

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

---

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

ВЫПУСК

13

Под редакцией  
академика Б. Б. КАДОМЦЕВА



УДК 533.9.01

**Вопросы теории плазмы: Сб. статей. Вып. 13/Под общей ред. акад. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.**

Включены обзоры, процессы переноса в открытых ловушках, удержание заряженных частиц в магнитных полях, нагрев плазмы электронными циклотронными волнами и уширение спектральных линий в плазме.

Для научных работников, занимающихся физикой плазмы и проблемами термоядерной энергетики.

Ил. 54. Библиогр. 279.

Редколлегия: А. А. Галеев, В. В. Параил, О. П. Погуце,  
Д. Д. Рютов

**§ 1. Введение. Задача Будкера [1]**

Исследование динамики отдельных (невзаимодействующих) заряженных частиц в магнитной ловушке является, вероятно, простейшей из задач по длительному удержанию плазмы для осуществления управляемого термоядерного синтеза. Тем не менее и эта «простая» задача оказывается вполне содержательной и все еще далекой от полного решения, несмотря на многолетние усилия в этом направлении (см., например, [2—4]). Кроме того, динамика отдельной частицы является неотъемлемой составной частью и любой более сложной задачи о коллективных процессах в плазме. Наконец, к задаче об удержании отдельной частицы в магнитной ловушке приходится возвращаться каждый раз, когда появляется новая схема или существенная модификация старого способа магнитного удержания плазмы\*. Примером может служить амбиполярная ловушка Димова [7]. Она относится к классу так называемых открытых систем магнитного удержания плазмы, или ловушек с «магнитными пробками», о которых и пойдет речь ниже. Для краткости мы будем называть их просто ловушками.

Динамику частицы в ловушке можно рассматривать как задачу о нелинейных колебаниях системы, вообще говоря, с тремя степенями свободы, возможно, под действием некоторого внешнего возмущения. Термин «колебания» понимается здесь в широком смысле как синоним финитного движения частицы в ограниченной области пространства (удержание частицы). Иначе говоря, мы предполагаем, что конструкция ловушки (конфигурация магнитного поля) обеспечивает «запирание» частицы по крайней мере на время нескольких пролетов частицы через ловушку. В таких условиях основным фактором, определяющим характер длительной эволюции колебаний, являются резонансы, или соизмеримости периодов колебаний по различным степеням свободы, а также с внешним возмущением. Механизм действия резонансов особенно нагляден (и хорошо известен) в простейшем случае линейных колебаний. Нелинейная динамика много сложнее, однако и в этом

---

\* Некоторые простейшие эффекты взаимодействия частиц могут быть учтены и в рамках одночастичной задачи, например изменение конфигурации магнитного поля за счет диамагнетизма плазмы [5] или рассеяние частиц в плазме [6].

случае резонансные процессы являются выделенными по той же причине: малые резонансные возмущения повторяются во времени и могут накапливаться, приводя к большему эффекту за длительное время, чем нерезонансные возмущения. Это важное свойство можно положить в основу определения резонансных процессов в широком смысле.

Такой «резонансный» подход означает, образно говоря, что прежде чем решать ту или иную динамическую задачу, необходимо отыскать в ней резонансы, даже если на первый взгляд кажется очевидным, что их здесь нет. Прекрасным примером такой ситуации является действие на динамическую систему адиабатического (т. е. очень низкочастотного) возмущения, чему и посвящена в основном эта статья.

В соответствии с этим ниже мы уделим главное внимание возможно более полному анализу различных резонансов и их взаимодействия. Последнее означает эффект совместного действия нескольких резонансов, который не равен простой сумме эффектов от отдельных резонансов из-за нелинейности уравнений движения и соответственно несправедливости правила суперпозиции.

Оказывается, что при определенных условиях взаимодействие резонансов кардинально меняет характер движения, превращая его из хорошо известных регулярных, или квазипериодических, колебаний в относительно мало известное хаотическое (стохастическое) «блуждание» частицы в ее фазовом пространстве (см., например, [8, 9]). Последнее очень похоже (в некоторых случаях неотличимо) на случайные колебания, т. е. колебания под действием какого-то внешнего (по отношению к динамической системе) случайного возмущения, или «шума», хотя такого возмущения может и не быть. Этот необычный режим движения оказывается, как это ни странно, весьма распространенным как для нелинейных колебаний вообще, так и для частицы в магнитной ловушке в частности. С точки зрения длительного удержания частиц в ловушке возникновение хаотических колебаний является вредным, так как приводит, как правило, к потерям частиц вследствие их диффузии в фазовом пространстве.

В настоящем обзоре мы ограничимся обсуждением простейшего случая нелинейных колебаний с двумя степенями свободы, когда еще возможен хаотический режим движения в консервативной системе. Для задачи о движении частицы в ловушке это предполагает какую-то симметрию магнитного поля, а значит, и дополнительный (кроме энергии) точный интеграл движения. В случае аксиальной симметрии, например, дополнительным интегралом является проекция канонического момента частицы на ось симметрии. Движение происходит при этом по пересечению в фазовом пространстве поверхности постоянной энергии с поверхностью постоянного значения дополнительного интеграла.

Фактически, ниже рассматривается некоторый весьма специальный случай, когда связь между двумя степенями свободы является адиабатической, т. е. отношение основных невозмущенных частот

очень велико (или мало). Эта специальная задача, возникшая из анализа работы ловушки с магнитными пробками (задача Будкера), связана тем не менее с одной из классических проблем механики — проблемой адиабатической инвариантности переменных действия. Стоит отметить, что именно исследования по удержанию частиц в ловушках позволили значительно продвинуть решение и этой общей проблемы. В частности, выяснилось, что при определенных условиях адиабатический инвариант становится точным интегралом движения [10].

Эти и другие результаты обсуждаются ниже на примере динамики частиц в нескольких достаточно простых и в то же время характерных модификациях магнитной ловушки. В некоторых случаях задачу удастся решить до конца, т. е. найти в явном виде условия удержания частицы, с одной стороны, и статистические характеристики движения в неустойчивой области, с другой [2].

Автор признателен Г. И. Димову, Д. Д. Рютову и Д. Л. Шепелянскому за интересные обсуждения затронутых в статье вопросов, а также Г. Б. Минченкову за помощь в численном моделировании.

## § 2. Выбор невозмущенной системы

Как правило, аналитическое исследование возможно лишь с помощью каких-то приближенных методов, или теории возмущения. Первый шаг состоит поэтому в разделении исследуемой системы на невозмущенную часть и возмущение. Это разделение неоднозначно и диктуется конкретной физической задачей.

В рассматриваемом случае мы могли бы, например, взять в качестве невозмущенной системы частицу в однородном магнитном поле, отнеся пространственную неоднородность поля целиком к возмущению. Хотя невозмущенное движение оказывается при этом чрезвычайно простым, такой выбор не является наилучшим. Дело в том, что такое невозмущенное движение инфинитно и, следовательно, качественно отличается от действительного (возмущенного) движения. Говорят, что невозмущенное движение в этом случае вырождено (одна из основных частот системы равна нулю), а сколь угодно малое возмущение (неоднородность поля соответствующей конфигурации) приводит к бифуркации.

Чтобы выбрать более удобную для исследования невозмущенную систему, вспомним, что удержание частицы в открытой ловушке происходит за счет приближенного сохранения магнитного момента частицы  $\mu = mv_{\perp}^2 / 2B$ , который пропорционален адиабатическому инварианту (переменной действия  $J_{\perp}$  ларморовского вращения). Взяв в качестве основных единиц скорость света, заряд и массу частицы ( $c=e=m=1$ ), найдем:

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint (\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = v_{\perp}^2 / 2\omega = \mu. \quad (2.1)$$

Здесь индексом  $\perp$  отмечены величины, характеризующие движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ;  $\omega = B$  — ларморовская частота.

та. Ниже нас будет интересовать нерелятивистский случай ( $v \ll 1$ ), однако все соотношения сохраняют силу при произвольных скоростях, если произвести замену  $m \rightarrow \gamma m$ ;  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ . Выражение (2.1) для действия  $J_{\perp}$  является точным только в однородном поле. Мы можем, однако, определить невозмущенную систему, потребовав, чтобы именно эта величина была точным интегралом:

$$\mu \equiv \text{const.} \quad (2.2)$$

Знак тождества указывает на то, что последнее условие есть произвольный выбор невозмущенной системы, а не свойство величины  $\mu$ . Все изменения  $\mu$  мы отнесем к возмущению, которое будем предполагать достаточно малым. Последнее условие выполняется, как известно, для достаточно сильного магнитного поля, или, что эквивалентно, для достаточно малого ларморовского радиуса частицы (см. ниже, § 4).

Для аксиально-симметричной магнитной ловушки в пренебрежении скоростью дрейфа частицы невозмущенный гамильтониан имеет вид:

$$H^0(p, s) = v^2/2 = p^2/2 + \mu\omega(s), \quad (2.3)$$

где  $s$  — координата вдоль магнитной линии, а  $p = v_{\parallel} = \dot{s}$  — сопряженный импульс (и продольная скорость) частицы. Как видно, выбор невозмущенной системы с помощью условия (2.2) удобен еще и тем, что эффективная потенциальная энергия продольного движения оказывается при этом просто пропорциональной заданной напряженности магнитного поля. Зная гамильтониан (2.3), можно, в принципе, найти невозмущенное продольное движение частицы.

### § 3. Несколько примеров

1. **Вспомогательная система.** Для того чтобы наиболее просто выявить основные особенности динамики частицы в магнитной ловушке, рассмотрим наряду с различными вариантами ловушки также и вспомогательную модель с двумя степенями свободы, заданную гамильтонианом:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + (1 + x^2)^2 y^2}{2}, \quad (3.1)$$

где  $p_x = \dot{x}$ ;  $p_y = \dot{y}$ . Эквипотенциали этой системы  $[(1 + x^2)y = \text{const}]$  не замкнуты, так что закон сохранения энергии сам по себе еще не гарантирует финитность движения. Тем не менее, как мы увидим ниже (см. § 10), колебания этой системы оказываются при определенных условиях строго ограниченными. Если частота колебаний по  $x$  ( $x$ -колебаний) много меньше частоты  $y$ -колебаний, то система (3.1) качественно моделирует движение частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке. Действительно, колебания по  $y$  с переменной частотой  $\omega_y = 1 + x^2$  соответствуют ларморовскому вращению в неоднородном магнитном поле  $B = 1 + s^2$ . Переменная действия для этих колебаний

$$J_y = \omega_y a_y^2 / 2 = (1 + x^2) a_y^2 / 2 \equiv \text{const}, \quad (3.2)$$

где  $a_y$  — амплитуда колебаний по  $y$ . Последнее условие, как и (2.2), определяет невозмущенную систему, гамильтониан которой находим с помощью условия

$$\frac{p_y^2}{2} + \frac{\omega_y^2 y^2}{2} \equiv \omega_y J_y, \quad (3.3)$$

эквивалентного (3.2). Из (3.1) получаем

$$H^0 = p_x^2/2 + J_y(1 + x^2) = J_y + J_x \sqrt{2J_y}. \quad (3.4)$$

Невозмущенный гамильтониан зависит только от переменных действия, которые являются поэтому интегралами движения, и описывает независимые колебания по двум степеням свободы с частотами:

$$\omega_x = \partial H^0 / \partial J_x = \sqrt{2J_y}; \quad \langle \omega_y \rangle = \partial H^0 / \partial J_y = 1 + J_x / \sqrt{2J_y}. \quad (3.5)$$

Величина  $\langle \omega_y \rangle$  имеет смысл средней по времени частоты  $y$ -колебаний, ее можно получить, конечно, и непосредственным усреднением величины  $(1 + x^2)$ .

Важной особенностью рассматриваемых невозмущенных колебаний является их неизохронность — частоты колебаний зависят от действий (или амплитуд), хотя по форме как  $x$ -колебания, так и  $y$ -колебания оказываются почти гармоническими (частота  $y$ -колебаний медленно изменяется со временем).

**2. Короткая магнитная ловушка.** Примем, что поле ловушки имеет не только ось симметрии ( $r=0$  в цилиндрических координатах  $z, r, \varphi$ ), но и плоскость симметрии ( $z=0$ ). Пусть задано поле на оси ловушки:

$$B_z(z, 0) = B_{00}f(z); \quad f(0) = 1; \quad f(-z) = f(z); \quad B_r(z, 0) = 0, \quad (3.6)$$

где  $B_{00}$  — поле в центре ловушки ( $z=r=0$ ). Конфигурация поля на оси  $f(z)$  зависит, вообще говоря, как от внешних токов в обмотках ловушки, так и от токов в плазме. В достаточно малой приосевой области вектор-потенциал поля (3.6) можно записать в виде

$$A_\varphi(z, r) \approx B_{00} \left[ \frac{rf(z)}{2} + r^3 g(z) \right]. \quad (3.7)$$

Член, пропорциональный  $r^2$ , отсутствует из-за аксиальной симметрии поля. При заданной  $f(z)$  функция  $g(z)$  может быть любой в зависимости от токов в плазме. При отсутствии последних («вакуумное» поле)  $g(z) = -f''/16$  из  $\Delta \mathbf{A} = 0$ , или  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ . С принятой точностью поле в приосевой области

$$\left. \begin{aligned} B_z(z, r) &\approx B_{00} [f(z) + 4r^2 g(z)]; \\ B_r(z, r) &\approx -B_{00} \left[ \frac{rf'}{2} + r^3 g' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Существенно, что при заданном поле на оси токи в плазме дают лишь малые поправки порядка  $r^2$ . Пренебрегая ими, можно за-

писать зависимость напряженности поля вдоль магнитной линии в виде

$$B(s) \approx B_0 f(s); \quad B_0 \approx B_{00} [f(0) + 4r_0^2 g(0)] \approx B_{00}. \quad (3.9)$$

Индексом нуль здесь и далее обозначаются значения соответствующих величин в плоскости симметрии  $z=0$ .

Примером короткой ловушки является конфигурация поля, соответствующая

$$f(s) = 1 + (s/L)^2, \quad (3.10)$$

где  $L$  — продольный масштаб ловушки. Такая конфигурация является хорошим приближением для центральной части классической ловушки с магнитными пробками. Смысл термина «короткая ловушка» поясняется ниже (см. п. 3).

Используя результаты п. 1 этого параграфа, можно сразу написать для поля (3.10) невозмущенный гамильтониан

$$H^0 = p^2/2 + \mu\omega_0 \left(1 + \frac{s^2}{L^2}\right) = \mu\omega_0 + J\sqrt{2\mu\omega_0}/L \quad (3.11)$$

и частоты

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\mu) = \partial H^0 / \partial J = \sqrt{2\mu\omega_0}/L; \quad \langle \omega(\mu, J) \rangle &= \omega_0 + \frac{J\sqrt{\omega_0}}{L\sqrt{2\mu}} = \\ &= \omega_0 \left(1 + \frac{a^2}{2L^2}\right) = \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \beta_0}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Здесь  $a$  — амплитуда продольных колебаний частицы;  $J = \Omega a^2/2$  — продольное действие;  $\beta_0$  — угол наклона вектора скорости частицы к магнитной линии (при  $s=0$ ).

Рассматриваемый пример (3.10) можно было бы назвать также гармонической ловушкой (по форме продольных колебаний).

**3. Длинная магнитная ловушка.** Эта конфигурация отличается почти постоянным полем на большей части длины ловушки с относительно короткими и крутыми пробками. Такое поле характерно для амбиполярной ловушки Димова [7]. Будем описывать ее посредством [4]

$$f(s) = 1 + (s/L)^n, \quad (3.13)$$

где  $n$  — некоторое четное число. Величина  $L$  по-прежнему характеризует длину всей ловушки, тогда как размер пробки имеет порядок

$$l = L/n. \quad (3.14)$$

Короткая ловушка соответствует  $n=2$  и  $l \sim L$ , а для длинной  $n \gg 1$  и  $l \ll L$ , т. е. размер пробок много меньше размера всей ловушки. Это и отражают термины «короткая» и «длинная» ловушка.

При  $n \gg 1$  эффективную потенциальную энергию продольного движения можно приближенно представить в виде прямоугольной



ямы длиной  $2L$ . Невозмущенный гамильтониан (2.3) принимает при этом вид:

$$H^0 = p^2/2 + \mu\omega_0 f(s) \approx J^2/2M + \mu\omega_0. \quad (3.15)$$

Напомним, что  $\omega_0$  не зависит от  $s$  на заданной магнитной линии. Величина  $M = (2L/\pi)^2$ , а продольное действие

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p ds \approx \frac{2L}{\pi} p. \quad (3.16)$$

Основные невозмущенные частоты:

$$\Omega = \frac{J}{M} = \frac{\pi}{2L} p; \quad \langle \omega \rangle \approx \omega_0. \quad (3.17)$$

**4. Многопробочная ловушка [11].** Такая ловушка представляет собой цепочку обычных ловушек, или, иначе, длинную ловушку с гофрированным магнитным полем, напряженность которого изменяется вдоль ловушки периодически (в простейшем случае). Зададим конфигурацию поля в такой ловушке в виде

$$f(s) = \frac{1}{2} \left[ (\lambda + 1) - (\lambda - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right) \right], \quad (3.18)$$

где  $\lambda = f_{\text{макс}}/f_{\text{мин}}$  — пробочное отношение. Невозмущенный гамильтониан (2.3) принимает теперь вид:

$$H^0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\mu\omega_0}{2} \left[ (\lambda + 1) - (\lambda - 1) \cos\left(\frac{\pi s}{L}\right) \right]. \quad (3.19)$$

Уравнения движения такой системы, как известно, полностью интегрируются в эллиптических функциях (см., например, [8, 12—14]). Модуль эллиптических интегралов  $k$  выражается через параметры системы посредством

$$k^2 = \begin{cases} \frac{W}{\mu\omega_0(\lambda - 1)}; & H^0 < \lambda\mu\omega_0; \\ \frac{\mu\omega_0(\lambda - 1)}{W}; & H^0 > \lambda\mu\omega_0, \end{cases} \quad (3.20)$$

где  $W = H^0 - \mu\omega_0$  — невозмущенная энергия, отсчитываемая от минимума потенциала ( $\mu\omega_0$ ). Первый режим движения соответствует запертым частицам, совершающим ограниченные по  $s$  колебания, а второй — пролетным частицам. Граничная траектория, разделяющая оба режима ( $H^0 = \lambda\mu\omega_0$ ), называется сепаратрисой. Схема фазовых траекторий системы (3.19) изображена на рис. 1.

Для запертых частиц частота продольных колебаний дается выражением

$$\langle H^0 \rangle = \frac{\pi\Omega_0}{2\mathcal{K}(k)}, \quad (3.21)$$

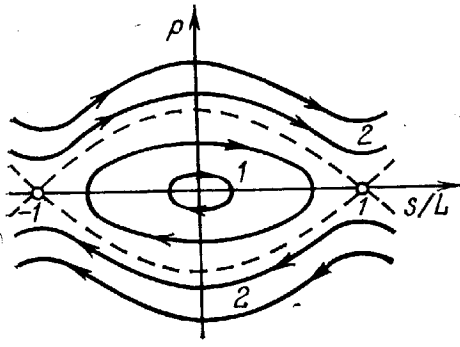


Рис. 1. Схема невозмущенных фазовых траекторий в многопролочной ловушке:

1 — запертые частицы; 2 — пролетные частицы; сепаратриса показана пунктиром

где  $\mathcal{K}$  — полный эллиптический интеграл первого рода, а

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\mu\omega_0(\lambda-1)}{2}} \quad (3.22)$$

частота малых колебаний. Для пролетных частиц основная частота продольного движения может быть представлена в виде, аналогичном (3.21):

$$\Omega_{\text{пр}} \equiv 2\pi/T_{\text{пр}} = \pi\Omega_r/2\mathcal{K}(k), \quad (3.23)$$

где  $T_{\text{пр}}$  — время пролета периода поля (3.18), а

$$\Omega_r = \frac{\pi}{L} \sqrt{2W} \quad (3.24)$$

частота свободного движения (при  $\lambda=1$ ). Заметим, что в рассматриваемом случае  $k=2\Omega_0/\Omega_r$  (3.20).

В дальнейшем нас будет особенно интересовать движение вблизи сепаратрисы, расстояние до которой по энергии мы будем характеризовать безразмерной величиной

$$\omega = (H^0 - \lambda\mu\omega_0) \frac{2}{(\lambda-1)\mu\omega_0}. \quad (3.25)$$

Малая окрестность сепаратрисы соответствует  $|\omega| \ll 1$ , причем для запертых частиц  $\omega < 0$ , а для пролетных  $\omega > 0$ . В обоих режимах  $k^2 \rightarrow 1 - |\omega|/2$ ;  $\Omega_r \rightarrow 2\Omega_0$  и

$$\Omega(\omega) \approx \frac{\Omega_{\text{пр}}(\omega)}{2} \rightarrow \frac{\pi\Omega_0}{\ln\left(\frac{32}{|\omega|}\right)}. \quad (3.26)$$

Хотя частоты в обоих режимах и отличаются в 2 раза [период пролетной частицы составляет ровно половину периода запертой (см. рис. 1)], движения в обоих случаях близки друг к другу и к движению по сепаратрисе, которое выражается через элементарные функции:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_c = p_c(s) &= \pm \frac{2}{\pi} L\Omega_0 \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right); \\ \frac{s_c(t)}{L} &= \frac{4}{\pi} \text{arctg}(e^{\Omega_0 t}) - 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Фазовая траектория на сепаратрисе (первое выражение) изображена на рис. 1. Во втором выражении начало отсчета времени ( $t=0$ ) соответствует минимуму поля ( $s=0$ ). Существенное отличие движения по сепаратрисе от соседних траекторий сводится только к частоте, которая точно на сепаратрисе равна нулю [ср. (3.21) и (3.23)].

Действие проще всего найти интегрированием выражения (3.21) для частоты. В случае запертых частиц

$$J(H^0, \mu) = \int_0^W \frac{dW}{\Omega(W, \mu)} = \frac{8}{\pi^3} L^2 \Omega_0 [E(k) - (1 - k^2) \mathcal{K}(k)], \quad (3.28)$$

где мы перешли к интегрированию по  $dk$  с помощью (3.20);  $E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Это выражение определяет неявно функцию  $H^0(J, \mu)$ . При  $W \rightarrow 0$  (малые колебания)  $J \rightarrow W/\Omega_0$  [ср. (3.11)]. Производная  $\partial H^0(J, \mu)/\partial J = [\partial J(H^0, \mu)/\partial H^0]^{-1}$  дает, конечно, снова частоту (3.21). Для вычисления средней частоты ларморовского вращения  $\langle \omega \rangle = \partial H^0(J, \mu)/\partial \mu$  запишем дифференциал

$$dJ(H^0, \mu) = \frac{\partial J}{\partial H^0} dH^0 + \frac{\partial J}{\partial \mu} d\mu = 0.$$

Откуда

$$\langle \omega \rangle = - \frac{\partial J/\partial \mu}{\partial J/\partial H^0} = \omega_0 \left[ \lambda - (\lambda - 1) \frac{E(k)}{\mathcal{K}(k)} \right] \rightarrow \lambda \omega_0 \left[ 1 - \frac{2(\lambda - 1)/\lambda}{\ln(32/|\omega|)} \right]. \quad (3.29)$$

Последнее выражение дает асимптотику  $\langle \omega \rangle$  вблизи сепаратрисы ( $|\omega| \ll 1$ ). Для малых колебаний  $\langle \omega \rangle \rightarrow \omega_0 + W/2\mu$  [ср. (3.12)]. При вычислении (3.29) следует учесть, что  $\partial W(H^0, \mu)/\partial \mu = -\omega_0$ .

Аналогичным образом для пролетных частиц получаем действие в виде

$$J_{\text{пр}}(H^0, \mu) = J_{\text{пр}}^c + \int_{W_c}^W \frac{dW}{\Omega_{\text{пр}}(W, \mu)} = \frac{4L^2\Omega_0}{\pi^3} \frac{E(k)}{k}. \quad (3.30)$$

Здесь  $W_c = \mu\omega_0(\lambda - 1)$  и  $J_{\text{пр}}^c = 4L^2\Omega_0/\pi^3$  — энергия и действие на сепаратрисе. Заметим, что последнее в 2 раза меньше, чем для запертых частиц (3.28), так что действие как функция энергии имеет на сепаратрисе разрыв по той же причине, что и частота [см. (3.26)]. Среднее значение ларморовской частоты равно:

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 \left[ 1 + \frac{\lambda - 1}{k^2} \left( 1 - \frac{E(k)}{\mathcal{K}(k)} \right) \right] \rightarrow \lambda \omega_0 \left[ 1 - \frac{2(1 - 1/\lambda)}{\ln(32/|\omega|)} \right]. \quad (3.31)$$

Обратим внимание, что асимптотика  $\langle \omega \rangle$  при  $\omega \rightarrow 0$  одинакова по обе стороны сепаратрисы [ср. (3.29)]. При  $W \gg W_c$  величина  $\langle \omega \rangle \approx \approx \omega_0(1 + \lambda)/2$ , т. е. равна просто среднему по  $s$ .

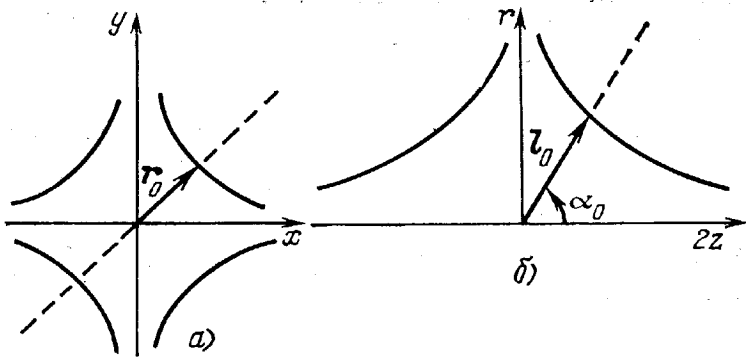


Рис. 2. Схема магнитных линий встречных пробок:

*a* — плоская геометрия (поле не зависит от  $z$ ); *б* — цилиндрическая (аксиально-симметричная) геометрия,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\text{tg } \alpha_0 = \sqrt{2}$  ( $\alpha_0 \approx 55^\circ$ ). Пунктиром показана линия максимумов поля. Векторы  $r_0$  и  $l_0$  задают магнитную линию

**5. Встречные пробки, плоская геометрия.** Схема магнитных линий такого поля изображена рис. 2, *a*. Вектор  $\mathbf{B}$  расположен в плоскости  $(x, y)$  ( $B_z = 0$ ) и не зависит от  $z$ . Отметим, что вследствие этой симметрии здесь, как и в аксиально-симметричной ловушке, имеется дополнительный точный интеграл движения ( $z$  — компонента канонического импульса частицы), и задача сводится к двум степеням свободы. Конфигурация рассматриваемого поля одинакова во всех четырех квадрантах плоскости  $(x, y)$ , поэтому достаточно рассмотреть один из них, скажем, первый ( $x, y > 0$ ). Кроме того, поле симметрично относительно биссектрис углов между координатными осями ( $y = \pm x$ ). Магнитную линию будем задавать минимальным расстоянием до начала координат  $r_0$  (рис. 2, *a*). Вектор — потенциал этого поля может быть выбран в виде (см, например, [15]):

$$A_z(x, y) = Cxy, \quad (3.32)$$

где  $C$  — некоторая постоянная, которая будет определена ниже. Тогда

$$B_x = Cx; \quad B_y = -Cy; \quad B = Cr; \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (3.3)$$

Обозначим  $B_0$  минимальное вдоль магнитной линии поле в точке  $r_0$ , тогда  $C = B_0/r_0$ , т. е. минимальное поле пропорционально  $r_0$ . В рассматриваемом случае приосевое приближение, которым мы пользовались в предыдущих примерах магнитных ловушек, совершенно непригодно, так как поле на оси ловушки ( $x, y = 0$ ) равно нулю. Для нахождения функции  $B(s)$  вдоль магнитной линии определим сначала длину линии  $s$ , отсчитанную от точки  $r_0$ . Уравнение линии:  $A_z = \text{const}$ , или  $2xy = r_0^2$ , или, наконец,  $r_0^2 = r^2 \sin 2\varphi$  (в полярных координатах  $r, \varphi$ ). Координата вдоль линии равна:

$$s(r) = \int_{r_0}^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - r_0^4}} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{r_0(r - r_0)}; & r - r_0 \ll r_0; \\ r + \frac{r_0}{6} \approx r; & r \gg r_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Этот интеграл выражается через эллиптические функции, но мы ограничимся двумя указанными крайними случаями. Первый из

них соответствует центральному участку магнитной линии вблизи минимума поля. С учетом (3.33) получаем в этой области

$$f(s) \approx 1 + \frac{s^2}{r_0^2}; \quad \omega(s) = \omega_0 f(s); \quad \omega_0 = B_0, \quad (3.35)$$

т. е. поле короткой ловушки (3.10) с характерной длиной  $L=r_0$ . Второе выражение в (3.34) описывает края магнитной линии. Здесь

$$f(s) \approx |s|/r_0. \quad (3.36)$$

Такая конфигурация является для нас новой, и мы рассмотрим ее подробнее. Невозмущенный гамильтониан имеет вид:

$$H^0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\mu\omega_0 |s|}{r_0} = \left( \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{r_0} \mu J \right)^{2/3}, \quad (3.37)$$

где  $J$  — продольное действие. Невозмущенные частоты равны:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{2}{3} \left( \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{r_0} \right)^{2/3} \frac{\mu^{2/3}}{J^{1/3}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega_0}{2r_0 a}}; \\ \langle \omega \rangle &= \frac{2}{3} \left( \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{r_0} \right)^{2/3} \frac{J^{2/3}}{\mu^{1/3}} = \frac{2}{3} \frac{\omega_0 a}{r_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где  $a$  — амплитуда продольных колебаний.

**6. Встречные пробки, цилиндрическая геометрия.** Рассмотрим теперь конфигурацию магнитного поля, создаваемую аксиально-симметричными встречными пробками, например двумя одинаковыми цилиндрическими катушками с противоположным направлением токов и магнитного поля (рис. 2, б). Вектор-потенциал такого поля можно выбрать в виде (см., например, [15]):

$$A_\phi = Czr,$$

откуда

$$B_z = C2z; \quad B_r = -Cr; \quad B = Cl, \quad (3.39)$$

где вектор  $l$  с компонентами  $(2z, r)$  характеризует положение точки на плоскости  $(2z, r)$  (см. рис. 2, б).

Основное отличие рассматриваемой ловушки от предыдущей связано с отсутствием симметрии магнитной линии относительно минимума поля на ней. Линия минимумов поля по-прежнему является прямой, однако она образует теперь с осью  $z$  угол  $\alpha_0 \approx 55^\circ$  [ $\text{tg } \alpha_0 = \sqrt{2}$ , на плоскости  $(2z, r)$ ]. Уравнение магнитной линии получается из  $rA_\phi = \text{const}$ , или

$$zr^2 = (l_0/\sqrt{3})^3, \quad (3.40)$$

где вектор  $l_0$  характеризует положение минимума поля на данной линии. Соответственно постоянная  $C = B_0/l_0$ .

Координату  $s$  вдоль магнитной линии отсчитываем по-прежнему от точки  $l_0$ :

$$s = \int_{z_0}^z dz \sqrt{1 + \frac{b^3}{4z^3}} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b^{3/2}}{\sqrt{z}}; & z \ll z_0; \\ \sqrt{3} (z - z_0); & z \approx z_0; \\ z; & z \gg z_0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Здесь  $z_0 = b/2$ ;  $b = l_0 \sqrt{3}$ . Комбинируя это с выражением  $V = \omega = Cl$  (3.39), находим:

$$f(s) \approx \begin{cases} |s|/l_0; & z \rightarrow 0; \\ 1 + 2s^2/l_0^2; & z \approx z_0; \\ 2|s|/l_0; & z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.42)$$

Как и в предыдущем случае, вблизи минимума поля ( $z \approx z_0$ ) работает приближение короткой ловушки с масштабом  $L = l_0/\sqrt{2}$ , а вдали эффективный потенциал является линейным по  $s$ . Существенно, однако, что в отличие от предыдущего примера наклон потенциальной кривой (т. е. эффективная продольная сила) теперь разный по обе стороны от минимума потенциала. Это является следствием указанной выше асимметрии цилиндрической геометрии ловушки. Наглядно причину асимметрии можно пояснить следующим образом: при  $z \rightarrow \infty$  пучок магнитных линий сжимается по двум направлениям ( $x, y$ ), тогда как при  $r \rightarrow \infty$  сжатие происходит только по одному направлению ( $z$ ).

Для вычисления частот  $\langle \omega \rangle$  и  $\Omega$  можно использовать выражения (3.38), взяв полусумму величин  $\langle \omega \rangle$  и  $1/\Omega$  для обоих наклонов потенциала при той же энергии  $H^0$ .

#### § 4. Адиабатическое возмущение

Нашей основной задачей является исследование эффекта возмущения, т. е. изменения магнитного момента частицы  $\mu$ , который в невозмущенной системе был принят постоянным (2.2). В этом параграфе мы получим уравнение для  $\mu$ .

Начнем с простой модельной системы (3.1). Выражение для  $J_y$  найдем, дифференцируя (3.3) и используя точные уравнения движения из гамильтониана (3.1):

$$\dot{J}_y = \dot{x}x \left( y^2 - \frac{\dot{y}^2}{\omega_y^2} \right) = 2J_y \frac{\dot{x}x}{1+x^2} \cos(2\theta). \quad (4.1)$$

Здесь  $\omega_y = 1 + x^2$ , и мы положили

$$y \equiv a_y \cos \theta; \quad \dot{y} \equiv \omega_y a_y \sin \theta, \quad (4.2)$$

определив тем самым новые переменные  $a_y, \theta$  (амплитуда и фаза  $y$ -колебаний), в которых  $J_y = \omega_y a_y^2/2$  [см. (3.2), (3.3)]. Выраже-

ние (4.1) и есть искомое уравнение для  $J_y(t)$ . Оно будет проинтегрировано в § 7. Полезно, однако, сразу же отметить некоторые его особенности. Правая часть уравнения представляет собой произведение функций, изменяющихся во времени с разными частотами: низкой [сомножитель  $S(t) = \dot{x}x/(1+x^2)$  — с частотой продольных колебаний  $\Omega$ ] и высокой [сомножитель  $F(t) = \cos(2\theta)$  — с удвоенной частотой ларморовского вращения  $2\langle\omega\rangle$ ]. Поэтому в первом приближении  $J_y$  будет испытывать лишь ограниченные и малые (при малом отношении  $\Omega/2\langle\omega\rangle$ ) колебания. Накапливающиеся изменения  $J_y$ , которые только и интересуют нас здесь, возможны лишь за счет резонанса между обоими движениями, т. е. за счет достаточно высоких гармоник низкой частоты  $\Omega$ . Чем меньше отношение частот  $\Omega/2\langle\omega\rangle$ , тем более высокие гармоники требуются для резонанса и тем меньше их амплитуды, а следовательно, и некоторая средняя скорость изменения  $J_y$ . Поэтому в качестве естественного параметра малости возмущения в данной задаче можно взять прямо отношение частот:

$$\varepsilon = \Omega/\langle\omega\rangle. \quad (4.3)$$

Эту величину называют обычно параметром адиабатичности, поскольку ее малость и есть главное условие адиабатической инвариантности переменных действия, т. е. условие их приближенного сохранения во времени. Более подробно этот вопрос обсуждается ниже (см. § 10).

Переходя собственно к магнитным ловушкам, заметим прежде всего, что малый параметр адиабатичности (4.3) определяется второй производной магнитного поля по координатам, от которой зависит частота продольных колебаний  $\Omega$ . Используемая иногда для оценок первая производная (градиент поля) сама по себе не имеет особого физического смысла в качестве параметра адиабатичности. Так, например, в случае сходящихся или расходящихся прямолинейных магнитных линий магнитный момент частицы сохраняется точно, хотя градиент поля и отличен от нуля. Существенным является изгибание магнитных линий, их кривизна. Оказывается, что в магнитной ловушке именно кривизна магнитной линии дает основной вклад в изменение  $\mu$ , как это было впервые выяснено в работе [16].

Рассмотрим этот механизм подробнее. При изгибании (повороте) магнитной линии  $\mu$  изменяется, если даже вектор скорости  $\mathbf{v}$  остается постоянным, так как  $\mu$  зависит только от проекции  $v$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{B}$ , а эта плоскость поворачивается независимо от  $\mathbf{v}$ . Найдем производную  $\dot{v}_\perp^2$  за счет этого эффекта. Будем считать магнитную линию плоской кривой (без кручения) и пусть  $\mathbf{e}_B = \mathbf{B}/B$  — единичный касательный вектор, а  $\mathbf{e}_R$  — единичный вектор внешней (по отношению к центру ловушки) нормали к магнитной линии (рис. 3). Тогда из выражения  $v_\perp^2 = v^2 - (\mathbf{v}, \mathbf{e}_B)^2$  имеем:

$$\dot{v}_\perp^2 \rightarrow -2v_\parallel (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{e}}_B) = -2v_\parallel v_n/R,$$

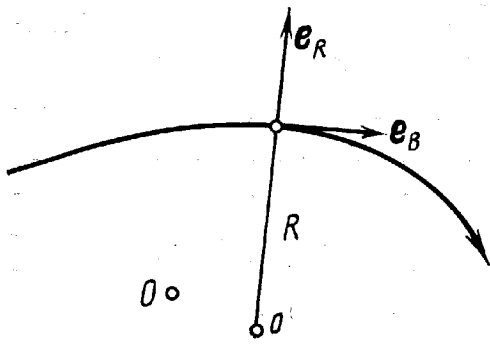


Рис. 3. Геометрия плоской магнитной линии:  $e_B$ ,  $e_R$  — касательный и нормальный единичные векторы;  $O$  — центр ловушки;  $O$  — центр кривизны, соответствующий данной точке магнитной линии;  $R$  — радиус кривизны в этой точке, отрицательный в данном случае (см. текст)

где мы приняли  $v = \text{const}$ ;  $v_{\parallel} = v$ ,  $e_B$ ;  $v_n = v$ ,  $e_R = v_{\perp}$ ,  $e_R$  и  $R$  — радиус кривизны магнитной линии, который считается положительным, если линия выпуклая к центру ловушки. Мгновенная угловая скорость поворота  $e_B$  при движении частицы вдоль магнитной линии равна

$$\Omega = e_B \times e_R \frac{v_{\parallel}}{R}.$$

При достаточно малом ларморовском радиусе проекция скорости частицы  $v_n \approx -v_{\perp} \sin \theta$ , где  $\theta$  — ларморовская фаза, отсчитываемая от направления вектора  $e_R$  (более аккуратное выражение для  $v_n$  приведено в [8]). Окончательно получаем:

$$\dot{\mu} \rightarrow \sqrt{2\mu} \frac{v_{\parallel}^2}{R \sqrt{\omega}} \sin \theta. \quad (4.4)$$

Здесь стрелка указывает, что выписан лишь основной член уравнения для  $\mu$ , определяющий накапливающиеся резонансные изменения  $\mu$ . Полное уравнение для  $\mu$  приведено в работе [5]. В него входят, в частности, и члены вида (4.1), пропорциональные  $\cos(2\theta)$ . Однако, как будет показано ниже (см. § 7), они дают лишь экспоненциально малые добавки из-за вдвое меньшего значения параметра адиабатичности (4.3). Подробное обсуждение выделения главного члена возмущения (4.4) содержится в [5]. Мы вернемся к этому вопросу в § 7.

## § 5. Несущественный эффект возмущения

Нашей основной задачей является интегрирование возмущенного уравнения вида (4.4) или (4.1), т. е. определение эффекта возмущения — изменения невозмущенного интеграла движения  $\mu$  (или  $J_y$ ). Широко распространенным способом интегрирования подобных уравнений является та или иная форма асимптотических методов [12], т. е. построение решения уравнения в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра задачи, в нашем случае параметра адиабатичности (4.3). Термин «асимптотический» означает, что остаточный член такого ряда не уменьшается, вообще говоря, с ростом числа его членов, а убывает лишь вместе с параметром малости. Такой подход использовался в ряде работ и для исследования динамики частицы в магнитной ло-



вушке (см., например, [17, 18]. В применении к уравнениям вида (4.4) или (4.1) он означает, грубо говоря, интегрирование по частям. На каждом шаге интегрируется высокочастотный сомножитель правой части  $F(t)$  и дифференцируется низкочастотный  $S(t)$ . В результате каждый шаг увеличивает степень малого параметра (4.3) на единицу. Для уравнения (4.1), например, первый шаг дает:

$$\delta J_y = J_y \frac{\dot{\omega}_y}{2\omega_y^2} \sin(2\theta). \quad (5.1)$$

Коль скоро невозмущенное решение, которое подставляется в правую часть (4.1), является квазипериодическим, то и вариации  $J_y(t)$ , даваемые асимптотическим рядом, будут также квазипериодическими, причем с основными частотами  $\Omega$  и  $\langle \omega \rangle$ , близкими к невозмущенным. Эти вариации, следовательно, будут ограниченными и малыми при достаточно малом параметре адиабатичности. В этом смысле такие квазипериодические вариации невозмущенного действия есть несущественный эффект возмущения. Что же существенно? На языке асимптотических разложений существенным является остаточный член такого разложения, к нахождению которого мы и переходим.

В заключение этого параграфа отметим, что квазипериодические колебания невозмущенного действия (5.1) можно использовать для введения «уточненного» действия  $J_y^{(n)}$ , нерезонансные изменения которого будут меньше, чем для  $J_y$  ( $n$  — порядок уточнения). В первом порядке, например, получаем из (5.1):

$$\begin{aligned} J_y^{(1)} &= J_y - \delta J_y = J_y \left( 1 - \frac{\dot{\omega}_y}{2\omega_y^2} \sin(2\theta) \right) = \\ &= J_y \left( 1 \mp \sqrt{2} \frac{x \sqrt{H^0 - J_y(1+x^2)}}{(1+x^2)^2} \sin(2\theta) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В последнем выражении мы использовали невозмущенное соотношение:  $\dot{x} = \pm \sqrt{2(H^0 - J_y \omega_y)}$  [см. (3.4)]. Производная  $\dot{J}_y^{(1)} \sim \varepsilon^2$ , т. е. уже второго порядка по параметру адиабатичности (4.3). Введение уточненного действия эквивалентно широко распространенному в нелинейной механике каноническому преобразованию переменных, устраняющему нерезонансные члены возмущения. Для магнитных ловушек подобная процедура была впервые использована в работе [19] на модели типа (3.1) и в [17] для произвольного магнитного поля (см. также [18, 20]). Уточненное  $\mu$  полезно при сравнении теории с результатами численного моделирования (см. [20] и ниже, § 7).

## § 6. Нелинейные резонансы

Как уже отмечалось выше, непериодические изменения  $\mu$ , которые могут накапливаться, возникают за счет резонансов между ларморовским вращением частицы и высокими гармониками продольных колебаний. Для анализа этих резонансов перейдем в правой части уравнения (4.4) для  $\dot{\mu}$  к невозмущенным переменным действия  $\mu$ ,  $J$  и канонически сопряженным с ними фазам  $\varphi$ ,  $\psi$ .

Производя фурье-преобразование по фазам, получаем

$$\dot{\mu} = \frac{1}{2} \sum_n f_n(\mu, J) e^{i(\varphi - n\psi)} + \text{к. с.}, \quad (6.1)$$

причем  $\dot{\varphi} = \langle \omega \rangle$ ;  $\dot{\psi} = \Omega$ , а  $n$  — любое целое. Вообще говоря, такой ряд Фурье будет двойным, т. е. будет включать также гармоники фазы  $\varphi$ . Так как, однако,  $\langle \omega \rangle / \Omega \gg 1$ , то амплитуды резонансных гармоник  $m\varphi$  будут уже совсем малы по сравнению с  $f_n$ , и мы ими пренебрежем. Условие резонанса имеет вид ( $n$  — целое положительное):

$$\langle \omega \rangle = n\Omega. \quad (6.2)$$

Вообще говоря, оно не выполняется. Однако из-за неизохронности невозмущенных колебаний, т. е. зависимости их частот ( $\langle \omega \rangle$ ,  $\Omega$ ) от действий  $\mu$ ,  $J$  (см. § 3), всегда найдутся такие специальные (резонансные) значения  $\mu = \mu_r$ ,  $J = J_r$ , для которых условие резонанса (6.2) будет выполнено с некоторым  $n = r$ .

Если амплитуды  $f_n$  достаточно малы (условие малости будет получено ниже, см. § 10), то в уравнении (6.1) можно оставить только резонансный член

$$\dot{\mu} \approx |f_r(\mu_r, J_r)| \cos \psi_r, \quad (6.3)$$

где мы ввели резонансную фазу

$$\psi_r = \varphi - r\psi + \psi_r^0, \quad (6.4)$$

а  $\psi_r^0(\mu_r, J_r)$  — некоторая постоянная:  $f_r = |f_r| \exp(i\psi_r^0)$ . При точном резонансе (6.2)  $\psi_r = \text{const}$ . Однако из-за изменения  $\mu$  и зависимости частот  $\langle \omega \rangle$ ,  $\Omega$  от  $\mu$ ,  $J$  резонансная фаза также будет изменяться со временем. Уравнение для  $\psi_r$  можно записать в виде

$$\dot{\psi}_r \approx \langle \omega \rangle - r\Omega. \quad (6.5)$$

Это уравнение приближенное, так как  $\psi_r$  изменяется не только за счет изменения частот, но и непосредственно под действием возмущения. Последний эффект, однако, мал при малом возмущении, и мы им пренебрежем (более подробно этот вопрос обсуждается в [8]).

Возмущение изменяет не только  $\mu$ , но и  $J$ . Однако в чисто магнитном поле энергия частицы сохраняется, и изменение  $J$  можно выразить через изменение  $\mu$ . Будем считать поэтому, что как частоты  $\langle \omega \rangle$ ,  $\Omega$ , так и фурье-амплитуды  $f_n$  зависят только от  $\mu$ . Тогда уравнения (6.3) и (6.5) образуют полную систему, описывающую динамику одного резонанса. Уравнение (6.5) можно упростить, разложив правую часть вблизи резонанса:

$$\dot{\psi}_r \approx \left. \frac{d\omega_r}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_r} (\mu - \mu_r); \quad \omega_r(\mu) = \langle \omega \rangle - r\Omega. \quad (6.6)$$

Вводя величину  $\nu = \mu - \mu_r$  и замечая, что  $\dot{\nu} = \dot{\mu}$ , получаем пару канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\nu} &= |f_r(\mu_r)| \cos \psi_r; \\ \dot{\psi}_r &= \omega_r' \nu; \quad \omega_r' \equiv \left. \frac{d\omega_r}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_r} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$H_r(\psi_r, \nu) = \frac{\omega'_r \nu^2}{2} - |f_r| \sin \psi_r. \quad (6.8)$$

Нетрудно заметить, что это — гамильтониан маятника, скажем, единичной длины с массой  $1/\omega'_r$  в поле тяжести  $mg = |f_r|$ , причем  $\nu$  — момент импульса маятника, а  $\psi_r$  — угол его отклонения от горизонтали. Поэтому говорят, что гамильтониан (6.8) описывает нелинейный резонанс в приближении маятника [8]. Условия этого простого приближения подробно обсуждаются в [8]. Существенным является как раз неизохронность невозмущенных колебаний:  $\omega'_r \neq 0$ . Благодаря этому колебания  $\nu$  вблизи резонанса ограничены ( $|\Delta\nu| \leq 2\sqrt{|f_r|/|\omega'_r|}$ ) и малы при малой  $|f_r|$ , поэтому в уравнении для  $\psi_r$  можно пользоваться разложением по  $\nu$  (6.6).

Ограниченность колебаний  $\nu$  (и  $\mu$ ) и, следовательно, ограниченный (и незначительный) обмен энергией между степенями свободы рассматриваемой системы составляют существенное отличие нелинейного резонанса от линейного. В последнем случае обмен был бы полным. Говорят, что нелинейность (неизохронность) колебаний стабилизирует резонансное возмущение. Переход к линейному резонансу в гамильтониане (6.8) соответствует  $\omega'_r \rightarrow 0$ ,  $\Delta\nu \rightarrow \infty$  (при этом приближение маятника, конечно, нарушается). Отметим также, что динамика нелинейного резонанса аналогична невозмущенному движению частицы в периодическом поле многопробочной ловушке [ср. (6.8) и (3.19)]. Эта аналогия потребует нам в дальнейшем (см. § 10).

Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что один нелинейный резонанс не представляет опасности для удержания частицы в магнитной ловушке, так как колебания  $\mu$  на нем ограничены. Но на самом деле резонансов много (6.1). Если не пренебрегать остальными членами в (6.1), то гамильтониан (6.8) примет более сложный вид:

$$H_r(\psi_r, \nu) \approx \frac{\omega'_r \nu^2}{2} - \sum_n |f_n| \sin(\psi_r - (n-r)\Omega t + \psi_n^0 - \psi_r^0), \quad (6.9)$$

где мы положили приближенно  $\psi \approx \Omega t$ . Хотя разные члены последней суммы вызывают резонансы при разных начальных условиях (разных  $\mu$ ), всегда ли можно пренебрегать нерезонансным возмущением, как это сделано в (6.8)? Мы рассмотрим этот важный и, по существу, центральный вопрос несколько позже (см. § 10), а сейчас займемся вычислением резонансных амплитуд  $f_n$ . Для этого можно воспользоваться соотношением

$$\Delta\mu = T |f_r| \cos \psi_r, \quad (6.10) \quad \checkmark$$

которое получается интегрированием (6.1) по периоду продольных колебаний  $T = 2\pi/\Omega$ . С другой стороны, величина  $\Delta\mu$  может быть найдена прямым интегрированием уравнения для  $\mu$  (4.4). Будем называть величину (6.10) резонансным  $\Delta\mu$ .

## § 7. Резонансное $\Delta\mu$

Итак, нашей очередной задачей является вычисление полного изменения невозмущенного действия ( $\Delta\mu$ ) на периоде низкочастот-

ных (продольных) колебаний. Ниже мы сделаем это для набора типичных примеров, описанных в § 3. Начнем, как обычно, с простой вспомогательной системы (3.1). В этом случае необходимо вычислить интеграл [см. (4.1)]:

$$\frac{\Delta J_y}{J_y} \approx \Delta \ln J_n = 2 \int dt \frac{\dot{x}x}{1+x^2} \cos 2\theta \approx 2 \operatorname{Re} \int d\theta e^{2i\theta} \frac{\dot{x}x}{(1+x^2)^2}, \quad (7.1)$$

причем не асимптотически по малому параметру адиабатичности  $\varepsilon = \Omega / \langle \omega \rangle$  (4.3), а в некотором смысле «точно». Сформулируем задачу более аккуратно. Так как подынтегральное выражение как функция времени нам не известно, то использование того или

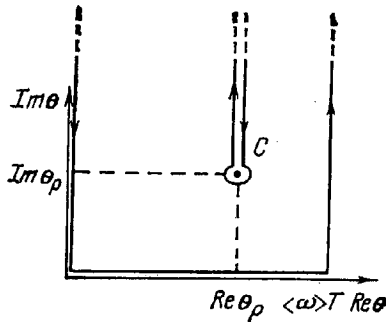


Рис. 4. Контур интегрирования в плоскости комплексного  $\theta$  при вычислении  $\Delta J_y$  и  $\Delta \mu$ :  $C$  — обход особенности по разрезу;  $\theta_p$  — положение особенности

иного метода последовательных приближений неизбежно. Поэтому подставим в качестве подынтегральной функции невозмущенное решение, в частности  $J_y = \text{const}$ , что уже учтено в соотношении  $d\theta = (1+x^2)dt$  для последнего представления интеграла (7.1). При интегрировании по частям в § 5 мы интегрировали, по существу, лишь высокочастотный множитель, «загоняя» все эффекты низкочастотной части (в том числе и ее высокие гармоники) в остаточный член, который оставался неопределенным. Теперь же мы проинтегрируем невозмущенное подынтегральное выражение точно (со всеми его гармониками), что оказывается возможным в ряде случаев путем аналитического продолжения подынтегральной

функции в комплексную плоскость переменной интегрирования. Если выбрать в качестве последней фазу  $\theta$ , как это сделано, например, в работе [5], то можно замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости  $\theta$  и пренебречь вкладом в интеграл от бесконечно удаленной части этого контура ( $\operatorname{Im} \theta \rightarrow +\infty$ ). Значение интеграла будет определяться при этом особенностями подынтегрального выражения, которые обходятся с помощью разрезов (рис. 4).

При выполнении условия резонанса (6.2) сумма интегралов по двум вертикальным прямым также равна нулю, так как квазипериодическая зависимость невозмущенного решения от времени (две несоизмеримые частоты  $\langle \omega \rangle$  и  $\Omega$ ) переходит в резонанс в периодическую с периодом  $T$  ( $\langle \omega \rangle T = 2\pi n$ ). Вне резонанса эта сумма, вообще говоря, не равна нулю из-за разного значения функции  $\exp(2i\theta)$  на обеих прямых. Это приводит к квазипериодической добавке к  $\Delta \mu$  (см. § 5), которая, однако, нас не интересует.

Для интеграла (7.1) единственной особенностью в верхней полуплоскости  $\theta$  является полюс при  $x_p = i$ . Заметим сразу, что в этой особенности частота  $\omega_y = 0$  и, таким образом, она является также и седловой точкой (перевалом) функции  $\exp(2i\theta)$ .

Так как за один период  $x$ -колебаний особенность проходится 2 раза, то достаточно вычислить интеграл на полупериоде  $T/2$ . Вблизи особенности  $\omega_y(x_p) = 1 + x_p^2 = 0$ ;  $\theta = \theta_p$

$$\theta - \theta_p \approx \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_p (x - x_p) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\theta}{dx^2} \right)_p (x - x_p)^2 = \frac{x_p}{v_0} (x - x_p)^2, \quad (7.2)$$

так как  $(d\theta/dx)_p = \omega_y(x_p)/\dot{x}_p = 0$ , а  $(d^2\theta/dx^2)_p = (d\omega_y/dx)_p/\dot{x}_p$  и  $\dot{x}_p = \sqrt{2H^0} = v_0$  [см. (3.4)], где  $v_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2$  — полная скорость в минимуме потенциальной энергии ( $x=0$ ). Далее,

$$(1 + x^2)^2 \approx (2x_p)^2 (x - x_p)^2 \approx 4x_p v_0 (\theta - \theta_p).$$

Подставляя это выражение в (7.1) и вычисляя вычет в полюсе, получаем

$$\Delta \ln J_y = \pi \operatorname{Re} \left( i e^{2i\theta_p} \right). \quad (7.3)$$

Отметим, что если бы мы вычисляли интеграл в комплексной плоскости  $t$  или  $x$ , то получили бы другой (неправильный) результат:

$$\Delta \ln J_y = 2 \operatorname{Re} \int \frac{x dx}{1 + x^2} e^{2i\theta} = 2\pi \operatorname{Re} \left( i e^{2i\theta_p} \right).$$

Разница возникает за счет того, что функция  $\exp(2i\theta(x))$ , вообще говоря, не убывает при  $\operatorname{Im} x \rightarrow \infty$ , и поэтому интеграл не сводится к вычету в полюсе. Наконец, можно поступить следующим образом. Будем считать, что последний интеграл берется по контуру в плоскости  $\theta$ , но мы просто заменили переменную интегрирования на  $x$ . Так как  $x - x_p \propto \sqrt{\theta - \theta_p}$ , то при обходе особенности в плоскости  $\theta$  [комплексный вектор  $(\theta - \theta_p)$  поворачивается на угол  $2\pi$ ] вектор  $(x - x_p)$  поворачивается только на угол  $\pi$ . Поэтому значение интеграла по  $dx$  равно полувычету в полюсе, что в точности совпадает с (7.3).

Найдем теперь  $\theta$ , которое можно представить в виде

$$\theta_p = \theta_0 + \int_0^{t_p} \omega_y dt = \theta_0 + \int_0^{x_p} \frac{\omega_y dx}{\dot{x}}, \quad (7.4)$$

где  $\theta_0 = \operatorname{Re} \theta_p$ . Для вычисления этого интеграла воспользуемся невозмущенным решением, например, в форме [см. (3.4)]:

$$\dot{x} = \sqrt{2J_y (a_x^2 - x^2)}, \quad (7.5)$$

где  $a_x$  — амплитуда продольных колебаний. Учитывая, что  $\omega_y = 1 + x^2$  и  $x_p = i$ , получаем из (7.4):

$$\theta_p = \theta_0 + \frac{i\chi(\sin \beta_0)}{2v_0}; \quad \chi(u) = \frac{1}{u^2} \left( \frac{1+u^2}{2u} \ln \frac{1+u}{1-u} - 1 \right), \quad (7.6)$$

где  $\sin \beta_0 = \dot{y}_0/v_0$ . В таком виде выражение для показателя экспоненты, определяющего порядок резонансного возмущения, было получено (для магнитной ловушки) в работе [21] и позднее в [5]. Оно справедливо, конечно, только для гармонических продольных колебаний, что было явно использовано при интегрировании (7.4). С другой стороны, соотношение (7.6) слишком сложно и неудобно для дальнейшего использования. Простое приближение для  $\theta_p$  получается, если в (7.4) положить  $\dot{x} \approx \dot{x}_0 = \text{const}$ . Тогда

$$\theta_p \approx \theta_0 + \frac{2i}{3v_0 \cos \beta_0}. \quad (7.7)$$

Условие  $\dot{x} \approx \dot{x}_0$  будем называть приближением малых  $\beta_0$ , так как для его справедливости необходимо, чтобы  $\dot{x}_0 = v_0 \cos \beta_0 \approx \dot{x}_p = v_0$ . Отсюда  $\cos \beta_0 \approx 1$ , или  $\beta_0 \ll 1$ . Выражение (7.7) получается, конечно, и прямо из формулы (7.6) при  $\sin \beta_0 \rightarrow 0$ . Однако в более общем случае выражение для  $\theta_p$  в приближении малых  $\beta_0$  зависит от вида функции  $\omega_y(x)$  (см. ниже). Для рассматриваемых здесь гармонических колебаний сравнение (7.6) и (7.7) показывает, что различие между ними не превосходит 10 % при  $\beta_0 \leq 50^\circ$ . В дальнейшем мы ограничимся для простоты приближением малых  $\beta_0$ .

В этом приближении для рассматриваемой модельной системы получаем из (7.3):

$$\Delta \ln J_y = -\pi \exp \left[ -\frac{4}{3v_0 \cos \beta_0} \right] \sin(2\theta_0). \quad (7.8)$$

Если особенность подынтегрального выражения более сложная, чем полюс, например точка ветвления, то описанный выше метод интегрирования не работает. Более общий метод, использованный, в частности, в [15], состоит в приведении интеграла по разрезу (см. рис. 4) к  $\Gamma$ -функции с помощью соотношения (см., например, [22]):

$$\int_C \frac{e^{-u} du}{(-u)^p} = \frac{2\pi i}{\Gamma(p)}, \quad (7.9)$$

где в нашем случае  $u = -i(\theta - \theta_p)$ ;  $p > 0$  и контур интегрирования  $C$  показан на рис. 4 (он обходится в отрицательном направлении). Используя (7.2), приводим интеграл (7.1) (по  $d\theta$ ) к виду (7.9) с  $p=1$ , что снова дает (7.3).

В задаче о движении частицы в магнитной ловушке необходимо вычислить интеграл [см. (4.4)]:

$$\frac{\Delta \mu}{\sqrt{2\mu}} \approx \Delta \sqrt{2\mu} = \int dt \frac{v_{\parallel}^2}{R \sqrt{\omega}} \sin \theta \approx \text{Im} \int d\theta e^{i\theta} \frac{v_{\parallel}^2}{R \omega^{3/2}}. \quad (7.10)$$

Особенности подынтегрального выражения определяются теперь не только функцией  $\omega(s)$ , но и функцией  $R(s)$ . Поэтому прежде всего необходимо найти достаточно простое выражение для радиуса кривизны магнитной линии.

В приосевом приближении вектор-потенциал поля дается соотношением (3.7), а уравнение магнитной линии есть  $rA_\varphi = \text{const}$ , или:

$$r^2 f(s) = r_0^2, \quad (7.11)$$

где  $r_0$  — расстояние от оси симметрии до магнитной линии в минимуме поля [ $s=0$ ;  $f(0)=1$ ]. Отсюда

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{3r_0}{4} \frac{(f')^2}{f^{5/2}} - \frac{r_0}{2} \frac{f''}{f^{3/2}} \rightarrow \frac{3r_0}{4} \frac{(f')^2}{f^{5/2}}, \quad (7.12)$$

считая, что  $(dr/ds)^2 \ll 1$  (приосевое приближение). Отметим прежде всего, что в этом приближении особенность  $R$  совпадает с особенностью  $\omega$ , так как обе величины пропорциональны  $f^p$ . Далее ясно, что основной вклад дает член с наиболее сильной особенностью (максимальное  $p$ , см. ниже). Поэтому в (7.12) мы оставили лишь первое слагаемое. Соотношение (7.2) вблизи особенности имеет теперь вид:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_p &\approx \left( \frac{d\theta}{ds} \right) (s - s_p) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\theta}{ds^2} \right)_p (s - s_p)^2 = \\ &= \frac{\omega_0 f'_p}{2v} (s - s_p)^2 \approx \frac{\omega_0}{2v f'_p} f^2, \end{aligned} \quad (7.13)$$

так как  $d\theta/ds = \omega/s = 0$  при  $s = s_p$ ;  $(d^2\theta/ds^2)_p = (d\omega/ds)_p / s_p = \omega_0 f'_p / v$  [см. (2.3)]. В равенстве (7.13) использовано соотношение  $f(s) \approx f(s_p) + f'_p (s - s_p) = f'_p (s - s_p)$ . Заметим, что множитель в (7.13)  $\omega_0 / v f'_p \sim \omega_0 L / v \sim 1/\varepsilon \gg 1$  [см. (4.3)]. Поэтому каждая лишняя степень  $f$  в знаменателе интеграла (7.10) увеличивает его значение в  $\sim \varepsilon^{-1/2}$ . Это и оправдывает учет только основной особенности подынтегральной функции.

Отсюда можно понять также, почему остаточный член асимптотического ряда по  $\varepsilon$  для  $\delta\mu$  (см. § 5) не уменьшается с ростом числа членов такого ряда. С одной стороны, производная по времени от каждого следующего уточненного  $\mu^{(n)}$  уменьшается в  $\varepsilon$  раз, но, с другой стороны, в знаменателе выражения для  $\mu^{(n)}$  при этом появляется лишнее  $\omega^2$  [одно  $\omega$  — за счет интегрирования  $\exp(i\theta)$ , а другое — за счет дифференцирования знаменателя].

В результате интеграл от  $\mu^{(n)}$  не зависит от порядка уточнения и его проще всего вычислять от невозмущенного  $\mu$ .

Собирая все соотношения, приводим интеграл (7.10) к виду (7.9) с  $p=2$  и получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V \bar{\mu} &= -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} r_0 V \bar{\omega}_0 \text{Im}(e^{i\theta_p}); \\ \frac{\Delta\mu}{\mu} &\approx -\frac{3\pi}{4} \frac{r_0 \omega_0}{v_{\perp 0}} \text{Im}(e^{i\theta_p}). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Так как в данном случае  $p$  — целое, то интеграл может быть выражен, конечно, и через вычет в полюсе.

Отметим, что в рассматриваемом приосевом приближении конфигурация магнитного поля влияет только на величину  $\theta_p$  (если  $f'_p$  конечна, см. ниже). Более общее и соответственно значительно более сложное выражение для  $\Delta\mu$ , не ограниченное приосевой областью, получено в [5] [см. формулу (32)]. Ее анализ показывает, что основным условием приосевого приближения является неравенство

$$\frac{r_0^4}{L\rho_m^3} \ll 1, \quad (7.15)$$

где  $\rho_m = v/\omega_0$  — максимальный ларморовский радиус частицы (при  $\beta_0 = \pi/2$ ), а  $L$  — продольный масштаб ловушки (см. § 3). Выражение (4.4), на котором основан вывод (7.14), получено при дополнительном упрощающем предположении, что  $\rho_m \ll r_0$  (см. § 4). Однако более подробный анализ [8] показывает, что в приосевом приближении все соотношения остаются без изменения и для  $r_0 < \rho_m$ . В частности, при  $r_0 = 0$ , когда центр ларморовской окружности движется по оси симметрии поля,  $\Delta\mu = 0$ , так как в этом случае  $\mu$  совпадает с точным интегралом — каноническим моментом, сопряженным азимутальному углу  $\varphi$  [см. (2.1)]:

$$(\mathbf{r} \times (\mathbf{p} + \mathbf{A}))_z = r (\mathbf{p}_\perp + \mathbf{A})_\varphi = \frac{v_\perp^2}{2\omega} = \mu.$$

Отметим также, что выражения (7.14) одинаково справедливы на обоих полупериодах продольных колебаний.

Вычисление  $\theta_p$  в (7.14) производится по формуле, аналогичной (7.4):

$$\theta_p = \theta_1 + \omega_0 \int_{s_1}^{s_p} \frac{f(s) ds}{\dot{s}(s)}, \quad (7.16)$$

где  $\theta_1 = \theta(s_1)$  и  $s_1 = \text{Re}(s_p)$ . В общем случае  $s_1 \neq 0$  (см. ниже).

Для короткой ловушки (см. § 3, п. 2)  $f(s) = 1 + s^2/L^2$  и  $s_p = iL$ ;  $s_1 = 0$ ;  $\theta_1 = \theta_0$ . В приближении малых  $\beta_0$  [ $\dot{s}(s) \approx \dot{s}_0$ ] получим аналогично (7.7):

$$\theta_p \approx \theta_0 + \frac{2i}{3} \frac{L}{\rho_m \cos \beta_0}. \quad (7.17)$$

Это же выражение применимо (с некоторым эффективным  $L_{\text{эф}}$ ) и в случае многопробочной ловушки (см. § 3, п. 4). Величина  $L_{\text{эф}}$  определяется разложением  $f(s)$  в окрестности  $s=0$ . Из (3.18) имеем

$$f(s) \approx 1 + (\pi s/2L)^2 (\lambda - 1), \quad (7.18)$$



откуда

$$L_{эф} = \frac{2L}{\pi \sqrt{\lambda - 1}}. \quad (7.19)$$

Так как особенность расположена в точке  $s_p = iL_{эф}$ , то при большом пробочном отношении  $\lambda \gg 1$  величина  $|s_p| \ll L$  и разложение (7.18) действительно применимо. Это же условие ( $\lambda \gg 1$ ) обеспечивает малость  $\beta_0$  для частиц вблизи сепаратрисы многопробочной ловушки, для которых  $\sin \beta_0 = 1/\sqrt{\lambda} \ll 1$  (см. § 3). Существенно, что в рассматриваемом случае нет других особенностей, кроме  $s_p \approx iL_{эф}$ . Это видно из точного выражения для  $s_p$ :

$$\cos(\pi s_p/L) = (\lambda + 1)/(\lambda - 1) \text{ [см. (3.18)].}$$

По-иному обстоит дело для длинной ловушки в модели (3.13). Здесь в верхней полуплоскости  $s$  имеется  $n/2$  особенностей ( $n$  — четное) в точках

$$s_k = L \exp \left[ i \frac{\pi}{n} (1 + 2k) \right], \quad (7.20)$$

где  $k$  пробегает целые значения от 0 до  $(n/2 - 1)$ . Наибольший вклад в  $\Delta\mu$  дают две ближайšie к действительной оси особенности, соответствующие  $k = n/2 - 1$  и  $k = 0$ :

$$s_p = \mp L \cos(\pi/n) + iL \sin(\pi/n) \approx \mp L + i\pi L/n. \quad (7.21)$$

Последнее приближенное выражение справедливо при  $n \gg \pi$ , т. е. как раз для длинной ловушки.

Из связи между  $\theta$  и  $s$  (7.16) в приближении малых  $\beta_0$  ( $\dot{s} \approx v$ ):

$$\theta = \frac{\omega_0 s}{v} \left[ 1 + \frac{1}{n+1} \left( \frac{s}{L} \right)^n \right] + \text{const} \quad (7.22)$$

видно, что особенности  $\theta_k$  в плоскости  $\theta$  также лежат на окружности ( $s_k^n = -L^n$ ), причем ближайšie к действительной оси особенности хорошо отделены друг от друга. Так, для соседней с  $s_p$  (7.21) особенности  $\text{Im}\theta_k$  втрое больше, чем для  $s_p$ . Это оправдывает пренебрежение всеми особенностями, кроме  $s_p$  (7.21). Постоянная в (7.22) определяется величинами  $\theta_1$  и  $s_1 \approx \mp L$ . Окончательно получаем:

$$\theta_p \approx \theta_1 \pm \frac{2n}{n+1} \frac{l}{\rho_m} + i\pi \frac{n}{n+1} \frac{l}{\rho_m} \approx \theta_1 \pm \frac{2l}{\rho_m} + i\pi \frac{l}{\rho_m}. \quad (7.23)$$

Мы видим, что порядок  $\Delta\mu$  определяется теперь размером пробки  $l = L/n$ , а не всей ловушки. Помимо этого, фаза, от которой зависит  $\Delta\mu$ , не равна теперь ларморовской фазе  $\theta_1$  при  $s = s_1$ , а сдвинута на большую величину  $2l/\rho_m \gg 1$ , причем в противоположные для обеих особенностей стороны. Выражение (7.14) для  $\Delta\mu$  остается справедливым и в этом случае для каждой из двух главных особенностей. Однако, в отличие от предыдущих примеров, изменения  $\mu$  на двух полупериодах продольных колебаний

(т. е. при пролете частицы через ловушку туда и обратно) не вполне симметричны. Именно, знак дополнительного сдвига фазы  $2l/\rho_m$  изменяется на обратный.

Вместо сдвига фазы на  $\pm 2l/\rho_m$  в точке  $s=s_1$  можно сдвинуть по  $s$  точку, в которой берется фаза  $\theta_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(s_1) \pm 2l/\rho_m &\rightarrow \theta_1(s_1 + \Delta s_1), \\ \Delta s_1 &\approx \pm (2l/\rho_m)/(d\theta/ds) \approx \pm 2l; \quad \Delta |s_1| \approx -2l. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

В обеих пробках точка сдвигается к центру ловушки. Поле в сдвинутых точках

$$\omega_1/\omega_0 \approx 1 + (1 - 2/n)^n \approx 1 + e^{-2} \approx 1 \quad (7.25)$$

мало отличается от поля в центре ловушки. Можно сказать, что сдвинутые точки расположены у внутреннего края пробок.

Для ловушек со встречными пробками (см. § 3, п. 5 и 6) при осевого приближения не существует, и вычисление  $\Delta\mu$  должно быть произведено заново. Эта задача была решена в работе [15].

Рассмотрим сначала плоскую геометрию встречных пробок (см. § 3, п. 5). В отличие от многопробочной ловушки (см. п. 4) квадратичное разложение поля вблизи минимума (3.35) в данном случае не годится, так как его особенность расположена слишком далеко, при  $|s_p|=r_0$ , где разложение уже не работает [см. (3.34)]. Для того чтобы обойти эту трудность, заметим, что хотя контур интегрирования (7.10) должен быть взят в плоскости  $\theta$ , переменная интегрирования и (или) аргумент подынтегральной функции могут быть любыми. Для выбора наиболее удобной переменной запишем ларморовскую частоту в виде [см. (3.33)]:

$$\omega = \frac{\omega_0}{r_0} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\omega_0 r_0}{2x} \sqrt{1 + \frac{4x^4}{r_0^4}}, \quad (7.26)$$

где мы использовали уравнение магнитной линии  $2xy=r_0^2$ . Если теперь выбрать в качестве аргумента функции  $\omega(\xi)$ , например, величину

$$\xi = 2x^2/r_0^2; \quad \omega(\xi) = \omega_0 \sqrt{(1 + \xi^2)/2\xi}, \quad (7.27)$$

то положение особенности в плоскости комплексного  $\xi$  будет  $\xi_p=i$ , а  $\xi_0=1$  [в минимуме  $\omega(\xi)$  на данной магнитной линии].

Найдем прежде всего связь между новой переменной  $\xi$  и фазой  $\theta$ . Имеем:

$$\theta = \int \omega dt = \int \frac{\omega(\xi)}{\dot{s}(\xi)} \frac{ds}{d\xi} d\xi \approx \frac{q_2}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right). \quad (7.28)$$

Последнее выражение справедливо в приближении малых  $\beta_0$ , когда  $\dot{s}(\xi) \approx \dot{s}_0 \approx v$ , и мы использовали соотношение

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{r_0}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\xi^{3/2}}, \quad (7.29)$$

а  $q_2 = \omega_0 r_0 / 2v = r_0 / 2\rho_m$  — большой параметр задачи. В том же приближении

$$\theta_p = \theta_0 + iq_2. \quad (7.30)$$

Кривизна магнитной линии получается из уравнения линии  $2xy = r_0^2$ :

$$\frac{1}{R(\xi)} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{r_0^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\omega_0^3}{r_0 \omega^3(\xi)}. \quad (7.31)$$

Как и в предыдущих примерах, кривизна выражается через поле и имеет особенность в той же точке  $\xi = \xi_p = i$ . В минимуме поля радиус кривизны  $R_0 = r_0$ , т. е. равен минимальному удалению линии от центра ловушки  $x = y = 0$  (см. рис. 2, а).

В качестве переменной интегрирования выберем по-прежнему величину

$$u = -i(\theta - \theta_p) \approx \frac{iq_2}{2\xi_p^3} (\xi - \xi_p)^2. \quad (7.32)$$

Последнее выражение получается разложением функции  $\theta(\xi)$  (7.28) вблизи особенности. В этой же области

$$\omega \approx \omega_0 (\xi - \xi_p)^{1/2} \approx \left(-\frac{2u}{q_2}\right)^{1/4} \quad (7.33)$$

[см. (7.27)]. Подставляя все эти выражения в интеграл (7.10) для  $\Delta\mu$ , приводим его к виду (7.9) с  $p = 9/8$ . Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \Delta\sqrt{\mu} &= \frac{\pi}{2^{13/8}\Gamma(9/8)} \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_2^{1/8} e^{-q_2} \sin\theta_0 \approx \\ &\approx 1,08 \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_2^{1/8} e^{-q_2} \sin\theta_0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Это в точности совпадает с результатом работы [15] (при  $\beta_0 \ll 1$ ), если исправить имеющиеся там опечатки. Отметим, что в [15] использовался несколько иной метод, в котором в качестве переменной интегрирования был выбран скалярный потенциал магнитного поля.

В случае цилиндрической геометрии встречных пробок (п. 6) схема вычисления  $\Delta\mu$  остается той же самой. В качестве аргумента подынтегральной функции выбираем величину  $\xi = r^3 / 2b^3$ , где  $b$  — параметр магнитной линии  $zr^2 = b^3 = (l_0/\sqrt{3})^3$  (см. рис. 2, б). Тогда

$$\omega(\xi) = \omega_0 \frac{2^{1/8}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\xi^{2/8}} \quad (7.35)$$

и

$$\theta(\xi) = 2^{-1/8} q_2 \xi^{2/3} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2}\right), \quad (7.36)$$

а  $q_3 = \omega_0 l_0 / 3v = l_0 / 3\rho_m \gg 1$ . Используя ту же переменную интегрирования  $u = -i(\theta - \theta_p)$ , приходим к особенности того же порядка  $p = 9/8$  и получаем

$$\begin{aligned} \Delta \sqrt{\mu}^- &= \frac{\pi \cdot 3^{1/8}}{2^{11/8} \Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_3^{1/8} e^{-\alpha q_3} \sin(\theta_0 - \Delta) = \\ &= 1,07 \frac{v}{\sqrt{\omega_0}} q_3^{1/8} e^{-\alpha q_3} \sin(\theta_0 - \Delta); \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\Delta = \frac{11}{48} \pi + 0,155 q_3; \quad \alpha = 1,031 \approx 1.$$

Отметим прежде всего, что при соответствующем выборе параметров  $q$  выражения для  $\Delta \mu$  очень близки между собой для обоих типов встречных пробок. Наиболее существенное различие связано со сдвигом фазы  $\Delta$  в последнем случае. Причина этого та же, что и в длинной ловушке — несимметричная конфигурация поля относительно особенности. Здесь также можно ввести эквивалентный сдвиг точки, в которой берется ларморовская фаза, определяющая величину  $\Delta \mu$ :  $\theta_0 (s=0) \rightarrow \theta_1 (s=s_1)$ , где

$$s_1 \approx -v\Delta/\omega_0 \approx -l_0/19. \quad (7.38)$$

Заметим, что в обоих случаях сдвиг происходит в сторону меньшего градиента поля.

Выражение (7.37) совпадает с результатом работы [15], за исключением постоянного сдвига фазы  $11\pi/48$ , который отличается в [15] на  $+\pi/4$ . Это различие связано, возможно, с тем, что в [15] интегрирование производится по контуру в плоскости комплексного  $z$ , а не  $\theta$ .

Во всех рассмотренных случаях резонансное изменение  $\Delta \mu$  оказывается экспоненциально малым по параметру адиабатичности  $\varepsilon = \Omega / \langle \omega \rangle \sim \Omega / \omega_0 \sim \rho_m / L$ . Поэтому возникает серьезный вопрос, насколько надежны оценки столь малой величины, особенно ввиду пренебрежения значительно большими ( $\sim \varepsilon$ ) квазипериодическими вариациями  $\mu$ . Подобные опасения по поводу рассматриваемой и аналогичных задач неоднократно высказывались в литературе. Это, казалось бы, подтверждается тем, что предэкспоненциальные множители в выражении для резонансного  $\Delta \mu$  получаются разными у разных авторов. Некоторые заходят столь далеко, что опасаются даже степенной по  $\varepsilon$  поправки к  $\Delta \mu$ . Последнее, однако, полностью исключается по следующим соображениям. В работе [17] показано, что асимптотические поправки к  $\mu$  в любом порядке по  $\varepsilon$  являются квазипериодическими. Следовательно, непериодическое (резонансное) изменение  $\mu$  уменьшается с  $\varepsilon$  быстрее любой степени  $\varepsilon$ , т. е. экспоненциально. К такому же выводу можно прийти и значительно проще, исходя из точного выражения для  $\Delta \mu$  (4.4). Действительно, в случае аналитической

зависимости правой части от времени, или от фазы  $\theta$  (а это всегда имеет место для реальных полей), мы можем сдвинуть путь интегрирования (по  $\theta$ ) вдоль мнимой оси ( $\text{Im } \theta = 0 \rightarrow \text{Im } \theta = \theta_s = \text{const}$ ), что приведет к появлению постоянного множителя  $\exp(-\theta_s)$  [после замены  $\sin \theta \rightarrow \text{Im } \exp(i\theta)$ ]. А так как  $\theta_s \propto \omega \propto 1/\varepsilon$ , то  $\Delta\mu \propto \exp(-A/\xi)$ , т. е. убывает экспоненциально при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Сложнее оказывается вопрос о точности полученных выше выражений для резонансного  $\Delta\mu$ . Трудность здесь заключается в том, что в высших приближениях гармоники низкой частоты  $\Omega$ , вообще говоря, усиливаются и в принципе могут как-то изменить показатель экспоненты и (или) предэкспоненциальный множитель. Все же можно, по-видимому, утверждать, что относительная поправка к  $\Delta\mu$  является малой при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это связано со специфической структурой интеграла для  $\Delta\mu$  (7.10). Хотя мы и не знаем подынтегрального выражения как функции  $t$ , мы можем выразить его через точно известные функции  $\omega(s)$ ,  $R(s)$  (заданная конфигурация магнитного поля) и, вообще говоря, неизвестную (точно) функцию  $v(s)$ . Последняя, однако, нужна только в особенности, где  $\omega = \omega(s_p) = 0$  и  $v_{\parallel}(s_p) = v$ ;  $v_{\perp}(s_p) = 0$  из-за  $v_{\perp}^2 = 2\mu\omega$ . Существенно, что этот результат [ $v_{\perp}(s_p) = 0$ ] не зависит от поправок к  $\mu$ , если только они малы, т. е. при достаточно малом  $\varepsilon$ . Таким образом, все сложности зависимости  $v(s)$  в высших приближениях не сказываются на интегральном значении  $\Delta\mu$ . Физически это означает, что вклад высших приближений в зависимость  $\mu(t)$  компенсируется на полупериоде  $T/2$ . Попутно заметим, что из-за  $v_{\perp}(s_p) = 0$  в уравнении для  $\mu$  можно отбросить не только члены с  $\sin(2\theta)$ , но и члены вида  $v_{\perp}^2 \sin \theta$ , как это сделано в (4.4) (ср. с полным уравнением в [5]).

Остается обсудить вычисление  $\theta_p$  по формуле (7.16). В приближении малых  $\beta_0$  поправки к  $\dot{z}$  несущественны. В общем случае [см., например, (7.6)] поправка к  $\theta_p$  пропорциональна интегралу от  $\delta\mu$ . Последняя описывается выражением вида (5.1), так что  $|\delta\mu| \sim \varepsilon$  и пропорциональна быстро осциллирующей функции  $\cos \theta$  (для частицы в ловушке). Поэтому интеграл от  $\delta\mu$  имеет порядок  $\varepsilon^2$ , и поправка к  $\theta_p$ , несмотря на большой множитель  $1/\varepsilon$  в (7.16), оказывается малой ( $\lesssim \varepsilon$ ).

Результаты численного моделирования показывают, что типичная погрешность первого приближения для  $\Delta\mu$  порядка 10 % (см., например, [5]). В некоторых специальных случаях точность может быть даже выше [15]. Эти цифры включают также погрешность выделения резонансного значения  $\Delta\mu$  на фоне значительно больших, вообще говоря, квазипериодических колебаний  $\delta\mu$  (см. § 5). Как уже отмечалось выше, использование явных выражений для уточненного  $\mu$  существенно облегчает эту задачу (см. [15, 20]). Еще более эффективным методом может служить использование резонансных траекторий для численного моделирования. В этом случае квазипериодические вариации компенсируются в обеих точках отражения.

Отметим, что экспоненциально малое резонансное  $\Delta\mu$  было впервые получено в работе [16] из решения соответствующей квантово-механической задачи. Относительно простая техника вычисления в рамках классической механики, описанная выше, была предложена в [20] и затем развивалась в ряде работ (см. например [5, 15, 21]). Наиболее обширные вычисления проведены в [5].

## § 8. Отображение

Величина  $\Delta\mu$ , найденная в предыдущем параграфе, сама по себе не только не решает задачи о длительном удержании частицы в ловушке, но и вообще не имеет значения, так как в типичных случаях  $\Delta\mu \ll \delta\mu$  — квазипериодических колебаний  $\mu$ . Центральным вопросом в проблеме длительного удержания частицы в ловушке является вопрос о накоплении последовательных изменений  $\Delta\mu$ . Для решения этой последней задачи можно пойти двумя путями. Первый связан с анализом гамильтониана (6.9), который описывает систему взаимодействующих резонансов с амплитудами, определяемыми величиной  $\Delta\mu$  (6.10). Второй путь — это описание движения частицы с помощью отображения, или преобразования, т. е. не непрерывно, а через некоторые конечные интервалы времени. Ниже мы используем второй путь, который оказался проще и удобнее (см. [2]). В качестве характерного интервала времени удобно взять полупериод продольных колебаний  $T/2$ , к которому относится величина  $\Delta\mu$ . Последняя как раз и характеризует изменение одной из динамических переменных системы — действия  $\mu$  на этом интервале. Этого, однако, недостаточно для полного описания движения, так как  $\Delta\mu$  зависит от другой динамической переменной — ларморовской фазы  $\theta$  в некоторой точке магнитной линии (в простейшем случае — в минимуме поля). Нам необходимо поэтому прежде всего найти изменение  $\theta$  между последовательными прохождениями этой точки. Эта задача решается, вообще говоря, по-разному в зависимости от конкретной конфигурации магнитного поля.

Начнем с модели (3.1). Согласно результатам § 7 величина  $\Delta J_y$  определяется в этом случае значением фазы  $\theta$  в минимуме потенциала ( $x=0$ ). Поэтому изменение  $\theta$  между последовательными прохождениями этого минимума, т. е. за полупериод  $x$ -колебаний, можно записать в виде

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\pi}{\omega_x} \langle \omega_y \rangle = \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2J_y}} + \frac{J_x}{2J_y} \right). \quad (8.1)$$

В последнем выражении мы использовали связь частот  $\omega_x$ ,  $\langle \omega_y \rangle$  с действиями  $J_x$ ,  $J_y$  (3.5).

В таком виде, однако, соотношение (8.1) еще не решает поставленной задачи, так как появляется новая динамическая переменная ( $J_x$ ), и для нее требуется еще одно уравнение. Однако вместо нахождения уравнения для  $\Delta J_x$  можно выразить  $J_x$  через  $J_y$  с помощью закона сохранения энергии  $H^0(J_x, J_y) = \text{const}$ . Из выражения (3.4) находим

$$J_x = (H^0 - J_y) / \sqrt{2J_y} = (v_0^2 - 2J_y) / 2 \sqrt{2J_y}, \quad (8.2)$$

откуда

$$\Delta\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2J_y}} + \frac{v_0^2}{(2J_y)^{3/2}} \right). \quad (8.3)$$

Пусть теперь  $J_y, \theta_0$  — значения динамических переменных при каком-то прохождении минимума потенциала, а  $\bar{J}_y, \bar{\theta}_0$  — значения этих же переменных при следующем прохождении. Отображением называется связь между этими двумя парами:  $J_y, \theta_0 \rightarrow \bar{J}_y, \bar{\theta}_0$ . Вводя для удобства новую фазу  $\vartheta = 2\theta$ , можно записать эту связь в нашем случае в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_y &= J_y + (\Delta J_y)_m \sin \vartheta_0; \\ \bar{\vartheta}_0 &= \vartheta_0 + G(\bar{J}_y); \\ (\Delta J_y)_m &\approx -\pi J_y \exp[-4/3 v_0 \cos \beta_0], \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

[см. (7.8)], а функция  $G(J_y) \equiv 2 \Delta\theta_0(J_y)$  берется при  $J_y = \bar{J}_y$ , т. е. для значения  $J_y$  после первого прохождения, которое как раз и определяет разность двух последовательных значений фазы  $\vartheta_0$ .

Отображение полностью описывает эволюцию рассматриваемой модели в ее фазовом пространстве  $(J_y, \vartheta_0)$ . Это пространство в данном случае является полуцилиндром, так как  $J_y \geq 0$ , а  $\vartheta_0$  — фаза, определенная с точностью до целого кратного  $2\pi$ . При заданной энергии  $H^0 = v_0^2/2$  движение ограничено областью  $J_y \leq H^0$  (8.2). Термин отображение связан с тем, что разностные уравнения (8.4) преобразуют (или отображают) фазовый полуцилиндр на себя, т. е. каждая точка этого полуцилиндра переходит в одну из точек этой же поверхности.

Отображение (8.4) не является каноническим, т. е. не сохраняет меру (площадь) фазовой поверхности. Действительно, если положить для простоты  $\cos \beta_0 = 1$  ( $\beta_0 \ll 1$ ), то якобиан отображения

$$\frac{\partial(\bar{J}_y, \bar{\vartheta}_0)}{\partial(J_y, \vartheta_0)} = 1 + \frac{\partial(\Delta J_y)_m}{\partial J_y} \sin \vartheta_0 \neq 1. \quad (8.5)$$

Поскольку исходная система (3.1) каноническая, или гамильтонова, то результат (8.5) просто означает, что отображение (8.4) не является точным. Действительно, соотношение (7.8) определяет изменение не  $J_y$ , а  $\ln J_y$ . Если принять по-прежнему, что  $\cos \beta_0 = 1$  и ввести новую переменную  $P = \ln J_y$ , то отображение

$$\bar{P} = P + (\Delta P)_m \sin \vartheta_0; \quad \bar{\vartheta}_0 = \vartheta_0 + G(\bar{P}) \quad (8.6)$$

оказывается уже каноническим, так как  $(\Delta P)_m = \pi \exp(-4/3 v_0)$  не зависит от  $P$ .

Отметим, что если бы мы сохранили зависимость показателя экспоненты в  $(\Delta P)_m$  от  $\beta_0$  [ $\cos \beta_0$  или, в общем случае, зависимость (7.6)], а следовательно, и от  $J_y$ , то последнее отображение стало бы опять неканоническим из-за  $\partial(\Delta P)_m / \partial J_y \neq 0$ . С этим связано еще одно преимущество приближения малых  $\beta_0$ . В этом приближении во всех рассмотренных выше примерах можно выбрать такую переменную  $P$ , что  $\partial(\Delta P)_m / \partial P = 0$ , и отображение вида (8.6) (см. ниже) оказывается каноническим.

Каноничность отображения существенна для использования некоторых общих теорем эргодической теории и необходима при численном моделировании, так как в противном случае возможно быстрое накопление ошибок из-за несохранения фазовой площади.

Для некоторых конфигураций магнитного поля отображение, описывающее движение частицы в ловушке, оказывается таким же, как и (8.6). Например, для короткой ловушки (см. § 3, п. 2) вводим переменную  $P = \sqrt{\mu}$  [см. (7.14) и (7.17)] и получаем:

$$\bar{P} = P + (\Delta P)_m \sin \theta_0; \bar{\theta}_0 = \theta_0 + G(\bar{P}), \quad (8.7)$$

где

$$(\Delta P)_m = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} r_0 \sqrt{\omega_0} e^{-q} \quad (8.8)$$

и

$$G(P) = \frac{\pi \langle \omega \rangle}{\Omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} L \sqrt{\omega_0} \left( \frac{1}{P} + \frac{v^2}{2\omega_0 P^3} \right). \quad (8.9)$$

Последнее выражение можно написать сразу из (8.3) ввиду полной аналогии выражений (3.4), (3.11) и (3.5), (3.12). Параметр адиабатичности в данном случае  $\varepsilon \sim 1/q = 3\rho_m/2L$ .

Такой же вид имеет отображение и для многопробочной ловушки (см. п. 4), а также для плоской геометрии встречных пробок (см. п. 5). Во всех этих случаях на полупериоде продольных колебаний (один пролет частицы через ловушку) имеется только одна особенность, а движение симметрично относительно минимума поля. Отображение для остальных примеров § 3 будет построено позднее (см. § 14). Заметим сразу, что во всех примерах магнитных ловушек переменная  $P = \sqrt{\mu}$ , поскольку при вычислении  $\Delta\mu$  мы всегда использовали уравнение (4.4).

В случае многопробочной ловушки ограничимся областью вблизи сепаратрисы (см. п. 4, § 3). Частоты  $\langle \omega \rangle$  и  $\Omega$  заданы здесь как функции параметра  $\omega$  [формулы (3.26), (3.29), (3.31)], который зависит только от  $\mu$  [см. (3.25),  $H^0 = \text{const}$ ]. В результате получаем для функции  $G(P)$  в отображении (8.7):

$$\left. \begin{aligned} G(P) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \frac{L \sqrt{\omega_0}}{P} \left( \ln \frac{32}{|\omega|} - 2 \frac{\lambda-1}{\lambda} \right); \\ \omega &= \frac{v^2}{(\lambda-1)\omega_0 P^2} - \frac{2\lambda}{\lambda-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Выражение же для  $(\Delta P)_m$  остается прежним (8.8) с параметром

$$\frac{1}{q} = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\lambda-1} \frac{\rho_m}{L}, \quad (8.11)$$

где  $2L$  — расстояние между соседними пробками [см. (3.18) и (7.19)].

В случае встречных пробок используем для поля асимптотическое выражение (3.36), соответствующее большим амплитудам продольных колебаний, так



как мы по-прежнему считаем  $\beta_0$  малым. В этом случае частоты даются соотношениями (3.38), и мы получаем

$$G(P) \approx \frac{2}{3} \frac{r_0 v^3}{\omega_0 P^4}. \quad (8.12)$$

Величина же  $(\Delta P)_m$  определяется выражением (7.34).

Полученные в этом параграфе отображения можно прямо использовать для численного моделирования длительного движения частицы в магнитной ловушке соответствующей конфигурации. Эти отображения довольно простые, и каждая итерация отображения соответствует одному полному пролету частицы через ловушку между точками отражения в пробках.

Для аналитического исследования полученные отображения можно еще более упростить и «стандартизовать».

## § 9. Стандартное отображение

Полученное в предыдущем параграфе отображение (8.7) эквивалентно гамильтониану (6.9) в том смысле, что описывает ту же систему нелинейных резонансов. Условие резонанса (первого приближения — см. ниже, § 10) для отображения можно записать в виде

$$G(P_r) = 2\pi r, \quad (9.1)$$

где  $r$  — любое целое число. Это условие определяет резонансные значения  $P = P_r$  и соответственно  $\mu = \mu_r = P_r^2$ , для которых последовательные значения фазы  $\theta_0$  остаются неизменными. Последнее справедливо, разумеется, если  $\mu$  тоже остается неизменным, т. е. если  $\theta_0 = 0$  или  $\pi$ . Легко видеть, что одно из этих значений фазы неустойчиво в зависимости от знака  $(\Delta P)_m$  [при  $(\Delta P)_m > 0$ , например, неустойчивой является точка  $\theta_0 = 0$ ].

Так как  $G(P) = \pi \langle \omega \rangle / \Omega$  (см. § 8), то условие резонанса можно записать также в виде:  $\langle \omega \rangle = 2r\Omega$ . Оно отличается от общего условия (6.2) множителем 2, который связан с симметрией движения, описываемого отображением (8.7), относительно минимума поля. В этом случае амплитуды всех нечетных гармоник продольных колебаний в фурье-разложении (6.1) обращаются в нуль.

Линеаризуем функцию  $G(P)$  вблизи одного из резонансных значений  $P$  и введем новую переменную  $p$ :

$$G(P) \approx G(P_r) + \left. \frac{dG}{dP} \right|_{P=P_r} (P - P_r) \rightarrow G'_r(P - P_r) \equiv p. \quad (9.2)$$

Здесь  $G'_r \equiv (dG/dP)_{P=P_r}$ , и мы отбросили член  $G(P_r) = 2\pi r$ , который не изменяет отображение. В переменных  $p, \theta$  (мы опустили индекс нуль у фазы) отображение (8.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + K \sin \theta; \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{p} = \theta + p + K \sin \theta. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Подобным способом оно было введено в [8] и получило название стандартного отображения, так как к нему сводятся многие (хотя, конечно, далеко не все) конкретные задачи нелинейной динамики гамильтоновых систем. В част-

ности, к этому отображению приводятся все типы магнитных ловушек, рассмотренных в предыдущем параграфе. Специфика конкретной системы входит только в единственный параметр стандартного отображения, который можно представить в виде

$$K = G'_r (\Delta P)_m. \quad (9.4)$$

Заметим, что если бы даже величина  $(\Delta P)_m$  зависела от  $P$ , ее нужно было бы взять в соотношении (9.4) при  $P = P_r$  (как и  $G'$ ). Следовательно,  $K$  есть просто постоянная, а стандартное отображение автоматически оказывается каноническим. Поэтому для аналитического исследования исходного отображения (8.7) с помощью перехода к стандартному отображению каноничность первого не является существенной.

Резонансы первого приближения для стандартного отображения определяются условиями

$$p = p_r = 2\pi r, \quad (9.5)$$

т. е. их бесконечно много, и все они расположены на одинаковом расстоянии  $\delta p = 2\pi$  друг от друга. Из сравнения последнего выражения с (9.1) видно, что стандартное отображение описывает исходную систему (в частности, ее резонансную структуру) локально по  $P$  (и по  $\mu$ ). Действительно, исходная система — частица в ловушке и описывающее ее движения отображение (8.7) имеет, вообще говоря, конечное число резонансов (из-за ограниченного диапазона изменения  $\mu \leq v^2/2\omega_0$ ), и расположены они неравномерно по  $\mu$  (или  $P$ ). Стандартное отображение трансформирует данный участок резонансной структуры, делая его однородным и бесконечным. По этой причине стандартное отображение называют также однородной моделью резонансной структуры.

Для того чтобы локальная модель имела смысл, необходимо, чтобы резонансов было много, а их характеристики, и в частности параметр  $K$ , мало отличались от соседних резонансов. Это же есть и условие допустимости линеаризации отображения (8.7) по  $P$ . Его можно записать в виде

$$\frac{\delta P}{P} \approx \frac{2\pi}{|PG'|} \sim \frac{2\pi}{|G|} \sim \varepsilon \ll 1, \quad (9.6)$$

где  $\delta P = |P_{r+1} - P_r|$  — расстояние между соседними резонансами по  $P$ .

## § 10. Граница глобальной устойчивости

Как уже отмечалось выше, центральным в проблеме длительного удержания частицы в магнитной ловушке является вопрос, накапливаются или не накапливаются последовательные резонансные изменения магнитного момента частицы  $\Delta\mu$ ? На языке стандартного отображения этот же вопрос звучит так: является ли движение этой системы финитным, ограниченным по  $p$ , или инфинитным?

Единственный параметр стандартного отображения  $K$  имеет смысл параметра возмущения. Действительно, при  $K=0$  значение  $p = \text{const}$ , а следовательно, и  $\mu = \text{const}$ . Поскольку в данном случае речь идет об адиабатическом возмущении, то величину  $K$  можно рассматривать как новый параметр адиабатичности. Точнее, в

качестве безразмерного параметра адиабатичности следует взять  $|K|/(2\pi)^2$  — квадрат отношения частоты колебаний под действием возмущения [ $\sim \sqrt{|K|}$ , см. ниже, (10.2)] к частоте возмущения (равно  $2\pi$ , период возмущения равен 1). Новый параметр связан со старым ( $\varepsilon$ ) оценкой

$$k = \frac{|K|}{4\pi^2} \sim \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (10.1)$$

Здесь экспоненциальный множитель появляется из выражения для  $(\Delta P)_m$  (или  $\Delta\mu$ ), а предэкспоненциальный — из  $G_r' \sim G/P \sim 1/\varepsilon P$ . По понятным причинам мы будем называть величину  $k$  резонансным параметром адиабатичности.

Поскольку функция  $k(\varepsilon)$  имеет особенность при  $\varepsilon=0$ , новый параметр  $k$  не может быть получен, как мы убедились в этом и непосредственно, из асимптотического разложения по  $\varepsilon$ . Однако, коль скоро мы нашли его точным интегрированием возмущения и пришли, таким образом, в конце концов к стандартному отображению, можно использовать теперь для анализа этого отображения асимптотическое разложение по параметру  $k$ , и в частности очень простой метод усреднения (см., например, [12]). Так, для достаточно малого  $k \rightarrow 0$  и нерезонансного  $p \neq 2\pi r$  можно ожидать, что вариации  $p$  будут квазипериодическими и ограниченными. Точно так же для  $k \rightarrow 0$  и резонансного  $p$  (например,  $p \approx 0$ ) можно пренебречь всеми резонансами, кроме данного ( $r=0$ ). При этом разностные уравнения стандартного отображения (9.3) можно заменить дифференциальными:

$$\bar{p} - p \approx \frac{dp}{dt} \approx K \sin \theta; \quad \bar{\theta} - \theta \approx \frac{d\theta}{dt} = p, \quad (10.2)$$

которые оказываются каноническими с гамильтонианом

$$H_r(\theta, p) = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta. \quad (10.3)$$

Здесь время  $t$  измеряется в числе итераций отображения, или в единицах  $T/2$ .

Резонансный гамильтониан (10.3) эквивалентен гамильтониану (6.8) — оба описывают один нелинейный резонанс. Как уже отмечалось в § 6, движение в этом случае является финитным для любых начальных условий. Максимальная амплитуда колебаний  $p$  соответствует движению вблизи сепаратрисы ( $H_r = |K|$ ). Сепаратриса имеет две ветви:

$$p_c = \pm 2 \sqrt{|K|} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.4)$$

Это выражение справедливо при  $K > 0$ ; изменение знака  $K$  эквивалентно сдвигу фазы  $\theta$  на  $\pi$ :  $\theta \rightarrow \theta + \pi$  [см. (10.3)]. Максимальное изменение  $(\Delta p)_m$  величины  $p$  равно ширине сепаратрисы, т. е. наибольшему расстоянию между ветвями сепаратрисы (при  $\theta = \pi$ ):

$$(\Delta p)_m = 4 \sqrt{|K|} = 8\pi \sqrt{k}. \quad (10.5)$$

Динамика одного нелинейного резонанса (10.3) полностью аналогична движению обыкновенного маятника или же частицы в поле с гармоническим потенциалом, в частности в многопробочной ловушке типа (3.19). Картина фазовых траекторий во всех этих случаях имеет вид, схематически изображенный на рис. 1. Следовательно, как уже отмечалось выше, в § 6, колебания  $p$ , а значит и  $\mu$ , в случае одного резонанса ограничены. До каких  $K$  сохраняется эта простая картина движения? Обычное условие асимптотической теории требует, чтобы частота ( $\sim |K|^{1/2}$ ) усредненной (сглаженной) системы (10.2) была много меньше частоты отброшенного возмущения в исходной системе (9.3), которая равна  $2\pi$  (за единицу времени принята одна итерация), т.е. чтобы  $|K| \ll \ll (2\pi)^2$ , или  $k \ll 1$  (10.1). Отсюда критическое значение возмущения

$$k_{\text{кр}} \sim 1; \quad |K|_{\text{кр}} \sim (2\pi)^2 \approx 40. \quad (10.6)$$

Значительно лучшую оценку можно получить с помощью так называемого критерия перекрытия нелинейных резонансов [8]. Простейший вариант этого критерия в рассматриваемом случае получается следующим образом. Все целые  $[p_r/2\pi = r]$  резонансы стандартного отображения идентичны и описываются одним и тем же гамильтонианом (10.3) со сдвинутым импульсом  $p \rightarrow p - j_r$ . В частности, каждый из них имеет одну и ту же ширину (10.5). Простейший критерий перекрытия резонансов определяется из условия касания сепаратрис соседних резонансов. Поскольку расстояние между ними  $\delta p = 2\pi$  (9.5), то условие касания имеет вид  $\delta p = (\Delta p)_m$ , откуда

$$k_{\text{кр}} = 1/16; \quad |K|_{\text{кр}} = \pi^2/4 \approx 2,5. \quad (10.7)$$

Это уже значительно ближе к результатам численного моделирования стандартного отображения [8], которые дают

$$|K|_{\text{кр}} \approx 1; \quad k_{\text{кр}} \approx 1/40 \quad (10.8)$$

с точностью порядка нескольких процентов. Отметим, что на границе устойчивости параметр адиабатичности  $k = k_{\text{кр}} \ll 1$ , что оправдывает применение асимптотического разложения в этой области.

Таким образом, весьма простой критерий перекрытия позволяет правильно оценить порядок критического возмущения. Более того, картина перекрытия резонансов достаточно наглядна, чтобы составить качественно представление о том, что произойдет при большем возмущении. Ясно, что при перекрытии резонансов траектория системы может переходить из области одного резонанса в область соседнего и, по крайней мере для некоторых начальных условий, движение станет инфинитным. Характер этого движения будет рассмотрен ниже (см. § 11). Здесь же отметим, что завышение критического значения по простому критерию перекрытия резонансов объясняется в основном тем, что в таком виде критерий учитывает только резонансы первого приближения по параметру адиабатичности  $k$ . Во втором приближении по этому параметру появляются полуцелые резонансы  $p_r/2\pi = r/2$ ; в третьем приближе-

нии — резонансы  $p_r/2\pi=r/3$  и т. д. Полная система резонансов оказывается всюду плотной по  $p$ :

$$p_{rq} = 2\pi r/q, \quad (10.9)$$

где  $r, q$  — любые целые. Это, конечно, не означает, что резонансы всегда (при любом  $k \rightarrow 0$ ) перекрываются, так как ширина резонансов быстро падает с ростом знаменателя  $q$ . Действительно, резонансы со знаменателем  $q$  появляются лишь в  $q$ -м (и высших) приближениях, т. е. в членах возмущения, амплитуда которых порядка  $k^q$ , а ширина резонанса  $\sim kq/2$ . Учитывая, что число  $q$ -резонансов на заданном интервале  $p$  (например,  $2\pi$  — между соседними целыми резонансами) пропорционально  $q$ , получаем, что перекрытие резонансов всех приближений оценивается суммой

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} q\eta^q = \eta \frac{d}{d\eta} \sum_{q=1}^{\infty} \eta^q = \frac{\eta}{(1-\eta)^2} = \frac{1}{4}. \quad (10.10)$$

Здесь  $\eta = \sqrt{k}$ , а условие перекрытия  $S=1/4$  получается из критического значения  $\eta_1=1/4$  (10.7) при учете только целых резонансов. Резонансы высших приближений увеличивают  $S$  (при заданном  $\eta$ ) и соответственно уменьшают  $\eta_{кр}$  до

$$\eta_{кр} = 3 - \sqrt{8} \approx 0,17; \quad k_{кр} \approx \frac{1}{34}; \quad |K|_{кр} \approx 1,16. \quad (10.11)$$

Это уже совсем близко к значению границы устойчивости (10.8), хотя оценка (10.10) не может, конечно, считаться априори надежной, поскольку члены суммы в (10.10) содержат неизвестные числовые коэффициенты. По данным [8] коэффициенты при второй и третьей степенях  $\eta$  равны  $\pi/2 \approx 1,57$  и  $(2,2)^2$  соответственно. Во всяком случае выражение (10.10) демонстрирует, что всюду плотная система резонансов совсем не обязательно ведет к перекрытию и неустойчивости.

Этот важный в принципиальном и практическом отношении вывод не может все же считаться достаточно убедительным, так как он основан в конечном счете на асимптотическом разложении по параметру  $k$ . Значение результатов численного моделирования также ограничено ввиду конечного времени счета (до  $\sim 10^7$  итераций стандартного отображения). Строгий результат о существовании конечного критического возмущения, ниже которого частица оказывается вечно (т. е. для  $-\infty < t < \infty$ ) запертой в магнитной ловушке, был получен в работе [10] с помощью построения сходящихся (а не асимптотических) рядов теории возмущения. К сожалению, технические трудности не позволяют получать таким путем эффективную оценку величины (и даже порядка) критического возмущения. В работе [8] с учетом второго и третьего приближений теории возмущения, а также некоторых эффектов высших приближений получено значение  $|K|_{кр} \approx 1,1$ . Совершенно другой метод [23] приводит к  $|K|_{кр} \approx 0,97$  (обсуждение последнего метода см. в [24]). Подводя итоги, можно заключить, что значения (10.8) для крити-

ческого возмущения являются достаточно надежными и их можно использовать при решении конкретных задач нелинейной динамики, приводимых к стандартному отображению.

Ограниченные колебания действия  $\mu$  для подкритического возмущения называют иногда суперadiaбатичностью (см. [25], где решена близкая задача). По существу, в этом случае адиабатический инвариант становится точным интегралом движения, хотя и неаналитическим и даже сингулярным по динамическим переменным и исходному малому параметру  $\varepsilon$  [10]. В этой связи следует заметить, что знаменитая теорема Пуанкаре об отсутствии у гамильтоновой системы в общем случае аналитических интегралов движения, кроме энергии, имеет не столь большое значение, как это считалось ранее.

Возникновение неустойчивости движения при перекрытии резонансов можно рассматривать как эффект взаимодействия резонансов, т. е. совместного действия нескольких резонансов, результат которого отличается (в данном случае кардинально) от суммы действий отдельных резонансов. Можно было бы описать эту ситуацию и как интерференцию резонансов, интерференцию с катастрофическими последствиями. Во всяком случае эффект перекрытия резонансов дает яркий пример глубокого различия линейной и нелинейной механики.

Поскольку стандартное отображение описывает исходную систему локально, критическое значение параметра  $K$  определяет границу устойчивости в фазовом пространстве системы. Выразим положение этой границы через параметры исходной системы.

Для модели (3.1) параметр стандартного отображения [см. (7.8), (8.3), (9.4)]:

$$K \approx \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{3}{\sin^3 \beta_0} + \frac{1}{\sin \beta_0} \right) \frac{\exp \left[ -\frac{4}{3v_0 \cos \beta_0} \right]}{v_0} \approx$$

$$\approx \frac{3\pi^2}{2} \frac{\exp \left( -\frac{4}{3v_0} \right)}{v_0 \beta_0^3}; \quad \beta_0 \ll 1. \quad (10.12)$$

Критическое значение  $|K|=1$  (10.8) определяет границу устойчивости на плоскости динамических переменных  $\beta_0$  и  $v_0 = \sqrt{2H^0}$ , которая является двумерной проекцией четырехмерного фазового пространства рассматриваемой модели.

Эту границу можно представить также в виде

$$\beta_0^{\text{кр}} \approx 2,5v_0^{-1/3} \exp(-4/9v_0). \quad (10.13)$$

На плоскости скоростей  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$  величина  $\beta_0^{\text{кр}}$  определяет сектор неустойчивого движения  $\beta_0 < \beta_0^{\text{кр}}$ , в котором амплитуда продольных колебаний неограниченно возрастает. Адиабатический режим соответствует здесь малым  $v_0 \ll 1$ , так как отноше-

ние частот  $\omega_x / \langle \omega_y \rangle \sim v_0 \beta_0^3 \sim \exp(-4/3 v_0)$  [последняя оценка справедлива на границе устойчивости (10.13)].

Для короткой магнитной ловушки, используя соотношения (8.8) и (8.9), получаем аналогично предыдущему случаю

$$K \approx \frac{81\pi^2}{64} \frac{r_0}{L} \frac{q^2 e^{-q}}{\beta_0^4}, \quad (10.14)$$

где  $q = 2L/3\rho_m \gg 1$  и  $\beta_0 \ll 1$ . Отсюда критический угол

$$\beta_0^{(\text{кр})} \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{r_0}{L}\right)^{1/4} \sqrt{q} e^{-q/4}. \quad (10.15)$$

В ловушке он определяет конус неустойчивости в пространстве скоростей частицы в минимуме магнитного поля. В принятой модели короткой ловушки (3.10) поле растет вдоль магнитной линии неограниченно, и конус неустойчивости существует при любом  $q \rightarrow \infty$ , хотя его ширина и уменьшается очень быстро при увеличении  $q$ . В реальных ловушках поле ограничено некоторым максимальным значением  $\omega_m = \lambda \omega_0$ , где  $\lambda$  — пробочное отношение. Поэтому, как известно, существует адиабатический конус выхода частиц  $\beta_0^{(a)} \approx \lambda^{-1/2}$  (при  $\lambda \gg 1$ ), даже если  $\mu = \text{const}$ . Неустойчивость движения частиц в магнитной ловушке существенна, только если  $\beta_0^{(\text{кр})} > \beta_0^{(a)}$ , или

$$\lambda > \frac{8}{9\pi} \left(\frac{L}{r_0}\right)^{1/2} \frac{e^{q/2}}{q}. \quad (10.16)$$

Этой оценке можно придать и другой смысл — как ограничение сверху на амплитуду устойчивых продольных колебаний ( $a < a_{\text{кр}}$ ). Действительно, минимальное устойчивое  $\beta_0^{\text{кр}}$  ( $\ll 1$ ) соответствует достижению частицей поля  $\omega_{\text{кр}} \approx \omega_0 \lambda_{\text{кр}} \approx \omega_0 (\beta_0^{(\text{кр})})^{-2}$ . Следовательно,  $\lambda_{\text{кр}} = 1 + a_{\text{кр}}^2/L^2$  (для нашей модели короткой ловушки) и равно правой части неравенства (10.16).

Совершенно аналогично получается оценка границы устойчивости и для встречных пробок (в плоской геометрии). Из (8.12) и (7.34) получаем с помощью (9.4):

$$K \approx - \frac{64\sqrt{2}}{3} \frac{q^{9/8} e^{-q}}{\beta_0^5}. \quad (10.17)$$

Здесь  $q = r_0 \omega_0 / 2v = r_0 / 2\rho_m$  и  $\beta_0 \ll 1$ . Ширина неустойчивого сектора

$$\beta_0^{(\text{кр})} \approx 2q^{9/40} e^{-q/5},$$

$$\lambda_{\text{кр}} \approx \frac{e^{0,4q}}{4q^{9/20}} \approx \frac{|s|_{\text{кр}}}{r_0} \approx \frac{x_{\text{макс}}}{r_0} \approx \frac{y_{\text{макс}}}{r_0}, \quad (10.18)$$

где  $x_{\text{макс}} = y_{\text{макс}} \approx |s|_{\text{макс}} \gg r_0$  — максимальное отклонение частицы вдоль координатных осей (см. рис. 2, а), при котором ее колебания еще устойчивы.

Положение границы устойчивости на плоскости  $(x, y)$  сечения магнитного поля можно получить следующим образом. Так как  $\omega_0(r_0) = Cr_0$ , где  $C$  — некоторая постоянная (см. § 3, п. 5), то

$$\frac{r_0 v}{\omega_0} = r_0 \rho_m = \frac{v}{C} = L^2 = \text{const}; \quad q = \frac{r_0 \omega_0}{2v} = \frac{r_0^2}{2L^2} \quad (10.19)$$

и длина  $L$  есть некоторый физический параметр данной ловушки. Подставляя эти выражения во второе соотношение (10.18) и используя уравнение магнитной линии  $2xy = r^2_0$ , получаем уравнение границы устойчивости в виде

$$y_b \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} q^{1/20} e^{0,4q} \approx \frac{e^{0,4x_b y_b}}{2\sqrt{2}}$$

или

$$y_b \approx \frac{5}{2} \frac{1 + \ln x_b}{x_b}. \quad (10.20)$$

Здесь  $x_b$  и  $y_b$  измеряются в единицах  $L$ . Это выражение справедливо только при  $x_b \gg 1$ , так как в (10.18) использовалась асимптотика поля (3.36). Кривая (10.20), симметризованная относительно прямой  $x=y$ , показана на рис. 5 (нижняя кривая со штриховкой) вместе с одной из магнитных линий, которые она пересекает. Формально кривая (10.20) пересекает линию  $x=y$  в точке  $x_b = y_b \approx 2,08$ , где  $r_0^{\text{мин}} = 2,9$  и  $q^{\text{мин}} \approx 4,3$ . Неустойчивая область расположена под кривой.

В многопробочной ловушке мы явно учитываем адиабатический конус потерь с раствором  $\beta_0^{(a)} \approx \lambda^{-1/2} \ll 1$ . Поэтому область неустойчивого движения будет иметь вид конического слоя, примыкающего к конусу потерь. Будем характеризовать этот слой его шириной, считая ее малой (см. ниже):

$$\Delta\beta_0 = \beta_0^{\text{кр}} - \beta_0^{(a)} \ll \beta_0^{(a)} \ll 1. \quad (10.21)$$

Основной параметр функции  $G(P)$  (8.10) равен при этом:

$$\omega \approx -4\sqrt{\lambda} \Delta\beta_0. \quad (10.22)$$

Так как  $|\omega| \ll 1$ , то в выражении для  $G'(P)$  достаточно дифференцировать только  $\omega$ :

$$G' \approx -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{L\lambda\omega_0^{3/2}}{\Delta\beta_0 v^2}. \quad (10.23)$$

Используя для  $(\Delta P)_m$  соотношение (8.8) с параметром  $q$  из (8.11), получаем

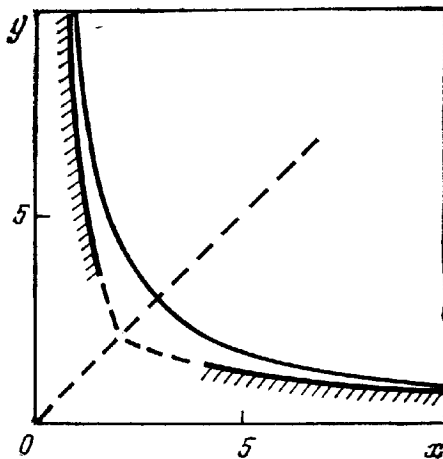


Рис. 5. Граница устойчивости движения (нижняя кривая со штриховкой) для плоской геометрии встречных пробок; область неустойчивости лежит под этой кривой. Верхняя кривая — одна из магнитных линий. Единица длины определяется условием  $r_0 \rho_m(r_0) = 1$  (см. текст)



$$K \approx \frac{27\pi^2}{64} \frac{r_0}{L} \frac{\lambda^2}{\Delta\beta_0} q^2 e^{-q}. \quad (10.24)$$

Отсюда ширина слоя неустойчивого движения

$$|\Delta\beta_0| \approx 4,2 \frac{r_0}{L} (\lambda q)^2 e^{-q}. \quad (10.25)$$

В многопробочной ловушке слой состоит из двух половин, каждая шириной  $|\Delta\beta_0|$ : «верхней», в которой частицы являются пролетными ( $\omega > 0$ ;  $\Delta\beta_0 < 0$ ), и «нижней» с запертыми частицами ( $\omega < 0$ ;  $\Delta\beta_0 > 0$ ).

Подобный слой образуется, конечно, и в любой другой реальной ловушке за счет максимума поля в пробках. Моделью такой «реальной» ловушки может служить одна секция многопробочной ловушки (две пробки). В этом случае верхняя половина слоя не играет роли, так как частица, оказавшаяся здесь, покидает ловушку за один пролет. В нижней же половине слоя частица может держаться довольно долго (см. § 11), так что существование слоя вполне наблюдаемо. Конечно, для длительного удержания частиц в ловушке наличие этого слоя совершенно несущественно, так как он практически не увеличивает адиабатический конус потерь.

## § 11. Локальная диффузия

Рассмотрим характер движения в неустойчивой области, определяемой условием  $|K| > 1$  (см. § 10). Будем исходить из стандартного отображения (9.3), которое описывает движение частицы при относительно небольших изменениях  $\mu$ . Характерной особенностью динамики стандартного отображения является локальная неустойчивость движения, т. е. быстрое «разбегание» почти всех очень близких траекторий. Эту неустойчивость не следует путать с глобальной неустойчивостью, рассмотренной в § 10, которая означает просто инфинитность движения, т. е. неограниченное изменение  $p$  за достаточно длительное время. Для исследования поведения близких траекторий стандартного отображения рассмотрим производную [см. (9.3)]:

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\theta} = 1 + K \cos \theta \approx K \cos \theta. \quad (11.1)$$

Последнее выражение справедливо при  $|K| \gg 1$ , т. е. глубоко в области глобальной неустойчивости. Точно такое же выражение получается и для производной  $(d\bar{p}/dp)$ , если учесть, что фаза  $\theta$  в первом уравнении (9.3) связана с предыдущим значением  $\theta$  соотношением:  $\theta = \bar{\theta} + p$ . Отсюда ясно, что среднее расстояние между очень близкими траекториями (в линейном приближении) будет увеличиваться экспоненциально со временем:

$$|\delta\theta(t)| \approx |\delta\theta|_0 e^{-ht}, \quad (11.2)$$

где средняя скорость локальной неустойчивости  $h$  равна (на одну итерацию):

$$h = \langle \ln |K \cos \theta| \rangle = \ln \frac{|K|}{2}. \quad (11.3)$$

Последнее выражение получается простым усреднением по  $\theta$  в предположении равномерного распределения. Это упрощающее предположение действительно хорошо выполняется при достаточно

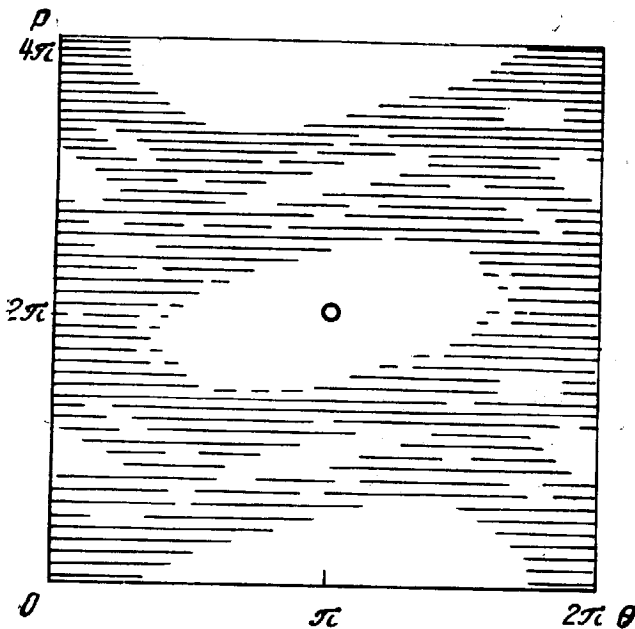


Рис. 6. Участок развернутого фазового цилиндра стандартного отображения (9.3) при  $K=1,13$  (по данным [8]). Область инфинитного движения по  $\rho$  (стохастическая компонента) заштрихована. Кружком отмечена устойчивая неподвижная точка в центре одного из целых резонансов  $\rho_r = 2\pi$

больших  $|K|$  (см. [8]). При меньших  $K$  (даже в области глобальной неустойчивости, т. е. при  $|K| > 1$ ) на фазовом цилиндре стандартного отображения сохраняются значительные области устойчивого движения, т. е. ограниченных квазипериодических колебаний  $\rho$  (рис. 6). Самые крупные области окружают устойчивые периодические траектории стандартного отображения с периодом 1 (неподвижные точки):  $\rho_1/2\pi = r$ ;  $\theta_1 = \pi$  ( $r$  — любое целое;  $K > 0$ ). Эти точки соответствуют центрам целых резонансов. Элементарный анализ линейной устойчивости этих точек (см., например, [8]) показывает, что устойчивые области вокруг них сохраняются до  $K=4$ . При больших  $K$  также возможно существование некоторых других устойчи-

вых областей, однако их площадь мала, и мы будем ими пренебрегать. Более подробно этот вопрос исследован в [8] (при  $K=5$ , например, относительная площадь устойчивых областей составляет меньше 2%). В соответствии с этим численное моделирование стандартного отображения показывает [8], что последнее выражение (11.3) для  $h$  справедливо с погрешностью не больше 5% для  $K > 6$ .

Величина  $h$  играет первостепенную роль в современной теории динамических систем и называется метрической энтропией (см., например, [26]) или, иногда, КС-энтропией (энтропией Крылова — Колмогорова — Синая) [8]. Оказывается, что при  $h > 0$ , т. е. при экспоненциальном развитии локальной неустойчивости, почти все траектории динамической системы, точнее, эргодической (стохастической) компоненты движения, являются случайными [27]. В рассматриваемом случае при  $K > 1$  стохастическая компонента совпадает с областью глобальной неустойчивости.

Сколько-нибудь подробное обсуждение чрезвычайно интересного вопроса о физическом смысле такой динамической случайности, т. е. случайного движения полностью детерминированной динамической системы, выходит за рамки данной статьи. Ограничимся лишь краткими замечаниями, отсылая интересующихся читателей к оригинальным работам [27] (краткое популярное обсуждение этих вопросов см. также в [28]).

В современной теории динамических систем случайность траектории связывается с ее максимальной сложностью. Последняя означает, грубо говоря, что не существует другого (более простого) способа описать данную случайную траекторию, чем просто задать ее саму. Иными словами, уравнения движения оказываются совершенно бесполезными для вычисления траектории на достаточно большом интервале времени, поскольку вся сложность траектории заключена в ее начальных условиях. Нетрудно видеть, что это прямо связано с экспоненциальной локальной неустойчивостью движения, благодаря которой траектория определяется с течением времени сколь угодно мелкими деталями начальных условий. Нетривиальным здесь является строгий результат, что почти все начальные условия движения соответствуют при этом именно случайным траекториям. Динамическая случайность, таким образом, связана в конечном счете с непрерывностью фазового пространства, роль же динамической системы (уравнений движения) сводится лишь к обеспечению локальной неустойчивости движения, которая вскрывает микроскопическую структуру фазового пространства [28].

В рамках рассматриваемой задачи о движении частицы в магнитной ловушке существенно, что сильная локальная неустойчивость приводит к невозможности представления движения в терминах траекторий и заставляет перейти к статистическому описанию. Основой статистического описания является эргодичность движения во всем фазовом пространстве или в его части. В последнем случае говорят об эргодической компоненте движения. Достаточным, хотя и не необходимым, условием эргодичности движения является описанная выше локальная неустойчивость. Среднее время пребывания эргодической траектории в любой области фазового пространства пропорционально инвариантной мере этой области. Для гамильтоновых (канонических) динамических систем такой инвариантной (т. е. сохраняющейся в процессе движения) мерой является, как известно, фазовый объем (теорема Лиувилля). Это позволяет дать количественное определение вероятности состояния, точнее, области состояний, динамической системы как величины, пропорциональной фазовому объему этой области (коэффициент пропорциональности зависит от принятой нормировки). В этом — одно из преимуществ канонических (гамильтоновых) уравнений движения или отображений. Для стандартного отображения, например, плотность вероятности  $d\omega = dpd\theta$ .

Все прочие статистические свойства динамической системы существенно зависят от поведения корреляций. Рассмотрим, напри-

мер, корреляции фазы  $\theta$  в стандартном отображении, точнее, рассмотрим корреляционную функцию

$$C(\tau) = \langle \sin \theta(t) \sin \theta(t + \tau) \rangle, \quad (11.4)$$

где усреднение производится либо по  $t$  на одной почти любой (случайной) траектории, либо, в силу эргодичности движения, прямо по  $\theta$ . При  $h > 0$  все корреляции необратимо затухают, т. е.  $C(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , хотя и не обязательно экспоненциально (см. ниже).

Если это затухание достаточно быстрое, то возможно простое диффузионное описание движения. Действительно, из первого уравнения (9.3) можем написать:

$$(\Delta p)_t = K \sum_{t'=1}^t \sin \theta(t'),$$

где время  $t$  — целое (номер итерации), а  $(\Delta p)_t$  — изменение  $p$  за  $t$  итераций. В пренебрежении устойчивой компонентой движения (см. выше) из эргодичности следует, что  $\langle \sin \theta \rangle = 0$ , а значит, и

$$\langle (\Delta p)_t \rangle = 0. \quad (11.5)$$

Найдем  $\langle (\Delta p)_t^2 \rangle$ . Имеем:

$$\langle (\Delta p)_t^2 \rangle = K^2 \sum_{t'=1}^t \sum_{t''=1}^t \langle \sin \theta(t') \sin \theta(t'') \rangle.$$

Учитывая, что  $\langle \sin^2 \theta \rangle = 1/2$ , последнее выражение можно представить при  $t \rightarrow \infty$  в виде

$$\langle (\Delta p)_t^2 \rangle \rightarrow tK^2 \left[ \frac{1}{2} + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} C(\tau) \right]. \quad (11.6)$$

Если последняя сумма конечна, то мы имеем простой статистический процесс диффузии по  $p$  со скоростью

$$D_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta p)_t^2 \rangle}{2t} = \frac{K^2}{4} R(K), \quad (11.7)$$

где  $R(K)$  — корреляционный фактор, который может зависеть только от  $K$  — единственного параметра стандартного отображения, полностью определяющего все его динамические и статистические свойства. При  $K \rightarrow \infty$  КС-энтропия  $h \rightarrow \infty$  и корреляции исчезают даже для соседних значений фазы  $\theta$ . В этом пределе  $R \rightarrow 1$ , и мы получаем

$$D_p^\infty = K^2/4. \quad (11.8)$$

Так как для стандартного отображения  $K = \text{const}$ , диффузионное уравнение для функции распределения  $f(p, t)$  имеет простой вид

$$\partial f / \partial t = D_p \partial^2 f / \partial p^2. \quad (11.9)$$

Его частным решением, соответствующим начальным условиям  $f(p,0) = \delta(p)$ , является распределение Гаусса:

$$f(p, t) = \frac{\exp\left(-\frac{p^2}{4D_p t}\right)}{\sqrt{4\pi D_p t}}. \quad (11.10)$$

Численное моделирование хорошо подтверждает эти простые соотношения [8].

Отметим, что для применимости любого кинетического уравнения вообще и простого диффузионного уравнения (11.9) в частности необходимо, чтобы диффузионный масштаб времени  $T_D \sim \sim p^2/D_p$ , т. е. характерное время эволюции функции распределения  $f$ , был бы много больше динамического масштаба  $T_h \approx 1/h$ , т. е. времени затухания корреляций [29]. Это необходимо потому, что величина  $D_p$  является одновременно и локальным (по времени) параметром диффузионного уравнения, т. е. в масштабе  $T_D$ , и асимптотическим — в масштабе  $T_h$  (11.7)\*. Для стандартного отображения

$$\frac{T_D}{T_h} \sim \left(\frac{p}{K}\right)^2 / \ln K \sim \left(\frac{p}{K}\right)^2 \gg 1.$$

Вернемся теперь от стандартного отображения к отображению вида (8.7), которое более точно описывает исходную задачу. Поскольку в последнее входит та же фаза, то корреляционные свойства движения останутся прежними, и мы можем сразу написать скорость диффузии по  $P$ :

$$D_P = \frac{(\Delta P)_m^2}{4} R(K) \quad (11.11)$$

с тем же корреляционным фактором  $R(K)$  (11.7). Последнее выражение получается, конечно, и из общего соотношения

$$D_P = D_p \left(\frac{dP}{dp}\right)^2, \quad (11.12)$$

поскольку  $K = G'_r (\Delta P)_m^2$  и  $dP/dp = 1/G'_r$ . В частности, скорость диффузии по  $\mu$ , которая нам как раз и нужна, равна

$$D_\mu = \mu (\Delta P)_m^2 R(K), \quad (11.13)$$

где  $(\Delta P)_m$  зависит от вида магнитной ловушки (см. § 8).

Запишем, наконец, скорость диффузии в обычном, непрерывном времени (а не в числе итераций отображения). Очевидно, что для этого достаточно разделить полученные выше выражения на  $T/2 = \pi/\Omega$ . Например:

$$D_\mu = \frac{\Omega \mu}{\pi} (\Delta P)_m^2 R(K). \quad (11.14)$$

\* Если упустить из виду это важное физическое условие, легко прийти к противоречию (см. [30—32] и ниже).

В отличие от стандартного отображения, однако, величины  $D$  теперь уже недостаточно, для того чтобы составить диффузионное уравнение для функции распределения  $f(\mu, t)$ . Это связано с тем, что уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), которое описывает диффузионный процесс при малых изменениях диффундирующей величины ( $|\Delta\mu| \ll \mu$  в нашем случае), содержит кроме  $D_\mu$  еще и вторую функцию

$$U_\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta\mu)_t \rangle}{t}, \quad (11.15)$$

так называемый «снос». Эту величину называют также иногда «трением», однако в общем случае это не оправдано, скорее, ее можно назвать средней скоростью (по  $\mu$ ).

С помощью величин  $U_\mu$  и  $D_\mu$  уравнение ФПК можно записать в виде (см., например, [33]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= - \frac{\partial Q}{\partial \mu}; \\ Q &= - \frac{\partial}{\partial \mu} (D_\mu f) + U_\mu f, \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

где  $Q$  — поток вероятности. В общем случае  $U_\mu \neq 0$ . Рассмотрим, например, отображение (8.7). Как было выяснено в § 8, оно является каноническим именно в переменных  $P, \theta_0$ , а не  $\mu, \theta_0$ , т. е. стохастическая траектория при  $|K| \gg 1$  равномерно распределена именно на поверхности  $P, \theta_0$ . Так как  $\mu = P^2$ , то  $\Delta\mu = 2P\Delta P + (\Delta P)^2$ . Отсюда

$$U_\mu = \frac{\langle (\Delta\mu)_t \rangle}{t} = \frac{\langle (\Delta P)_t^2 \rangle}{t} = 2D_P. \quad (11.17)$$

Сравнивая это выражение со скоростью диффузии  $D_\mu$  (11.13), приходим к соотношению ( $R \approx 1$ ):

$$U_\mu = \frac{1}{2} \frac{dD_\mu}{d\mu}, \quad (11.18)$$

которое и решает задачу нахождения функции  $U_\mu$ , а вместе с ней и полного диффузионного уравнения ФПК для отображения (8.7). Однако возникает вопрос, с какой точностью это отображение описывает исходную задачу о движении частицы в ловушке? Оно безусловно справедливо в первом порядке теории возмущения по параметру адиабатичности  $k \sim (\Delta P)_m$  (10.1). Но  $\mu U_\mu \sim D_\mu \sim (\Delta P)_m^2 \sim k^2$ , т. е. скорость  $U_\mu$  оказывается величиной второго порядка малости. Как мы увидим ниже (см. § 13), отображение (8.7) не обеспечивает такой точности, и поэтому соотношение (11.18) оказывается неправильным.

Общий метод нахождения  $U_\mu$  будет рассмотрен в § 13, а сейчас мы покажем, что для начальной стадии диффузии скорость  $U_\mu$  вообще не играет роли и ею можно просто пренебречь. В самом

деле, изменение  $\mu$  складывается из двух частей: во-первых, собственно диффузии, или разброса  $(\delta\mu)_1 \sim \sqrt{D_\mu t}$ , и, во-вторых, из среднего смещения  $(\delta\mu)_2 \sim U_\mu t$ . Их отношение [см. (11.18)]

$$\frac{(\delta\mu)_1}{(\delta\mu)_2} \sim \frac{\sqrt{D_\mu t}}{U_\mu t} \sim \frac{\mu}{(\delta\mu)_1} \gg 1 \quad (11.19)$$

пока  $(\delta\mu)_1 \ll \mu$ , т. е. пока диффузия носит локальный характер.

В качестве примера рассмотрим диффузию в тонком стохастическом слое многопробочной ловушки. В выражении для скорости диффузии (11.13) (дискретное  $t$ ) примем для простоты  $R(K) \approx 1$ . А так как в узком слое  $\mu \approx \mu_a$  (значение  $\mu$  на адиабатическом конусе потерь), то коэффициент диффузии  $D_\mu \approx \text{const}$ , и мы приходим к простому диффузионному уравнению вида (11.9). Если многопробочная ловушка достаточно длинная и можно пренебречь потоком частиц вдоль ловушки, то диффузия в слое приведет просто к релаксации начального распределения  $f(\mu, 0) \rightarrow \text{const}$ . Для определения времени релаксации заметим, что на обеих границах слоя диффузионный поток равен нулю, т. е.  $\partial f / \partial \mu = 0$ . Отсюда собственные функции уравнения диффузии:

$$\left. \begin{aligned} f_n(\mu, t) &= \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \cos(\pi n \nu); \\ \nu &= (\mu - \mu_{\text{кр}}) / \Delta_\mu; \quad \tau_n = \Delta_\mu^2 / \pi^2 n^2 D_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

где  $\mu_{\text{кр}}$  — одна из границ слоя, а  $\Delta_\mu$  — его полная ширина. Равновесное распределение соответствует  $n=0$ . Время релаксации определяется максимальным  $\tau_n = \tau_1$ . Используя выражения для  $D_\mu$  (11.13) и ширины слоя (10.25) ( $\Delta_\mu / \mu = 4 |\Delta\beta_0| / \beta_0^{(a)}$ ), получаем для времени релаксации

$$\tau_1 \approx \frac{64}{\pi^2 \nu} \left( \frac{\lambda L}{\rho_m} \right)^2 \quad (11.21)$$

итераций отображения (8.7), т. е. пролетов частицы между соседними пробками. Заметим, что следующая собственная функция  $n=2$  (11.20) релаксирует в 4 раза быстрее.

Сделаем небольшое отступление. В равновесии ( $t \rightarrow \infty$ ;  $f \rightarrow \text{const}$ ) величина  $\langle (\Delta\mu)^2 \rangle = \text{const}$ . Поскольку соотношение (11.6) остается справедливым и в этом пределе, то  $R(K) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Ясно, что это происходит за счет появления дальних корреляций при отражении частицы от границ слоя. Отсюда, однако, вовсе не следует, что коэффициент диффузии (11.7) в уравнении (11.9) равен нулю, как иногда считают [30—32]. Это было бы слишком формальным и прямолинейным пониманием предела в (11.7). На самом деле бесконечность в этом пределе есть бесконечность в малом, т. е. в динамическом, масштабе времени  $T_h \ll T_D$ . Иными словами, предел  $t \rightarrow \infty$  в (11.7) означает на самом деле сильное двойное неравенство:  $T_h \ll t \ll T_D$ .

Рассмотрим теперь одну секцию многопробочной ловушки. В этом случае частицы удерживаются только в нижней половине слоя. Поэтому при решении диффузионного уравнения в качестве второго граничного условия нужно положить  $f(\mu_a, t) = 0$ , т. е. условие поглощения (вылета) частиц на адиабатическом конусе. Нетрудно видеть, что первая собственная функция (11.20) удовлетворяет и этому граничному условию (при  $\nu = 1/2$ ). Поэтому выражение (11.21) дает также и время жизни частиц в нижней половине слоя. Интересно отметить, что это время возрастает пропорционально квадрату магнитного поля, тогда как ширина слоя экспоненциально убывает с ростом поля (10.25). Отметим также, что следующая собственная функция, удовлетворяющая условию поглощения при  $\mu = \mu_a$ , соответствует теперь  $n = 3$  и затухает в 9 раз быстрее, чем основная ( $n = 1$ ).

## § 12. Динамические корреляции

Рассмотрим подробнее корреляционный фактор  $R(K)$  в выражении для скорости диффузии в случае стандартного отображения [см. (11.7)]. Будем по-прежнему считать, что при  $|K| \gg 1$  можно пренебречь устойчивой компонентой движения. Так как стандартное отображение является каноническим в переменных  $p, \theta$ , то траектория будет при этом равномерно заполнять поверхность фазового цилиндра. Поскольку структура стандартного отображения периодична не только по  $\theta$ , но и по  $p$  (с тем же периодом  $2\pi$ ), при вычислении корреляций достаточно произвести усреднение по фазовому квадрату  $2\pi \times 2\pi$  (развертка участка фазового цилиндра).

Найдем несколько первых корреляций функции  $\sin \theta$  для стандартного отображения. Величина  $C(1)$  в (11.4) находится непосредственно из второго уравнения отображения (9.3) и равна

$$C(1) = \langle \sin \theta \sin \bar{\theta} \rangle = \langle \sin \theta \sin [\theta + K \sin \theta + p] \rangle = 0 \quad (12.1)$$

при усреднении по  $p$  (для фиксированного  $\theta$ ). Для того чтобы найти  $C(2)$ , выразим последующую ( $\theta$ ) и предыдущую ( $\bar{\theta}$ ) фазы через  $\theta, p$  на данном шаге:

$$\bar{\theta} = \theta + K \sin \theta + p; \quad \underline{\theta} = \theta - p.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C(2) &= \langle \sin \underline{\theta} \sin \bar{\theta} \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos (2p + K \sin \theta) \rangle - \frac{1}{2} \langle \cos (2\theta + K \sin \theta) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} J_2(|K|) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|K|}} \cos \left( |K| + \frac{15}{8|K|} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (12.2)$$

В последнем выражении использовано улучшенное асимптотическое представление для бесселевых функций при  $|K| \gg 1$  [22]. Весь вывод годится, по-видимому, до  $|K| \approx 4$ . При меньших  $|K|$  появляется значительная устойчивая область (см. выше), и простое усреднение по  $\theta, p$  неприменимо.



Несколько более громоздкие вычисления дают для следующих двух корреляций:

$$\left. \begin{aligned} C(3) &= \frac{1}{2} [J_3^2(|K|) - J_1^2(|K|)] \approx -\frac{4J_1J_2}{|K|} \sim |K|^{-2}; \\ C(4) &\approx \frac{1}{2} J_2^2(|K|) \sim |K|^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Приближенное равенство означает здесь сохранение только основного члена по малому параметру разложения  $|K|^{-1/2}$ . Начиная с  $C(4)$  точные выражения содержат бесконечные суммы по бесселевым функциям, так что дальнейшее продвижение этим методом оказывается невозможным. Поскольку, однако, корреляции быстро затухают при  $|K| \gg 1$  (см. ниже), то найденные значения  $C(\tau)$  уже достаточно хорошо аппроксимируют корреляционный фактор:

$$R(K) \approx 1 - 2J_2(|K|) + 2J_2^2(|K|), \quad (12.4)$$

где мы пренебрегли вкладом  $C(3)$ . Определяющим здесь является второе слагаемое, которое приводит к характерным медленно затухающим колебаниям скорости диффузии с ростом  $K$ . Такие колебания наблюдались при численном моделировании стандартного отображения в [8] и в других работах (см. [34]). В последней работе была впервые вычислена поправка (12.4) к асимптотической скорости диффузии  $D_p^\infty = K^2/4$ . Вычисление проводилось совершенно другим методом (фактически, даже двумя разными методами), в частности, не использовалось предположение об эргодичности движения. Поэтому результат [34] можно рассматривать также как независимое доказательство эргодичности стандартного отображения при  $|K| \gg 1$ .

На рис. 7 численные значения фактора  $R(K)$ , взятые из работы [34], сравниваются с теоретической зависимостью (12.4). Последняя отличается от результата [34] (первая работа) учетом корреляции  $C(4)$ , что несколько улучшает согласие с численными данными. Эта поправка была вычислена в нескольких работах, в том числе и во второй работе [34], а также методом, близким к описанному выше (и тоже постулирующим эргодичность движения), в работе [35].

Таким образом, зависимость первых (близких) корреляций от  $K$  объясняется вполне удовлетворительно и достаточно просто. Значительно менее ясным является вопрос о зависимости корреляций от времени. Численные эксперименты показывают, что эта зависимость совсем не всегда имеет вид простой экспоненты

$$C(\tau) \propto \exp(-Ah\tau),$$

как когда-то считалось, даже если КС-энтропия  $h > 0$ . На рис. 8 приведен пример затухания корреляций для стандартного отображения при  $K=7$ . Как видно, зависимость  $C(\tau)$  для четных  $\tau$  удается неплохо подогнать с помощью функции

$$C(\tau) \approx \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{\tau}). \quad (12.5)$$

Природа такого закона убывания корреляций остается неясной, хотя похожие результаты получены аналитически и для других динамических систем, но

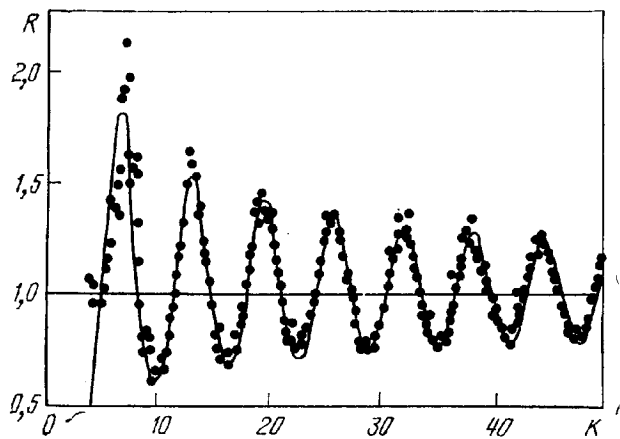


Рис. 7. Зависимость приведенной скорости диффузии  $R=4 D_p/K^2$  для стандартного отображения от параметра отображения  $K$ : точки — численные данные из работы [34]; кривая — расчет по формуле (12.4)

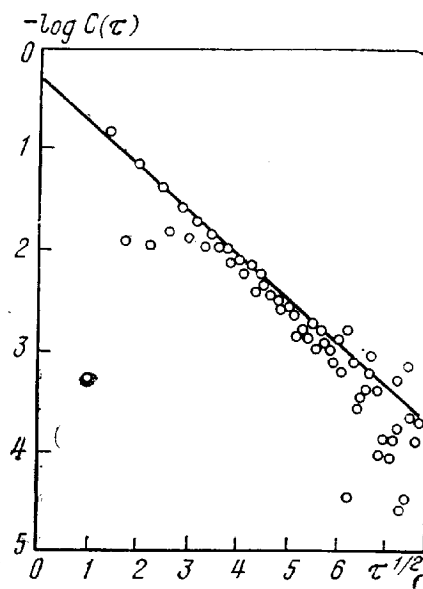


Рис. 8. Затухание корреляций  $C(\tau)$  в стандартном отображении при  $K=7$ :  $\tau$  — задержка (число итераций), логарифм — десятичный. Для  $\tau=1$  и  $\tau \geq 4$  численные значения  $C(\tau)$  определяются флуктуациями при усреднении (11.4) по одной траектории на  $10^6$  итераций. Прямая — функция  $C(\tau)=0,5 \exp(-\sqrt{\tau})$

всяком случае, как оценка сверху [36]. С другой стороны, для похожих отображений закон затухания корреляций может и значительно отличаться от (12.5) (см. [37]).

Поведение корреляций становится совсем сложным при  $|K| \sim 1$ . Существенным здесь является наличие границы между стохастической и устойчивой областями с очень сложной структурой (см. например, [38]). Как мы видели в § 10, такая граница является характерной особенностью структуры фазового пространства частицы в ловушке. Вблизи границы скорость диффузии резко падает. Это моделируется зависимостью скорости диффузии для стандартного отображения от  $K$  при  $K \rightarrow 1$ . Согласно численным данным работы [8], корреляционный фактор в этой области

$$R(K) \propto (|K| - 1)^s; \quad s \approx 2.6. \quad (12.6)$$

Совершенно другим методом из результатов численного моделирования движения в стохастическом слое в работе [39] получено  $s \approx 4$ . Благодаря медленной диффузии вблизи границы траектория надолго застревает в этой области, что приводит, в частности, к более медленному убыванию корреляций. Согласно [39], качественное изменение характера движения вблизи границы наступает при  $s > 2$ . Оказывается, что в этом случае время диффузии до границы становится бесконечным, т. е. стохастическая траектория не достигает границы стохастической компоненты. Это можно получить из следующей оценки [39]. Пусть  $x$  есть соответствующим образом нормированное расстояние от границы стохастической компоненты и  $d \langle (\Delta x)^2 \rangle / dt \sim D_x(x) \sim x^s$  [в тонком пограничном слое  $K(x) - 1 \propto x$ ;  $K(0) = 1$  (12.6)]. Так как скорость диффузии быстро растет с  $x$ , то время выхода из слоя меньше  $x$  будет определяться временем диффузии на расстояние порядка  $x$ , т. е.  $\langle (\Delta x)^2 \rangle \sim x^2$ . Отсюда

$$t > x^{2-s} \quad (12.7)$$

и при  $s > 2$   $t \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ .

В последнем случае ( $s > 2$ ) качественно изменяется также и поведение корреляционных функций. Действительно, вблизи границы  $x$  пропорционально  $\omega$  — относительному фазовому объему (площади) пограничного слоя, а значит, и вероятности попадания траектории в эту область. При усредненном выражении вида (11.4) для функции корреляции по стохастической компоненте доля траекторий, остающихся в слое, меньше  $x(\tau) \sim \tau^{-1/(s-2)} \propto \omega(\tau)$ , и будет определять асимптотическое поведение корреляции при  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$C(\tau) \rightarrow F(\tau)/\tau^q; \quad q = 1/(s-2). \quad (12.8)$$

Это выражение справедливо только при  $s > 2$  ( $q > 0$ ), так как в противном случае корреляции уже не определяются пограничным слоем. Функция  $F(\tau)$  зависит, вообще говоря, от поведения функции  $f(\theta, p)$ , к которой относятся корреляции  $C(\tau)$  [например,  $f = \sin \theta$  в (11.4)], в пограничном слое. В частности,  $F(\tau)$  может осциллировать, так что  $\langle F(\tau) \rangle = 0$  (среднее по  $\tau$ ).

Как отмечалось выше (см. § 11), для стандартного отображения при  $|K| \sim 1$  существуют значительные области устойчивости и поэтому можно ожидать степенное убывание корреляций вида (12.8). Такое поведение действительно наблюдалось при численном моделировании, причем, как оказалось,  $q \approx 1$  ( $K=2,1$ ), что соответствует  $s \approx 3$  (12.8). При этом для  $f = \cos \theta$  среднее  $\langle F(\tau) \rangle \neq 0$ , и интеграл от  $C(\tau)$  расходится. Помимо этого, среднее по стохастической компоненте  $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$  из-за наличия областей устойчивости. На диффузию по  $p$  это, однако, не сказывается существенным образом, поскольку она определяется корреляциями функции  $f = \sin \theta$  (11.7), т. е. той самой функции, которая определяет  $\Delta p$  в отображении (9.3). В этом случае  $\langle F(\tau) \rangle = \langle \sin \theta \rangle = 0$  при любой форме области устойчивости вокруг неподвижной точки  $\theta_f$ , в которой  $\sin \theta_f = 0$ . Действительно, среднее по стохастической компоненте

$$\langle \sin \theta \rangle_{\text{ст}} = \langle \sin \theta \rangle_0 - \langle \sin \theta \rangle_{\text{уст}},$$

где  $\langle \sin \theta \rangle_0 = 0$  — среднее по всему фазовому квадрату, а  $\langle \sin \theta \rangle_{\text{уст}}$  — среднее по устойчивой компоненте. Но последнее также равно нулю, так как оно пропорционально среднему изменению импульса в устойчивой области  $\langle \Delta p \rangle = 0$ . Аналогичным образом можно показать, что и  $\langle F(\tau) \rangle = 0$  в этом случае. При больших  $|K|$ , а именно при  $K = 2\pi n$  ( $n \neq 0$ , целое), существуют устойчивые области другого типа, так называемые «ускорительные», в центре ( $\theta_a$ ) которых  $\sin \theta_a \neq 0$  и для которых  $\langle \Delta p \rangle \neq 0$  [8]. Тогда  $\langle \sin \theta \rangle_{\text{ст}} \neq 0$ ;  $\langle F(\tau) \rangle \neq 0$  и диффузия становится аномально быстрой. Возможно, именно этим объясняется значительный выброс точек на рис. 7 в первом максимуме  $R(K)$ , который как раз соответствует  $K = 2\pi$ . В следующих максимумах площадь ускорительных областей быстро падает, а с ней и их вклад в среднюю скорость диффузии.

Аномально медленное убывание корреляций, возможно, содержится также и в экспериментальных данных по удержанию электронов в магнитной ловушке, описанных в работе [40]. На рис. 9 показан типичный пример экспериментальной зависимости потока выходящих из ловушки электронов ( $-\dot{N}$ ) от времени в полулогарифмическом масштабе. Авторы ожидали экспоненциальное уменьшение потока (а значит, и числа оставшихся в ловушке электронов  $N$ ) от времени. Такая зависимость действительно наблюдается в течение некото-

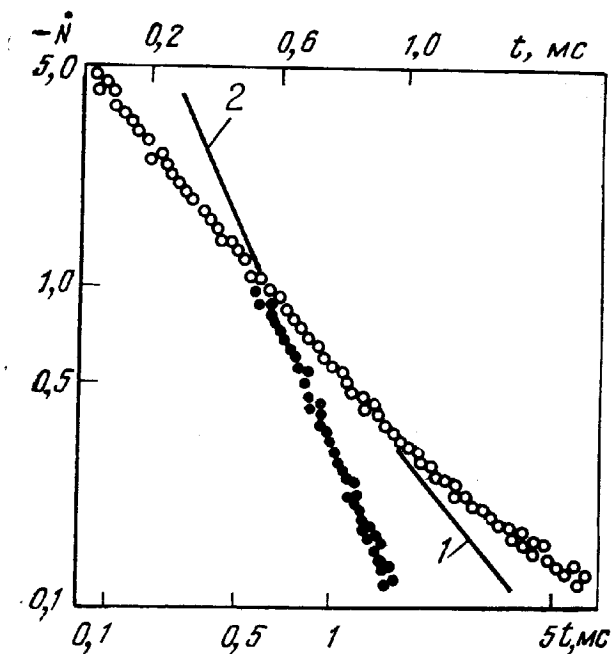


Рис. 9. Зависимость потока электронов из магнитной ловушки от времени по данным работы [40]:  $(-\dot{N})$  — поток выходящих электронов (масштаб произвольный). Кружки показывают зависимость  $\dot{N}(t)$  в полулогарифмическом масштабе (верхняя шкала для  $t$ ); 1 — соответствует экспоненциальной зависимости  $\dot{N} = A \exp(-t/\tau_e)$   $\tau_e \approx 0,36$  мс. Точки показывают те же данные (для  $t \geq 0,6$  мс) в двойном логарифмическом масштабе (нижняя шкала для  $t$ ); 2 — степенная зависимость  $\dot{N} = Bt^{-\gamma}$ ;  $\gamma \approx 2,3$

рого времени ( $\approx 2,5 \tau_e$ ), однако дальше спадание потока замедляется (кружки на рис. 9). Авторы подгоняют «хвост» зависимости  $\dot{N}(t)$  с помощью второй экспоненты с большим  $\tau_e$ .

Вообще говоря, зависимость типа суммы нескольких экспонент не является удивительной, а, напротив, типична для решения линейного уравнения вообще и диффузионного уравнения в частности (см. § 11). Если, однако, отложить данные работы [40] в двойном логарифмическом масштабе (точки на рис. 9), то «хвост» зависимости  $\dot{N}(t)$  еще лучше подгоняется степенной функцией с показателем  $\gamma \approx 2,3$ . Это уже необычно для диффузионного уравнения и означает отсутствие (несингулярных) собственных функций. Окончательный выбор между экспоненциальной и степенной зависимостью требует дополнительных экспериментов при больших  $t$  и лучшем вакууме. Последнее необходимо в связи с тем, что роль рассеяния электронов на остаточном газе быстро возрастает со временем, поскольку электроны удерживаются во все более и более тонком пограничном слое. Объем этого слоя приблизительно пропорционален его толщине и числу оставшихся в стохастической компоненте электронов, которое убывает со временем, как  $t^{-\gamma+1} \approx t^{-1,3}$ . По такому же закону убывают и корреляции, т. е.  $q \approx 1,3$  (12.8) и  $s \approx 2,8$ .

Хотя приведенные выше значения показателей  $s$  и  $q$  заметно различаются, не исключено, что возможно универсальное описание асимптотической структуры пограничного слоя при  $x \rightarrow 0$ ;  $t \rightarrow \infty$ . Такая возможность основана в конечном счете на иерархической структуре нелинейных резонансов (см. [8], разд. 4.4). Первые успешные попытки масштабнo-инвариантного описания некоторых характеристик движения вблизи границы стохастичности предприняты в работах [23, 41, 42].

### § 13. Глобальная диффузия

Для описания длительной диффузии частицы в магнитной ловушке (по  $\mu$  или  $\beta_0$ ) нужно знать полное уравнение ФПК (11.16), а не его локальный вариант с  $U_\mu = 0$ ;  $D_\mu = \text{const}$ . Прежде всего необходимо поэтому найти выражение для средней скорости  $U$

Как уже отмечалось выше (см. § 11), прямое вычисление  $U_\mu$  во втором порядке теории возмущения затруднительно. Более удобным оказывается следующий простой прием, который использовался во многих работах (см., например, [33]). Пусть нам известна равновесная функция распределения [в нашем случае  $f_s(\mu)$ ]. Для замкнутых гамильтоновых систем она легко получается из микроканонического распределения, например такого:

$$F_e(\mu, J) d\mu dJ = \delta(H^0(\mu, J) - E) d\mu dJ, \quad (13.1)$$

где  $E$  — заданное значение энергии. Заметим, что мы используем здесь невозмущенные действия  $\mu, J$  и соответственно невозмущенный гамильтониан. Возмущение же считается достаточно малым, так что можно пренебречь вызываемым им искажением энергетической поверхности. Иначе говоря, мы принимаем, что возмущение приводит только к распределению траектории по всей невозмущенной энергетической поверхности с эргодической мерой (плотностью вероятности)  $F_e(\mu, J)$ . При необходимости можно (по крайней мере, в принципе) перейти к уточненным действиям  $\mu^{(n)}, J^{(n)}$ ; при этом гамильтониан, вообще говоря, тоже изменяется (см. § 5). Заметим, что еще одним из преимуществ принятого нами выбора невозмущенной системы (см. § 2) является возможность получения равновесной функции распределения из невозмущенного гамильтониана.

Для получения равновесного распределения только по  $\mu$  проинтегрируем (13.1) по  $J$ :

$$\begin{aligned} f_s(\mu) d\mu &= d\mu \int \delta(H^0(\mu, J) - E) \left( \frac{\partial J}{\partial H^0} \right)_\mu dH^0 = \\ &= d\mu \int \frac{\delta(H^0 - E) dH^0}{\Omega(\mu, J)} = \frac{d\mu}{\Omega(\mu, E)}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

В последнем соотношении  $J$  выражено через  $\mu, H^0$  и положено  $H^0 = E$ .

Если, например,  $\Omega(\mu) \propto \sqrt{\mu}$ , как в короткой ловушке (3.12), то равновесная плотность  $df_s \propto d\mu/\sqrt{\mu} \propto d\beta_0$  (при  $\beta_0 \ll 1$ ), т. е. пропорциональна элементу плоского, а не телесного угла, как для свободной частицы. Это связано с тем, что при увеличении угла  $\beta_0$  растет частота продольных колебаний  $\Omega$  и уменьшается их амплитуда (при заданной энергии  $E$ ), а следовательно, и «продольная часть» фазового объема. Если же магнитное поле однородно, то  $J \rightarrow p_{\parallel} = v_{\parallel}$ , а  $\Omega \rightarrow v_{\parallel} = v \cos \beta$  и  $df_s \propto d\mu/v_{\parallel} \propto \sin \beta d\beta$ , т. е. пропорционально просто элементу телесного угла.

С другой стороны, равновесная функция  $f_s(\mu)$  может быть получена из уравнения ФПК, если приравнять нулю поток  $Q$ . Отсюда

$$U_\mu = \frac{1}{f_s} \frac{d}{d\mu} (D_\mu f_s) = \frac{dD_\mu}{d\mu} + D_\mu \frac{d(\ln f_s)}{d\mu}. \quad (13.3)$$

Это и есть общая формула для определения средней скорости  $U_\mu$ . Заметим, что для ее вывода совершенно неважно, существует ли фактически в данной системе равновесное распределение или нет. Для электронов в ловушке равновесное распределение может и не достигаться, например, из-за их вылета в конус потерь или из-за того, что функция  $f_s$  не нормируема, т. е. полная мера на энергетической поверхности оказывается бесконечной (см. ниже). Все это никак не влияет на предельную функцию  $f_s(\mu)$ . Соотношение (13.2) есть просто локальное определение инвариантной меры эргодической гамильтоновой системы на основании теоремы Лиувилля.

Возвращаясь к соотношению (13.3), мы видим, что если  $f_s = \text{const}$ , то

$$U_\mu = dD_\mu/d\mu. \quad (13.4)$$

Это простое соотношение между коэффициентами уравнения ФПК было (неявно) получено в работе [43] из казалось бы довольно общего принципа детального равновесия. Тем не менее оно выполняется далеко не всегда [44, 45]. Не выполняется оно и для нашей задачи, если только  $d\Omega/d\mu \neq 0$ .

Принцип детального равновесия обычно связывают с механической обратимостью движения. Вероятности прямых и обратных переходов для обратимой динамики, конечно, равны, но вычислять их нужно по полной мере (т. е. с учетом всех измерений фазового пространства) эргодической компоненты. В рассматриваемой задаче это совсем не так. Во-первых, мы совершенно не учитываем сопряженных с действиями фаз. В работе [45] показано, что это допустимо при отсутствии устойчивых областей. Во-вторых, мы исключили одно из действий ( $J$ ) и, наконец, что самое главное, эргодическая компонента движения для замкнутой системы ограничена энергетической поверхностью. Все это приводит к тому, что для оставшейся переменной  $\mu$ , изменение которой мы и хотим описать с помощью диффузионного уравнения ФПК, плотность вероятности (инвариантной меры)  $f_s \propto \Omega^{-1}(\mu)$ , а не константе, и соотношение (13.4) не выполняется, а вместе с ним и «принцип» детального равновесия (для этой переменной  $\mu$ ). Последнее просто означает, что вероятность перехода пропорциональна в данном случае не  $d\mu$ , а  $df_s \propto d\mu/\Omega(\mu)$ .

Отсюда ясно, что для использования обратимости движения в форме принципа детального равновесия последний должен быть сформулирован в адекватных переменных, которые можно было бы назвать эргодическими [45]. В общем случае они не совпадают с невозмущенными интегралами движения, как иногда считается. В рассматриваемой задаче, например, эргодической переменной является величина (обозначим ее  $\Gamma$ ), пропорциональная равновесной функции распределения, т. е. вероятности на эргодической компоненте. Переменную  $\Gamma$  можно определить, например, посредством:

$$d\Gamma = d\mu/\Omega(\mu). \quad (13.5)$$

Тогда вероятности прямого и обратного переходов между двумя любыми областями с одинаковым  $d\Gamma$  будут равны (принцип детального равновесия),  $f_s(\Gamma) = \text{const}$  и  $U_\Gamma = dD_\Gamma / d\Gamma$  (13.3) В последнем равенстве мы можем теперь перейти назад к переменной  $\mu$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} D_\Gamma &= D_\mu (d\Gamma/d\mu)^2; \\ U_\Gamma &= U_\mu \frac{d\Gamma}{d\mu} + D_\mu \frac{d^2\Gamma}{d\mu^2} = \frac{U_\mu}{\Omega} - \frac{D_\mu}{\Omega^2} \frac{d\Omega}{d\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

При вычислении  $U_\Gamma$  необходимо разложить  $\Delta\Gamma$  по  $\Delta\mu$  до второго порядка включительно. Отсюда

$$U_\mu = \Omega \frac{dD_\Gamma}{d\Gamma} + \frac{D_\mu}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu} = \frac{dD_\mu}{d\mu} - \frac{D_\mu}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu}. \quad (13.7)$$

Это соотношение можно, конечно, получить и прямо, из (13.3).

Помимо динамических переменных можно подвергнуть преобразованию и время. В частности, можно выбрать новое время  $\tau$  так, чтобы новая частота  $\Omega(\mu) = d\psi/d\tau = \text{const}$ , например:  $d\tau = \Omega(\mu) dt$ . Согласно (13.5) величина  $\mu$  становится при этом эргодической переменной, а коэффициенты уравнения ФПК для функции  $f(\mu, \tau)$  удовлетворяют соотношению (13.4). Именно таким свойством и обладает дискретное время отображения, единица которого равна  $T/2 = \pi/\Omega$ . Этот же результат можно получить и более формально, используя соотношение (13.7). Действительно, обозначив

$$D_\mu = \frac{\Omega}{\pi} D_\mu^{(0)}; \quad U_\mu = \frac{\Omega}{\pi} U_\mu^{(0)}, \quad (13.8)$$

где величины  $D_\mu$ ,  $U_\mu$  относятся к непрерывному времени, а  $D_\mu^{(0)}$ ,  $U_\mu^{(0)}$  — к дискретному, получим из (13.7)

$$U_\mu = \frac{\Omega}{\pi} \frac{dD_\mu^{(0)}}{d\mu} + \frac{D_\mu^{(0)}}{\pi} \frac{d\Omega}{d\mu} - \frac{D_\mu}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\mu} = \frac{\Omega}{\pi} \frac{dD_\mu^{(0)}}{d\mu}$$

или

$$U_\mu^{(0)} = dD_\mu^{(0)}/d\mu. \quad (13.9)$$

Отметим, что соотношение (13.9) отличается от (11.18), которое было получено непосредственно из отображения (8.7). Это отображение оказывается, таким образом, справедливым только в первом порядке по малому параметру  $k$ . Отсюда, в частности, следует, что оно не годится для численного моделирования длительной (глобальной) диффузии ( $\delta\mu \geq \mu$ ), когда эффект средней скорости  $U_\mu$  становится существенным (см. § 11).

Проблема аккуратного диффузионного описания для аналогичной задачи (модель стохастического ускорения Ферми) обсуждалась с разных сторон в работах [46—48] (см. также [9]).

Как известно, соотношение (13.9) упрощает уравнение ФПК,

поэтому целесообразно решать задачу именно в дискретном времени. Из (11.16) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mu} \mu \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad (13.10)$$

где мы опустили индекс нуль у  $D_\mu$ , которое дается выражением (11.13).

В качестве примера рассмотрим магнитную ловушку, в которой резонансное  $\Delta\mu$  и параметр устойчивости  $K$  можно оценить в приближении короткой ловушки (10.14). Если  $\beta_0^{(кр)} \gg \beta_0^{(a)} \approx \lambda^{-1/2} \ll 1$ , то можно в первом приближении пренебречь колебаниями скорости диффузии с  $K$  и положить в (11.13)  $R(K) \approx 1$ . Вводя новое время (тоже дискретное)

$$s = t (\Delta P)_m^2 \lambda / 4\mu_0, \quad (13.11)$$

где  $\mu_0 = v^2 / 2\omega_0$ , и новую переменную  $x = \beta_0 / \beta_0^{(a)}$ , запишем уравнение для собственных функций в виде [см. (13.10)]:

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{df_x}{dx} \right) + \kappa^2 x f_x = 0 \quad (13.12)$$

с граничными условиями

$$f_x(1) = 0; \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{кр}} = 0. \quad (13.13)$$

Первое условие соответствует выходу частиц на адиабатическом кснусе  $\beta_0 = \beta_0^{(кр)}$ , а второе — отсутствию потока частиц на границе стохастичности  $\beta_0 = \beta_0^{(кр)}$  (10.15) ( $x_{кр} = \beta_0^{(кр)} / \beta_0^{(a)}$ ). Наименьшее собственное значение  $\kappa^2 \neq 0$  определяет время жизни частиц в ловушке в условиях стохастичности движения

$$f(\mu, s) \rightarrow \exp(-\kappa^2 s). \quad (13.14)$$

Решение уравнения (13.12) выражается через цилиндрические функции (см., например, [22])

$$f_\kappa(x) = C J_0(\kappa x) + N_0(\kappa x). \quad (13.15)$$

Собственное значение и постоянная  $C$  определяются из граничных условий (13.13):

$$\left. \begin{aligned} C J_0(\kappa) + N_0(\kappa) &= 0; \\ C J_1(\kappa x_{кр}) + N_1(\kappa x_{кр}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

При  $x_{кр} \gg 1$  приближенное решение этих уравнений можно записать в явном виде, используя асимптотические выражения:

$$\left. \begin{aligned} N_0(z) &\approx \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \left( \frac{\gamma z}{2} \right); \\ N_1(z) &\approx -\frac{2}{\pi z} + \frac{z}{\pi} \ln \left( \frac{\gamma z}{2} \right); \\ J_1(z) &\approx z/2 \end{aligned} \right\} \quad ((13.17)$$



при  $z \ll 1$ ;  $\gamma = 1,78\dots$  — постоянная Эйлера. Малое значение  $\kappa$  при  $x_{\text{кр}} \gg 1$  сразу следует из того, что первая собственная функция (13.15) должна быть всюду положительной. Поэтому  $\kappa x_{\text{кр}} \lesssim 1$  и  $\kappa \lesssim 1/x_{\text{кр}}$ . Подставляя (13.17) в (13.16), получаем из первого уравнения

$$C = -\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma\kappa}{2}\right)$$

и из второго

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{x_{\text{кр}}^2}{2} \ln x_{\text{кр}}. \quad (13.18)$$

Собирая все соотношения, найдем для характерного времени жизни частицы (число пролетов через ловушку):

$$\tau_e \approx \frac{\mu_{\text{кр}}}{(\Delta P)_m^2} \ln(\lambda \beta_{\text{кр}}^2) \approx \frac{16}{9\pi} \left(\frac{L}{r_0}\right)^{3/2} \frac{\exp(3q/2)}{q} \ln(\lambda \beta_{\text{кр}}^2), \quad (13.19)$$

где  $\beta_{\text{кр}} \equiv \beta_0 \widehat{r}$ . Последнее выражение написано с использованием формул (8.8) и (10.15), т. е. для короткой ловушки с добавлением узкого конуса потерь ( $\lambda \gg 1$ ). С увеличением пробочного отношения  $\lambda$  время жизни частиц медленно возрастает, точно так же, кстати говоря, как и при многократном рассеянии на газе [1]. Аналогичное соотношение получается и для встречных пробок (в плоской геометрии), также дополненных некоторым конечным конусом потерь.

Оценку времени жизни частиц в ловушке можно провести и по-другому, как это было сделано в первой по адиабатическим ловушкам работе Будкера [1] для эффекта многократного рассеяния частиц. Рассмотрим стационарный режим диффузии частиц с источниками внутри ловушки. Из (13.10) имеем:

$$\frac{d}{d\mu} \mu \frac{df_q}{d\mu} + q(\mu) = 0, \quad (13.20)$$

где  $q(\mu)$  — плотность источников, которую мы выберем в виде

$$q(\mu) = \mu^\alpha \quad (13.21)$$

с постоянной  $\alpha > -1$ . Поток частиц в ловушке

$$Q(\mu) = D_\mu \frac{df_q}{d\mu} = - \int_{\mu_{\text{кр}}}^{\mu} q d\mu = \frac{\mu_{\text{кр}}^{\alpha+1} - \mu^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad (13.22)$$

где  $\mu_{\text{кр}} = \mu_0 x_{\text{кр}}^2 / \lambda$  соответствует границе стохастичности и  $Q(\mu_{\text{кр}}) = 0$ . Полный стационарный поток частиц из ловушки

$$Q_0 = Q(\mu_a) \approx \frac{\mu_{\text{кр}}^{\alpha+1}}{\alpha + 1} = \frac{\mu_{\text{кр}} q(\mu_{\text{кр}})}{\alpha + 1},$$

$\mu_a = \mu_0/\lambda$  — значение  $\mu$  на адиабатическом конусе потерь, и мы принимаем, что  $\mu_a \ll \mu_{кр}$ . С другой стороны, из (13.22) находим плотность частиц в ловушке

$$f_q(\mu) = \int_{\mu_a}^{\mu} \frac{Q d\mu}{D_\mu} \approx \frac{1}{(\Delta P)_m^2} \frac{\mu_{кр}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln \frac{\mu}{\mu_a}, \quad (13.23)$$

считая, как и выше,  $D_\mu \approx \mu (\Delta P)_m^2$ ;  $f(\mu_a) = 0$ .

Полное число частиц в ловушке в стационарном режиме

$$N = \int_{\mu_a}^{\mu_{кр}} f_q(\mu) d\mu \approx \frac{\mu_{кр}^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\Delta P)_m^2} \ln \frac{\mu_{кр}}{\mu_a}. \quad (13.24)$$

Теперь можно ввести среднее время жизни частицы

$$\langle \tau \rangle \equiv \frac{N}{Q_0} \approx \frac{\mu_{кр}}{(\Delta P)_m^2} \ln \frac{\mu_{кр}}{\mu_a}, \quad (13.25)$$

которое не зависит от произвольного параметра  $\alpha$  (при  $\alpha > -1$ ) и в точности совпадает с  $\tau_e$  (13.19), так как

$$\mu_{кр}/\mu_a = (\beta_{кр}/\beta_0^{(a)})^2 = \lambda \beta_{кр}^2.$$

Это значит, что в рассматриваемом приближении ( $\beta_{кр} \gg \beta_0^{(a)}$ ) для широкого класса распределений источников среднее время жизни частицы  $\langle \tau \rangle$  определяется первой диффузионной модой (собственной функцией). Действительно, сравнивая выражения (13.23) и (13.15) [с учетом (13.17)], мы видим, что в рассматриваемом приближении обе функции распределения совпадают:

$$f_x \propto f_q \propto \ln \frac{\mu}{\mu_a}.$$

Для  $\alpha < -2$  аналогичным образом можно получить:

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\mu_{кр}}{|1+\alpha| (\Delta P)_m^2}. \quad (13.26)$$

Теперь среднее время жизни падает с ростом  $|\alpha|$  из-за концентрации источников на адиабатическом конусе потерь. В этом случае существенную роль играют все более и более высокие диффузионные моды, так как стационарная функция распределения

$$f_q(\mu) \propto 1 - (\mu_a/\mu)^{|1+\alpha|}$$

имеет резкий обрыв при  $\mu \rightarrow \mu_a$ , крутизна которого растет с  $|\alpha|$ .

В полученных выше соотношениях для  $\tau_e$  и  $\langle \tau \rangle$  время жизни частицы выражается в числе ее пролетов через ловушку, или в числе отражений (от магнитных пробок). Для перехода к обычному (непрерывному) времени необходимо умножить полученные выражения на средний полупериод продольных колебаний частицы

$$\left\langle \frac{T}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\pi}{\Omega(\mu)} \right\rangle = \pi \int \frac{f(\mu) d\mu}{\Omega(\mu)}. \quad (13.27)$$

Здесь  $f(\mu)$  — нормированная функция распределения, соответствующая данному режиму движения, например стационарному режиму с источниками или первой диффузионной моде.

Вблизи адиабатического конуса потерь ( $\mu = \mu_a$ )

$$\frac{1}{\Omega} \propto \ln \left( 16 \frac{\mu_a}{|\mu - \mu_a|} \right)$$

[см. (3.26)]. Если  $f(\mu) \propto \mu - \mu_a$ , то эта область не дает существенного вклада в интеграл (13.27). Поэтому можно использовать зависимость  $\Omega(\mu)$  без учета конуса потерь. Пусть, например,

$$\Omega(\mu) = \Omega_{\text{кр}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_{\text{кр}}}}, \quad (13.28)$$

где  $\Omega_{\text{кр}}$  — значение частоты на границе стохастичности [см. (3.12)]. Пусть далее

$$f(\mu) = \frac{\ln(\mu/\mu_a)}{\mu_{\text{кр}} \ln(\mu_{\text{кр}}/\mu_a)} \quad (13.29)$$

есть нормированная на единицу функция распределения при диффузии (13.23) ( $\mu_{\text{кр}} \gg \mu_a$ ). Тогда интеграл (13.27) дает

$$\left\langle \frac{T}{2} \right\rangle \approx \frac{2\pi}{\Omega_{\text{кр}}} = 2 \frac{T_{\text{кр}}}{2},$$

т. е. средний период продольных колебаний частицы оказывается в 2 раза больше минимального на границе стохастичности.

Пусть теперь

$$\Omega(\mu) = \Omega_{\text{кр}} \mu / \mu_{\text{кр}}$$

[встречные пробки, см. (3.37) и (3.38)], а диффузионное распределение  $f(\mu)$  — то же самое (13.29). В этом случае

$$\left\langle \frac{T}{2} \right\rangle \approx \frac{T_{\text{кр}}}{4} \ln(\lambda \beta_{\text{кр}}^2) \quad (13.30)$$

и средний период колебаний логарифмически расходится при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Заметим, что при этом эргодическая мера (13.2) также расходится и равновесное состояние не достигается (при  $\lambda = \infty$ , т. е. при отсутствии конуса потерь). Точнее, процесс релаксации будет при этом неэкспоненциальным, а плотность вероятности (функция распределения) будет везде стремиться к нулю. Простым примером подобной релаксации является однородная диффузия в бесконечном пространстве. В одномерном случае  $f(x, t) \propto t^{-1/2} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

## § 14. Отображение Коэна

Мы рассмотрели все примеры ловушек, описанных в § 3, кроме двух: длинной ловушки и встречных пробок в цилиндрической геометрии. Движение частиц в этих последних ловушках не сводится к стандартному отображению. Ниже мы рассмотрим эту новую ситуацию на примере цилиндрических встречных пробок. Динамика частиц в длинной ловушке исследована в работе [49] (см. также [4]).

Характерной особенностью динамики частицы в цилиндрических встречных пробках является несимметрия двух полупериодов продольных колебаний частицы, связанная с разной асимптотикой эффективного потенциала при  $s \rightarrow \pm \infty$  (3.42). Это приводит к разному времени между последовательными прохождениями минимума поля, а следовательно, и к двум разным функциям  $G(P)$ , характеризующим последовательные изменения ларморовской фазы в минимуме поля. Сравнивая (3.36) и (3.42) и используя (8.12), можем написать:

$$G_+(P) = \frac{1}{3} \frac{l_0 v^3}{\omega_0 P^4}; \quad G_- = \frac{2}{3} \frac{l_0 v^3}{\omega_0 P^4}, \quad (14.1)$$

где  $G_{\pm}$  описывают изменение ларморовской фазы при движении в области положительного и отрицательного  $s$  соответственно. Эти изменения отличаются, таким образом, в 2 раза (при том же  $P$ ). В действительности есть еще дополнительная разница за счет того, что нам нужна ларморовская фаза не точно в минимуме поля, а в точке  $s = s_1 \approx -l_0/19$  (7.38). Однако при амплитуде продольных колебаний  $a \gg l_0$  этим эффектом можно пренебречь (см. конец этого параграфа).

Поскольку резонансное  $\Delta\mu$  описывается в рассматриваемом случае, так же как и в остальных, одним и тем же выражением (7.37) на обоих полупериодах продольных колебаний, то вместо (8.7) получим двухступенчатое отображение

$$\bar{P} = P + (\Delta P)_m \sin \theta_1; \quad \bar{\theta}_1 = \theta_1 + G_{\pm}(\bar{P}). \quad (14.2)$$

Здесь  $\theta_1$  включает в общем случае дополнительные сдвиги фазы (7.37), а функции  $G_{\pm}$  последовательно чередуются между собой. Поэтому (14.2) есть фактически система четырех разностных уравнений, описывающая изменение динамических переменных на полном периоде продольных колебаний частицы. Функции  $G_{\pm}(P)$  можно линеаризовать по  $P$ , в результате чего получается новое двухступенчатое отображение, которое похоже, но не сводится полностью к стандартному отображению. Его можно записать в виде

$$\bar{p} = p + K_0 \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \gamma_{\pm} \bar{p} + \alpha_{\pm}. \quad (14.3)$$

Здесь  $\gamma_{\pm}$  — две разные постоянные, определяемые условием:

$$\frac{G'_{\pm}(P_r)}{\gamma_{\pm}} = G'_0(P_r). \quad (14.4)$$

Резонансное значение  $P_r$  находится теперь из соотношения

$$G_+(P_r) + G_-(P_r) = 2\pi r, \quad (14.5)$$

где  $r$  — целое, а дополнительные сдвиги фаз равны:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_+ &= G_+(P_r) \pmod{2\pi}; \\ \alpha_- &= G_-(P_r) \pmod{2\pi}; \\ \alpha_+ + \alpha_- &= 0 \pmod{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Параметр отображения (14.3) (теперь, увы, не единственный) есть

$$K_0 = (\Delta P)_m G'_0(P_r) \quad (14.7)$$

и новая переменная

$$p = G'_0(P_r)(P - P_r). \quad (14.8)$$

В таком виде (с  $\alpha_{\pm}=0$ ) двухступенчатое отображение (14.3) было получено впервые Коэном [49] при анализе движения частиц в длинной магнитной ловушке. Хотя эта ловушка и симметрична относительно плоскости  $z=0$  (см. § 3), несимметрия отображения возникает из-за того, что основные особенности магнитного поля сдвинуты из центра ловушки к внутреннему краю пробки (см. § 7). Две ступени отображения соответствуют при этом пролету частицы между особенностями и ее возвращению в каждую из них после отражения от соответствующей пробки. Заметим, что если бы такая ловушка была еще и несимметричной сама по себе (например, имела бы разные пробки), то отображение стало бы трехступенчатым (6 разностных уравнений).

В рассматриваемой задаче о встречных пробках:

$$\left. \begin{aligned} G_0(P) &= l_0 v^3 / 3\omega_0 P^4; \\ \gamma_+ &= 1; \quad \gamma_- = 2; \\ \alpha_+ &= 2\pi\gamma_+/\gamma; \quad \alpha_- = 2\pi\gamma_-/\gamma; \quad \gamma = \gamma_+ + \gamma_- \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

и  $(\Delta P)_m$  определяется соотношением (7.37).

Переходя к анализу динамики отображения Коэна (14.3), рассмотрим сначала, следуя [49], более простой случай, когда  $\gamma_+ \ll \gamma_-$ . Такая ситуация характерна для длинных ловушек. В этом случае отображение (14.3) можно привести приближенно к одноступенчатому отображению на полном периоде возмущения. Для этого выразим переменные  $\bar{p}$ ,  $\bar{\theta}$  через  $p$ ,  $\theta$ , которые предшествуют величинам  $\bar{p}$ ,  $\bar{\theta}$  на один полный период отображения (14.3). Записав четыре разностных уравнения в явном виде\*

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= p + K_0 \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \gamma_- \bar{p}; \\ p &= \underline{p} + K_0 \sin \underline{\theta}; \quad \theta = \underline{\theta} + \gamma_+ p. \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

найдем

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + K_0 [\sin \theta + \sin (\theta + \gamma_+ p + \gamma_+ K_0 \sin \theta)]; \\ \bar{\theta} &= \theta - \gamma_+ K_0 \sin \theta + \bar{p} (\gamma_+ + \gamma_-). \end{aligned}$$

\* Если фазы  $\alpha_{\pm}$  пропорциональны  $\gamma_{\pm}$  (14.9), то их можно устранить сдвигом импульса  $p \rightarrow p + 2\pi/\gamma$ .

В последнем уравнении пренебрежем членом  $\sim K_0\gamma_+$ , а в первом преобразуем выражение в квадратных скобках к виду

$$2 \cos \left( \frac{p\gamma_+}{2} + \frac{\gamma_+ K_0}{2} \sin \theta \right) \cos \left( \theta + \frac{\gamma_+}{2} (p + K_0 \sin \theta) \right) \approx 2 \cos \left( \frac{p\gamma_+}{2} \right) \cos \theta.$$

Основания для сохранения члена  $(p\gamma_+/2)$  в первом косинусе, в то время как мы опускаем его во втором, следующие. В первом случае величина  $p\gamma_+$  при достаточно больших  $p$  может значительно уменьшать возмущение  $K_0$ , тогда как во втором она приводит лишь к незначительному сдвигу фазы. Для динамики фазы важно не абсолютное значение слагаемого  $(p\gamma_+/2)$ , а его изменение за одну итерацию отображения. Это изменение имеет порядок  $K_0\gamma_+$ , т. е. такой же, как и остальных отброшенных членов. Все эти члены приводят к появлению второй гармоники возмущения  $\sim K_0\gamma_+ \sin 2\theta$ . Для стандартного отображения эта гармоника появляется во втором порядке теории возмущения с относительной амплитудой  $\approx K/16$  (см. [8, разд. 5.1]). Отсюда получаем грубое условие применимости рассматриваемого приближения:  $\gamma_+ \lesssim 1/16$  (при  $\gamma_- \sim 1$ ).

Вводя новую переменную

$$J = (\gamma_+ + \gamma_-) p = \gamma p, \quad (14.11)$$

получаем отображение

$$\bar{J} \approx J + K_1 \cos \theta; \quad \bar{\theta} \approx \theta + \bar{J}, \quad (14.12)$$

которое по внешнему виду похоже на стандартное отображение [ср. (9.3)].

Существенной особенностью отображения (14.12) является, однако, то обстоятельство, что его параметр

$$K_1 = 2\gamma K_0 \cos \left( \frac{\gamma_+}{\gamma} \frac{J}{2} \right) \quad (14.13)$$

зависит теперь от динамической переменной  $J$ . Это приводит к качественному изменению структуры стохастической компоненты, а именно вся она оказывается разрезанной на изолированные полосы узкими щелями с устойчивым движением. Из (14.13) следует, что щели расположены в окрестности  $J = J_n$ , где

$$\cos (J_n \gamma_+ / 2\gamma) = 0, \quad (14.14)$$

откуда

$$J_n = \frac{\pi\gamma}{\gamma_+} (1 + 2n), \quad (14.15)$$

$n$  — целое. Ширину щели можно оценить из условия:  $|K_1| \approx 1$  на границе щели. Разлагая косинус в (14.13) при  $J = J_n$ , получаем для полной ширины щели

$$\Delta J \approx \frac{2}{K_0\gamma_+} = \frac{2}{\pi K_m} |J_{n+1} - J_n|, \quad (14.16)$$

где  $K_m = 2\gamma K_0$  — максимальное значение  $|K_1|$ . При  $K_m \gg 1$  относительная ширина щели становится малой.

Более интересным оказывается вопрос о величине критического возмущения  $|K_0|=K_g$ , при котором щели исчезают и изолированные стохастические компоненты движения сливаются в одну. В работе [49] предложен критерий

$$K_g^2 \gamma_+ \gamma_- \sim 1 \quad (14.17)$$

на основе следующего простого соображения. При  $|K_0| \sim K_g$  щель шириной  $\Delta J \sim 1/K_g \gamma_+$ , или  $\Delta p \sim 1/K_g \gamma_+ \gamma_-$ , перекрывается на одном шаге отображения (14.10), т. е.  $(\Delta p)_g \sim K_g$ , откуда и получается оценка (14.17). Эта оценка, как и остальные более простые свойства отображения Коэна, хорошо подтверждается проведенным им численным моделированием [49], а также нашими численными данными.

С точки зрения критерия перекрытия резонансов (см. § 10) оценка (14.17) представляет определенную проблему. Перекрытие резонансов в данном случае означает, что ширина щели  $\Delta J$  (14.16) становится меньше расстояния между резонансами ( $\delta J = 2\pi$ ), или что условие  $|K_1| \geq 1$  выполняется для всех резонансов внутри щели. Отсюда  $K_g \gamma_+ \sim 1$ , что завышает значение (14.17) в  $\gamma_+/\gamma_-$  ( $\gg 1$ ) раз.

Причина, по которой в данном случае критерий перекрытия резонансов дает грубо неправильный ответ, заключается, по-видимому, в следующем. В окрестности щели амплитуды резонансов весьма быстро (линейно) возрастают с удалением от центра щели. В этих условиях становится существенным одно любопытное проявление взаимодействия резонансов — их взаимное расталкивание. Физический смысл и оценку эффекта легко проследить на простом примере.

Рассмотрим движение в окрестности одного резонанса в приближении маятника [см. гамильтониан (10.3)]. Пусть  $p_0 \gg \sqrt{K}$  — невозмущенное (при  $K=0$ ) положение второго резонанса, который мы считаем настолько слабым, что можно пренебречь его влиянием на первый резонанс. Между тем первый резонанс исказит второй таким образом, что его невозмущенная фазовая прямая  $p=p_0=\text{const}$  превратится в кривую  $p(\theta)=p_0+\delta p(\theta)$ . Искажение резонансной траектории  $\delta p(\theta)$  легко получается в первом порядке по  $K$  из уравнения

$$\left. \begin{aligned} p^2(\theta)/2 + K \cos \theta &= p_0^2/2; \\ \delta p(\theta) = p(\theta) - p_0 &\approx -\frac{K}{p_0} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

Так как максимум сепаратрисы первого резонанса приходится на  $\theta=\pi$  [ $K>0$ , см. (10.4)], где  $\delta p(\pi)>0$ , то имеет место отталкивание резонансов на величину  $\delta p(\pi) \approx K/p_0$ .

Возвращаясь к задаче о щели, перепишем последнюю оценку в виде

$$\delta J_{kl} \sim F_l / (J_k - J_l), \quad (14.19)$$

где  $J_k \sim k$  — расстояние (по  $J$ ) от центра щели до смещаемого резонанса номера  $k$ , а  $J_l$  — то же для смещающего резонанса;  $F_l$  — амплитуда смещающего резонанса в таком масштабе, что перекрытие резонансов соответствует  $F \sim 1$ , т. е.  $F \sim |K_1|$ . Но амплитуда резонансов около щели  $F_l \sim F_0 l$ , где  $F_0$  — амплитуда самого слабого резонанса около центра щели. Тогда согласно (14.19) смещение в каждой паре  $\delta J_{kl} \sim F_0$ . В силу стохастичности движения фазы резонансов случайны и полное смещение каждого из резонансов на данном

значении фазы  $\theta$  есть  $\delta J_k \sim F_0 \sqrt{N}$ , где  $N$  — суммарное число резонансов в слое. Полное же смещение края щели  $\delta J \sim \delta J_k \sqrt{N} \sim F_0 N$ . Но  $F_0 N \sim K_m$  — амплитуды резонансов в центре слоя. Из условия  $\delta J \sim \Delta J$  [ширины щели (14.16)] получается оценка (14.17). Хотя приведенные выше соображения слишком схематичны, представляется весьма правдоподобным, что в рассматриваемой задаче отталкивание резонансов играет существенную роль.

Это красивое явление было впервые рассмотрено качественно в работе [50] и затем аккуратно рассчитано в работе того же автора и других (см. [41]). Следует отметить, что утверждение автора [50], вынесенное им в заголовок статьи — первичные (т. е. первого приближения) резонансы не перекрываются — к данному эффекту отношения не имеет. Это утверждение, конечно, правильно в том смысле, что до того (т. е. при более слабом возмущении), как сепаратрисы резонансов первого приближения коснутся друг друга, возникают достаточно сильные резонансы высших приближений, которые и обеспечивают перекрытие (см. § 10 и [8]). Это, кстати, и приводит как раз к тому, что, например, для двух резонансов одинаковой ширины эффект отталкивания оказывается незначительным. Действительно, из (14.18) можно получить в этом случае оценку

$$\left( \frac{2\delta p}{p_0} \right)_{\text{кр}} \approx \frac{2K_{\text{кр}}}{p_0^2} \approx 0,055,$$

где числовое значение  $K_{\text{кр}}$  для двух резонансов взято по данным работы [8, разд. 4.1]. Это же подтверждается и результатами работы [41], согласно которым  $2K_{\text{кр}}/p_0^2 = 0,0612$ . Однако эффект отталкивания становится существенным при разной ширине резонансов. Так, при отношении ширины двух резонансов, равном 3, отталкивание полностью компенсирует эффекты высших приближений, и критическое значение возмущения совпадает с результатом, полученным по критерию перекрытия первичных резонансов [41]. Для максимального отношения 5, рассмотренного в этой работе, критическое возмущение превышает последнее значение приблизительно в 1,7 раза.

Отметим, что для стандартного отображения отталкивание целых и полужелых резонансов вообще отсутствует из-за симметрии отображения. Отталкивание, однако, смещает резонансы высших (в частности, третьего) порядков, что несколько понижает в данном случае  $K_{\text{кр}}$ . Из сравнения аналитических оценок в [8], где отталкивание не учитывалось, с фактическим значением  $K_{\text{кр}}$  следует, что эффект отталкивания в данном случае лежит в пределах 10 %.

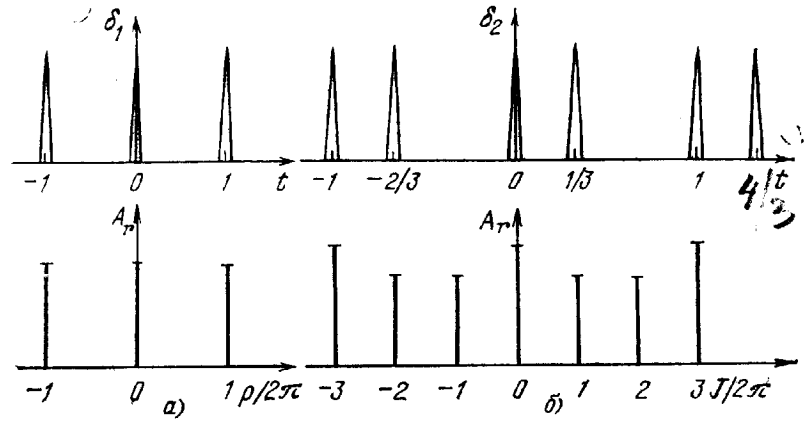
Вернемся к задаче о движении частицы в ловушке со встречными пробками. Так как в данном случае  $\gamma_+/\gamma_- = 1/2$ , то рассмотренное выше приближение не годится. Однако при таком «круглом» отношении  $\gamma_+/\gamma_-$  возможен другой подход к задаче. Рассмотрим вначале стандартное отображение (9.3). Действие возмущения в этом случае можно рассматривать как периодическую последовательность коротких «толчков» (рис. 10, а). Этот удобный метод неоднократно применялся при анализе отображений (см., например, [8, 9]). При таком подходе разностные уравнения можно заменить в точности эквивалентными им дифференциальными

$$dp/dt = K \sin \theta \delta_1(t); \quad d\theta/dt = p \quad (14.20)$$



Рис. 10. Схема возмущения  $\delta(t)$  и его спектра  $A_r$ :

$a$  — для стандартного отображения (9.3) — однородная система резонансов  $r=p/2\pi$ ;  $b$  — для отображения Козна (14.10) для частицы в магнитной ловушке со встречными пробками,  $\gamma_-/\gamma_+ = 2$ ,  $r=J/2\pi$



с гамильтонианом

$$H(p, \theta, t) = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta \delta_1(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{K}{2} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp [i(\theta - 2\pi r t)] + \text{к. с.} \right\} \quad (14.21)$$

Здесь время измеряется в числе итераций отображения; основная частота возмущения равна соответственно  $2\pi$ ;  $\delta_1(t)$  — периодическая  $\delta$ -функция с периодом 1 (рис. 10,  $a$ ), фурье-разложение которой приводит к последнему выражению (14.21). Как мы уже знаем (см. § 9), стандартное отображение имеет однородную систему резонансов  $(p_r/2\pi) = r$  (рис. 10,  $a$ ). Перекрывание этих резонансов (с учетом высших приближений) и определяет критическое  $K_{кр} \approx 1$ .

Рассмотрим теперь отображение Козна (14.10) для  $\gamma_-/\gamma_+ = 2$ . В этом случае возмущение будет иметь вид периодической последовательности пар «толчков», и 4 уравнения (14.10) снова можно заменить парой дифференциальных уравнений вида (14.20). Если в качестве единицы времени выбрать полный период возмущения, то уравнения (14.10) примут вид:

$$dp/dt = K_0 \sin \theta \delta_2(t); \quad d\theta/dt = 3p, \quad (14.22)$$

так как за полный период фаза изменится на величину  $(\gamma_+ + \gamma_-)p = 3p$ , а функция  $\delta_2(t)$  изображена схематически на рис. 10,  $b$ . Вводя новый импульс  $J = 3p$  (14.11), придем к гамильтониану

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + 3K_0 \cos \theta \delta_2(t) = \frac{J^2}{2} + \frac{3K_0}{2} \left\{ \sum_r A_r \exp [i(\theta - 2\pi r t)] + \text{к. с.} \right\}. \quad (14.23)$$

В отличие от стандартного отображения амплитуды резонансов теперь неодинаковы (рис. 10,  $b$ ):

$$|A_r| = \left| 1 + \exp \left( \frac{2\pi i r}{3} \right) \right| = \begin{cases} 2; & r/3 \text{ — целое;} \\ \sqrt{3}; & r/3 \text{ — дробное.} \end{cases} \quad (14.24)$$

В первом приближении критическое значение возмущения будет определяться при этом перекрыванием двух соседних резонансов меньшей амплитуды. По-

сколькx отношение амплитуд разных резонансов ( $2/\sqrt{3} \approx 1,15$ ) мало отличается от единицы, поправки высших приближений и эффект отталкивания резонансов (и то и другое несколько уменьшает критическое возмущение) будут незначительны. Но отсюда следует, что для определения критического возмущения можно приближенно заменить отображение Коэна (14.10) стандартным отображением

$$\bar{J} = J + 3\sqrt{3} K_0 \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{J}, \quad (14.25)$$

которое соответствует одинаковым амплитудам всех резонансов ( $|A_r| = \sqrt{3}$ ). Заметим, что если бы мы прямо использовали отображение (14.12) с параметром (14.13)

$$K_1 = 6K_0 \cos\left(\frac{\pi r}{3}\right) = \begin{cases} \pm 6K_0; & r/3 \text{ — целое;} \\ \pm 3K_0; & r/3 \text{ — дробное,} \end{cases}$$

то получили бы результат, не слишком сильно отличающийся от (14.25). Это показывает, что для оценок по порядку величины отображение (14.12) можно использовать при любом отношении  $\gamma_+/\gamma_-$ .

Следует отметить, что есть еще одно различие между стандартным отображением (14.25) и интересующей нас системой (14.23). В первом случае не только амплитуды, но фазы всех резонансов одинаковы, так что перекрытие определяется максимальным расстоянием между ветвями сепаратрисы (см. рис. 1). Теперь же соседние резонансы сдвинуты относительно друг друга по фазе  $\theta$  на  $\Delta\theta = 60^\circ$ . Поскольку расстояние между ветвями сепаратрисы пропорционально  $\cos(\theta/2)$  (10.4), то его относительное уменьшение вследствие этого сдвига будет составлять  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \approx 0,87$ , что приведет к увеличению критического возмущения примерно на 13% будет частично компенсировать отмеченное выше уменьшение критического возмущения.

Пренебрегая всеми этими поправками, получим из (14.25) для критического возмущения в отображении Коэна с  $\gamma_-/\gamma_+ = 2$  значение

$$|K_0|_{\text{кр}} \approx \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (14.26)$$

или, в параметрах ловушки со встречными пробками [см. (14.1), (14.7), (7.37)]:

$$\beta_0^{(\text{кр})} \approx 2,6q^{9/40} \exp(-q/5), \quad (14.27)$$

где  $q = \omega_0 l_0 / 3v = l_0 / 3\rho_m$ . Это выражение отличается лишь незначительным численным множителем от соотношения (10.18) для плоских встречных пробок при соответствующем выборе параметра  $q$  (см. § 7).

При оценке скорости диффузии ограничимся случаем, когда  $3\sqrt{3}|K_0| \gg 1$  и можно пренебречь корреляциями, так что  $R(K) \approx 1$  (см. § 12). В отображении (14.2) можно также считать при этом, что оба «толчка» статистически независимы. При описании диффузии в дискретном времени выберем в качестве единицы снова полупериод продольных колебаний. Тогда выражение (11.13) для  $D_\mu$  останется прежним, а вместе с ним и все другие соотношения в § 11, 13.

Конечно, корреляционный фактор  $R(K)$  будет теперь другим. Его можно получить аналогично тому, как это было сделано в § 12 для стандартного

отображения с учетом, разумеется, корреляции двух «толчков» в отображении (14.2). Отметим, наконец, что период продольных колебаний выражается в нашем случае соотношением [см. (3.37), (3.38), (3.42)]:

$$T = \frac{T_+ + T_-}{2} = \frac{3vl_0}{\mu\omega_0}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \frac{\mu\omega_0}{vl_0}. \quad (14.28)$$

В принятом приближении никаких щелей в стохастической компоненте не возникает. Это связано с тем, что мы рассматривали только продольные колебания большой амплитуды  $a \gg l_0$ , для которых  $\gamma_-/\gamma_+ = 2$ . При меньших амплитудах это отношение падает и возникает медленная зависимость амплитуды резонансов от  $p$ , что может приводить к образованию щелей и изоляции отдельных стохастических компонент движения. Вообще говоря, щели могут существовать и в пределе очень больших амплитуд колебаний за счет того, что отношение  $\gamma_-/\gamma_+$  не равно точно 2, а несколько меньше из-за дополнительного сдвига фазы в (7.37). Из (3.38) и (7.38) получается оценка

$$\Delta = 2 - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \sim \frac{1}{20} \sqrt{\frac{l_0}{a}}.$$

Так как эта величина очень мала, то число резонансов в изолированной части стохастической компоненты, т. е. между соседними щелями ( $\sim 1/\Delta$ ), может быть сравнимо с полным числом резонансов, и тогда наличие или отсутствие щелей несущественно.

В чисто динамической системе любая щель полностью останавливает диффузию и таким образом существенно улучшает удержание частицы в ловушке. В реальной ситуации, однако, такое улучшение проблематично, так как ширина щели обычно мала и даже незначительное многократное рассеяние частиц будет приводить к «просачиванию» их через щели. Этот вопрос заслуживает более подробного исследования, тем более что необходимую для образования щелей асимметрию можно легко ввести в любую ловушку.

Отметим в заключение этого параграфа, что эффект некоторого специального возмущения в токамаке также описывается отображением Коэна [51].

## § 15. Замечания об адиабатической инвариантности

Рассмотренная в этой статье задача Будкера об условиях и точности сохранения магнитного момента заряженной частицы в адиабатической магнитной ловушке является частным случаем общей и в некотором смысле «вечной» проблемы классической механики — проблемы адиабатической инвариантности переменных действия. Как и любая другая инвариантность, последняя играет в физике важную роль, несмотря на то, что она является, вообще говоря, приближенной. Согласно наиболее распространенным представлениям, основное условие адиабатической инвариантности связывается с медленностью возмущения. Такое представление возникло в самом начале изучения этого явления и было непосредственно связано с методом усреднения, который использовался для установления адиабатической инвариантности. Позднее стало ясно, что сама по себе медленность возмущения не позволяет понять механизм нарушения адиабатической инвариантности. Воз-

ника неясная идея, что этот механизм связан каким-то образом с резонансами между внешним параметрическим возмущением и собственными колебаниями системы. В период бурного развития квантовой механики, для которой переменные действия вообще и их адиабатическая инвариантность в частности играют особую роль, Борн, например, писал (цитируется по работе [52]): «Мы рассматриваем как адиабатическое такое изменение системы, которое, во-первых, не находится ни в каком соотношении с периодом невозмущенной системы...» Но это была лишь интуиция. Впервые вопрос о роли резонансов для адиабатической инвариантности был четко поставлен и решен в 1928 г. в работе [52]. Для этого оказалось достаточным, внимательно посмотреть с точки зрения физики на хорошо известное уравнение Матье и его решения. Действительно, зоны неустойчивости, или области параметрического резонанса, существуют в окрестности любого полуцелого отношения частот  $\omega_0/\Omega = r/2$ , где  $\omega_0$  — невозмущенная частота линейного осциллятора,  $\Omega$  — частота гармонического параметрического возмущения,  $r$  — целое положительное. Но при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\Omega \rightarrow 0$ , и возмущение становится адиабатическим согласно критерию медленности. Тем не менее при попадании в резонанс энергия осциллятора (и его действие) будет изменяться с течением времени сколь угодно сильно, т. е. адиабатическая инвариантность нарушается, несмотря на медленность возмущения. Таким образом возникает другое представление об адиабатическом возмущении, как о возмущении нерезонансном (ср. приведенное выше высказывание Борна). Между этими двумя разными не первый взгляд представлениями имеется, на самом деле, тесная связь, состоящая в том, что медленность возмущения обеспечивает экспоненциальную малость резонансных гармоник (см. § 7). Это справедливо, в частности, и для уравнения Матье:

$$J = J_0 e^{\gamma t}; \quad \gamma \approx r \Delta \Omega \approx \frac{\Omega}{3} \left( \frac{\varepsilon^2 \varepsilon^2}{8} \right)^r, \quad (15.1)$$

т. е. скорость экспоненциального роста в зоне резонанса сама экспоненциально уменьшается с ростом отношения частот  $r = 2\omega_0/\Omega$ . Глубина модуляции частоты определяется здесь соотношением:  $\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 - \varepsilon^2 \cos \Omega t)$ . Выражение для инкремента неустойчивости  $\gamma$  и полной ширины резонансной зоны  $\Delta \Omega$  получается из (7.1) при  $r \gg 1$ , если заменить  $\omega_x = 1 + x^2$  на  $\omega(t)$ , и при  $\varepsilon \ll 1$  имеет вид (15.1).

Для линейного осциллятора из двух условий адиабатичности решающим является нерезонансность. Резонансные зоны в этом случае четко ограничены и определяются только параметрами системы.

Для нелинейного осциллятора нерезонансность есть вопрос начальных условий. Ее роль существенно разная в зависимости от числа степеней свободы системы. Для замкнутой системы с двумя степенями свободы, а также для нелинейного осциллятора с одной степенью свободы и внешним параметрическим возмущением

ем решающим для адиабатической инвариантности является медленность возмущения. Принципиально новым и притом строгим результатом является здесь доказательство существования конечной критической медленности возмущения, ниже которой адиабатический инвариант становится точным интегралом движения [10]. Этот результат существенным образом связан с особой топологией системы резонансов, которую можно назвать упорядоченной, или одномерной. В этом случае имеется только одно отношение двух частот, которое зависит от одной переменной действия (в замкнутой системе второе действие исключается с помощью интеграла энергии, см. § 8). Значение такой упорядоченной топологии связано с тем, что точный интеграл существует не для всех начальных условий, а только для «нерезонансных». В нелинейной системе этот термин имеет особый смысл, поскольку нерезонансной является здесь и область в самом центре резонанса, т. е. при таком значении переменной действия, когда условие резонанса выполняется точно (см. рис. 6). Более того, последняя область является, как правило, даже более устойчивой в том смысле, что точный интеграл сохраняется здесь и при перекрытии резонансов, ведущем к развитию глобальной неустойчивости. Наиболее же неустойчивой оказывается окрестность сепаратрисы нелинейного резонанса, где образуется стохастический слой, который сохраняется при сколь угодно малом и (медленном) возмущении (см., например, [8]). В том случае, когда нелинейный резонанс можно описать в приближении маятника, стохастический слой в окрестности его сепаратрисы вполне аналогичен стохастическому слою в многопробочной ловушке (см. § 10). Ширина этого слоя и соответственно доля «резонансных» начальных условий экспоненциально мала по параметру медленности возмущения. Тем не менее эта область конечна, и точный интеграл в ней отсутствует. Однако из-за одномерности резонансной структуры стохастическая траектория строго ограничена пределами слоя и разрушение интеграла не изменяет (с экспоненциальной точностью!) траекторию движения.

Ситуация кардинально меняется, однако, в случае многомерной (хотя бы двумерной), или неупорядочиваемой, топологии резонансов. Теперь уже траектория может попасть из одного стохастического слоя в другой (т. е. другого резонанса), минуя нерезонансную область с точным интегралом движения. Такой обход устойчивых областей оказывается возможным вследствие пересечения резонансов (и их стохастических слоев) в многомерном пространстве. Иначе говоря, при увеличении размерности фазового пространства хотя бы на единицу\* появляется возможность движения не только поперек слоя, ширина которого строго ограничена и мала, но и вдоль слоя, ограниченного, вообще говоря, только интегралом энергии. Это красивое явление было предсказано Арноль-

---

\* Размерность фазового пространства замкнутой гамильтоновой системы всегда четная. Если же на нее действует внешнее периодическое возмущение, то говорят об одном дополнительном измерении (фаза возмущения) и о целом числе степеней свободы.

дом, который построил первый пример такой системы [53]. Подобный процесс получил впоследствии название диффузии Арнольда и был весьма подробно исследован в [8] (см. также [9, 54]).

С точки зрения обсуждаемой здесь адиабатической инвариантности (которая является, конечно, лишь частным случаем общей динамической проблемы устойчивости движения) в многомерной системе требование нерезонансности начальных условий по крайней мере столь же важно, как и требование медленности возмущения. Последнее, как и в упорядоченной топологии, гарантирует отсутствие перекрытия резонансов и обеспечивает существование точного интеграла для подавляющего большинства нерезонансных начальных условий.

В такой ситуации, однако, задача об устойчивости движения вообще и об адиабатической инвариантности в частности становится, как говорят математики, некорректной, или, просто, физически бессмысленной. Дело в том, что хотя общий объем стохастических слоев в фазовом пространстве и является экспоненциально малым, они образуют всюду плотную систему. Конечно, то же самое имеет место и в одномерной топологии. Например, для стандартного отображения любое рациональное значение  $p/2\pi$  является резонансным (см. § 10). Однако из-за описанной выше особенности упорядоченной структуры резонансов это не сказывается на движении системы. В многомерном же случае возникает неограниченная диффузия Арнольда.

Существует несколько способов так называемой регуляризации задачи, т. е. ее недвусмысленной формулировки, не зависящей от бесконечно малых изменений начальных условий. Можно, например, поставить задачу об адиабатической инвариантности на произвольно большом, но конечном интервале времени. Так как скорость диффузии Арнольда чрезвычайно быстро падает с ростом порядка резонансов, то любое ограничение по времени сразу же превращает бесконечную и всюду плотную систему резонансов (и их стохастических слоев) в конечную, и задача становится физически осмысленной. При этом условие нерезонансности (по отношению к оставшимся «работающим» стохастическим слоям) является существенным для адиабатической инвариантности.

Другой способ регуляризации состоит в том, чтобы ввести в задачу дополнительную сколь угодно слабую, но конечную внешнюю диффузию [8]. Это опять-таки оставляет конечное число стохастических слоев, диффузия Арнольда в которых превышает по скорости внешнюю диффузию. В такой постановке задачи начальные условия движения несущественны, поскольку внешняя диффузия будет непрерывно смещать динамическую траекторию.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будкер Г. И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую. — В кн.: Будкер Г. И. Собрание трудов. М.: Наука, 1982, с. 72.

2. **Чириков Б. В.** Проблема устойчивости движения заряженной частицы в магнитной ловушке. — *Физика плазмы*, 1978, т. 4, № 3, с. 521.
3. **Cohen R. H.** Orbital resonances in nonaxisymmetric mirror machines.— *Comments Plasma Phys. Cont. Fusion*, 1979, vol. 4, N 6, p. 157.
4. **Chirikov B. V.** Adiabatic invariants and stochasticity in magnetic confinement systems.— *Proc. Intern. Conf. on Plasma Physics, Nagoya, 1980*, vol. II, p. 176.
5. **Cohen R. H., Rowlands G., Foote J. H.** Nonadiabaticity in mirror machines.— *Phys. Fluids*, 1978, vol. 21, N 4, p. 627.
6. **Чириков Б. В.** Однородная модель резонансной диффузии частиц в открытой магнитной ловушке. — *Физика плазмы*, 1979, т. 5, № 4, с. 880.
7. **Димов Г. И., Закайдаков В. В., Кишиневский М. Е.** Термоядерная ловушка с двойными пробками. — *Физика плазмы*, 1976, т. 2, № 4, с. 597; **Fowler T. K., Logan V. G.** The tandem mirror reactor.— *Comments Plasma Phys. Cont. Fusion*, 1977, vol. 2, N 6, p. 167.
8. **Chirikov B. V.** A universal instability of many-dimensional oscillator systems.— *Phys. Rep.*, 1979, vol. 52, N 5, p. 263.
9. **Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.** Regular and stochastic motion, Berlin, Springer, 1983.
10. **Арнольд В. И.** Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике. — *Успехи мат. наук*, 1963, т. 18, № 6, с. 91.
11. **Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.** Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы. — *Письма ЖЭТФ*, 1971, т. 14, № 5, с. 320.
12. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
13. **Best R. W. B.** On the motion of charged particles in a slightly damped sinusoidal potential wave.— *Physica*, 1968, vol. 40, N 2, p. 182.
14. **Бакай А. С., Степановский Ю. П.** Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.
15. **Howard J. E.** Nonadiabatic particle motion in cusped magnetic fields.— *Phys. Fluids*, 1971, vol. 14, N 11, p. 2378.
16. **Дыхне А. М., Чаплик А. В.** Изменение адиабатического инварианта частицы в магнитном поле. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1961, т. 40, № 2, с. 666.
17. **Крускал М.** Адиабатические инварианты. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
18. **Gardner C. S.** Magnetic moment to second order for axisymmetric static field.— *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, N 10, p. 1997.
19. **Фирсов О. Б.** Отталкивание заряженной частицы от областей с сильным магнитным полем. (О точности адиабатического инварианта.) — В кн.: *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. III.* М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 259.
20. **Hastie R. J., Hobbs G. D., Taylor J. B.** Nonadiabatic behaviour of particles in inhomogeneous magnetic fields. *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA*, 1969, vol. 1, p. 389.
21. **Крушкаль Е. М.** О неадиабатическом движении частиц в неоднородных магнитных полях. — *Журн. техн. физ.*, 1972, т. 42, № 11, с. 2288.
22. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
23. **Greene J. M.** A method for determining a stochastic transition.— *J. Math. Phys.*, 1979, vol. 20, N 6, p. 1183.
24. **Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.** Динамическая стохастичность в классической механике. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-209, Новосибирск, 1980.
25. **Rosenbluth M. N.** Superadiabaticity in mirror machines.— *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 29, N 7, p. 408.
26. **Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
27. **Алексеев В. М., Якобсон М. В.** Символическая динамика и гиперболи-

ческие динамические системы. Добавление в книге: **Боуэн Р.** Методы символической динамики. М.: Мир, 1979; **Брудно А. А.** Энтропия и алгоритмическая сложность траекторий динамической системы. Препринт ВНИИ системных исследований, М., 1980.

28. **Чириков Б. В.** Природа статистических законов классической механики.— В кн.: Методологические и философские проблемы физики. Новосибирск: Наука, 1982, с. 181.

29. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. Избранные труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970, с. 99.

30. **Lebowitz J. L.** Hamiltonian flows and rigorous results in nonequilibrium statistical mechanics.— In: Statistical Mechanics, New Concepts, New problems, New Applications. Chicago, Univ. of Chicago Press, 1972, p. 41.

31. **Балеску Р.** Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2; Пер. с англ. М.: Мир, 1978, с. 388.

32. **Норман Г. Э., Полак Л. С.** Необратимость в классической статистической механике.— Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2, с. 337.

33. **Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.

34. **Rechester A. B., White R. B.** Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov—Taylor model.— Phys. Rev. Lett., 1980, vol. 44, N 24, p. 1586; **Rechester A. B., Rosenbluth M. N., White R. B.** Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov—Taylor model.— Phys. Rev., 1981, vol. A23, N 5, p. 2664.

35. **Cary J. R., Meiss J. D., Bhattacharjee A.** Statistical characterization of periodic, measure-preserving mappings.— Phys. Rev., 1981, vol. A23, N 5, p. 2744.

36. **Bunimovich L. A., Sinai Ya. G.** Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers.— Comm. Math. Phys., 1981, vol. 78, p. 479.

37. **Grebogi C., Kaufman A. N.** Decay of statistical dependence in chaotic orbits of deterministic mappings.— Phys. Rev., 1981, vol. A24, N5, p. 2829.

38. **Гадияк Г. В., Израйлев Ф. М.** Структура переходной зоны нелинейного резонанса.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6, с. 1302.

39. **Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.** Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 81-69. Новосибирск, 1981.

40. **Vora D., John P. I., Saxena Y. C., Varma R. K.** Multiple life times in the nonadiabatic leakage of particles from magnetic mirror traps.— Plasma Physics, 1980, vol. 22, N 7, p. 653.

41. **Escande D. F., Doveil F.** Renormalization method for computing the threshold of the large-scale stochastic instability in two degrees of freedom Hamiltonian systems.— J. Stat. Phys., 1981, vol. 26, N 2, p. 257.

42. **Kadanoff L. P.** Scaling for a critical Kolmogorov—Arnold—Moser trajectory.— Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 47, N 23, p. 1641; **Shenker S. J., Kadanoff L. P.** Critical behaviour of a KAM surface: Empirical results.— J. Stat. Phys., 1982, vol. 27, N 4, p. 631.

43. **Ландау Л. Д.** Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия.— Журн. эксперим. и теорет. физ., 1937, т. 7, № 2, с. 203.

44. **Беляев С. Т.** Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильных полях.— В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 50.

45. **Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.** Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-211, Новосибирск, 1980.

46. **Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.** Stochastic and adiabatic behaviour of particles accelerated by periodic forces.— Phys. Rev., 1972, vol. A5, N 4, p. 1852.

47. **Brahic A.** Numerical study of a simple dynamical system.— Astron. and Astrophys., 1971, vol. 12, p. 98.



48. **Жданова Т. А., Израйлев Ф. М.** К вопросу о статистическом ускорении Ферми. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 121-74, Новосибирск, 1974.

49. **Cohen R. H.** Stochastic motion of particles in mirror machines. — In: Intrinsic stochasticity in plasmas/Ed. by Laval G. and Gresillon D. Orsay, Edition de Physique, 1979.

50. **Escande D. F.** Primary resonances do not overlap. — In: Intrinsic stochasticity in plasmas/Ed. by Laval G. and Gresillon D. Orsay, Edition de Physique, 1979.

51. **Goldston R. J., White R. B., Boozer A. H.** Confinement of high-energy trapped particles in tokamaks. — Phys. Rev. Lett., 1981, vol. 47, N 9, p. 647.

52. **Мандельштам Л. И.** Полное собрание трудов. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 297.

53. **Арнольд В. И.** О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. — Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 1, с. 9.

54. **Нехорошев Н. Н.** Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. — Успехи мат. наук, 1977, т. 32, № 6, с. 5.

## **ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ**

**В ы п у с к 13**

Редактор *В. Н. Безрукова*  
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*  
Переплет художника *Н. Я. Вовк*  
Технический редактор *Л. Ф. Шкилевич*  
Корректор *Н. А. Смирнова*  
ИБ № 528

Сдано в набор 14.02.84. Подписано в печать 12.05.83. Т-06472. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,5. Усл. кр.-отт. 19,5. Уч.-изд. л. 22,52. Тираж 765 экз. Цена 3 р. 40 к. Заказ 401.

---

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114,  
Шлюзовая наб., 10

---

Московская типография № 6  
Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли,  
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая, 24.