Б. Тирнов
1988 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Д17-88-95

IV Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики

Дубна, 25-29 августа 1987 года

◇

IV International Symposium on Selected Topics in Statistical Mechanics

Dubna, 25-29 August 1987

Дубна, 1988

О Г Л А В Л Е Н И Е

ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ШУМА

Б.В.Чириков

Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск

Характерной особенностью "статистической системы" является принципиальная роль случайных флуктуаций, или "шума", той или иной природы. Именно шум, с одной стороны, не позволяет предсказывать ее полную чрезвычайно сложную динамическую эволюцию, но, с другой стороны, резко упрощает статистическое (неполное) описание наиболее существенного в такой системе процесса <u>невозвратимой (апериодической) релаксации</u>.

До недавнего времени рассматривался только один динамический механизм шума (будем называть его <u>традиционным</u>), связанный с очень большим числом N степеней свободы полностью интегрируемой динамической системы. Хотя при любом конечном N движение такой системы является квазипериодическим, т.е. имеет дискретный спектр, ее траектория настолько сложна и запутана, что оказывается весьма хорошей имитацией "случайного" процесса.

Интенсивные исследования последнего времени вскрыли совершенно другой динамический механизм шума, не зависящий от N и определяемый сильной неустойчивостью движения, которая совершенно не нужна для традиционного механизма. Этот новый феномен получил название <u>динамического хаоса</u>.

Основной целью доклада является обсуждение взаимосвязи двух механизмов шума в классической и квантовой механике.

I. <u>Термодинамический предел</u>. Ниже мы ограничимся только простыми моделями, чтобы сосредоточиться на принципиальных вопросах механизмов шума. Начнем с классического многомерного линейного осциллятора. Такая система является, как хорошо известно, полностью интегрируемой, и для каждого конкретного выбора матрицы потенциальной энергии

$$H_{mn} = \omega_n^2 \delta_{mn} + \varepsilon \alpha_{mn}, \qquad (1)$$

где ε - малый параметр возмущения (связи), решение может быть найдено в явном виде путем диагонализации этой матрицы. Мы можем, однако, поставить более сложный вопрос о <u>типичном</u> (наиболее вероятном) поведении осциллятора. Этот вопрос может быть решен с помощью статистической теории, в которой элементы матрицы H_{mn} считаются случайными числами из некоторого ансамбля. Хотя для каждой данной реализации матрицы (1) величины α_{mn} не зависят от времени, их случайный разброс и есть источник непрерывно флуктуирующего шума при $N \to \infty$.

Разобьем многомерный осциллятор на две неравные части: "пробный" осциллятор $n = 0$ (в дальнейшем этот индекс опускаем) и "термостат" $n = 1, \ldots, N$. Диагонализовав термостат, т.е. представив его в виде нормальных мод $Q_n = b_{nm} q_m$, где b_{nm} – ортогональная матрица, приходим к классической задаче Боголюбова /1/ о статистической релаксации в системе с гамильтонианом

$$H = E + \sum_{n=1}^{N} \left(E_n + \varepsilon \alpha_n Q_n q \right); \qquad E_n = \frac{1}{2}\left(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2 \right). \tag{2}$$

Можно проверить, что новые $\alpha_n \sim \alpha_{mn}$, так же как и ω_n, хотя их точные значения, конечно, изменились. В /1/ показано, что при определенных условиях происходит статистическая экспоненциальная релаксация пробного осциллятора со скоростью (для энергии или температуры)

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2 \alpha^2(\omega)\, \tau(\omega)}{\omega^2}, \tag{3}$$

где $\tau = dn/d\omega_n \sim N/\Delta$ – плотность невозмущенных частот ω_n, распределенных в интервале $\Delta \ll \omega$.

Главное условие релаксации в модели (1) – переход к <u>термодинамическому пределу</u> (ТП) в термостате

$$N \to \infty; \quad \varepsilon \to 0; \quad \frac{\gamma}{\Delta} \sim \varepsilon^2 N = const \ll 1. \tag{4}$$

В последней оценке использована нормировка $\alpha_{mn} \sim \Delta \omega_n^2 \sim \omega_n \Delta$. В ТП спектр возмущения пробного осциллятора становится <u>непрерывным</u>. Важность этого условия состоит в том, что только непрерывный спектр может обеспечить неограниченную во времени релаксацию, т.е. некоторый <u>апериодический</u> процесс, характерный для статистической механики.

Релаксация будет экспоненциальной, если отношение γ/Δ достаточно мало, а функция $\gamma(\omega)$ – непрерывна (несингулярна) в ТП /1/. Отсюда немедленно следует лоренцев спектр собственных векторов матрицы (1):

$$b_n^2 \approx \frac{\gamma}{2\pi\tau} \cdot \frac{1}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2/4} = \frac{\varkappa}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\Delta n)^2 + \varkappa^2/4} . \qquad (5)$$

Здесь $\Delta\omega = \omega - \omega_n$; $\Delta n = \tau \cdot \Delta\omega$ - расстройка от резонанса в числе нормальных мод, а новый параметр $\varkappa = \gamma\tau$ характеризует число осцилляторов термостата, с которыми эффективно взаимодействует пробный осциллятор в процессе релаксации.

Подчеркнем еще раз, что для традиционного механизма шума необходимо фактическое взаимодействие релаксирующей системы с большим числом $N \to \infty$ других степеней свободы, т.е. нужен очень многомерный "термостат" в "типичном" состоянии, определяемом некоторым статистическим ансамблем.

2. Динамический хаос. Рассмотрим теперь совершенно другой механизм шума - динамический хаос, который был открыт или, лучше сказать, понят в результате интенсивных исследований последнего времени (см., например, /2,3/). Наиболее ярким отличием нового механизма шума от традиционного является его принципиальная независимость от числа степеней свободы замкнутой системы, которое может быть и очень небольшим.

Начнем с двух "простых" примеров. Первый из них - движение кометы Галлея с учетом возмущения Юпитера /4/, знаменитая задача трех тел. Второй пример - классический фотоэффект в водороде /5/. Простейшая модель обоих явлений описывается одним и тем же двумерным каноническим отображением

$$w_{n+1} = w_n + \mu F(x_n); \qquad x_{n+1} = x_n + w_{n+1}^{-3/2} , \qquad (6)$$

которое определяет изменение энергии w кометы (электрона) и фазы возмущения x Юпитера (монохроматического электрического поля) за один оборот кометы (электрона); μ - малый параметр возмущения, пропорциональный массе Юпитера (напряженности поля); $F(x)$ - периодическая функция, причем во втором примере $F(x) = \sin(2\pi x)$.

Рассматриваемый механизм шума объясняется сильной неустойчивостью движения, вследствие которой среднее расстояние между близкими траекториями $d \sim d_0 \exp(ht)$ растет экспоненциально; h называется метрической энтропией.

Согласно алгоритмической теории Колмогорова хаотическая траектория непредсказуема в том смысле, что связанная с ней плотность информации $I(t)/|t| \to h$ $(t \to \pm\infty)$ не убывает с течением времени /6/, и эту дополнительную информацию принципиально нельзя получить ни из каких измерений любого предыдущего отрезка траектории с произвольной конечной точностью $\varepsilon \to +0$.

Разумеется, на конечном интервале времени предсказание хаотической траектории вполне возможно и определяется параметром случайности /7/

$$\mathcal{R} = \frac{h|t|}{|\ln \varepsilon|}. \tag{7}$$

Предсказание соответствует области вре́менного детерминизма $\mathcal{R} \lesssim 1$, которая переходит с ростом $\mathcal{R}$ в область асимптотической случайности ($\mathcal{R} \gg 1$). Так, например, хотя траектория кометы Галлея предсказывается с огромной точностью на интервале в несколько месяцев и вполне удовлетворительно даже на одном обороте (75 лет), нет никакой возможности предсказать, будет ли комета выброшена из Солнечной системы при ближайшем пересечении ее орбиты с орбитой Юпитера через примерно 100 оборотов.

Причина, по которой очень сложное (хаотическое) движение оказывается возможным в очень простых системах, состоит в том, что от системы "требуется" только сильная (экспоненциальная) неустойчивость. Источник же динамического хаоса лежит в непрерывности фазового пространства классической механики, так что точно заданные (абстрактно!) начальные условия движения уже содержат в себе бесконечную информацию, которая и "развертывается" во времени с помощью механизма локальной неустойчивости. В любой чисто динамической системе начальные условия полностью определяют, конечно, всю траекторию, но в неустойчивой системе почти любая траектория оказывается хаотической /6/.

Для нового механизма шума требуется все же следующая минимальная статистическая гипотеза: начальные условия движения не должны принадлежать некоторому особому множеству нулевой меры, к которому относится, в частности, и всюду плотное множество неустойчивых периодических траекторий.

Значение динамического хаоса состоит прежде всего в том, что он распространяет статистическую механику на совершенно новую область простых (с небольшим N) динамических систем. Разумеется, статистические законы в этой новой области, вообще говоря, существенно иные, чем в традиционном термодинамическом пределе, которого здесь просто нет. Так, например, даже микроканоническое распределение, вообще говоря, не достигается, если хаотическая компонента занимает лишь часть энергетической поверхности.

Динамический хаос находит многочисленные приложения в различных областях классической механики и других наук. Уже прошло то время, когда это явление было экзотикой и вызывало недоумение. Однако при попытке рассматривать его как некоторый фундаментальный закон физики возникает "небольшая" трудность - классической механики на самом деле нет, это - лишь приближение, предел квантовой механики.

3. Квантовый хаос? На первый взгляд кажется, что в квантовой механике хаос неизбежен вследствие вероятностной интерпретации основной квантовой величины - вектора состояния ψ. Однако этот хаос проявляется лишь в особом процессе - измерении, который в некотором смысле является "чужеродным" для квантовой механики, поскольку он связан с грубым "вторжением" в нее классического прибора, наблюдателя и т.п.

Возможен ли хаос в собственно квантовой динамике, т.е. в процессе эволюции вектора состояния $\psi(t)$? Оказывается, что нет, поскольку спектр энергий и частот финитной квантовой системы всегда дискретный. Это было ясно уже Крылову /8/ и связано в конечном счете с фундаментальным свойством дискретности фазового пространства (см. /9,10/). С другой стороны, не менее фундаментальный принцип соответствия требует перехода к классическому хаосу. Этот кажущийся парадокс обсуждался и был разрешен в /9/ на основе введения характерных временных масштабов квантовой эволюции. Наиболее важный из них - диффузионный $t_d \sim \hbar\eta$, где η - плотность уровней энергии (или квазиэнергии).

Как показывает детальное численное моделирование /9,11,12/, для $t \lesssim t_d$ в квантовой системе также происходит релаксация, близкая к классической при дополнительном условии /13/ $V\eta \gtrsim 1$, где V - матричный элемент возмущения. Это неравенство означает сильное смешивание невозмущенных состояний. В обратном предельном случае ($V\eta \ll 1$) невозмущенные состояния сохраняются независимо от поведения системы в классическом пределе. При $t \gg t_d$ релаксация полностью прекращается, переходя в стационарные колебания, происходит квантовая локализация хаоса.

Физический смысл диффузионного масштаба t_d прямо связан с соотношением неопределенности между энергией и временем, поскольку дискретность спектра проявляется лишь на временах $t \gg \hbar/\Delta E = \hbar\eta \sim t_d$. Если движение в классическом пределе имеет непрерывный спектр (классический хаос), то $\eta \to \infty$ и t_d неограниченно возрастает.

Но подобное соотношение неопределенности (между частотой и временем) существует и в классической механике, причем средняя плотность частот τ, очевидно, также определяет некоторый характерный временной масштаб эволюции при конечном N. Напрашивается аналогия /10/ между термодинамическим пределом в классической модели (N, $\tau \to \infty$) и классическим пределом в квантовой системе (η ,

$t_d \to \infty$). Наиболее существенное отличие связано с тем, что предельный непрерывный спектр в квантовой системе зависит не только от числа ее степеней свободы N (которое, как и в классическом динамическом хаосе может быть небольшим), но и от большого числа частот $N_\omega \propto q$, определяющих квантовую динамику при любом N . В традиционной статистической механике (квантовой) учитывается только рост $N_\omega \sim N$ за счет N . Однако при условии хаоса в классическом пределе $N_\omega \to \infty$ независимо от N . В этом и заключается основное значение классического динамического хаоса в проблеме квантового хаоса. Отметим, что наглядно можно трактовать возникновение хаоса в классической системе как некоторый предельный переход $N_\omega \to \infty$ (из-за расходимости рядов теории возмущений) при конечном N .

Для любого конечного N_ω , т.е. сколь угодно далеко в квазиклассической области (но не в классическом пределе!), квантовый хаос есть не более чем имитация настоящего динамического хаоса. Поэтому иногда говорят о квантовом псевдохаосе, или о переходном (вре́менном) хаосе /10/.

4. Хаотические стационарные состояния. Развивая аналогию с классической моделью (1), обратим внимание, что величины H_{mn} можно рассматривать и как матричные элементы оператора Гамильтона некоторой квантовой системы с дискретным спектром. Пожалуй, самое удивительное и неожиданное в этой аналогии состоит в том, что весьма специальная классическая система (линейный осциллятор!) оказывается эквивалентной целому широкому классу квантовых систем.

Типичное поведение таких систем описывается статистической теорией случайных матриц (ТСМ) /14/. Для действительных H_{mn} обычно выбирается так называемый гауссов ортогональный ансамбль (ГОА), который инвариантен относительно любого поворота базисных векторов. Этот статистический принцип положен Дайсоном в основу его варианта ТСМ. В классической модели это соответствует условию $\varkappa = \gamma\tau \gtrsim N$ (п.1), т.е. эргодичности собственных векторов в полном базисе размерности N (см. (5)). Однако в квантовой системе это невозможно при больших N из-за неминуемого образования энергетического слоя конечной толщины, переходящего в классическом пределе в энергетическую поверхность. Таким образом, существующая ТСМ является локальной и справедлива лишь при условии $N \lesssim \varkappa$ /15/. Глобальная структура стационарных состояний проявляется только при $N \gtrsim \varkappa$. В этом случае релаксация в классической модели становится экспоненциальной, а форма энергетического слоя соответствующей квантовой системы - лоренцевой (5). Параметр $\varkappa$ определяет ширину слоя и физическую размерность собственных векторов (в отличие от произвольной размерности

N модели ТСМ). Глобальная структура особенно существенна в сложных атомах, где $\varkappa \sim 10$ (см. /15/) (в ядрах $\varkappa \sim 10^6$!).

Хаотические стационарные состояния образуются при условии хаоса в классическом пределе и смешивания невозмущенных квантовых состояний ($\varkappa \gtrsim 1$).

"Деформированные" (смешанные) ансамбли матриц вида (1) исследовались в ряде работ (см. /14/) в рамках естественного внутреннего развития ТСМ, а также как попытка учета "порядка" (ω_n^2) наряду с "хаосом" α_{mn} в сложных ядрах /16/. Однако обычно интересовались только пределом ТСМ ($\varkappa \gg N$). На мой взгляд, наибольший интерес представляет как раз промежуточный случай $1 \ll \varkappa \ll N$ (глобальная ТСМ) с квантовым аналогом микроканонического распределения (5). Дальнейшее развитие ТСМ будет сопровождаться, по-видимому, еще бо́льшей конкретизацией ансамбля матриц и, в частности, отказом от однородного ГОА для возмущения α_{mn} . Только таким путем можно ввести в статистическую ТСМ число степеней свободы квантовой системы, что весьма существенно для процесса квантовой локализации на энергетической "поверхности" (см. /15/).

Подводя итоги, можно констатировать, что новый механизм шума (динамический хаос), хотя и ограничен только классической механикой, позволяет тем не менее заменить термодинамический предельный переход переходом к классическому пределу и тем самым распространить традиционный механизм шума на квантовые системы с небольшим числом степеней свободы, но только в квазиклассической области.

Литература

1. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1970, т.2, с.77.
2. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука,1984.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
4. Вечеславов В.В., Чириков Б.В. Хаотическая динамика кометы Галлея. Препринт ИЯФ 86-184, Новосибирск, 1986.
5. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л.-Успехи физ.наук, 1983, т.140, с.335.
6. Alekseev V.M. and Yakobson M.V.-Phys. Reports, 1981, v.75,p.287.
7. Chirikov B.V. Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Lausanne, 1984, v.2, p.761.
8. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: АН СССР, 1950.
9. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L.-Sov. Sci. Rev. C, 1981, v.2, p.209.

10. Chirikov B.V.-Foundations of Physics, 1986, v.16, p.39.
11. Casati et al. Lecture Notes in Physics, 1979, No 93, p.334.
12. Shepelyansky D.L.-Physica D, 1983, v.8, p.208.
13. Шуряк Э.В.-Ж.эксп. и теор. физ., 1976, т.71, с.2039.
14. Brody T.A. et al.-Rev. Mod. Phys., 1981, v.53, p.385.
15. Chirikov B.V.-Phys. Lett. A, 1985, v.108, p.68.
16. Zirnbauer M.R. et al.-Nucl. Phys. A, 1983, v.411, p.161.