фундаментальным свойством непрерывного пространства является то, что все эти особые (неслучайные) точки составляют, как говорят, множество меры нуль, т. е. их «общий объем» в пространстве равен нулю.

Роль динамической системы в этой картине сводится лишь к «развертыванию» микроскопической случайности начальной точки траектории в макроскопическую случайность движения по этой траектории[12]. Это достигается с помощью механизма локальной неустойчивости движения, т. е. очень быстрой (экспоненциальной) расходимости близких траекторий. Такая неустойчивость как раз и приводит к тому, что рано или поздно движение системы будет определяться сколь угодно мелкими деталями начальных условий. Ясно поэтому, что локальная неустойчивость движения является главным условием случайности в динамической системе[13].

Существенно, что эта же самая локальная неустойчивость траекторий обеспечивает устойчивость всех статистических характеристик движения (средних значений величин, функций распределения и пр.) по отношению к малым изменениям как начальных условий, так и любых возмущений системы. Это чрезвычайно важное свойство стохастического движения было выяснено в работах Д. В. Аносова[14]. Механизм такой «статистической устойчивости» можно наглядно представить себе следующим образом. Из-за сильной локальной неустойчивости движения в малой окрестности одной из траекторий системы всегда можно найти начальные условия, соответствующие и любой другой траектории этой системы. Поэтому малое возмущение лишь как бы «переставляет» траектории, слегка сдвигая соответствующие им начальные условия.

## НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Как отмечалось выше, многие конкретные задачи нелинейной динамики могут быть сведены (приближенно) к стандартному отображению. Примером служит движение заряженной частицы в так называемой ловушке с магнитными пробками (пробкотроне). Такое устройство было придумано около 30 лет назад Г. И. Будкером в СССР и независимо Р. Ф. Постом в США как метод удержания горячей плазмы для осуществления управляемого термоядерного синтеза[15].

Удержание частиц вдоль магнитных линий пробкотрона происходит за счет адиабатического (приближенного) сохранения орбитального магнитного момента частицы $\mu$. Вследствие резонансов между

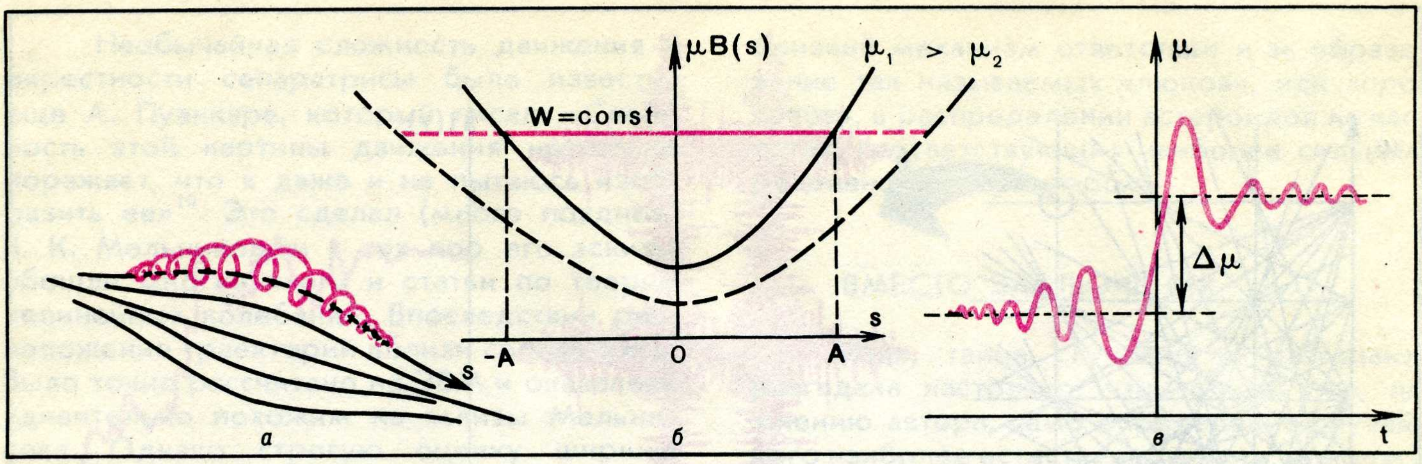
[11] Автору неизвестно сколько-нибудь доступное изложение этого нового и очень интересного направления. Тем не менее некоторое общее представление об этом круге идей при желании можно составить, например, из следующих математических работ, содержащих также и неформальные разъяснения: Алексеев В. М., Якобсон М. В. Символическая динамика и гиперболические динамические системы. Добавление в книге: Р. Боуэн. Методы символической динамики, М., 1979, с. 198; Брудно А. А. Энтропия и алгоритмическая сложность траекторий динамической системы. Препринт ВНИИ системных исследований. М., 1980.

[12] В таком качестве сама по себе динамическая система (и уравнения ее движения) может быть и очень простой — факт, казавшийся еще недавно столь парадоксальным. Теперь мы понимаем, что простота системы лишь маскирует истинный источник случайности ее движения.

[13] См. сноски 2, 3.

[14] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, № 90.

[15] О ловушках с магнитными пробками см.: Чуянов В. А. Второе рождение открытых ловушек.— Природа, 1982, № 2, с. 2.




**Движение заряженной частицы в магнитной ловушке Будкера. Схема траектории (а) — спираль между точками отражения, навивающаяся на магнитную линию; s — координата вдоль магнитной линии. Эффективная потенциальная энергия продольных колебаний $\mu B(s)$ (б) пропорциональна магнитному моменту частицы $\mu$ и напряженности магнитного поля B(s). В адиабатическом приближении ($\mu$=const) продольные колебания ограничены точками отражения $s=\pm A$. Вследствие резонансов между ларморовским вращением и продольными колебаниями $\mu$ может уменьшаться, что приводит к росту амплитуды A продольных колебаний. Оказывается, что основное изменение $\mu$ за один пролет частицы вдоль магнитной линии происходит в окрестности минимального значения B в точке s=0 (в) и может быть приближенно описано стандартным отображением. При определенных условиях изменения $\Delta\mu$ накапливаются за много пролетов случайным образом, что приводит к диффузии по $\mu$ и по A и, в конечном счете, к потерям частиц вследствие ухода их через пробки (вдоль магнитных линий).**

ларморовским вращением и продольными колебаниями частицы величина $\mu$ медленно изменяется. Этот процесс (в аксиально симметричном пробкотроне) приближенно описывается стандартным отображением. В результате можно найти условия удержания частицы в ловушке, которые неплохо согласуются с результатами численного моделирования[16]. Буквально та же задача возникает и при исследовании динамики протонов высоких энергий в радиационных поясах Земли[17].

Остановимся более подробно еще на одном приложении резонансного анализа, на этот раз к изучению тонкой структуры самого нелинейного резонанса. Один резонанс — это «маятник», движение которого является просто периодическим (колебания или вращение). Ну, а если добавить малое возмущение, причем далекое от резонанса, например с большой частотой $\Omega\gg\sqrt{F}=\Omega_0$?

Пусть уравнение движения имеет вид (M=1):

$$\ddot{\theta}=-F\sin\theta+G[\sin(\theta-\Omega t)+\sin(\theta+\Omega t)].$$

Здесь G, $\Omega$ — соответственно амплитуда и частота возмущения. В механической модели маятника такое возмущение может соответствовать, например, быстрой вибрации его точки подвеса, а в картине взаимодействия резонансов — возмущению одного из резонансов остальными вдали от перекрытия резонансов, т. е. в условиях, когда каждый резонанс можно, казалось бы, рассматривать отдельно. Будет ли при этом движение всюду регулярным, как в случае единственного резонанса? Оказывается, что нет. На месте невозмущенной сепаратрисы маятника образуется стохастический слой со случайным движением. В рассматриваемом примере ширина этого слоя есть[18]:

$$(\Delta W)_s\simeq 8\pi G\left(\frac{\Omega}{\sqrt{F}}\right)^3\exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Omega}{\sqrt{F}}\right).$$

Она определяется, в основном, амплитудой этого же резонанса F или, точнее, отношением частот $(\Omega/\Omega_0\simeq\Omega/\sqrt{F})$ возмущения со стороны других резонансов (взаимодействие резонансов!) и фазовых колебаний на данном резонансе. При $F\to 0(\Omega/\Omega_0\to\infty)$ ширина слоя становится экспоненциально малой, однако он сохраняется при сколь угодно слабом взаимодействии резонансов и в этом смысле является универсальным.

[16] Чириков Б. В.— Физика плазмы, 1978, т. 4, № 3, с. 527; Chirikov B. V.— Phys. Reps., 1979, v. 52, № 5, p. 292.
[17] Ильин В. Д., Ильина А. Н.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, вып. 3, с. 983.

[18] Приведенная формула справедлива при условии $G/F\ll 1$. При $G/F\geqslant\Omega/\sqrt{F}$ образуется вторая устойчивая область вокруг $\theta=\pi$ (помимо обычной области вокруг $\theta=0$) — так называемый маятник Капицы. Эта область сохраняется до значений $G\leqslant\Omega^2$. Конфигурация стохастического слоя при этом существенно изменяется.

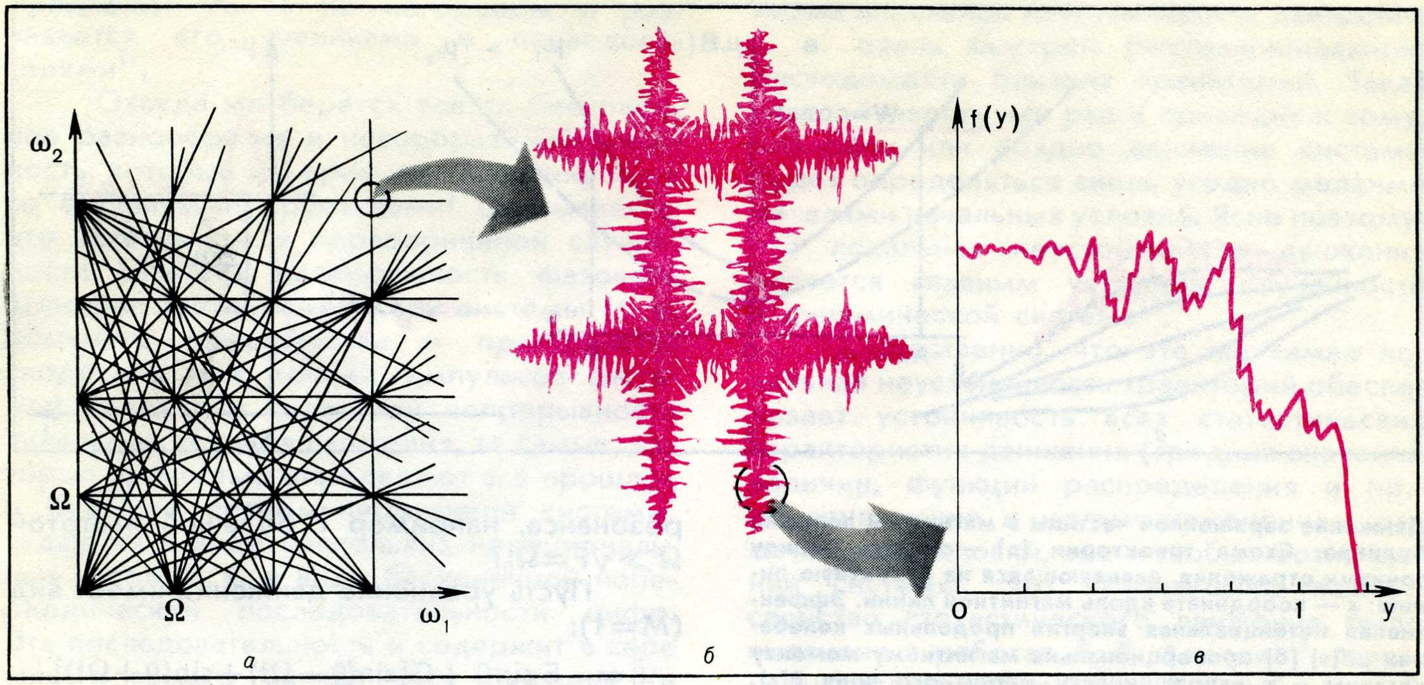
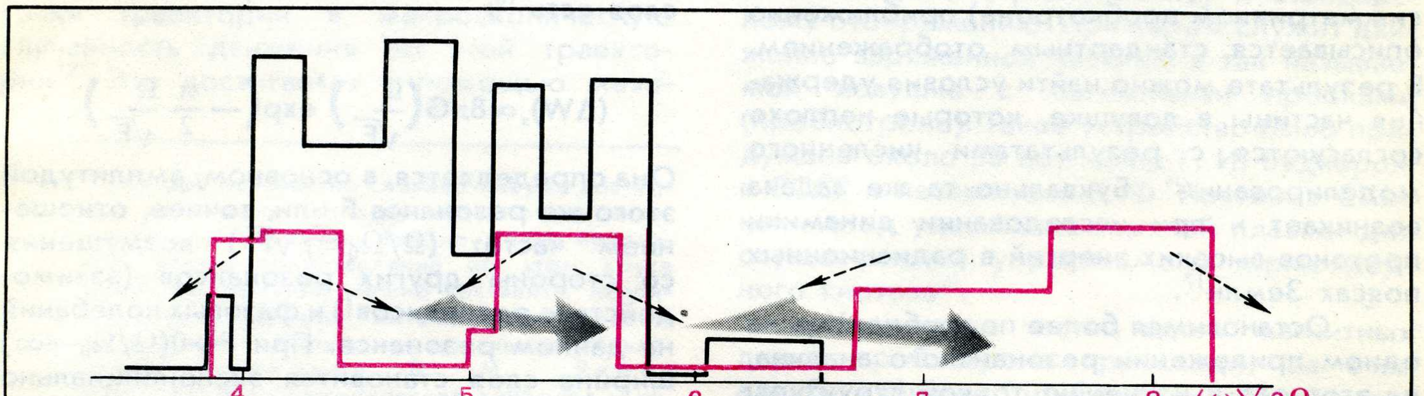



Схема резонансов $n_1\omega_1+n_2\omega_2+n\Omega=0$ (а) для осциллятора с двумя степенями свободы ($\omega_1$, $\omega_2$ — основные невозмущенные частоты), находящегося под действием внешнего возмущения с основной частотой $\Omega$ ($n_1$, $n_2$, $n$ — целые числа). Под действием возмущения осциллятор движется таким образом, что все время сохраняется одно из резонансных соотношений между частотами. Это движение оказывается стохастическим и называется диффузией Арнольда. В точках пересечения нескольких резонансных линий происходит случайный переход на одну из них. На схеме показаны наиболее сильные резонансы, которые соответствуют малым $n_1$, $n_2$ и $n$. Полная система резонансов покрывает плоскость ($\omega_1$, $\omega_2$) всюду плотно, однако скорость диффузии быстро падает с ростом $n_1$, $n_2$ и $n$. Движение вдоль любой горизонтальной прямой ($n_1=0$) вызывает изменение только частоты $\omega_1$ (и соответствующее изменение энергии осциллятора), а движение вдоль вертикальной прямой ($n_2=0$) — только частоты $\omega_2$. Для остальных резонансов изменяются обе частоты. Более детальная структура пересечения двух резонансов (б) показывает, что диффузия идет фактически по тонким стохастическим слоям (цветные области на рис. б). Хотя относительная площадь стохастических слоев мала, они играют роль плотной системы «стоков», попав в которые (под действием любого слабого внешнего «шума»), система может относительно быстро перемещаться затем по системе пересекающихся слоев. Структура отдельного стохастического слоя (в) выявляет однородную центральную часть слоя ($|y|\leqslant 0{,}4$) с относительно быстрой диффузией и сложную периферическую часть; здесь $f(y)$ — равновесная функция распределения в зависимости от координаты $y$ поперек слоя, измеренной в единицах теоретической полуширины слоя.




А.Н. Ясенецкий

Распределение электронов в магнитной ловушке — цветная линия (Пономаренко В. Г., Трайнин Л. Я., Юрченко В. И. — ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 3) — и астероидов в Солнечной системе ($\Omega$ — частота продольных колебаний электрона; $\langle\omega\rangle$ — ларморовская частота, усредненная по продольным колебаниям; $\omega_А$, $\omega_Ю$ — частоты астероида и Юпитера). В принятой нормировке равновесное распределение не зависело бы от частоты. На самом деле для обоих распределений характерны глубокие «провалы» в окрестности целых и дробных (для астероидов) резонансов. «Провалы» вызваны, возможно, диффузией Арнольда вдоль этих резонансов. В случае электронов рассеяние на остаточном газе в камере ловушки приводит к диффузионному потоку в «провалы» (пунктирные стрелки), который продолжается затем вдоль резонансов (сплошные стрелки) до выхода из ловушки. Аналогичный механизм действует, возможно, и в Солнечной системе.

Необычайная сложность движения в окрестности сепаратрисы была известна еще А. Пуанкаре, который писал: «Сложность этой картины движения настолько поражает, что я даже и не пытаюсь изобразить ее»[19]. Это сделал (много позднее) В. К. Мельников, и с тех пор его эскизы обошли многие книги и статьи по теории нелинейных колебаний. Впоследствии расположение траекторий вблизи сепаратрисы было точно рассчитано на ЭВМ и оказалось удивительно похожим на эскизы Мельникова. Однако строгую оценку ширины стохастического слоя до сих пор получить не удалось, а приведенный выше результат основан на приближенном описании движения в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса с помощью стандартного отображения.

В системах с числом степеней свободы $N \leqslant 2$ стохастические слои не играют существенной роли, так как движение в них хотя и нерегулярно, но строго ограничено пределами слоя. Однако при $N > 2$ ситуация кардинально изменяется. Теперь уже взаимодействие резонансов приводит к блужданию не только поперек узкого слоя, но и вдоль него, т. е. приблизительно вдоль резонанса. А так как при $N > 2$ различные резонансы пересекаются друг с другом в фазовом пространстве системы, то возникает хотя и медленное, но неограниченное блуждание системы по резонансам, получившее название диффузии Арнольда — по имени советского математика В. И. Арнольда, который предсказал этот удивительно красивый механизм нелинейной динамики и продемонстрировал его на простой модели[20].

Эффективная оценка скорости диффузии Арнольда чрезвычайно сложна. Строгая оценка сверху получена Н. Н. Нехорошевым, учеником Арнольда. Хотя в некоторых случаях упрощенные оценки неплохо согласуются с численным моделированием диффузии Арнольда, сколько-нибудь полный анализ реальных экспериментов провести пока не удалось. Тем не менее ряд качественных соображений указывает на существенную роль диффузии Арнольда как в лабораторных экспериментах по динамике заряженных частиц в магнитных ловушках, так и в радиационных поясах Земли. Не исключено также, что подобный или близкий механизм ответствен и за образование так называемых «люков», или «провалов», в распределении астероидов на частотах, соответствующих наиболее сильным резонансам с Юпитером.

[19] Пуанкаре А. Избранные труды. М., 1972, т. II, с. 339.

[20] Арнольд В. И. — Доклады АН СССР, 1964, т. 156, № 1, с. 9; см. также: Chirikov B. V. — Phys. Reps., 1979, v. 52, № 5, p. 346.

## ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Итак, тайна случайности разгадана, разгадана настолько, что теперь уже, по мнению автора, само определение случайного наиболее естественно давать, опираясь именно на такой стохастический предельный случай детерминированного динамического процесса. Что же дальше? Приложения в механике, физике, химии, биологии, экономике...? Конечно! Но не только это. Сейчас самое время напомнить, что вся эта красивая случайная динамика относится только к классической механике, которая является не более чем весьма грубым, вообще говоря, приближением к действительности. Сохраняется ли динамическая стохастичность в квантовой механике? Такой вопрос был поставлен Н. С. Крыловым[21] около 35 лет тому назад. Он же дал на него и четкий отрицательный ответ, который с тех пор не изменился. Увы, дискретность спектра любой ограниченной в фазовом пространстве квантовой системы, равно как и дискретность самого фазового пространства в квантовой механике, полностью исключают и экспоненциальную локальную неустойчивость движения, и диффузию, и гауссовы флуктуации, не говоря уже о настоящей случайности. Остается только эргодичность — самое слабое из статистических свойств, на котором остановилась старая эргодическая теория. Спираль познания сделала полный виток, и все надо начинать сначала... Но это уже другая история.

[21] См. сноску 4.